

# THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies*  
*de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Électronique*

Par

**Marc SONGOLO MASUDI**

**Modélisation numérique rigoureuse pour la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux interfaces rugueuses. Application au Radar à Pénétration de Sol**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 10 Mars 2022  
Unité de recherche : IETR UMR 6164

## Rapporteurs avant soutenance :

Richard DUSSEAUX Professeur des universités, Université Versailles St. Quentin-en-Yvelines  
Sébastien LAMBOT Professeur, Université Catholique de Louvain, Belgique

## Composition du Jury :

Examineurs :	Gildas KUBICKE	Ingénieur / HDR, DGA MI, Bruz
	Elodie RICHALOT	Professeur des universités, Université Gustave Eiffel, Marne la Vallée
Dir. de thèse :	Christophe BOURLIER	Directeur de Recherche CNRS, Université de Nantes
Co-encadrant :	Nicolas PINEL	Enseignant-chercheur, Icam Ouest

## Invité :

Xavier DEROBERT Docteur/HDR, Université Gustave Eiffel, Bouguenais



---

A vous  
Pierre et Alice SONGOLO  
Pour votre 47<sup>ème</sup> année de mariage.



---

*Les mathématiques, c'est la précision dans l'indéterminé.*

Gaston BACHELARD



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>1 Diffraction électromagnétique par une interface rugueuse</b>	<b>25</b>
1.1 Ondes électromagnétiques . . . . .	26
1.1.1 Équations de Maxwell . . . . .	26
1.1.2 Conditions aux limites . . . . .	28
1.1.3 Équation de Helmholtz . . . . .	29
1.1.4 Onde incidente . . . . .	31
1.1.5 Propagation dans un milieu diélectrique . . . . .	32
1.2 Modélisation d'une surface rugueuse . . . . .	34
1.2.1 Distribution des hauteurs d'une surface . . . . .	34
1.2.2 Fonction d'auto-corrélation . . . . .	35
1.2.3 Génération d'une surface rugueuse . . . . .	38
1.3 Modèles de résolution du problème de diffraction . . . . .	39
1.3.1 Méthodes numériques rigoureuses . . . . .	40
1.3.2 Méthodes numériques asymptotiques . . . . .	44
1.3.3 Choix de la méthode . . . . .	45
1.4 Modélisation de la diffraction par une interface . . . . .	46
1.4.1 Description du problème . . . . .	46
1.4.2 Méthodes intégrales . . . . .	48
1.4.3 Champ diffracté et SER . . . . .	52
1.4.4 Onde de Thorsos . . . . .	53
1.4.5 Méthode des Moments . . . . .	55
1.4.6 Conditions aux limites de Dirichlet . . . . .	57
1.4.7 Conditions aux limites de Neumann . . . . .	59
1.4.8 Milieu inférieur diélectrique . . . . .	61
1.5 Conclusion . . . . .	64

<b>2</b>	<b>Diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces</b>	<b>65</b>
2.1	Géométrie du problème . . . . .	66
2.2	Équations intégrales . . . . .	68
2.3	Méthode des Moments . . . . .	72
2.3.1	Discrétisation du modèle intégral . . . . .	72
2.3.2	Matrice impédance . . . . .	74
2.3.3	Champs diffractés dans chaque milieu . . . . .	77
2.3.4	Cas parfaitement conducteurs . . . . .	78
2.3.5	Validations numériques du modèle intégral . . . . .	79
2.4	Méthodes de résolution GPILE . . . . .	85
2.4.1	Méthodes rapides . . . . .	85
2.4.2	Méthode PILE . . . . .	88
2.4.3	Méthode GPILE : Première approche . . . . .	91
2.4.4	Méthode GPILE : Deuxième approche . . . . .	93
2.5	Simulations Numériques . . . . .	99
2.5.1	Convergence de GPILE : Impact des ordres P et Q . . . . .	100
2.5.2	Variation de quelques paramètres géométriques et physiques . . . . .	103
2.6	Cas de deux objets enfouis sous une surface . . . . .	106
2.7	Conclusion . . . . .	109
<b>3</b>	<b>Application au GPR</b>	<b>111</b>
3.1	Réponses fréquentielle et temporelle . . . . .	112
3.1.1	Impulsion de Ricker . . . . .	112
3.1.2	Réponses fréquentielles . . . . .	114
3.1.3	Temps des échos . . . . .	116
3.1.4	Analyse du signal . . . . .	117
3.2	Variations de paramètres de l'objet . . . . .	122
3.3	Bilan des résultats . . . . .	126
3.3.1	Convergence de la méthode GPILE . . . . .	126
3.3.2	Dépendance aux paramètres . . . . .	126
3.3.3	Temps de retard des échos . . . . .	127
3.3.4	Interférences . . . . .	127
3.3.5	Amplitude des échos . . . . .	128
3.3.6	Forme du signal . . . . .	128



3.4	GPR et fissures incrustées . . . . .	128
3.5	Validation de la méthode GPILE par la méthode de l'Optique Physique pour la géométrie des fissures . . . . .	130
3.5.1	Formulation de la méthode OP pour une interface . . . . .	131
3.5.2	Extension au cas des milieux multicouches . . . . .	132
3.6	Modèle de signal pour les fissures horizontales . . . . .	138
3.7	Modèle de signal pour les fissures verticales . . . . .	141
3.8	Conclusion . . . . .	141
<b>Conclusion</b>		<b>145</b>
<b>A Résolutions du système <math>\bar{Z}X = b</math> par la méthode de substitution</b>		<b>149</b>
A.1	Méthode PILE . . . . .	149
A.2	Méthode EPILE . . . . .	150
A.3	Méthode GPILE . . . . .	151
<b>B Approximation de Kirchhoff</b>		<b>155</b>
B.1	Approximation de Kirchhoff pour une interface . . . . .	155
B.1.1	Équations Intégrales . . . . .	155
B.1.2	Équations de Kirchhoff-Helmholtz . . . . .	157
B.2	Approximation de Kirchhoff pour un objet enfoui entre deux interfaces . .	160
B.2.1	Pour $P = 0$ . . . . .	161
B.2.2	Pour $P = 1, Q = 0$ . . . . .	161
B.2.3	Pour $P = Q = 1$ . . . . .	163
<b>Bibliography</b>		<b>165</b>

# TABLE DES FIGURES

---

1.1	Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface séparant deux milieux LHI semi-infinis. . . . .	29
1.2	Une onde incidente sur une interface rugueuse en polarisation Transverse Électrique. . . . .	31
1.3	Une onde incidente sur une interface rugueuse en polarisation Transverse Magnétique. . . . .	32
1.4	Ondes diffractées en réflexion et en transmission par une interface plane infinie. .	33
1.5	Fonction d'auto-corrélation des hauteurs d'une surface rugueuse. . . . .	36
1.6	Modèles et méthodes de résolution du problème de diffraction par des surfaces rugueuses. . . . .	41
1.7	Diffraction électromagnétique par une interface 1-D. . . . .	47
1.8	Onde de Thorsos. Le module du champ incident en décibel ( $10 \log  \psi_{\text{inc}} $ ) par rapport à l'abscisse d'une surface de longueur $L = 3000$ mm, à la fréquence de 2 GHz, en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), et dont le paramètre d'atténuation vaut $g = L/6$ . Le nombre des nœuds par longueur d'onde dans le vide est $N_{\lambda_0} = 10$ . .	54
1.9	Polarisation TE. Une surface rugueuse parfaitement conductrice, de longueur $L = 3000$ mm, pour une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation gaussienne. L'écart-type des hauteurs est $\sigma_h = 1$ mm et la longueur de corrélation $L_{\text{ch}} = 15$ mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), à la fréquence $f = 2$ GHz, et dont le paramètre d'atténuation est $g = L/6$ . (a) Le module $ \partial\psi_0/\partial n $ et la phase $\arg(\partial\psi_0/\partial n)$ . (b) La Surface Équivalente Radar Normalisée en dBm par rapport à un angle d'observation $\theta_{\text{sca}}$ en degré. . . . .	59
1.10	Polarisation TM. Les paramètres de la surface et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 1.9. (a) Le module $ \psi_0 $ et la phase $\arg(\psi_0)$ . (b) La Surface Équivalente Radar Normalisée en dBm par rapport à un angle d'observation $\theta_{\text{sca}}$ en degré. . . . .	60

1.11	Polarisation TE. Les paramètres de la surface et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 1.9. (a) Le module $ \psi_0 $ et la phase $\arg(\psi_0)$ . (b) Le module $ \partial\psi_0/\partial n $ et la phase $\arg(\partial\psi_0/\partial n)$ . (c) La Surface Équivalente Radar en dBm par rapport à un angle d'observation $\theta_{\text{sca}}$ en degré. (d) Le champ diffracté en champ proche en dB par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. . . . .	62
1.12	Polarisation TM. Les paramètres de la surface et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 1.9. (a) Le module $ \psi_0 $ et la phase $\arg(\psi_0)$ . (b) Le module $ \partial\psi_0/\partial n $ et la phase $\arg(\partial\psi_0/\partial n)$ . (c) La Surface Équivalente Radar en dBm par rapport à un angle d'observation $\theta_{\text{sca}}$ en degré. (d) Le champ diffracté en champ proche en dB par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. . . . .	63
2.1	Diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses 1-D. . . . .	67
2.2	Hauteurs des surfaces par rapport à l'abscisse pour une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation gaussienne. Les écarts-types des hauteurs sont $\sigma_{h,1} = 1$ mm et $\sigma_{h,3} = 2.5$ mm. Les longueurs de corrélation sont $L_{\text{ch},1} = 15$ mm et $L_{\text{ch},3} = 30$ mm. Le centre du cylindre elliptique est $C = (0, -0.5H)$ , et $a = 100$ mm et $b = 10$ mm. Le nombre de points par longueur d'onde dans le vide est $N_{\lambda_0} = 10$ . . . . .	79
2.3	Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10}  \psi_{\text{sca}} $ ) et phase par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ), et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), à la fréquence $f = 2$ GHz, et dont le paramètre d'atténuation est $g = L/6$ . Le centre du cylindre est $C = (0, -0.5H)$ , et $a = 100$ mm et $b = 10$ mm. (a)-(b) Surfaces rugueuses, avec les paramètres de la figure 2.2. (c)-(d) Surfaces planes. . . . .	80

2.4	Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10}  \psi_{\text{sca}} $ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Le centre du cylindre est $C = (0, -0.5H)$ , et $a = 100$ mm et $b = 10$ mm. (a) L'objet a la même permittivité que le milieu intermédiaire. (b) La permittivité du milieu intermédiaire est égale à celle du milieu inférieur. (c) L'objet est un conducteur parfait. (d) La surface inférieure est un conducteur parfait. . . . .	82
2.5	Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10}  \psi_{\text{sca}} $ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. (a) Grand cylindre de centre $C = (0, -0.5H)$ , avec $a = 1000$ mm et $b = 10$ mm. (b) Petit cylindre de centre $C = (0, -0.5H)$ , avec $a = b = 10$ mm. . . . .	83
2.6	Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10}  \psi_{\text{sca}} $ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2, excepté l'épaisseur entre les deux surfaces $H = 240$ mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les dimensions du cylindre elliptique sont $a = 100$ mm et $b = 10$ mm. Le centre du cylindre varie. (a) $C = (0, -0.1H)$ . (b) $C = (0, -0.15H)$ . . . . .	83
2.7	Diffraction électromagnétique par un objet enfoui sous une surface rugueuse 1-D.	89
2.8	Interprétation physique de la première approche de la méthode GPILE. . . . .	93
2.9	Représentation graphique des contributions de l'objet et de la surface inférieure. Les contributions directe et indirecte de l'objet sont respectivement notées : $\psi_{\text{Dir-Objet}}$ et $\psi_{\text{Ind-Objet}}$ . Celles de la surface inférieure sont respectivement notées : $\psi_{\text{Dir-Surf-Inf}}$ et $\psi_{\text{Ind-Surf-Inf}}$ . . . . .	96
2.10	Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10}  \psi_{\text{sca}} $ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation $z_{\text{obs}} = 470$ mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. L'ordre $P = 0$ . . . . .	101

- 2.11 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. Les ordres  $P$  et  $Q$  varient. (a)  $P = 1$  et  $Q = 0$ . (b)  $P = Q = 1$ . (c)  $P = 2$  et  $Q = 0$ . (d)  $P = 2$  et  $Q = 1$ . . . . . 102
- 2.12 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) L'objet a la même permittivité que le milieu intermédiaire. (b) La permittivité du milieu intermédiaire est égale à celle du milieu inférieur. (c) L'objet est un conducteur parfait. (d) La surface inférieure est un conducteur parfait. . . . . 104
- 2.13 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) Surfaces planes. (b) Surfaces fortement rugueuses par rapport au scénario de base présenté dans la figure 2.2, avec de doubles des écarts-types :  $\sigma_{h,1} = 2$  mm et  $\sigma_{h,3} = 5$  mm. . . . . 105
- 2.14 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Le cylindre elliptique est centré en  $C = (0, -0.5H)$ . Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) Grand cylindre avec  $a = 1000$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Petit cylindre avec  $a = b = 10$  mm. . . . . 105

2.15 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2, excepté l'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 240$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . Les dimensions du cylindre elliptique sont  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. Le centre du cylindre varie. (a)  $C = (0, -0.1H)$ . (b)  $C = (0, -0.15H)$ . . . . . 106

2.16 Surface plane, de longueur  $L = 3000$  mm. Deux cylindres elliptiques enfouis sous la surface, centrés en  $C = (\pm 750, 30)$  mm, et de dimensions  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. . . . . 107

2.17 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) et phase par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. La surface est plane. Les deux cylindres sont centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. (a) Le module. (b) La phase. . . . . 108

2.18 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les deux cylindres elliptiques sont centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres de GPILÉ sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) La surface est plane. (b) La surface est rugueuse. . . . . 108

2.19 Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) et phase par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. La surface est plane. Les deux cylindres sont centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. (a) Le cylindre de gauche est plus grand que celui de droite avec comme dimensions  $a = 750$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Les deux cylindres ont la même permittivité que le milieu inférieur  $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = \epsilon_{r,3} = 2$ , avec  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (c) Le cylindre de gauche a la même permittivité que le milieu inférieur  $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = 2$ , avec  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (d) Le cylindre de gauche est un conducteur parfait, avec  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. . . . . 110

3.1 (a) La transformée de Fourier du signal en fonction de la fréquence  $f$  (en GHz).  
 (b) Signal en fonction du temps  $t$  (en ns). . . . . 113

3.2 Hauteurs des surfaces rugueuses par rapport à l'abscisse pour une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation gaussienne. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 1$  mm et  $\sigma_{h,3} = 2.5$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. L'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 240$  mm. Le centre du cylindre elliptique est  $C = (0, -0.375H)$ , de demi-grand axe  $a = 100$  mm et demi-petit axe  $b = 10$  mm. . . 114

3.3 Réponses fréquentielles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. La fonction de densité de probabilité des hauteurs est gaussienne et la fonction d'auto-corrélation est gaussienne. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 1$  mm et  $\sigma_{h,3} = 2.5$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.375H)$ , de demi-grand axe  $a = 100$  mm et demi-petit axe  $b = 10$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{inc} = 0^\circ$ ), à la fréquence centrale  $f_c = 2$  GHz, et dont le paramètre d'atténuation est  $g = L/6$ . (a) Signal d'entrée et signal de sortie. (b) Premier écho ( $P = 0$ ). (c) Deux premiers échos ( $P = 1, Q = 1$ ). (d) Trois premiers échos ( $P = 2, Q = 1$ ). . . . . 115

3.4 Réponses temporelles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.3. (a) Signal d'entrée et signal de sortie. (b) Premier écho ( $P = 0$ ). (c) Deuxième écho ( $P = 1, Q = 1$ ). (d) Troisième écho ( $P = 2, Q = 1$ ). . . . . 119

3.5 Réponses temporelles du module du champ diffracté : contributions directe et indirecte. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces, de l'objet et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.4. (a) Les contributions aux ordres  $p = 1, q = 0$ . (b) Les contributions aux ordres  $p = 1, q = 1$ . . . . . 120

3.6 Réponses temporelles du module du champ diffracté pour GPILE. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces, de l'objet et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.3. . . . . 121

3.7 Réponses temporelles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces sont les mêmes que dans la figure 3.3. Le cylindre est centré en  $C = (0, -0.375H)$ . (a) Un cylindre de dimensions  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Un cylindre plus petit, de dimensions  $a = b = 10$  mm. (c) Même paramètres géométriques que (a), mais avec un cylindre de même permittivité que le milieu intermédiaire  $\epsilon_{r,2} = \epsilon_{r,1} = 2$ . (d) Même paramètres géométriques que (a), mais avec un cylindre conducteur parfait. . . . . 123

3.8 Réponses temporelles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.3. Les ordonnées des profondeurs varient en fonction de l'épaisseur  $H$  entre ces interfaces. (a)  $-0.1H$ . (b)  $-0.15H$ . (c)  $-0.875H$ . (d)  $-0.925H$ . . . . . 125

3.9 Optique physique pour une interface rugueuse 1-D. . . . . 132

3.10 Représentation des champs diffractés par un milieu multicouche. . . . . 133

3.11 Les deux surfaces sont planes et de longueur  $L = 1000$  mm. L'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 30$  mm. L'objet est rectangulaire, de même envergure que les deux surfaces, d'épaisseur  $e = 3$  mm, et sa base est située à 3 mm au-dessus de la surface inférieure. . . . . 135

3.12 Module des courants surfaciques par la méthode de l'optique physique. L'onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), à la fréquence  $f = 2$  GHz, et dont le paramètre d'atténuation est  $g = L/6$ . Les ordres de GPILÉ sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . Les deux surfaces sont planes de longueur  $L = 1000$  mm. L'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 30$  mm. L'objet est rectangulaire, de même envergure que les deux surfaces, d'épaisseur  $e = 3$  mm, et situé à 3 mm au dessus de la surface inférieure. La permittivité relative de l'objet vaut  $\epsilon_{r,2} = 2$ . Le nombre de points  $N_{\lambda_0}$  par longueur d'onde dans le vide varie. (a)  $N_{\lambda_0} = 10$ . (b)  $N_{\lambda_0} = 20$ . (c)  $N_{\lambda_0} = 30$ . (d)  $N_{\lambda_0} = 50$ . . . . . 137



3.13 Les deux surfaces sont rugueuses et de longueur  $L = 1000$  mm. La fonction de densité de probabilité des hauteurs est gaussienne et la fonction d'auto-corrélation est exponentielle. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 0.6$  mm et  $\sigma_{h,3} = 0.8$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. L'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 30$  mm. La fissure est de longueur  $L_H = 500$  mm, d'épaisseur  $e = 5$  mm, et située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d'onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ . . . . . 139

3.14 Réponses temporelles du champ diffracté par une fissure horizontale. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces sont les mêmes que dans la figure 3.13. La fissure est de longueur  $L_H = 500$  mm, d'épaisseur  $e = 5$  mm et située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d'onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ . Les ordres de la méthode GPILE sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . La permittivité relative de la fissure vaut  $\epsilon_{r,2} = 2$ . . . . . 139

3.15 Les paramètres des surfaces sont les mêmes que dans la figure 3.13. La fissure est de largeur  $L_V = 5$  mm, de hauteur  $H_V = 20$  mm, et située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d'onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ . . . . . 142

3.16 Réponses temporelles du module du champ diffracté par une fissure verticale. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces et de l'onde sont les mêmes que dans la figure 3.14. La fissure a une largeur  $L_V = 5$  mm, une hauteur  $H_V = 20$  mm, et est située à 5 mm au dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d'onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ . Les ordres de la méthode GPILE sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . La permittivité relative de la fissure vaut  $\epsilon_{r,2} = 2$ . . . . . 142

B.1 Diffraction électromagnétique par une interface rugueuse 1-D. . . . . 156

B.2 Diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses 1-D. . . . . 161



# LISTE DES ACRONYMES

---

**AK** Approximation de Kirchhoff  
**BMIA/CAG** Banded-Matrix-Iterative-Approch/CAnonical Grid  
**DT** Destructive Test  
**EBCM** Extended Boundary Condition Method  
**ERR** Erreur Relative Résiduelle  
**IE** Integral Equation  
**EPILE** Extended Propagation-Inside-Layer Expansion  
**FB** Forward-Backward  
**FB-SA** Forward-Backward with Spectral Acceleration  
**FDTD** Finite Difference Time Domain  
**FEM** Finite Element Method  
**FFT** Fast Fourier Transform  
**GPILE** Generalized Propagation-Inside-Layer Expansion  
**GPR** Ground Penetrating Radar  
**LHI** Linéaire Homogène Isotrope  
**LU** Low-Up  
**MdM** Méthode des Moments  
**MLFMM** Multi-Level Fast Multipole Method  
**MOMI** Method of Ordered Multiple Interactions  
**NDT** Non Destructive Testing  
**NSFD** Nonstandard Finite Difference  
**OG** Optique Géométrique  
**OP** Optique Physique  
**OPP** Onde Plane Progressive  
**OPPM** Onde Plane Progressive Monochromatique  
**PC** Parfaitement Conducteur  
**PILE** Propagation-Inside-Layer Expansion  
**SDFMM** Steepest Descent Fast Multipode Method  
**SER** Surface Equivalente Radar

## TABLE DES FIGURES

---

- SI** Système International
- SPM** Small Perturbation Method
- SSA** Small Slope Approximation
- TE** Transverse Électrique
- TFD** Transformation de Fourier Discrète
- TM** Transverse Magnétique
- TGD** Théorie Géométrique de la Diffraction
- TUD** Théorie Uniforme de la Diffraction
- UTAS** Ultra-Thin Asphalt Surfacing

# INTRODUCTION

---

L'étude de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui sous une surface rugueuse intéresse les scientifiques depuis plusieurs décennies. Les applications de cette étude sont nombreuses, allant de la détection de mines anti-personnelles à tout type d'objet enfoui. Dans l'étude de la diffraction par des interfaces rugueuses, l'inconnue à calculer peut être le champ diffracté, connaissant le champ incident et les paramètres statistiques des interfaces ainsi que les paramètres physiques des milieux. On parle alors d'un problème *direct*. A l'opposé, le problème est dit *inverse* lorsque, connaissant le champ incident et le champ diffracté, il est question de reconstituer les interfaces et les caractéristiques des milieux. Cette thèse est dévolue à la résolution du problème direct de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. Une application est dédiée au domaine du génie civil, notamment, la surveillance des routes.

En effet, la thématique de cette thèse tire son origine dans le projet *Amélioration de la Connaissance de milieux complexes composés de fissures et Inversion Multi Paramètres* (ACIMP), financé par l'Agence Nationale de la Recherche (Projet ANR-18-CE22-0020). Ce projet a pour objectif, entre autres, de fournir de nouvelles modélisations électromagnétiques adaptées à des milieux multicouches, avec présence des fissures internes. De tels modèles permettraient alors d'améliorer la compréhension des mécanismes de diffusion dans un milieu complexe avec défauts. Dans cette optique, la tâche principale de cette thèse est de fournir un modèle de signal qui permettrait de détecter, localiser et caractériser les fissures sous la base d'une route.

La base d'une route est une partie essentielle, car elle contribue directement à soutenir la chaussée et à transmettre ses charges à la terre. Le phénomène des fissures cachées est l'une des défaillances connues de la base d'une route, et peut entraîner l'écrasement de la base, le tassement de la base et la fissuration de la surface de la route [1]. Ces dommages sont toujours irréversibles et le coût des réparations appropriées est très élevé. Plus grave encore, les fissures ont des conséquences néfastes telles que des risques importants pour les conducteurs.

Diverses méthodes de surveillance des chaussées ont été étudiées dans [2, 3]. Ces méthodes peuvent être classées en tests destructifs et non destructifs. Lors de tests destruc-

tifs, une petite section de la chaussée est forée, appelée *carottage*, et testée pour surveiller ponctuellement son état. La mise en oeuvre des tests destructifs est coûteuse et n'est pas adaptée à des défaillances cachées comme la fissuration ascendante [4]. Par contre, les tests non destructifs (NDT) n'endommagent pas la chaussée et garantissent l'intégrité structurelle [4, 5, 6]. En conséquence, c'est la technique de surveillance la plus utilisée [7]. La localisation précise des fissures cachées par un test non destructif est d'une grande importance pour les décisions d'ingénierie liées aux programmes d'entretien et de réhabilitation des routes [1]. Cela a même créé un nouveau concept pour la surveillance des routes, *la maintenance préventive* [8].

Par conséquent, de nouveaux tests non destructifs tels que le Radar à Pénétration de Sol (GPR : Ground Penetration Radar) sont devenus un outil puissant de détection de fissures dissimulées sous les routes [9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 15, 16, 17, 18, 19]. Les avantages du GPR sont nombreux : son taux d'acquisition de données élevé [20], sa sensibilité aux variations de permittivité [21], de teneur en eau [22, 23] et de porosité des matériaux [24], etc. C'est la plus haute résolution de toutes les méthodes géophysiques utilisées pour le test non destructif [25]. En particulier, le GPR peut détecter des caractéristiques structurelles subtiles (y compris les joints et les correctifs de réparation enterrés), cartographier en détail l'emplacement et la profondeur des barres des armatures en acier [26]. Le GPR a été aussi utilisé dans de nombreuses applications par delà le domaine de la surveillance des routes [27, 28, 29].

De nombreux chercheurs ont développé des algorithmes ou des logiciels de simulation pour le GPR [30, 31]. D'autres ont utilisé ces algorithmes en vue de vérifier les performances de mesure [32, 33]. D'autres encore collectent des données à partir des résultats de simulation pour étudier les algorithmes de traitement du signal ou de reconnaissance des formes [34, 35]. Il apparaît clairement que la modélisation numérique peut être un outil pertinent pour tester et comparer différents algorithmes dans un large éventail d'environnements [28].

La méthode numérique la plus utilisée est la méthode des Différences Finies par Décomposition de Domaine (FDTD), introduite par Yee [36]. C'est la méthode adoptée par le logiciel gprMax pour la modélisation numérique du GPR [20, 37, 38, 39]. La méthode FDTD est une approximation numérique directe des équations de Maxwell, où les dérivées temporelles et spatiales sont approchées par les différences finies centrées. De plus, la méthode FDTD est régie par sa condition de stabilité, qui stipule qu'un pas de temps maximal autorisé est limité par une taille de cellule minimale dans le domaine de calcul.

Cela signifie que l'utilisation d'un petit pas spatial entraînerait un petit pas de temps, ce qui, à son tour, entraînerait de longs temps de calcul, augmentant également le coût de calcul [40]. Ainsi, la méthode FDTD est limitée à des géométries simples et ne peut pas représenter efficacement des géométries complexes comme les objets et les surfaces rugueuses. Un autre problème, lié à la nature du schéma de Yee, est la dispersion numérique.

L'objectif de cette thèse étant de modéliser la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, avec application à la détection des fissures enfouies sous la base d'une route, il convient de sélectionner un modèle dont la résolution numérique est adaptée à des géométries complexes. Pour cette raison et par le souci de réaliser des simulations numériques fiables, nous opterons pour la méthode intégrale de frontière où la discrétisation passe par la méthode des moments. En effet, la méthode des moments maille les limites (ici les interfaces), tandis que la FDTD maille l'espace. La méthode des moments permet alors de suivre le profil des surfaces sans avoir à affiner le maillage, ce qui réduit considérablement la complexité numérique. Toutefois, la méthode des moments nécessite de réaliser des simulations sur plusieurs fréquences pour une étude temporelle. A ceci s'ajoute qu'elle est mieux adaptée à des milieux homogènes.

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres. Ainsi, nous étudierons d'abord, dans un premier chapitre, les généralités sur le problème de la diffraction électromagnétique par une surface rugueuse. Pour ce faire, nous aborderons quelques notions sur les ondes électromagnétiques, en mettant l'accent sur les équations de Maxwell et les équations de propagation qui en découlent. Puis, nous présenterons quelques éléments sur la modélisation des surfaces rugueuses aléatoires, notamment les outils statistiques nécessaires à générer des surfaces réalistes. Nous aurons ainsi mis en place les bases nécessaires à l'élaboration de la résolution pour le problème de diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses.

Puis, au deuxième chapitre, nous en viendrons à la formulation du modèle intégral du problème de diffraction par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. Ceci nous conduira, en premier lieu, à développer un système de six équations intégral-différentielles (deux par interface) dans le domaine fréquentiel, et en second lieu, à discrétiser le modèle intégral par la méthode des moments. Afin de pouvoir effectivement réaliser des simulations numériques qui permettent de mettre en évidence la contribution de l'objet, nous présenterons un nouvel algorithme pour la résolution du système obtenu par la méthode des moments, sur base de la méthode PILE [41]. D'autres méthodes présentées dans l'an-

nexe A permettent de retrouver ces résultats. Nous serons alors en mesure de calculer les échos successifs qui composent le champ diffracté. Notons encore qu'il sera intéressant de tester le comportement du modèle face à la variation des paramètres du système, afin de montrer que les simulations ont un sens physique réel. Ceci permettra de mettre au clair le gain lié à la modélisation intégrale de la diffraction par des surfaces rugueuses, ainsi que la discrétisation du modèle intégral par la méthode des moments.

Enfin, nous présenterons au troisième chapitre une analyse détaillée des résultats obtenus sur le champ diffracté par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses aléatoires. On commencera par un exposé sur les réponses fréquentielles et temporelles par un objet cylindrique enfoui entre deux surfaces rugueuses. Tout l'effort sera d'isoler les premiers échos, en montrant notamment que les temps calculés pour ces échos sont conformes aux temps observés. De même, l'analyse des amplitudes des différents échos permettra d'en dégager une interprétation du signal qui corrobore la réalité physique. De cette façon, il suffira par la suite d'adapter les propriétés physiques et la forme géométrique de l'objet à celles d'une fissure enfouie sous la base d'une route pour se conformer à l'application à laquelle est dédiée cette thèse.



# DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR UNE INTERFACE RUGUEUSE

---

## Introduction

La diffraction d'ondes électromagnétiques par une interface rugueuse a suscité beaucoup d'intérêt au sein de la communauté des physiciens. Plusieurs travaux consacrés à cette étude ont contribué à l'élaboration de différentes méthodes de résolution. D'abord analytiques, ensuite numériques grâce au développement de l'informatique, ces méthodes ont considérablement progressé au fil des décennies. L'objet central de cette étude demeure la résolution des équations de Maxwell. Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème direct, i.e. le calcul du champ diffracté par une interface, connaissant l'onde incidente et les paramètres statistiques de l'interface. Rappelons d'ores et déjà que le champ diffracté par une surface dépend des paramètres physiques de l'onde, des milieux de propagation et de la géométrie de l'interface. Par exemple, les réponses électromagnétiques d'une surface plane et une surface rugueuse ne sont pas identiques. De même, une surface parfaitement conductrice n'induirait pas la même réponse qu'une surface parfaitement diélectrique.

Dans ce chapitre, nous présentons des généralités sur le problème de diffraction électromagnétique par une interface rugueuse. Nous visons essentiellement les ingrédients qui composent ce problème, en l'occurrence, les ondes électromagnétiques et les surfaces rugueuses, et en particulier la modélisation numérique du problème de diffraction. Ainsi, nous présentons d'abord les équations de Maxwell, desquelles découlent l'équation de Helmholtz, dont une solution particulière est l'onde plane progressive. Après un bref exposé sur la notion d'onde incidente et sa polarisation, nous présentons quelques notions élémentaires sur la propagation dans un milieu diélectrique. Ensuite, nous introduisons la modélisation géométrique d'une surface rugueuse, en mettant l'accent sur les outils statistiques qui permettent de générer des surfaces rugueuses aléatoires réalistes. Enfin,

nous présentons la modélisation rigoureuse de la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses à l'aide des méthodes intégrales de frontière, puis la discrétisation de ces équations par la méthode des moments. De cette façon, nous aurons mis en place les bases nécessaires à l'étude de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses.

## 1.1 Ondes électromagnétiques

### 1.1.1 Équations de Maxwell

Le développement de la physique au XIX<sup>ème</sup> siècle avait érigé deux édifices scientifiques distincts : l'électricité d'une part (par Coulomb, Poisson, Gauss, etc.) et le magnétisme d'autre part (par Laplace, Savart, etc.). Par la suite, ces deux théories furent présentées comme des manifestations particulières d'une même réalité physique. Ainsi, à l'instar de Newton qui avait unifié les phénomènes de la mécanique classique, le physicien écossais James Clerk Maxwell publia en 1864 un traité qui allait mathématiquement relier les champs magnétique et électrique. Il présenta dans ce traité un système de 20 équations à 20 inconnues. Il les condensa quelques années plus tard en un système de 8 équations à 8 inconnues. Ces équations furent par la suite réduites en un système de 4 équations vectorielles par Olivier Heaviside et Willard Gibbs, mettant ainsi en évidence la symétrie qui existe entre les différents champs.

Dans leur forme locale, les équations de Maxwell sont données pour un milieu diélectrique par

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \tag{1.4}$$

Le symbole  $\nabla$  est l'opérateur *nabla* défini dans le système de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques associés au repère dans lequel les équations de Maxwell sont appliquées.  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  sont les vecteurs inductions électrique et magnétique, exprimés respectivement en système SI en  $C/m^2$  et en Tesla. Les vecteurs inductions sont inclus pour rendre compte des relations entre le champ électromagnétique et l'environnement. Ils dé-

crivent ainsi l'action du champ électromagnétique sur la matière.  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  désignent les vecteurs du champ électrique et magnétique, exprimés respectivement en système SI en  $V/m$  et  $A/m$ . En fin,  $\rho$  et  $\mathbf{J}$  sont les densités de charge et de courant et s'expriment en système SI en  $C/m^3$  et  $A/m^2$ . Ces deux grandeurs agissent comme source pour le champ électromagnétique et vérifient l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.5)$$

Les équations de Maxwell permettent ainsi de déterminer les champs électrique et magnétique en tout point de l'espace, à partir de la connaissance des courants et des charges réparties dans l'espace. Pour plus de détail sur les équations de Maxwell, se reporter à la lecture de [42, 43, 44, 45, 46]. Précisons dès maintenant que dans ce manuscrit, les vecteurs sont notés en gras  $[\mathbf{v}]$  et les vecteurs unitaires en gras surmontés d'un chapeau  $[\hat{\mathbf{v}}]$ . Les matrices, quant à elles, sont notées en gras surmontées d'une barre  $[\bar{\mathbf{M}}]$ .

Dans toute la suite, nous supposons que le milieu est linéaire, homogène et isotrope (LHI). En fait, un milieu est linéaire si ses permittivité diélectrique  $\epsilon$  et perméabilité magnétique  $\mu$  ne dépendent pas de la puissance des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . Un milieu est homogène si ses caractéristiques  $\epsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas du point considéré. Ceci se traduit par le fait que les propriétés physiques sont les mêmes en tout point du milieu. Enfin, un milieu est isotrope si, en tout point donné ses caractéristiques  $\epsilon$  et  $\mu$  ainsi que sa conductivité  $\sigma$  sont des scalaires. Dans un tel milieu, les propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions.

Sous l'hypothèse d'un milieu LHI, les intensités de champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , les vecteurs inductions  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  ainsi que la densité  $\mathbf{J}$  sont reliés par les relations constitutives suivantes :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.8)$$

où  $\epsilon, \mu$  et  $\sigma$  sont, respectivement, la permittivité, la perméabilité et la conductivité du milieu. Dans le vide, on a

$$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} F/m \quad (1.9)$$

$$\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} H/m \quad (1.10)$$

et vérifient la relation

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1, \quad (1.11)$$

où  $c$  est la célérité de la lumière. Dans la suite, on aura aussi recours aux permittivité et perméabilité relatives  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$ , définies par  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  et  $\mu = \mu_0 \mu_r$ .

Pour un milieu non-dissipatif, la permittivité relative complexe  $\underline{\epsilon}_r$  est donnée en fonction de la fréquence par l'expression

$$\underline{\epsilon}_r(f) = \epsilon_r + j \frac{\sigma}{2\pi f \epsilon_0}, \quad (1.12)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\sigma$  est la conductivité du milieu et  $f$  la fréquence.

Les équations de Maxwell posent deux problèmes fondamentaux : en l'occurrence, la propagation d'une onde dans le milieu considéré et le comportement de l'onde à l'interface qui sépare deux milieux aux propriétés physiques différentes. Ceci nous amène à considérer le problème des conditions aux limites.

### 1.1.2 Conditions aux limites

Les équations de Maxwell telles que nous venons de les présenter sont théoriquement valables dans une région illimitée de l'espace. Cependant, tout milieu étant fini par nature, il est important de savoir comment l'onde se comporte à la frontière entre deux milieux aux propriétés électromagnétiques différentes.

Considérons une interface arbitraire  $S$ , séparant deux milieux semi-infinis notés respectivement  $\Omega_0$  pour le milieu supérieur et  $\Omega_1$  pour le milieu inférieur, comme le montre la figure 1.1. Soit  $\hat{\mathbf{n}}$  le vecteur unitaire orthogonal à l'interface  $S$ , et orienté selon le milieu supérieur  $\Omega_0$ . Les conditions aux limites locales sur l'interface sont

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) = 0, \quad (1.13)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0) = \rho_s, \quad (1.14)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_0) = \mathbf{0}, \quad (1.15)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_0) = \mathbf{J}_s \wedge \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.16)$$

où  $\rho_s$  et  $\mathbf{J}_s$  désignent respectivement les densités surfaciques de charge et de courant. Dans ce système, les équations impaires décrivent la continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  et de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$ . Les autres équations décrivent la discontinuité

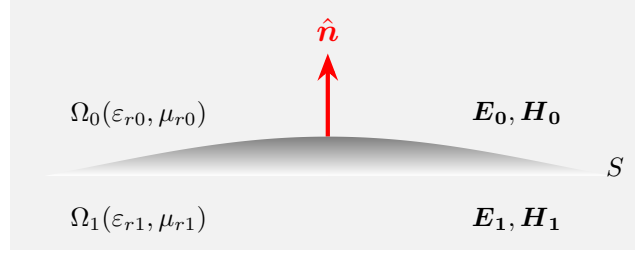


FIGURE 1.1 – Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface séparant deux milieux LHI semi-infinis.

de la composante normale de  $\mathbf{D}$  en présence des densités  $\rho_s$  et la discontinuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  à la traversée du courant.

Lorsque le milieu inférieur est un conducteur parfait, ces équations deviennent

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (1.17)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 = -\rho_s/\epsilon_0, \quad (1.18)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad (1.19)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_0 = -\mathbf{J}_s \wedge \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.20)$$

Dans ce système, les deux dernières équations sont respectivement appelées conditions aux limites de *Dirichlet* et de *Neumann*.

Lors que les deux milieux LHI sont des diélectriques parfaits, alors les conditions aux limites prennent la forme suivante

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_0) = 0, \quad (1.21)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_0) = 0, \quad (1.22)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_0) = \mathbf{0}, \quad (1.23)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_0) = \mathbf{0}. \quad (1.24)$$

### 1.1.3 Équation de Helmholtz

Les équations de propagation de champs sont dérivées à partir des équations de Maxwell (les deux dernières équations : Faraday et Ampère) en utilisant la propriété :  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , où  $\nabla^2$  est le laplacien vectoriel et  $\mathbf{A}$  un champ

vectorel de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ainsi, des équations de Maxwell on déduit

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (1.25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \wedge \mathbf{J}. \quad (1.26)$$

Si de plus, on considère un milieu diélectrique parfait (sans perte), i.e. en absence de champ et de courant ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ), alors les équations précédentes deviennent

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.27)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.28)$$

Ce sont les équations d'ondes électrique et magnétique, aussi appelées *équations de D'Alembert* ou *équations de propagation* puisqu'elles mettent en relation les dérivées secondes de l'espace et du temps.

Une solution particulière de l'équation d'onde (électrique ou magnétique) dans un milieu diélectrique parfait est l'équation d'onde progressive plane. Une telle fonction a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par une valeur unitaire  $\hat{\mathbf{u}}$ . Son expression réelle est de la forme

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \Re(\mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Phi)}) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t}), \quad (1.29)$$

avec  $\mathbf{k} = \sqrt{\epsilon\mu}\omega\hat{\mathbf{u}} = (2\pi/\lambda)\hat{\mathbf{u}}$ .

L'expression  $\Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$  désigne les parties réelles des composantes de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi$  est un terme de phase constant,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde dans le milieu,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le milieu,  $\omega$  la pulsation,  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unitaire orienté dans le sens de la propagation de l'onde plane et  $\mathbf{E}_0$  un vecteur complexe qui donne la polarisation de l'onde. Dans ce qui suit, nous utiliserons l'onde plane progressive (OPP) d'expression complexe  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  pour sa manipulation aisée. De plus, le choix du signe dans  $e^{\pm i\omega t}$  étant arbitraire, nous prendrons la convention  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ . Ainsi, dans l'application de l'expression de l'onde plane progressive monochromatique (OPPM) à l'équation de propagation, la dérivée par rapport au temps se ramène à la multiplication par le terme  $-i\omega$ . De ce fait, en absence de sources, nous obtenons l'équation de Helmholtz :

$$-(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

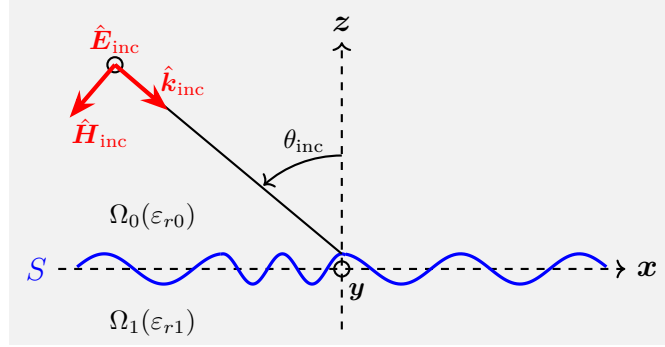


FIGURE 1.2 – Une onde incidente sur une interface rugueuse en polarisation Transverse Électrique.

Rappelons que le champ magnétique  $\mathbf{H}$  vérifie également l'équation de Helmholtz. De plus, il est précieux de remarquer que si  $\psi$  désigne une des trois composantes du champ électrique ou magnétique, alors elle vérifie l'équation de Helmholtz scalaire

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0. \quad (1.31)$$

En outre, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont orthogonaux à la direction de propagation portée par le vecteur  $\mathbf{k}$  et forment ainsi le trièdre direct  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k})$ .

#### 1.1.4 Onde incidente

Pour résoudre un problème de diffraction électromagnétique par une surface, il faut déterminer, à partir d'un champ qui illumine cette surface, le champ diffracté par la surface. Supposons une onde électromagnétique plane se propageant dans un milieu LHI non magnétique. Considérons un repère spatial défini par les coordonnées cartésiennes  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Soit une surface 2D, invariante selon l'axe  $\hat{y}$ . Il est alors commode de choisir une onde plane qui se propage dans le plan  $(\hat{x}, \hat{z})$ . Un tel plan est appelé *plan incident*. Ainsi, l'onde se propage selon la direction  $\mathbf{k}_{inc}$  et le plan incident est défini par la normale à la surface  $\hat{n}$  et le vecteur  $\mathbf{k}_{inc}$ . Observons que pour une surface plane, la normale a la même direction en tout point de la surface. Par contre, pour une surface rugueuse, la normale est une normale locale et prend des directions différentes selon les points de la surface.

Pour résoudre complètement un problème des surfaces 1D, il suffit de résoudre le problème pour deux polarisations linéaires de l'onde incidente. Les deux polarisations

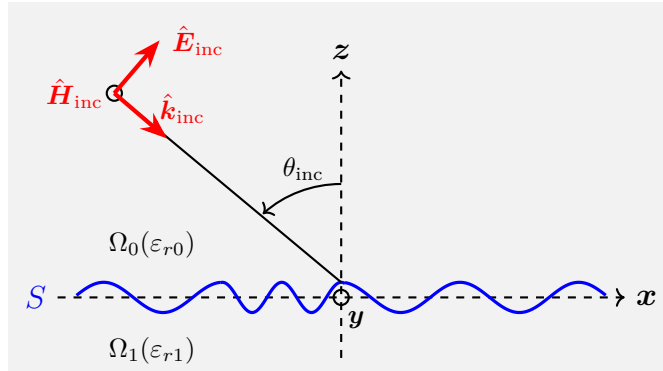


FIGURE 1.3 – Une onde incidente sur une interface rugueuse en polarisation Transverse Magnétique.

courantes sont :

- La polarisation *Horizontale* (H), celle où le champ incident  $\mathbf{E}_{inc}$  est parallèle au plan moyen  $z = 0$ . Elle est aussi appelée polarisation *Transverse Électrique* (TE).
- La polarisation *Verticale* (V), celle où le champ incident  $\mathbf{H}_{inc}$  est parallèle au plan moyen  $z = 0$ . Elle est aussi appelée polarisation *Transverse Magnétique* (TM).

Nous donnons dans les figures 1.2 et 1.3 des représentations possibles de ces deux polarisations.

### 1.1.5 Propagation dans un milieu diélectrique

Considérons maintenant une surface plane  $S$ , de longueur infinie. Cette surface délimite deux milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ , que nous considérons comme des diélectriques parfaits, i.e.  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_1$  sont des réels. Considérons une onde incidente de pulsation  $\omega$ , qui illumine la surface  $S$  dans le milieu supérieur  $\Omega_0$  selon la direction  $\hat{\mathbf{k}}_{inc}$ . Au contact avec la surface  $S$ , l'onde incidente se transforme en une onde réfléchie dans le milieu supérieur  $\Omega_0$  selon la direction  $\hat{\mathbf{k}}_{sca}$  et une onde transmise dans le milieu  $\Omega_1$  selon la direction  $\hat{\mathbf{k}}_t$ . La situation est décrite dans la figure 1.4. Dans la suite, le milieu supérieur sera nommé *milieu incident* et le milieu inférieur *milieu de transmission*. Les deux milieux étant des diélectriques parfaits, l'invariance de la phase se traduit par l'égalité des pulsations des trois ondes, et le fait que les plans d'incidence  $(\hat{\mathbf{k}}_{inc}, \hat{\mathbf{n}})$ , de réflexion  $(\hat{\mathbf{k}}_{sca}, \hat{\mathbf{n}})$  et de réfraction  $(\hat{\mathbf{k}}_t, \hat{\mathbf{n}})$  sont confondus. Nous pouvons alors énoncer les lois de Snell-Descartes :

- Pour un rayon incident, il existe un seul rayon réfléchi et, au plus un seul rayon réfracté, et les plans d'incidence, de réflexion et de réfraction sont confondus.



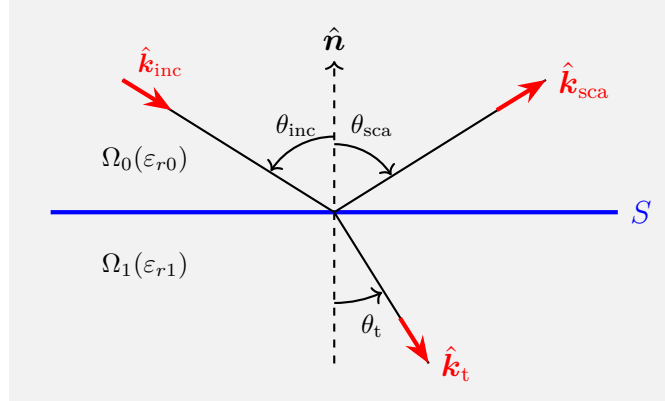


FIGURE 1.4 – Ondes diffractées en réflexion et en transmission par une interface plane infinie.

- Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux en valeur absolue, i.e.

$$\theta_{\text{sca}} = \pm\theta_{\text{inc}}, \quad (1.32)$$

et les indices de réfraction  $n_0$  et  $n_1$  de chacun des milieux ainsi que les angles incident  $\theta_{\text{inc}}$  et réfracté  $\theta_t$  sont liés par la relation

$$n_1 \sin \theta_t = n_0 \sin \theta_{\text{inc}}, \quad (1.33)$$

les angles étant définis par rapport à la normale à la surface, avec

$$\cos \theta_{\text{inc}} = -\hat{\mathbf{k}}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.34)$$

D'autre part, à partir des conditions aux limites pour les champs électrique et magnétique (1.21) sur l'interface  $S$  séparant les deux milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ , nous pouvons obtenir les coefficients de Fresnel en réflexion  $\mathcal{R}_{01}$  et en transmission  $\mathcal{T}_{01}$ , qui mettent en relation les amplitudes des ondes réfléchie et transmise par rapport à l'amplitude de l'onde incidente. Ces expressions dépendent de la polarisation et sont données par

$$\mathcal{R}_{01}^{TE} = \frac{n_0 \cos \theta_{\text{inc}} - n_1 \cos \theta_t}{n_0 \cos \theta_{\text{inc}} + n_1 \cos \theta_t} \quad (1.35)$$

$$\mathcal{T}_{01}^{TE} = \frac{2n_0 \cos \theta_{\text{inc}}}{n_0 \cos \theta_{\text{inc}} + n_1 \cos \theta_t} \quad (1.36)$$

pour la polarisation transverse électrique, et

$$\mathcal{R}_{01}^{TM} = \frac{n_0 \cos \theta_t - n_1 \cos \theta_{\text{inc}}}{n_0 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_{\text{inc}}} \quad (1.37)$$

$$\mathcal{T}_{01}^{TM} = \frac{2n_0 \cos \theta_{\text{inc}}}{n_0 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_{\text{inc}}} \quad (1.38)$$

pour la polarisation transverse magnétique, où  $\theta_{\text{inc}}$  est l'angle d'incidence local défini par le vecteur incident  $\hat{\mathbf{k}}_{\text{inc}}$  et la normale locale  $\hat{\mathbf{n}}$  selon la relation (1.34). Notons aussi que les signes des coefficients de Fresnel peuvent être différents selon les ouvrages, à cause des choix d'orientation de départ.

Nous venons de présenter quelques notions sur les ondes électromagnétiques. Ces notions constituent le premier ingrédient qui compose le problème de la diffraction par des surfaces rugueuses. Nous pouvons maintenant aborder les notions de surfaces rugueuses.

## 1.2 Modélisation d'une surface rugueuse

Dans cette section, nous présentons le second ingrédient du problème de la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses, qui n'est rien d'autre que la notion de surface rugueuse elle-même. Pour ce faire, nous présentons les outils statistiques qui permettent de générer des surfaces rugueuses aléatoires réalistes. Ce sont principalement les notions de distributions statistiques comme la fonction de densité de probabilité des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation. Il s'agira avant tout de relier un profil de surface à des valeurs statistiques telles que l'écart-type des hauteurs, la longueur de corrélation, etc. Pour plus de détail sur la modélisation d'une surface rugueuse, nous renvoyons à la lecture de [47, 46, 48].

### 1.2.1 Distribution des hauteurs d'une surface

La fonction de densité de probabilité  $p_h(\zeta)$  des hauteurs d'une surface rugueuse présente la distribution statistique des hauteurs de la surface. Cette fonction contient trois informations essentielles sur le profil de la surface, à savoir :

- La hauteur moyenne de la surface  $\zeta_0$  ;
- L'écart-type des hauteurs de la surface  $\sigma_h$  ;
- Le type de densité : gaussienne, lorentzienne, exponentielle, etc.

Dans le cadre de cette étude, nous supposons que la surface est gaussienne, i.e. elle est caractérisée par une densité de probabilité gaussienne

$$p_h(\zeta) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\zeta - \zeta_0}{\sigma_h} \right)^2 \right]. \quad (1.39)$$

Pour une densité de probabilité gaussienne, 99.73% des hauteurs de la surface sont comprises entre  $\zeta_0 - 3\sigma_h$  et  $\zeta_0 + 3\sigma_h$ . De plus, cette densité de probabilité vérifie les relations

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p_h(\zeta) d\zeta = 1, \quad (1.40)$$

$$\langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta p_h(\zeta) d\zeta = \zeta_0. \quad (1.41)$$

La première relation montre que pour une fonction de densité de probabilité  $p_h(\zeta)$  et de distribution statistique des hauteurs  $\zeta(x)$ , l'expression  $p_h(\zeta)d\zeta$  représente la probabilité pour un point de la surface d'être compris entre les hauteurs  $\zeta(x)$  et  $\zeta(x) + d\zeta$ . Dans la deuxième relation, la moyenne statistique sur les hauteurs  $\langle \zeta \rangle$  est appelée *moment statistique d'ordre un*. Si, de plus, nous considérons que la hauteur moyenne de la surface  $\zeta_0$  est nulle, alors le *moment statistique centré d'ordre deux*, appelé *variance*, sera la moyenne statistique sur les carrés des hauteurs

$$\langle \zeta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 p_h(\zeta) d\zeta = \sigma_h^2. \quad (1.42)$$

Ainsi, l'écart-type des hauteurs est la racine carrée positive de la variance :  $\sigma_h = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle}$ .

## 1.2.2 Fonction d'auto-corrélation

La seconde distribution statistique importante pour réaliser le profil d'une surface rugueuse est la fonction d'auto-corrélation. Cette fonction exprime la corrélation statistique entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la surface par rapport à la distance horizontale entre ces points  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  (voir la figure 1.5). Elle est maximale lorsque  $\mathbf{r}_d = \mathbf{0}$ , i.e.  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . La fonction d'auto-corrélation renferme deux notions essentielles, à savoir :

- Les longueurs de corrélation selon les axes de coordonnées  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$ , notées  $L_{\text{ch},x}$  et  $L_{\text{ch},y}$ . La longueur d'auto-corrélation est une valeur caractéristique de la fonction d'auto-corrélation qui détermine l'échelle horizontale de rugosité de la surface.

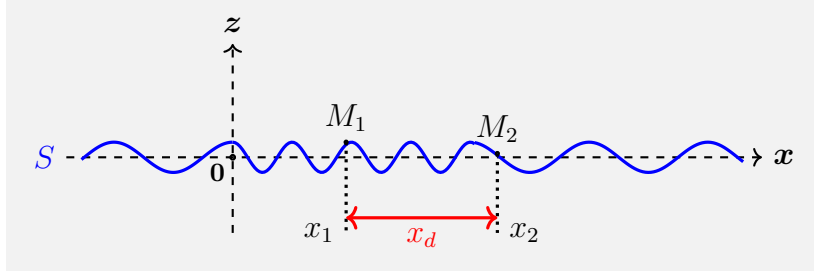


FIGURE 1.5 – Fonction d'auto-corrélation des hauteurs d'une surface rugueuse.

- Le type de fonction : gaussienne, lorentzienne, exponentielle, etc.

L'expression de la fonction d'auto-corrélation est donnée par

$$W_h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1)\zeta(\mathbf{r}_2) \rangle = \lim_{X, Y \rightarrow \infty} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{X/2} \int_{-Y/2}^{Y/2} \zeta(\mathbf{r}_1)\zeta(\mathbf{r}_2) dy dx \quad (1.43)$$

où  $X$  et  $Y$  sont respectivement les longueurs selon les axes  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$  de la surface rugueuse.

Pour une surface stationnaire i.e. dont les grandeurs statistiques sont supposées invariantes dans le temps, la fonction d'auto-corrélation est définie par

$$W_h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1)\zeta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_d) \rangle, \quad (1.44)$$

avec  $W_h(\mathbf{r}_d = \mathbf{0}) = \sigma_h^2$ . On définit aussi le coefficient d'auto-corrélation  $C_h(\mathbf{r}_d)$  comme étant égal à la fonction d'auto-corrélation normalisée, et dont l'expression pour une surface stationnaire est donnée par

$$C_h(\mathbf{r}_d) = \frac{\langle \zeta(\mathbf{r}_1)\zeta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_d) \rangle}{\sigma_h^2}. \quad (1.45)$$

Il est clair que pour  $\mathbf{r}_d = \mathbf{0}$ , le coefficient d'auto-corrélation vaut  $C_h(0) = 1$ .

Par ailleurs, au lieu d'utiliser la fonction d'auto-corrélation, on recourt aussi au *spectre des hauteurs de la surface*, également appelé *densité spectrale de puissance de la surface*, qui est la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'auto-corrélation. Pour une surface stationnaire supposée d'aire infinie, le spectre des hauteurs de la surface est donné par

$$S_h(\mathbf{k}) = \text{TF} [W_h(\mathbf{r}_d)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_h(\mathbf{r}_d) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) d\mathbf{r}_d, \quad (1.46)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur fréquence spatiale par cycle et ne doit pas être confondu avec le vecteur

d'onde. Aussi, la fonction d'auto-corrélation peut être définie à partir de la transformée de Fourier inverse du spectre des hauteurs, et on écrit :

$$W_h(\mathbf{r}_d) = \text{TF}^{-1} [S_h(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_h(\mathbf{k}) \exp(+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) d\mathbf{k}. \quad (1.47)$$

En général, on utilise trois types de fonctions d'auto-corrélation des hauteurs, à savoir, gaussienne, lorentzienne ou exponentielle. Pour une surface 1-D, ces fonctions sont définies respectivement par

$$W_h(x_d) = \sigma_h^2 \exp\left(-\frac{x_d^2}{L_c^2}\right), \quad (1.48)$$

$$W_h(x_d) = \frac{\sigma_h^2}{1 + x_d^2/L_c^2}, \quad (1.49)$$

$$W_h(x_d) = \sigma_h^2 \exp\left(-\frac{|x_d|}{L_c}\right). \quad (1.50)$$

Leurs spectres respectifs sont alors définis par

$$S_h(k) = \sqrt{\pi} \sigma_h^2 L_c \exp\left(-\frac{L_c^2 k^2}{4}\right), \quad (1.51)$$

$$S_h(k) = \pi \sigma_h^2 L_c \exp(-L_c |k|), \quad (1.52)$$

$$S_h(k) = \frac{2\sigma_h^2 L_c}{1 + L_c^2 k^2}. \quad (1.53)$$

Il est précieux de constater que le spectre d'une fonction d'auto-corrélation gaussienne est une gaussienne, tandis que le spectre d'une fonction d'auto-corrélation lorentzienne est exponentiel et celui d'une fonction d'auto-corrélation exponentielle est lorentzien.

Nous pouvons conclure que la fonction de densité de probabilité des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation des hauteurs (ou le spectre des hauteurs) définissent complètement le profil d'une surface rugueuse. D'autres paramètres peuvent également définir le profil d'une surface. Il s'agit, par exemple, de l'écart-type des pentes de la surface  $\sigma_s$ , du rayon de courbure moyen de la surface  $R_c$  et de la distance moyenne  $D_m$  entre deux pics consécutifs de la surface. Les détails sur la définition des surfaces rugueuses par ces trois paramètres sont donnés dans [46].

### 1.2.3 Génération d'une surface rugueuse

Nous venons de voir que pour générer le profil d'une surface rugueuse réaliste, il suffit de connaître la fonction de densité de probabilité des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation des hauteurs (ou son spectre). Nous allons à présent montrer comment générer un tel profil par une méthode spectrale.

Considérons une surface  $S$  de longueur  $L$ , et définie par  $z = \zeta(x)$ . Dans la suite, nous considérons que la distribution des hauteurs est gaussienne, et nous noterons le spectre des hauteurs par  $S_z$ . Pour obtenir les hauteurs de la surface, on applique un filtre  $g(i)$  à un bruit blanc gaussien  $u_b(i)$  en entrée, et dont le signal de sortie est  $\zeta(i) = \zeta_i$ . L'opérateur de filtrage étant linéaire, le signal de sortie  $\zeta_i$  est aussi une distribution gaussienne des hauteurs. Reste alors à déterminer les coefficients du filtre pour que le signal de sortie ait le bon spectre.

Pour ce faire, considérons un filtre de réponse impulsionnelle  $g(i)$ , appliquée à un signal discret  $u(i)$  en entrée, et dont le signal en sortie est  $\zeta(i)$ . La réponse impulsionnelle de cette action de filtrage est

$$\zeta(i) = g(i) * u(i), \quad (1.54)$$

où le symbole  $*$  est un produit de convolution. Soient donnés  $S_u(k)$  et  $S_z(k)$ , les spectres de signaux d'entrée et de sortie. Soit donnée  $\hat{g}(k)$  la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $g(i)$  du filtre. Alors, nous avons la relation

$$S_z(k) = |\hat{g}(k)|^2 S_u(k). \quad (1.55)$$

Et puis que tous les signaux considérés sont réels, alors l'inconnue du problème, i.e. la réponse impulsionnelle  $g(i)$  du filtre s'écrit

$$g(i) = \text{TF}^{-1} \left( \frac{\sqrt{S_z(k)}}{\sqrt{S_u(k)}} \right). \quad (1.56)$$

Pour déterminer complètement  $g(i)$ , il suffit de connaître  $S_u(k)$ , car  $S_z(k)$  est connu. Or, en choisissant un bruit blanc gaussien  $u_b(i)$  de variance 1 en entrée, nous avons un spectre constant  $S_{u_b}(k) = 1$  quelque soit  $k$ .

Ainsi, de la connaissance de la fonction d'auto-corrélation des hauteurs pour le profil à générer, on peut calculer la densité spectrale de puissance des hauteurs associée, ainsi

que les coefficients du filtre. De tout ce qui précède, on en déduit que

$$\zeta(i) = \text{TF}^{-1} \left( \sqrt{S_z(k)} \times \hat{u}_b(k) \right) (i). \quad (1.57)$$

En pratique, pour générer une surface de longueur  $L$ , on procède par la discrétisation de la surface i.e. on choisit  $N$  échantillons en abscisse  $x_n$  et en hauteur  $\zeta_n = \zeta(x_n)$ , telles que

$$x_n = -\frac{L}{2} + \left( n - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.58)$$

où  $\Delta x$  est le pas de discrétisation. La relation (1.57) s'applique alors sur les échantillons uniquement (car les échantillons représentent la surface), et on a :

$$\zeta_n = \frac{1}{L} \sum_{m=N/2}^{N/2-1} F(k_m) \exp(ik_m x_n), \quad (1.59)$$

avec pour  $m \geq 0$ ,

$$F(k_m) = \sqrt{LS_z(k_m)} \times \begin{cases} (\mathcal{N}(0, 1) + i\mathcal{N}(0, 1))/\sqrt{2}, & \text{pour } m \neq 0, N/2, \\ \mathcal{N}(0, 1), & \text{pour } m = 0, N/2, \end{cases} \quad (1.60)$$

et, pour  $m < 0$ ,

$$F(k_m) = F * (k_{-m}), \quad (1.61)$$

où  $\mathcal{N}(0, 1)$  est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, et  $k_m = 2\pi m/L$ .

Nous venons de présenter le deuxième concept nécessaire à la modélisation du problème de diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses aléatoires. Nous allons maintenant donner un panorama des méthodes les plus utilisées pour la résolution de ce problème, afin de sélectionner la méthode qui convient le mieux à notre étude.

### 1.3 Modèles de résolution du problème de diffraction

Dans la résolution du problème de diffraction électromagnétique par une surface rugueuse, deux approches cohabitent et se complètent. Il s'agit de modèles asymptotiques (ou approchés) et de modèles rigoureux (ou exacts). Ces deux types de modèles peuvent être résolus aussi bien par des méthodes analytiques que numériques, donnant ainsi quatre

familles de méthodes de résolution. La différence fondamentale entre les modèles asymptotiques et rigoureux est que les modèles asymptotiques s'appuient sur des hypothèses simplificatrices alors que les modèles rigoureux sont moins restrictifs, et trouvent ainsi un domaine de validité beaucoup plus large. Ce sont les modèles asymptotiques qui ont été développés dans les premiers travaux sur la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses. Le choix optimal d'une méthode est guidé par de nombreux facteurs comme la précision, la facilité d'implémentation ainsi que les ressources informatiques disponibles.

La figure 1.6 donne un panorama de quelques-uns des modèles les plus utilisés et des méthodes de résolution de ces modèles. Nous avons d'abord les méthodes analytiques pour les modèles asymptotiques, parmi lesquelles, l'Approximation de Kirchhoff (KA : Kirchhoff Approximation) aussi appelée quelquefois méthode d'Optique Physique (PO : Physical Optics), celle de l'Optique Géométrique (GO : Geometrical Optics), la Méthode des Petites Perturbations (SPM : Small Perturbation Method), et la Méthodes des Faibles Pentes (SSA : Small Slope Approximation). Nous verrons plus loin qu'il est possible de catégoriser ces méthodes selon qu'on est en approximation haute fréquence ou basse fréquence. Pour les méthodes analytiques des modèles rigoureux, nous pouvons citer la méthode de Mie [49], qui est toutefois limitée aux cas des formes simples comme par exemple, la sphère ou le cylindre parfaitement conducteur. On peut aussi citer la méthode de Rayleigh. Cette famille n'a pas beaucoup des méthodes à cause de la rareté des résolutions analytiques pour les géométries complexes. Ensuite, nous avons les méthodes numériques pour les modèles asymptotiques, où on retrouve encore les méthodes KA, GO et SSA. Enfin, dans la famille des méthodes numériques pour les modèles rigoureux, nous pouvons citer la Méthodes des Éléments Finis (FEM : Finite Element Method), la méthode des différences finies par décomposition de domaine (FDTD : Finite Difference Time Domain), et la Méthode des Moments (MoM : Method of Moments). Nous verrons également qu'il est possible de catégoriser ces méthodes par rapport au formalisme mathématique utilisé, ainsi que le domaine de discrétisation. Dans cette thèse, nous ne considérons que les méthodes numériques tant rigoureuses qu'asymptotiques.

### 1.3.1 Méthodes numériques rigoureuses

Les méthodes numériques pour les modèles rigoureux, dites *méthodes numériques rigoureuses*, peuvent être classées en deux familles très différentes. Dans la première famille on retrouve des méthodes différentielles où la discrétisation recourt à des éléments finis dans le domaine fréquentiel [50, 51, 52, 53] ou à des différences finies par décomposition du



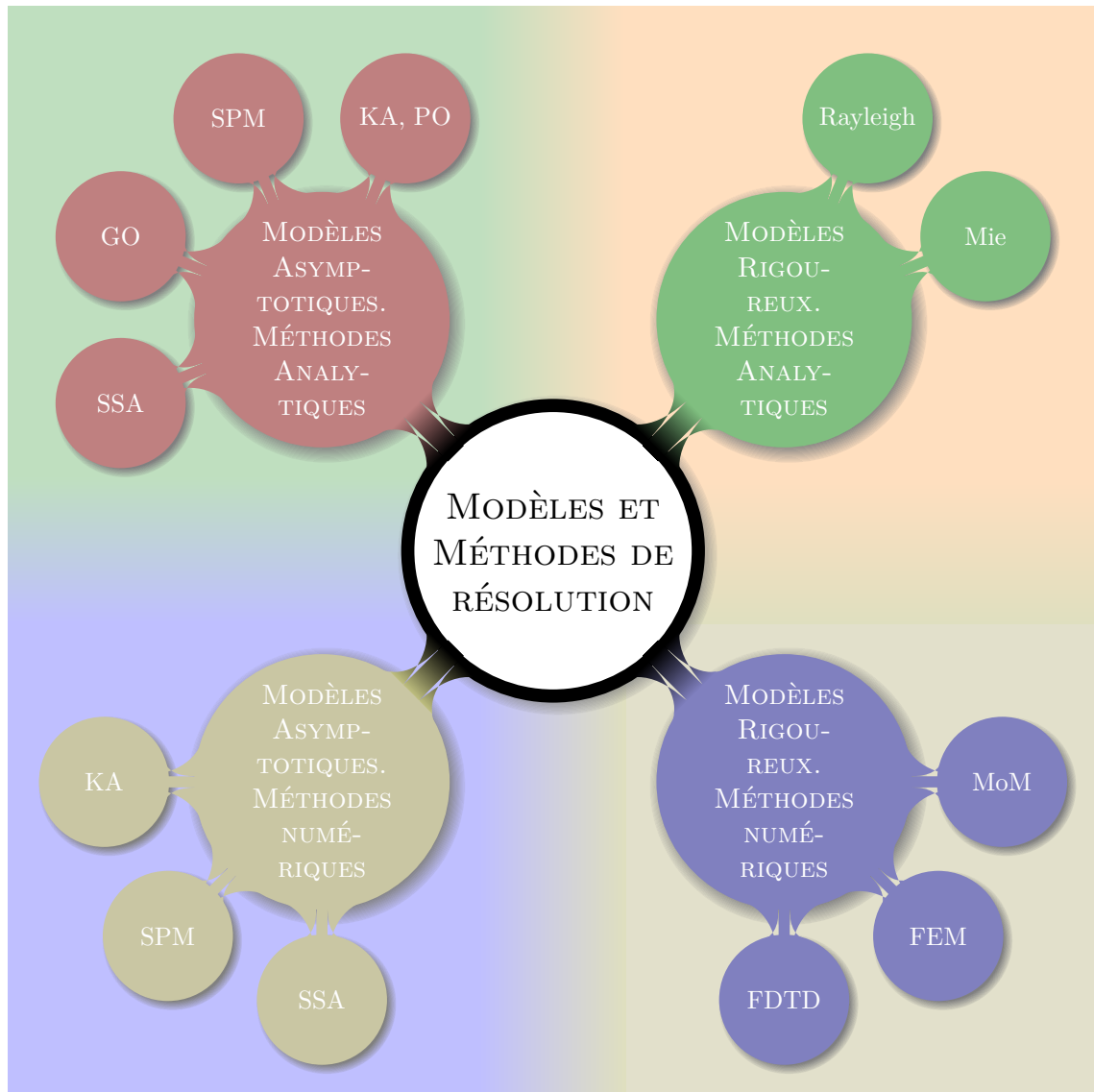


FIGURE 1.6 – Modèles et méthodes de résolution du problème de diffraction par des surfaces rugueuses.

domaine temporel [36, 54, 55, 56, 57]. On voit alors que les méthodes différentielles offrent la possibilité de discrétisation aussi bien dans le domaine temporel (FDTD) que dans le domaine fréquentiel (FEM). La seconde famille est composée des méthodes intégrales de frontière où la discrétisation passe par la Méthode des Moments (MmM) dans le domaine fréquentiel [58, 59, 47, 60, 48]. Il existe aussi des méthodes hybrides [61, 62, 63, 64]. On peut trouver dans [65] une synthèse des méthodes les plus utilisées. Nous présentons brièvement deux méthodes parmi les méthodes numériques rigoureuses les plus utilisées, à savoir la méthode FDTD et la MmM.

La méthode de FDTD reste à ce jour la méthode numérique la plus utilisée dans les simulations en électromagnétisme. Cette méthode fut introduite par Yee en 1966 [36]. Elle consiste à diviser le domaine de calcul en petites cellules qui peuvent être cubiques ou rectangulaires, sur lesquelles on détermine les inconnues, i.e. les champs électrique et magnétique. Une description suffisante des propriétés du matériau et des conditions initiales et aux limites appropriées est nécessaire pour la mise en œuvre de la méthode. La FDTD est une approximation numérique directe des équations de Maxwell, en particulier les équations de Faraday et Ampère, où les dérivées partielles temporelles et spatiales sont approchées par des opérateurs des différences finies centrées d'ordre 2. De plus, la méthode FDTD est régie par sa condition de stabilité, connue sous le nom de condition CFL d'après les initiales de Courant, Friedrich et Levy, qui stipule qu'un pas de temps maximal autorisé est limité par une taille de cellule minimale dans le domaine de calcul. Cela signifie que l'utilisation d'un petit pas spatial entraînerait un petit pas de temps, ce qui, à son tour, entraînerait de longs temps de calcul, augmentant le coût de calcul [40].

Un des avantages de la méthode FDTD est qu'elle fonctionne dans un calcul en boucle, donc elle est facilement parallélisable et peut être adaptée à l'échelle du problème. Toutefois, cette méthode souffre de deux problèmes. D'une part, le schéma de Yee pose un problème de dispersion numérique, ce qui induit une erreur de déphasage au cours du temps. Ce problème intervient non seulement pour des études purement fréquentielles à cause d'un décalage de fréquence, mais aussi dans les simulations utilisant une onde large bande. D'autre part, le schéma de Yee est limité à des géométries simples et ne peut pas représenter efficacement la géométrie des objets ou des surfaces rugueuses, car il utilise une grille cartésienne [27]. Bien que l'augmentation des ressources informatiques permette de réaliser des simulations importantes, avec des maillages plus fins pour prendre en compte des géométries plus complexes, l'erreur de dispersion ne disparaît pas complètement car elle est liée à la nature du schéma de Yee.

Pour notre part, nous pensons que la méthode de différences finies nonstandard (NSFD : Nonstandard Finite Difference) développée par Mickens [66, 67, 68, 69] est une bonne piste pour tenter de contourner les défauts du schéma de Yee. En effet, cette méthode a relevé le défi d'augmenter l'ordre d'approximation des opérateurs de dérivation ou de différentiation, permettant ainsi de s'affranchir des problèmes de consistance et de stabilité rencontrés dans les schémas des différences finies. C'est ainsi, par exemple, que les travaux de Cole et ses co-auteurs [70, 71, 72, 73] ont contribué à l'élaboration de méthodes des différences finies non standards pour les équations de Maxwell, permettant d'obtenir des versions améliorées du schéma de Yee. Les travaux de Patidar [74, 75] retracent les développements récents des schémas de différences finies non standards et leurs applications. Pour ce qui est de la prise en charge de la rugosité de l'interface, il suffirait de développer un schéma à pas variable, dont le pas serait subordonné à la géométrie de l'interface. En effet, les schémas à pas variable ont montré leur efficacité dans la discrétisation des équations de Bloch [76, 77], avec pour finalité de coupler les équations de Maxwell-Bloch pour l'étude semi-classique de l'interaction onde-matière. A la suite de ces travaux, une récente étude [78] a montré comment augmenter le nombre de termes du développement de Taylor dans un schéma de différence finies non standards pour les systèmes différentiels, et pourrait ainsi être un point de départ pour d'autres améliorations du schéma de Yee.

La MdM est une méthode numérique de résolution des équations de Maxwell, sous la formulation intégrale équivalente, dans le domaine fréquentiel. Elle consiste à transformer les équations intégrales en un système linéaire dont les inconnues sont les courants surfaciques et leurs dérivées normales. Pour ce faire, la surface est d'abord discrétisée et représentée par un nombre fini de points appelés échantillons. Ensuite, on définit une base complète des fonctions sur la surface. Les courants surfaciques étant écrits comme une combinaison linéaire des fonctions de cette base, on projette les fonctions de la base sur une base des fonctions test, en vue de minimiser les erreurs provenant de la caractérisation de la surface et des perturbations des milieux. Enfin, le système linéaire qui en découle contient les grandeurs recherchées, i.e. les courants surfaciques, et peut être résolu par une méthode directe comme la méthode classique de décomposition LU. Le principe de Huygens permet alors de calculer le champ diffracté dans chaque milieu. Nous reviendrons sur cette méthode dans toute la suite.

Notons par ailleurs que les matrices obtenues lors de la discrétisation par la MdM sont beaucoup plus petites que celles obtenues avec la méthode FDTD, mais cependant

pleines. A ceci s'ajoute que la taille des matrices augmente avec la fréquence (pour un pas de discrétisation resté le même par rapport à la longueur d'onde), d'où la nécessité de trouver des méthodes qui réduiraient le coût d'opérations de la méthode d'inversion LU, dont la complexité est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^3)$ , où  $N$  est la taille de la matrice et donc le nombre d'échantillons sur la surface. Plusieurs méthodes ont été développées à cette fin. Nous pouvons citer, par exemple, la méthode MOMI (Method of Ordered Multiple Interactions) [79, 80], de complexité  $\mathcal{O}(N^2)$ . Le défaut majeur de cette méthode est sa convergence moins rapide pour le cas diélectrique. Une méthode équivalente, dite Forward-Backward (FB) [81] pallie ce défaut [82, 83]. Une version accélérée de la FB utilise la représentation spectrale de la fonction de Green (FB-SA) [84, 85, 86, 87], permettant ainsi de réduire la complexité à  $\mathcal{O}(N)$ . La méthode BMIA (Banded-Matrix-Iterative-Approch) [88, 89] est utilisée en conjonction avec des méthodes itératives, comme celle du gradient conjugué [47]. Une version améliorée de cette méthode a donné lieu à la BMIA-CAG (Banded-Matrix-Iterative-Approch/CAnonical Grid) [89, 90] de complexité  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Toutefois, la méthode BMIA-CAG ne s'adapte plutôt bien qu'aux surfaces dont l'écart type des hauteurs est relativement faible par rapport à la longueur d'onde.

### 1.3.2 Méthodes numériques asymptotiques

Pour pallier le défaut de complexité des modèles rigoureux, on recourt à des modèles asymptotiques, qui sont alors résolus par des méthodes analytiques ou numériques. Ces modèles possèdent l'avantage d'être plus rapides et permettent généralement de traiter des surfaces de plus grandes dimensions. Cependant, leur inconvénient majeur est qu'ils ne sont applicables que dans des domaines de validité limité. Le plus souvent, leur mise en œuvre nécessite des hypothèses simplificatrices, comme par exemple un paramètre de la surface qui est plus grand ou plus petit que la longueur de l'onde incidente. Comme pour les méthodes rigoureuses, on distingue deux familles de méthodes asymptotiques numériques : méthodes haute et basse fréquence. Une troisième catégorie des méthodes asymptotiques tente de concilier les deux approches et est dite *méthode unifiée*. Pour plus de détails sur les méthodes numériques asymptotiques, nous renvoyons aux références [91, 92, 46].

Pour les méthodes haute fréquence, la longueur d'onde est petite devant un paramètre de la surface. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer la méthode d'Approximation de Kirchhoff (KA), la méthode de l'Optique Physique (PO), la Théorie Uniforme de la Diffraction (TUD), la Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD). De toutes ces méthodes

haute fréquence, la plus utilisée est la méthode d'Approximation de Kirchhoff. Cette méthode suppose que la longueur d'onde est faible devant le rayon de courbure moyen de la surface. Ainsi, la surface étant supposée localement lisse, elle peut être remplacée en chacun de ses points par un plan tangent, dont l'inclinaison est égale à la pente de la surface au point considéré. En conséquence, chaque rayon de l'onde incidente est diffracté en réflexion et/ou en transmission spéculairement par le plan tangent en chacun des points de la surface. De cette façon, l'Approximation de Kirchhoff ne dépend que des coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission pour l'angle local d'incidence considéré.

Pour les méthodes basse fréquence, la longueur d'onde est grande devant un paramètre de la surface rugueuse. Historiquement, Lord Rayleigh fut le premier à développer une méthode asymptotique basse fréquence. Il s'agit de la Méthode des Petites Perturbations (SPM). Cette méthode est un développement limité du champ diffracté en fonction des hauteurs des surfaces. Physiquement, l'ordre de la méthode représente le nombre des diffractions par la surface. Ainsi, des ordres supérieurs à deux prendront mieux en compte les interactions multiples de la surface. De plus, la contribution de ces ordres est importante lorsque l'écart-type des pentes est élevé.

### 1.3.3 Choix de la méthode

Dans cette étude, nous considérons un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses et nous supposons que tous les milieux sont homogènes. Nous ne considérons que les méthodes numériques rigoureuses pour résoudre ce problème, ainsi que nous l'avons déjà signalé. La méthode numérique rigoureuse sélectionnée servira alors de référence pour les méthodes asymptotiques. La méthode FDTD a démontré son efficacité pour les problèmes électromagnétiques de radar à pénétration de sol (GPR) [20, 93, 19, 94] et en particulier pour les milieux non homogènes. Toutefois, s'agissant des milieux homogènes dans cette étude, nous nous proposons d'utiliser la MmM du domaine fréquentiel. La MmM offre plusieurs avantages par rapport à la FDTD. En effet, la MmM maille les limites (ici les interfaces), tandis que la FDTD maille l'espace. Pour les interfaces rugueuses, le maillage doit être affiné dans le voisinage des interfaces pour la FDTD afin de bien suivre les profils de surfaces, ce qui augmente les besoins en espace mémoire, contrairement à la MmM. Par ailleurs, nous présentons en annexe B la méthode d'Approximation de Kirchhoff pour le cas d'un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, et nous montrons en quoi cette méthode n'a pas beaucoup d'intérêt pour notre étude.

## 1.4 Modélisation de la diffraction par une interface

### 1.4.1 Description du problème

Considérons une surface rugueuse  $S$ , invariante selon la direction  $\mathbf{y}$  et définie par  $z = \zeta(x)$ . La surface  $S$  délimite deux milieux notés  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . De longueur  $L$  finie, la surface est centrée en abscisse et en hauteur. Le milieu supérieur  $\Omega_0$ , dit milieu incident, est un demi-plan délimité par la surface  $S$  et un contour à l'infini noté  $C_{0,\infty}$ . Le milieu inférieur  $\Omega_1$  ou milieu de transmission est aussi un demi-plan, délimité par la surface  $S$  et un contour à l'infini noté  $C_{1,\infty}$ . Par convention, la normale à la surface est orientée selon la direction du milieu incident. La situation est décrite dans la figure 1.7.

Dans le milieu incident  $\Omega_0$ , une onde incidente  $\psi_{\text{inc}}$  éclaire la surface  $S$ . Une partie est diffractée dans le milieu incident (onde réfléchie qui est notée  $\psi_{\text{sca},0}$  ou simplement  $\psi_{\text{sca}}$ ) et une autre est transmise dans le milieu inférieur (onde transmise notée  $\psi_{\text{sca},1}$  ou encore  $\psi_t$ ). On peut alors définir le champ total dans chaque milieu comme la somme du champ incident et du champ diffracté. Ainsi, dans le milieu incident nous avons :

$$\psi_0(\mathbf{r}') = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') + \psi_{\text{sca},0}, \quad \forall \mathbf{r}' \in \Omega_0, \quad (1.62)$$

et dans le milieu de transmission, on a :

$$\psi_1(\mathbf{r}') = \psi_{\text{sca},1}, \quad \forall \mathbf{r}' \in \Omega_1, \quad (1.63)$$

car le champ incident est nul dans le milieu inférieur. Ces relations sont cruciales dans la résolution du problème de diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses.

Notons d'une part qu'en absence de sources, les champs  $\psi_0$  et  $\psi_1$  vérifient l'équation scalaire de Helmholtz :

$$\nabla^2 \psi_i(\mathbf{r}) + k_i^2 \psi_i(\mathbf{r}) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_i \quad (1.64)$$

où  $k_i = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_0}$  est le nombre d'onde du milieu  $\Omega_i$  ( $i = \{0, 1\}$ ) et  $\nabla^2$  est le laplacien scalaire.

D'autre part, on suppose que le champ diffracté est lié au champ incident par une condition aux limites. Cette condition dépend de la polarisation de l'onde incidente. Ainsi, lorsque le milieu de transmission est un conducteur parfait, i.e.  $\psi_1 = 0$ , alors si l'onde est en polarisation transverse électrique, le champ total s'annule sur la surface  $\psi_0 = 0$ , et il

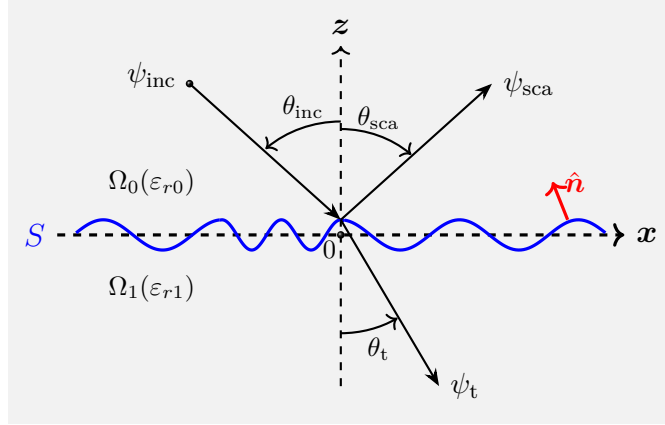


FIGURE 1.7 – Diffraction électromagnétique par une interface 1-D.

en découle d'après la relation (1.62) que  $\psi_{sca,0} = -\psi_{inc}$ . Une telle condition aux limites est dite *condition de Dirichlet*. Par contre, en polarisation transverse magnétique, c'est la dérivée normale du champ total qui s'annule sur la surface et on a  $\partial\psi_0/\partial n = 0$ . Cette condition aux limites est dite *condition de Neumann*. Nous reviendrons plus en détail sur le cas de la diffraction par une surface dont le milieu inférieur est un conducteur parfait. Pour un milieu inférieur diélectrique, nous avons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_0(\mathbf{r}) = \rho_{01} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (1.65)$$

où  $\rho_{01} = 1$  pour la polarisation transverse électrique et  $\rho_{01} = \epsilon_0/\epsilon_1$  pour la polarisation transverse magnétique.

Enfin, pour garantir l'unicité des solutions, on recourt à la condition de rayonnement de Sommerfeld ( $r \rightarrow \infty$ ) qui, pour une onde incidente plane est donnée par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - jk_i \right) \psi_i = 0. \quad (1.66)$$

Physiquement, cette condition assure que l'onde s'éloigne de la source (de la surface pour les ondes diffractées en réflexion et en transmission).

L'inconnue du problème direct de la diffraction par une surface rugueuse étant le champ diffracté  $\psi_{sca,0}$ , nous pouvons résumer ce problème par la résolution de l'équation de Helmholtz (1.64), sous les conditions aux limites (1.65) sur la surface  $S$  et la condition

de rayonnement à l'infini (1.66). Dans le cadre de cette thèse, ainsi que nous l'avons déjà souligné, nous nous emploierons à développer des méthodes intégrales de frontière dans le domaine fréquentiel, car elles s'adaptent mieux que les méthodes différentielles au problème de la diffraction d'onde électromagnétique par des surfaces rugueuses.

## 1.4.2 Méthodes intégrales

La méthode intégrale vise à déterminer le champ diffracté par une surface séparant deux milieux homogènes aux propriétés physiques différentes. Cette méthode permet d'obtenir le champ total et/ou sa dérivée normale sur la surface, contrairement à certaines méthodes asymptotiques qui n'offrent pas cette possibilité [95, 96, 92, 46]. Les inconnues de surface sont liées au champ incident par le moyen d'équations intégrales, et la Méthode des Moments transforme ces équations intégrales en un système linéaire. Pour plus de détail sur les méthodes intégrales, se reporter à la lecture de [47, 48].

La résolution de l'équation de Helmholtz (1.64) sous les conditions aux limites (1.65) nécessite de trouver une solution qui vérifie la condition de rayonnement à l'infini (1.66). Cette condition est vérifiée par les fonctions de Green que nous rappelons ici. En effet, les équations intégrales du problème de diffraction peuvent se mettre sous la forme

$$\mathcal{L}f(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}), \quad (1.67)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur intégral-différentiel linéaire et  $f(\mathbf{r})$  et  $h(\mathbf{r})$  deux fonctions de la variable  $\mathbf{r}$ . La fonction  $h(\mathbf{r})$  est la donnée d'un champ incident, tandis que la fonction  $f(\mathbf{r})$  est l'inconnue du problème, en occurrence, les courants surfaciques qui permettent de calculer le champ diffracté. L'opérateur  $\mathcal{L}$ , quant à lui, est construit en prenant en compte les propriétés de la surface et du champ incident, ainsi que les caractéristiques des deux milieux.

Par ailleurs, les fonctions de Green dépendent de deux vecteurs notés  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ , appelés respectivement *point source* et *point d'observation*. Ainsi pour l'équation (1.67), la fonction de Green vérifie

$$\mathcal{L}g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.68)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

En écrivant l'équation de Helmholtz pour la fonction de Green, nous obtenons

$$\nabla^2 g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_i^2 g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.69)$$



où  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}$  et  $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + z'\hat{\mathbf{z}}$  sont respectivement les coordonnées cartésiennes des points source et d'observation.

Pour obtenir les équations intégrales dans chacun des milieux, il suffit de transformer l'équation de Helmholtz dans chaque milieu à l'aide du second théorème de Green. Pour ce faire, nous rappelons d'abord ce théorème.

*Théorème de Green.* Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de classes  $\mathcal{C}^2$ , alors

$$\iint_{\Omega} (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1) d\mathbf{r} = \oint_C (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.70)$$

où  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  étant un vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur du milieu  $\Omega$ .

Pour appliquer le théorème de Green à l'équation de Helmholtz, posons  $f_1 = \psi_0$  et  $f_2 = g_0$ . On obtient  $\forall \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} [\psi_0 \nabla^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi_0] d\mathbf{r} \\ &= \oint_{C_0} [\psi_0(\mathbf{r}) \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi_0(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S}, \quad C_0 = S \cup C_{0,\infty} \end{aligned}$$

Nous rappelons que  $C_0$  est le demi-plan délimité par la surface  $S$  et le contour à l'infini  $C_{0,\infty}$ .

L'équation de Helmholtz permet alors d'écrire le membre de gauche, pour  $\mathbf{r} \in \Omega_0$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} \left\{ \psi_0(\mathbf{r}) [-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k_0^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') k_0^2 \psi_0(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} \\ &= - \iint_{\Omega_0} \psi_0(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \\ &= \begin{cases} -\psi_0(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Le membre de droite peut, quant à lui, se réécrire en utilisant la notion de dérivées directionnelles sur chaque portion de la frontière,

$$\begin{aligned} & \oint_{C_0} [\psi_0(\mathbf{r}) \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi_0(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} = \\ & - \int_S \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \\ & + \int_{C_{0,\infty}} \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Le signe  $(-)$  devant l'intégrale sur l'interface provient de l'orientation de la normale, qui est dirigée vers le milieu supérieur  $\Omega_0$ . On démontre alors que l'intégrale sur le contour à l'infini  $C_{0,\infty}$  donne l'expression du champ incident et on écrit [47] :

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = - \int_{C_{0,\infty}} \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\mathbf{S}, \quad \forall \mathbf{r}' \in \Omega_0. \quad (1.72)$$

Et l'équation de Helmholtz sous la forme intégrale dans chaque milieu devient

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') + \int_S \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\mathbf{S} = \begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}') & \text{pour } \mathbf{r}' \in \Omega_0, \\ 0 & \text{pour } \mathbf{r}' \in \Omega_1. \end{cases} \quad (1.73)$$

On appelle *théorème d'extinction* le cas  $\mathbf{r}' \in \Omega_1$ . Cette appellation se justifie par le fait que l'intégrale sur la surface annule le champ incident en dehors du milieu  $\Omega_0$ . Le cas  $\mathbf{r}' \in \Omega_0$  est appelé *principe de Huygens*. La relation (1.62) permet alors d'identifier l'expression du champ diffracté dans la formulation intégrale de l'équation de Helmholtz (1.73) dans le milieu incident. Et on écrit :

$$\psi_{\text{sca},0}(\mathbf{r}') = \int_S \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\mathbf{S}. \quad (1.74)$$

Il apparaît clairement dans cette relation que le champ diffracté  $\psi_{\text{sca},0}(\mathbf{r}')$  s'exprime en fonction du champ total sur la surface  $\psi_0(\mathbf{r})$  et de sa dérivée normale sur la surface  $\partial\psi_0(\mathbf{r})/\partial n$ . Ces deux quantités seront appelées *courants surfaciques*. Ainsi, le principe de Huygens montre que le champ diffracté en tout point au dessus d'une surface peut être obtenu à partir des courants surfaciques et leurs dérivées normales.

Lorsque le milieu inférieur est diélectrique, le champ total  $\psi_1(\mathbf{r})$  s'obtient par le même principe que précédemment, et pour  $\forall \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2$ , on a [47] :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} \left[ \psi_1 \nabla^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi_1 \right] d\mathbf{r} \\ &= \iint_{\Omega_1} \left\{ \psi_1(\mathbf{r}) \left[ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k_1^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] + g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') k_1^2 \psi_1(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} \\ &= - \iint_{\Omega_1} \psi_1(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ -\psi_1(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_1. \end{cases} \end{aligned}$$

L'intégrale sur le contour à l'infini  $C_{1,\infty}$  étant égale à zéro, le champ total dans le milieu

inférieur peut s'écrire :

$$\int_S \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathbf{r}' \in \Omega_0, \\ \psi_1(\mathbf{r}') & \text{pour } \mathbf{r}' \in \Omega_1, \end{cases} \quad (1.75)$$

ce qui permet de retrouver l'expression  $\psi_1(\mathbf{r}') = \psi_{\text{sca},1}$  déjà établie dans la relation (1.63). La normale à l'interface  $S$  est définie par

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\zeta' \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + (\zeta')^2}}, \quad \text{avec } \zeta' = \partial\zeta/\partial x. \quad (1.76)$$

La fonction de Green dans le milieu  $\Omega_i$  ( $i = \{0, 1\}$ ) est donnée par l'expression :

$$g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)} \left[ k_i \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2} \right] \quad (1.77)$$

où  $k_i$  est le nombre d'onde dans le milieu  $\Omega_i$ , et  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zero. Les fonctions de Hankel sont détaillées dans [97]. Les dérivées de la fonction de Green par rapport à  $x$  et  $z$  sont

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x} = \frac{\partial g_i(k_i D)}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{jk_i}{4} H_1^{(1)}(k_i D) \frac{x - x'}{D}, \\ \frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z} = \frac{\partial g_i(k_i D)}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial z} = -\frac{jk_i}{4} H_1^{(1)}(k_i D) \frac{z - z'}{D}. \end{cases} \quad (1.78)$$

La dérivée normale de la fonction de Green

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1.79)$$

est donnée par

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = -\frac{jk_i}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.80)$$

Des équations (1.73) et (1.75), on déduit que les inconnues du problème sont les courants surfaciques  $\psi_0(\mathbf{r})$ ,  $\partial\psi_0(\mathbf{r})/\partial n$ ,  $\psi_1(\mathbf{r})$  et  $\partial\psi_1(\mathbf{r})/\partial n$ , les données du problème étant  $\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}')$ ,  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et  $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Par conséquent, il faudra ajouter deux équations obtenues à partir de conditions aux limites sur la surface pour compléter le système en vue de le résoudre. Ainsi, des équations (1.73) et (1.75) pour  $\mathbf{r}' \in \Omega_0$  et ensuite pour  $\mathbf{r}' \in \Omega_1$ , il

découle les équations intégrales duales [47] :

$$\begin{cases} \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = +\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_S \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS + \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS, \\ 0 = -\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_S \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS + \frac{1}{\rho_{01}} \int_S g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS. \end{cases} \quad (1.81)$$

Dans toutes ces équations,  $f$  représente la valeur principale de Cauchy, qui rappelle que le cas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  n'est pas pris en compte dans le calcul de l'intégrale. En somme,  $\int_S dS = f dS + \int_P dS$  (où  $P$  est une portion), et on note :

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' \in S_i^+ \text{ (limite supérieure), } & \int_P \psi_i(\mathbf{r}) \frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS = +\frac{\psi_i(\mathbf{r}')}{2}; \\ (ii) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' \in S_i^- \text{ (limite inférieure), } & \int_P \psi_i(\mathbf{r}) \frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS = -\frac{\psi_i(\mathbf{r}')}{2}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.** Soient une surface parfaitement conductrice  $S$ , et  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{r}' = (x', y')$  deux points de la surface :

(i) Pour le cas de la polarisation transverse électrique (condition aux limites de Dirichlet), le courant surfacique s'annule ( $\psi_0(\mathbf{r}) = 0$ ) et on a :

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS. \quad (1.82)$$

(ii) Pour le cas de la polarisation transverse magnétique (condition aux limites de Neumann), la dérivée normale du courant surfacique s'annule ( $\partial \psi_0(\mathbf{r}) / \partial n = 0$ ) et on a :

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = +\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_S \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS. \quad (1.83)$$

### 1.4.3 Champ diffracté et SER

Les courants surfaciques  $\psi$  et sa dérivée normale  $\partial \psi / \partial n$  sur l'interface  $S$  étant connus, on peut calculer les champs diffractés  $\psi_{\text{sca},i}(\mathbf{r}')$  dans chacun des milieux  $\Omega_i$  ( $i = \{0, 1\}$ ) :

$$\begin{cases} \psi_{\text{sca},0}(\mathbf{r}') = + \int_S \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, \\ \psi_{\text{sca},1}(\mathbf{r}') = - \int_S \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS. \end{cases} \quad (1.84)$$

De plus, le champ diffracté en champ lointain dans le milieu incident  $\Omega_0$  est donné par

$$\psi_{\text{sca},0}^{\infty} = -\frac{1}{\psi_{\text{inc},0}} \int_S \left[ j\mathbf{k}_{\text{sca}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\psi_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial\psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-j\mathbf{k}_{\text{sca}} \cdot \mathbf{r}} dS, \quad (1.85)$$

où  $\psi_{\text{inc},0}$  est le module du champ incident  $\psi_{\text{inc}}$  dans le milieu  $\Omega_0$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  un vecteur unitaire normal à la surface et orienté vers le milieu  $\Omega_0$ . Le vecteur  $\mathbf{k}_{\text{sca}}$  donne la direction de l'observation.

La Surface Équivalente Radar (SER) pour un problème 2D, dans le milieu  $\Omega_0$ , s'écrit alors

$$\text{SER} = \frac{|\psi_{\text{sca},0}^{\infty}|^2}{4k_0}, \quad (1.86)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde dans le milieu incident. La SER s'exprime en mètres, car elle a la dimension d'une distance pour un problème 2D.

#### 1.4.4 Onde de Thorsos

La surface étant de longueur finie, la diffraction par les bords se produit, car le champ incident ne disparaît pas sur les bords des surfaces. Pour réduire ce phénomène dans l'étude de la diffraction par des surfaces rugueuses, une onde incidente apodissée doit être utilisée au lieu d'une onde incidente plane. Une option possible est l'onde de Thorsos définie par [95] :

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \psi_{\text{inc},0} \underbrace{\exp(j\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r})}_{\text{Onde plane}} \underbrace{\exp\left(-\frac{(x+z \tan \theta_{\text{inc}})^2}{g^2}\right)}_{\text{Facteur d'amortissement}} \underbrace{\exp[jw(r)\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}]}_{\text{Terme correctif}} \quad (1.87)$$

où

$$w(r) = \left[ \frac{2(x+z \tan \theta_{\text{inc}})^2}{g^2} - 1 \right] \frac{1}{(k_0 g \cos \theta_{\text{inc}})^2},$$

et  $\mathbf{k}_{\text{inc}} = k_0(\sin \theta_{\text{inc}}\hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_{\text{inc}}\hat{\mathbf{z}})$  est le vecteur incident,  $\psi_{\text{inc},0}$  l'amplitude de l'onde incidente. Le paramètre d'atténuation  $g$  a la même dimension que la longueur  $L$  et contrôle l'extension de l'onde incidente. En général,  $g$  est une fonction de la longueur, habituellement  $g = L/6$  ou encore  $g = L/10$ . L'amortissement est orthogonal au vecteur incident  $\mathbf{k}_{\text{inc}}$ . L'ajout du terme correctif permet à l'onde de mieux satisfaire l'équation de Helmholtz.

Nous représentons dans la figure 1.8 l'onde de Thorsos qui illumine une surface de longueur  $L = 3000$  mm, à la fréquence de 2 GHz, en incidence normale, et dont le paramètre de correction  $g = L/6$ . Le nombre de nœuds par longueur d'onde dans le vide

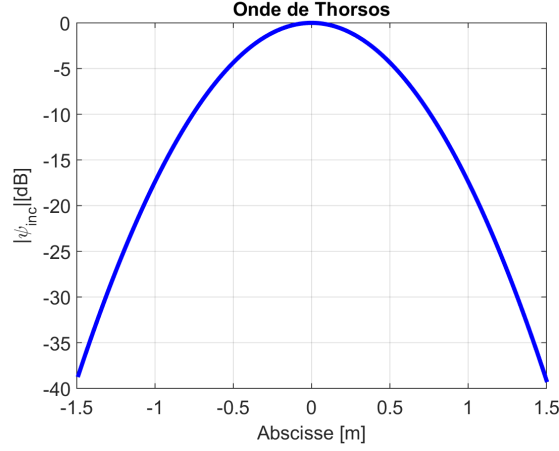


FIGURE 1.8 – Onde de Thorsos. Le module du champ incident en décibel ( $10 \log |\psi_{\text{inc}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'une surface de longueur  $L = 3000$  mm, à la fréquence de 2 GHz, en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), et dont le paramètre d'atténuation vaut  $g = L/6$ . Le nombre des nœuds par longueur d'onde dans le vide est  $N_{\lambda_0} = 10$ .

est  $N_{\lambda_0} = 10$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. On y observe alors que le champ incident décroît lorsque  $|x|$  croît.

A partir de l'onde de Thorsos, on peut calculer la puissance incidente normalisée sur la surface rugueuse de hauteur moyenne  $z = 0$  et on a :

$$p_{\text{inc}} = -\frac{1}{|\psi_{\text{inc},0}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Big|_{z=0} dx, \quad (1.88)$$

qui peut aussi s'écrire

$$p_{\text{inc}} = -\frac{1}{2|\psi_{\text{inc},0}|^2 \eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\text{inc}}|^2 \hat{\mathbf{k}}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Big|_{z=0} dx, \quad (1.89)$$

ou encore

$$p_{\text{inc}} = -\frac{\cos \theta_{\text{inc}}}{2|\psi_{\text{inc},0}|^2 \eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\text{inc}}|^2 \Big|_{z=0} dx, \quad (1.90)$$

et au final

$$p_{\text{inc}} = \frac{g \cos \theta_{\text{inc}}}{2\eta_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{1 + 2 \tan^2 \theta_{\text{inc}}}{2k_0^2 g^2 \cos^2 \theta_{\text{inc}}} \right] \quad (1.91)$$

où  $k_0$  et  $\eta_0$  sont respectivement le nombre d'onde et l'impédance d'onde dans le milieu incident  $\Omega_0$ .  $\mathbf{S}_{\text{inc}}$  est le vecteur de Poynting, qui donne la puissance contenue dans le champ incident.

Ainsi, on obtient la Surface Équivalente Radar Normalisée (SERN) dans le milieu incident  $\Omega_0$  [48] :

$$\text{SERN} = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r'}{2\eta_0} \frac{|\psi_{\text{sca},0}|^2}{p_{\text{inc}}} = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \cdot \frac{|\psi_{\text{sca},0}^\infty|^2}{p_{\text{inc}}}. \quad (1.92)$$

Contrairement à la SER qui s'exprime en mètres, la SERN est une grandeur sans dimension.

### 1.4.5 Méthode des Moments

La discrétisation par la Méthode des Moments (MmM) vise à transformer les équations intégrales en un système linéaire. Pour plus de détail sur la Méthode des Moments, nous renvoyons à la lecture de [58, 47, 60, 48]. Reconsidérons l'équation intégrale

$$\mathcal{L}(f) = g, \quad (1.93)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur intégral ou intégral-différentiel,  $f$  le courant surfacique et/ou sa dérivée normale et  $g$  le champ incident. La Méthode des Moments se déroule en trois étapes.

Premièrement, on choisit une base complète de fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_N$  sur le domaine  $\mathcal{D}$  (l'interface pour notre cas),  $N$  étant le nombre d'échantillons. La fonction inconnue  $f$  est projetée sur cette base, i.e.  $f$  est écrite comme une combinaison linéaire des fonctions de cette base

$$f \simeq \tilde{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n, \quad (1.94)$$

telle que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} |f - \tilde{f}| = 0$ . En remplaçant la relation (1.94) dans l'équation (1.93) on obtient

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^N a_n f_n\right) + \varepsilon = g, \quad (1.95)$$

où  $\varepsilon$  est l'erreur de troncature aussi appelée *résidu*.

Par linéarité de l'opérateur  $\mathcal{L}$ , on écrira

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{n=1}^N a_n (\mathcal{L}f_n) + \varepsilon = g. \quad (1.96)$$

Deuxièmement, on choisit une base des fonctions test  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$  et on projette la

relation (1.96) sur cette base de manière à minimiser l'erreur, i.e.  $\langle \omega_m, \varepsilon \rangle \simeq 0$ . Soit

$$\langle \omega_m, \sum_{n=1}^N a_n(\mathcal{L}f_n) \rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle \omega_m, \mathcal{L}f_n \rangle = \langle \omega_m, g \rangle, \quad (1.97)$$

où le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini pour une variable  $x$  par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{D}} f(x)g(x)dx. \quad (1.98)$$

où  $\mathcal{D}$  est un intervalle.

Troisièmement, on déduit de l'équation (1.97) le système linéaire à résoudre

$$\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (1.99)$$

où

$$\begin{cases} Z_{mn} = \langle \omega_m, \mathcal{L}f_n \rangle, \\ b_m = \langle \omega_m, g \rangle. \end{cases} \quad (1.100)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$  est appelée *matrice impédance* et dépend de la forme ainsi que des propriétés électriques de la surface. Les éléments du vecteur  $\mathbf{X}$ , notés  $X_n$ , sont les inconnues du problème, en l'occurrence, les courants surfaciques et/ou leur dérivée normale.

Il est important de préciser que les fonctions de la base définie à la première étape peuvent être choisies parmi les fonctions spéciales, polynomiales, trigonométriques (sinus ou cosinus), etc. En pratique, il est commode de prendre les fonctions de collocation (point-matching en anglais). Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_n \leq x \leq \beta_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.101)$$

où l'intervalle  $\mathcal{D}$  est divisé en  $N$  sous-intervalles  $\beta_n - \alpha_n$  avec  $n = \{1, 2, \dots, N\}$ .

En ce qui concerne les fonctions test, le choix se porte sur deux méthodes usuelles. La première est la *méthode de Galerkin* dans laquelle les fonctions test sont les mêmes que celles de la base, i.e.  $\omega_n(x) = f_n(x)$  avec  $n = \{1, 2, \dots, N\}$ . La seconde est la *méthode de collocation* où les fonctions test sont les fonctions Delta de Dirac  $\omega_m(x) = \delta(x - x_m)$ , avec  $m = \{1, 2, \dots, M\}$  et  $M = N$ .

Dans toute la suite, nous utiliserons la méthode de collocation. Ainsi, de l'équation



(1.100), on obtient les éléments de la matrice impédance :

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle \omega_m(x), \mathcal{L}[f_n(x)] \rangle = \langle \delta(x - x_m), \mathcal{L}[f_n(x)] \rangle \\ &= \int_{\mathcal{D}} \delta(x - x_m) \mathcal{L}[f_n(x)] dx = \mathcal{L}[f_n(x_m)]. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Le champ incident s'écrit :

$$b_m = \langle \omega_m, g(x) \rangle = \langle \delta(x - x_m), g(x) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \delta(x - x_m) g(x) dx = g(x_m). \quad (1.103)$$

Nous pouvons appliquer à présent la méthode de collocation pour convertir les équations intégrales en un système linéaire :

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} X_n = b_m, \quad \forall m = 1, \dots, N \quad (1.104)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons sur la surface,  $Z_{mn}$  est la matrice impédance,  $X_n$  sont les courants surfaciques, et  $b_m$  le champ incident.

Les courants surfaciques s'écrivent :

$$\begin{cases} X_n = \frac{\partial \psi_0}{\partial n}(\mathbf{r}_n), & \text{en TE,} \\ X_n = \psi_0(\mathbf{r}_n), & \text{en TM,} \end{cases} \quad (1.105)$$

et le champ incident

$$b_m = (\mathbf{r}_m), \quad (1.106)$$

où  $r_n$  et  $r_m$  sont respectivement les points source et d'observation sur la surface. Les indices  $n$  et  $m$  expriment les positions définies par :

$$\begin{cases} r_n = x_n \hat{\mathbf{x}} + z_n \hat{\mathbf{z}}, & \forall n = 1, \dots, N, \\ r_m = x_m \hat{\mathbf{x}} + z_m \hat{\mathbf{z}}, & \forall m = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.107)$$

### 1.4.6 Conditions aux limites de Dirichlet

Lorsque le milieu inférieur  $\Omega_1$  est un conducteur parfait, le champ total  $\psi_0$  s'annule sur la surface dans le cas de la polarisation transverse électrique (TE). Le système (1.81) devient :

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0}{\partial n} dS \quad (1.108)$$

où les points  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{r}' = (x', y')$  appartiennent à la surface, par où l'on comprend que le calcul de l'intégrale doit tenir compte de la singularité en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . L'inconnue du problème est la dérivée normale du courant surfacique  $\frac{\partial\psi_0}{\partial n}$ .

Supposons une surface de longueur  $L$ , centrée en  $x = 0$  et d'équation  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}$ . L'équation (1.108) peut se réécrire sous la forme

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = \int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \left[ g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi_0}{\partial n} \right], \quad (1.109)$$

que l'on peut aisément condenser en une équation intégrale

$$\mathcal{L}f = g$$

où  $g = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}')$ ,  $f = \frac{\partial\psi_0}{\partial n}$  et

$$\mathcal{L}\bullet = \int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bullet \quad (1.110)$$

La méthode des moments permet alors de transformer l'équation intégrale (1.108) en un système linéaire  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  où  $\bar{\mathbf{Z}} = Z_{mn}$  est la matrice impédance et le vecteur  $\mathbf{b} = b_m$ , le champ incident. Un calcul rapide de la matrice impédance permet d'écrire

$$Z_{mn} = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dx \simeq \sqrt{1 + \left(\frac{dz_n}{dx_n}\right)^2} g_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}'_m)(\beta_n - \alpha_n). \quad (1.111)$$

Nous avons supposé dans cette approximation que l'intégrande ne varie pas significativement dans l'intervalle  $x \in [\alpha_n, \beta_n]$ . Une telle restriction est physiquement valide si  $\beta_n - \alpha_n \ll \lambda_0$ , ce qui permet de prendre en compte les variations lentes de la fonction de Green dans l'intervalle  $\beta_n - \alpha_n$ . Pour les simulations numériques, voir les figures 1.9 et 1.10, nous prendrons  $\beta_n - \alpha_n = \lambda_0/10$  où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Ainsi, la figure 1.9 (a) présente le module et la phase de la dérivée des courants surfaciques, tandis que la figure 1.9 (b) présente la Surface Équivalente Radar Normalisée en polarisation transverse électrique.

Du reste, la singularité de la fonction de Green en  $m = n$  nécessite de développer en série de Taylor l'intégrande autour de  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$ . En somme, les éléments  $Z_{mn}$  de la matrice

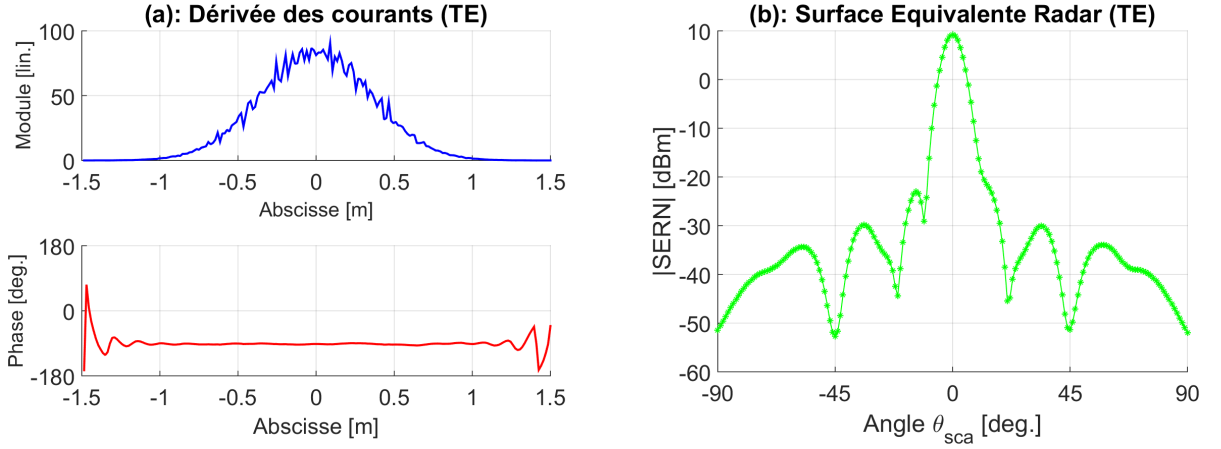


FIGURE 1.9 – Polarisation TE. Une surface rugueuse parfaitement conductrice, de longueur  $L = 3000$  mm, pour une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d’auto-corrélation gaussienne. L’écart-type des hauteurs est  $\sigma_h = 1$  mm et la longueur de corrélation  $L_{ch} = 15$  mm. L’onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{inc} = 0^\circ$ ), à la fréquence  $f = 2$  GHz, et dont le paramètre d’atténuation est  $g = L/6$ . (a) Le module  $|\partial\psi_0/\partial n|$  et la phase  $\arg(\partial\psi_0/\partial n)$ . (b) La Surface Équivalente Radar Normalisée en dBm par rapport à un angle d’observation  $\theta_{sca}$  en degré.

impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  sont :

$$Z_{mn} = \frac{j\Delta_n\sqrt{1+\gamma_n^2}}{4} \begin{cases} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \log(0.164k_0\sqrt{1+\gamma_n^2}\Delta_n)\right], & \text{pour } m = n, \\ H_0^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|), & \text{pour } m \neq n. \end{cases} \quad (1.112)$$

où

$$\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (z_n - z_m)^2}, \quad (1.113)$$

et  $\gamma_n = dz_n/dx_n$  et  $\Delta_n = \beta_n - \alpha_n$ . Les autres éléments du système sont :

$$\begin{cases} X_n = \frac{\partial\psi_0}{\partial n}(\mathbf{r}_n), \\ b_m = \psi_{inc}(\mathbf{r}_m). \end{cases} \quad (1.114)$$

### 1.4.7 Conditions aux limites de Neumann

Pour un milieu inférieur  $\Omega_1$  parfaitement conducteur, la dérivée normale du champ total s’annule sur la surface dans le cas de la polarisation transverse magnétique (TM)

$\partial\psi_0/\partial n = 0$ . L'équation (1.81) devient alors

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = +\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \oint_S \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS \quad (1.115)$$

où  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{r}' = (x', y')$  appartiennent à la surface rugueuse. Par la même méthodolo-

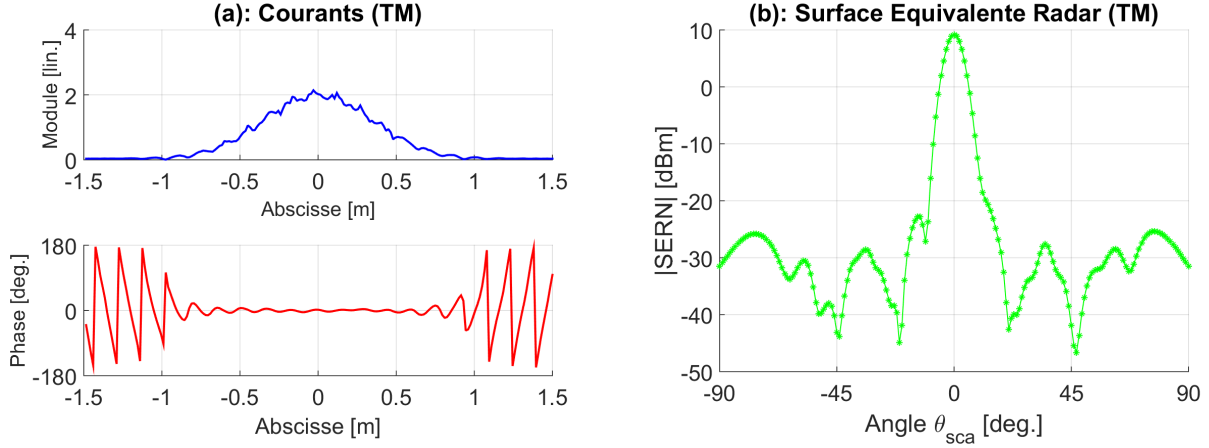


FIGURE 1.10 – Polarisation TM. Les paramètres de la surface et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 1.9. (a) Le module  $|\psi_0|$  et la phase  $\arg(\psi_0)$ . (b) La Surface Équivalente Radar Normalisée en dBm par rapport à un angle d'observation  $\theta_{\text{sca}}$  en degré.

gie que pour la polarisation TE, nous obtenons les éléments de  $Z_{mn}$  la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  pour ce cas :

$$Z_{mn} = \begin{cases} -\frac{jk_0\Delta_n}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \times [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n, \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta_n}{4\pi} \cdot \frac{\gamma'_n}{1 + \gamma_n^2}, & \text{pour } m = n. \end{cases} \quad (1.116)$$

où  $\gamma'_n = d\gamma_n/dx_n$  et les autres éléments du système sont :

$$\begin{cases} X_n = \psi(\mathbf{r}_n), \\ b_m = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_m). \end{cases} \quad (1.117)$$

La figure 1.10 (a) présente le module et la phase des courants surfaciques, tandis que la figure 1.10 (b) présente la Surface Équivalente Radar Normalisée en polarisation transverse magnétique.

### 1.4.8 Milieu inférieur diélectrique

Le cas d'un milieu inférieur diélectrique  $\Omega_1$  est obtenu par une combinaison linéaire des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Soit le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{inc}(\mathbf{r}') = \underbrace{+\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_S \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS}_{\text{Dirichlet}}, \\ 0 = \underbrace{-\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_S \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS}_{\text{Neumann avec } k_0 \rightarrow k_1} + \underbrace{\int_S \frac{1}{\rho_{01}} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS}_{\text{Dirichlet avec } k_0 \rightarrow k_1}. \end{array} \right. \quad (1.118)$$

Cette fois les inconnues du problème sont  $\psi_0(\mathbf{r})$  et  $\partial\psi_0(\mathbf{r})/\partial n$ . La matrice impédance obtenue après discrétisation par la MdM est

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{\text{Neu}} & \bar{\mathbf{Z}}_{\text{Dir}} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{\text{Neu}, k_0 \rightarrow k_1} & \frac{1}{\rho_{01}} \bar{\mathbf{Z}}_{\text{Dir}, k_0 \rightarrow k_1} \end{pmatrix}, \quad (1.119)$$

où les indices "Dir" et "Neu" signifient respectivement "Dirichlet" et "Neumann". Notons aussi que pour  $\bar{\mathbf{Z}}_{\text{Neu}, k_0 \rightarrow k_1}$ , la valeur principale de Cauchy est  $-1/2$  alors qu'elle est de  $+1/2$  pour  $\bar{\mathbf{Z}}_{\text{Neu}}$ . Le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  contient les courants surfaciques et leur dérivée normale et s'écrit :

$$\mathbf{X} = \left[ \psi_0(\mathbf{r}_1), \psi_0(\mathbf{r}_2), \dots, \psi_0(\mathbf{r}_N) \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n}, \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \right]^T. \quad (1.120)$$

Le terme de droite  $\mathbf{b}$ , i.e. le champ incident est :

$$\mathbf{b} = \left[ \psi_{inc}(\mathbf{r}_1), \psi_{inc}(\mathbf{r}_2), \dots, \psi_{inc}(\mathbf{r}_N) \quad \underbrace{0 \dots 0}_{N \text{ fois}} \right]^T. \quad (1.121)$$

Les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{\text{Dir}}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{\text{Neu}}$  sont de dimension  $N \times N$  et telles que définies par les expressions (1.112) et (1.116). Il en découle que la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  est de dimension  $2N \times 2N$ . Pour les simulations numériques (voir les figures 1.11 et 1.12), le pas de discrétisation est  $\beta_n - \alpha_n = (\lambda_0/10)/|\sqrt{\epsilon_{r1}}|$  au lieu de  $\beta_n - \alpha_n = \lambda_0/10$  comme dans le cas parfaitement conducteur, car le nombre d'onde dans le milieu inférieur  $\Omega_1$  est  $k_1 = k_0\sqrt{\epsilon_{r1}}$ , où  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide.

Les figures 1.11 (a)-(b) présentent respectivement le module et la phase des courants

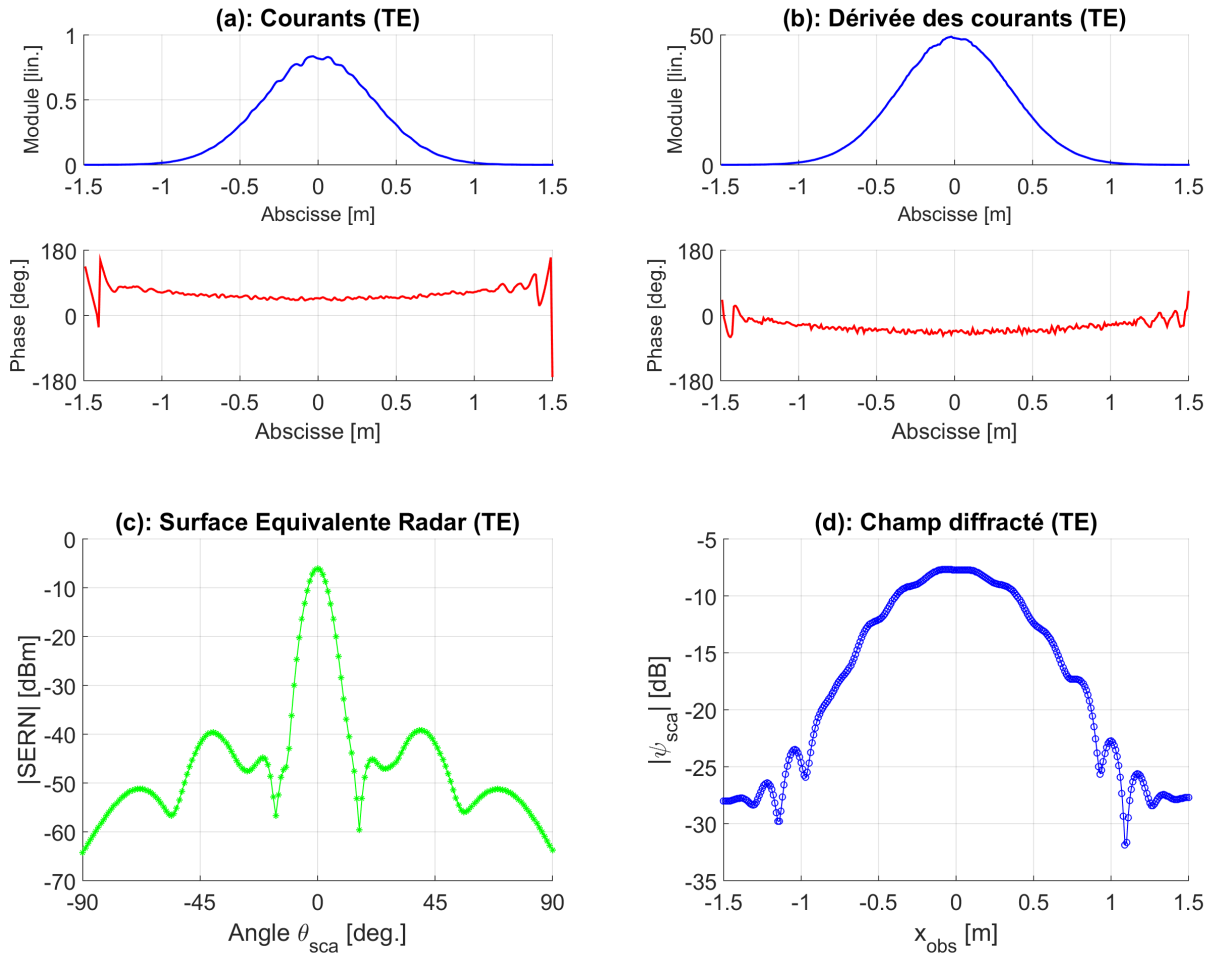


FIGURE 1.11 – Polarisation TE. Les paramètres de la surface et de l’onde incidente sont les mêmes que dans la figure 1.9. (a) Le module  $|\psi_0|$  et la phase  $\arg(\psi_0)$ . (b) Le module  $|\partial\psi_0/\partial n|$  et la phase  $\arg(\partial\psi_0/\partial n)$ . (c) La Surface Équivalente Radar en dBm par rapport à un angle d’observation  $\theta_{sca}$  en degré. (d) Le champ diffracté en champ proche en dB par rapport à l’abscisse d’observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d’observation  $z_{obs} = 470$  mm.

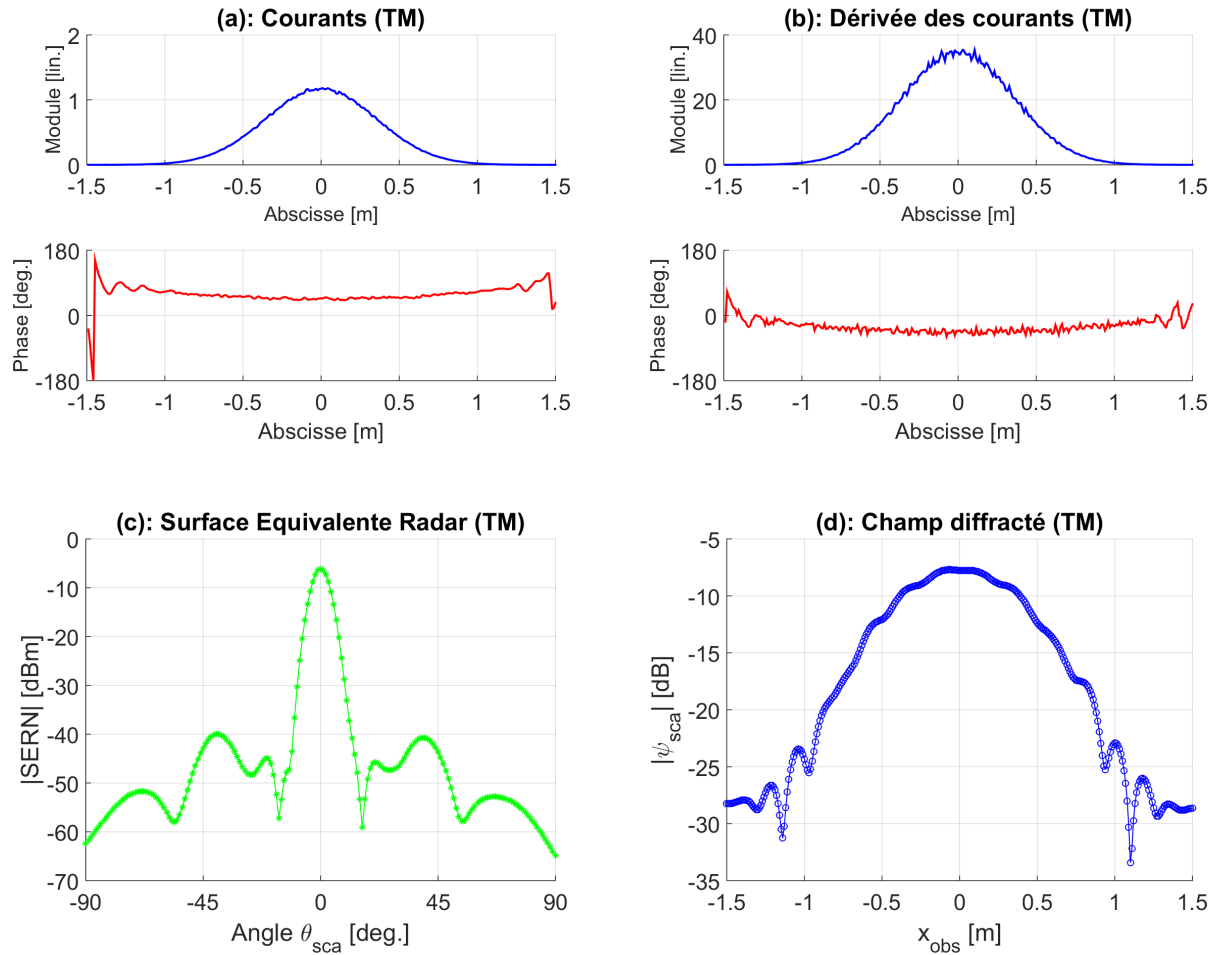


FIGURE 1.12 – Polarisation TM. Les paramètres de la surface et de l’onde incidente sont les mêmes que dans la figure 1.9. (a) Le module  $|\psi_0|$  et la phase  $\arg(\psi_0)$ . (b) Le module  $|\partial\psi_0/\partial n|$  et la phase  $\arg(\partial\psi_0/\partial n)$ . (c) La Surface Équivalente Radar en dBm par rapport à un angle d’observation  $\theta_{sca}$  en degré. (d) Le champ diffracté en champ proche en dB par rapport à l’abscisse d’observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d’observation  $z_{obs} = 470$  mm.

surfaciques ainsi que leurs dérivées normales en polarisation transverse électrique. De même, les figures 1.11 (c)-(d) présentent respectivement la Surface Équivalente Radar en dBm par rapport à un angle d'observation  $\theta_{\text{sca}}$  en degré, et le champ diffracté en champ proche en dB par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les figures 1.12, quant à elles, présentent les mêmes grandeurs que dans les figures 1.11 mais en polarisation transverse magnétique.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté quelques généralités sur le problème de la diffraction électromagnétique par une interface rugueuse. A cet effet, nous avons d'abord abordé les équations de Maxwell ainsi que l'équation de propagation d'onde qui en découle. Nous avons ensuite exposé la modélisation d'une surface rugueuse, en nous focalisant sur les outils statistiques qui permettent de générer des surfaces rugueuses aléatoires réalistes. Tout l'effort était alors de caractériser le comportement des ondes électromagnétiques à la frontière entre deux milieux aux propriétés physiques différentes. Après un bref aperçu des méthodes numériques les plus utilisées pour la diffraction par des surfaces rugueuses, nous avons présenté la méthode intégrale de frontière dans le domaine fréquentiel, puis la technique de discrétisation par la méthode des moments. Nous avons ainsi clos ce chapitre, dans les limites, évidemment, d'une perspective qui a pour souci essentiel de présenter les outils nécessaires à la modélisation électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses.



# DIFFRACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR UN OBJET ENFOUI ENTRE DEUX SURFACES

---

## Introduction

Cette thèse se place dans le contexte de la modélisation de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Les techniques utilisées pour la résolution de ce problème s'appuient toutes sur un formalisme dérivé des équations de Maxwell. Nous avons ainsi présenté un panorama des méthodes les plus utilisées au chapitre précédent, où nous avons sélectionné la méthode intégrale dans le domaine fréquentiel comme étant la mieux adaptée à notre problème. En effet, les équations intégrales de frontière sont discrétisées par la méthode des moments, qui offre alors l'avantage d'une prise en charge des géométries complexes comme celles des objets ou des surfaces rugueuses. Une telle méthode servira de référence pour la validation des méthodes approchées ou asymptotiques. Le contenu de ce chapitre constitue le cœur de cette thèse et a fait l'objet de deux publications, dont l'une en conférence [98] et l'autre est soumise dans une revue [99].

Notre laboratoire d'accueil, l'Institut d'Électronique et des Technologies du Numériques (IETR), à acquis au fil des années une forte expertise sur la modélisation numérique rigoureuse de la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses. En effet, plusieurs thèses portant sur cette thématique ont été soutenues au sein de ce laboratoire. Nous pouvons citer par exemple la thèse de Déchamps [100], portant sur la modélisation numérique rigoureuse de la diffraction par deux surfaces superposées. Cette étude a relevé le défi de réduire la complexité de la résolution du système obtenu par la Méthode des Moments. Le modèle intégral et la méthode numérique obtenus pour les cas de deux surfaces superposées sont aussi valables pour le cas d'un objet enfoui sous une surface, car dans les deux cas, nous avons deux diffuseurs dont un seul est éclairé. Par la suite, la

thèse de Kubické [101] a porté sur la diffraction électromagnétique par un objet au dessus d'une surface rugueuse, et a permis ainsi une généralisation des résultats obtenus par Déchamps au cas de deux diffuseurs éclairés. La thèse de Kouali [102] a étendu en trois dimensions les travaux de Kubické, permettant des applications au domaine maritime. De cette façon, notre thèse s'inscrit dans une perspective de continuation de ces travaux, car le cas d'un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses peut aisément se ramener aux cas de deux surfaces, d'un objet enfoui sous une surface ou d'un objet au dessus d'une interface.

Dans ce chapitre, nous étudions la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux interfaces rugueuses. Ainsi, nous exposons d'abord la géométrie du problème et nous construisons ensuite un modèle électromagnétique rigoureux pour ce problème à l'aide de la méthode intégrale de frontière dans le domaine fréquentiel. Puis, les équations intégrales sont discrétisées par la Méthode des Moments pour obtenir un système linéaire dont la matrice associée est de grande taille. Pour réduire la complexité de l'inversion de la matrice obtenue par la Méthode des Moments, nous étendons l'algorithme PILE (Propagation Inside-Layer Expansion) [41] au cas de trois diffuseurs en formant un diffuseur composite constitué par l'objet et la surface inférieure. La méthode obtenue est appelée méthode GPILE (Generalized PILE). L'objectif poursuivi dans ce chapitre est de présenter des études numériques détaillées de la méthode GPILE, en donnant à chaque étape l'interprétation physique des résultats et la conformité à la réalité. Les résultats ainsi obtenus serviront à mettre en évidence les contributions de l'objet ainsi que celles des deux surfaces. Ceci permettra alors de distinguer l'écho primaire de la surface supérieure et les échos multiples de l'objet et/ou de la surface inférieure dans le domaine temporel.

## 2.1 Géométrie du problème

Considérons deux surfaces rugueuses  $S_1$  et  $S_3$  invariantes selon l'axe  $\mathbf{y}$  et un objet délimité par la surface  $S_2$  enfoui entre les surfaces  $S_1$  et  $S_3$ . Les deux surfaces sont générées par une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation (gaussienne ou exponentielle), et nous supposons qu'elles ne s'interceptent pas entre elles, ni avec l'objet. Les trois interfaces séparent quatre milieux homogènes : le milieu supérieur,  $\Omega_0$ , constitué de l'air, le milieu intermédiaire,  $\Omega_1$ , qui constitue une couche, l'objet enfoui qui constitue le milieu  $\Omega_2$ , et le milieu inférieur,  $\Omega_3$ , que nous considérons comme diélectrique ou un conducteur parfait. Soit une onde incidente  $\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r})$

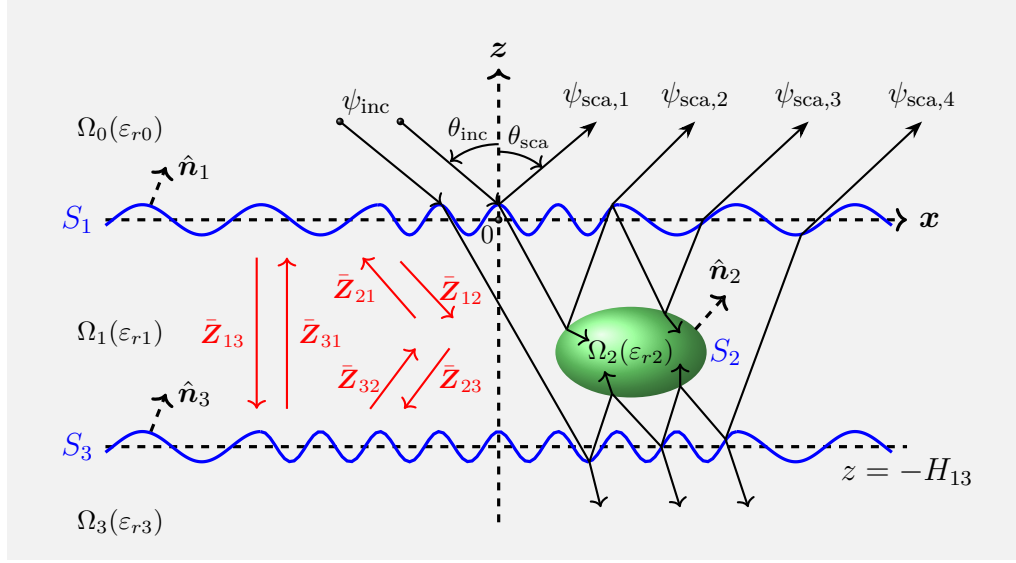


FIGURE 2.1 – Diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses 1-D.

dans le plan  $(\hat{x}, \hat{z})$ , sous un angle d'incidence  $\theta_{\text{inc}}$  défini par rapport à l'axe  $z$  dans le sens anti-horaire, comme le montre la figure 2.1.

Pour discrétiser les deux surfaces, nous considérons  $N_i$  ( $i = 1, 3$ ) échantillons en abscisse (et en hauteur)  $x_{i,n} = -L_i/2 + (n - 1/2) \Delta x_i$ , avec  $n = 1, 2, \dots, N_i$ . Le pas de discrétisation  $\Delta x_i = L_i/N_i$  où  $L_i$  est la longueur totale de la surface  $S_i$ . Un point du plan  $(\hat{x}, \hat{z})$  sera noté par  $\mathbf{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$  et un point de la surface  $S_i$  par  $\mathbf{r}_{i,n} = x_{i,n}\hat{x} + \zeta_i(x_{i,n})\hat{z}$ .

De la même manière, on discrétise l'objet en considérant  $N_2$  échantillons en abscisse (et en hauteur)  $x_m = -P/2 + (m - 1/2) \Delta x_2$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_2$  où  $P$  est le périmètre de l'objet. Par exemple, pour un cylindre elliptique de grand axe  $a$  et petit axe  $b$ , défini en coordonnées polaires par  $(a, b, \phi \in [0; 2\pi])$ , un point quelconque sur la surface du cylindre sera noté  $\mathbf{r}_m = (x_c + a \cos \phi_m)\hat{x} + (z_c + b \sin \phi_m)\hat{z}$ , où  $(x_c, z_c)$  sont les coordonnées du centre du cylindre. Pour un cylindre circulaire,  $a = b$  est le rayon.

Précisons en plus que, dans ce manuscrit, l'indice  $i$  sera appliqué aux trois surfaces  $S_i$  et leurs normales unitaires  $\hat{\mathbf{n}}_i$ , aux courants surfaciques  $\psi_i$  et leurs dérivées normales  $\partial\psi_i/\partial n_i$ , et enfin aux quatre milieux  $\Omega_i$  délimités par les trois surfaces. Par où l'on comprend que l'indice  $i = \{0, 1, 2, 3\}$  pour les quatre milieux, et  $i = \{1, 2, 3\}$  pour les surfaces et leurs normales unitaires, et pour les courants surfaciques et leurs dérivées normales.

## 2.2 Équations intégrales

Nous avons vu que les méthodes intégrales permettent d'évaluer les courants  $\psi_i$  et leurs dérivées normales  $\partial\psi_i/\partial n_i$  sur les surfaces  $S_i$  et à en déduire les champs diffractés dans chaque milieu par le théorème de Huygens. Sachant d'une part que les champs vérifient l'équation d'Helmholtz (1.64) dans chacun des milieux, et d'autre part que l'équation de Helmholtz peut être résolue par les fonctions de Green (1.68) sous la condition de rayonnement à l'infini (1.66), le théorème de Green nous permet d'écrire dans chaque milieu ( $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ) :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}') \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = + \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_1} - g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}')}{\partial n_1} \right] dS + \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}'), \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}') \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = - \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_1} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}')}{\partial n_1} \right] dS + \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_2} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}')}{\partial n_2} \right] dS + \int_{S_3} \left[ \psi_3(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_3} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r}')}{\partial n_3} \right] dS, \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}') \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = - \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_2} - g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}')}{\partial n_2} \right] dS, \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}') \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = - \int_{S_3} \left[ \psi_3(\mathbf{r}) \frac{\partial g_3(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_3} - g_3(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r}')}{\partial n_3} \right] dS, \quad (2.4)$$

où  $g_i$  sont les fonctions de Green dans chacun des milieux  $\Omega_i$  et sont données par :

$$g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|), \quad (2.5)$$

avec  $H_0^{(1)}$  la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro, et  $k_i$  le nombre d'onde dans le milieu  $\Omega_i$ .

La dérivée normale des fonctions de Green

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_i} = \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \nabla g_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.6)$$

est donnée par

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_i} = -\frac{jk_i H_1^{(1)}(k_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}_i. \quad (2.7)$$

La normale à l'interface  $S_i$  est définie par

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \frac{-\zeta'_i \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + (\zeta'_i)^2}}, \quad \text{avec } \zeta'_i = \partial \zeta_i / \partial x. \quad (2.8)$$

Nous rappelons ici que le signe  $(-)$  devant les intégrales sur  $S_1$  dans le milieu  $\Omega_1$ , sur  $S_2$  dans le milieu  $\Omega_2$  et sur  $S_3$  dans le milieu  $\Omega_3$ , viennent du fait que la normale à la surface est dirigée vers le milieu supérieur par rapport à la surface ou vers l'extérieur s'agissant de l'objet.

Pour obtenir les six équations intégrales (deux par surface) qui relient le champ incident  $\psi_{\text{inc}}$  aux champs totaux  $\psi_i$  et leurs dérivées normales  $\partial \psi_i / \partial n_i$  sur les interfaces  $S_i$ , nous devons au préalable trouver les conditions aux limites sur les interfaces. Ainsi, en se positionnant sur chaque interface, on peut calculer les courants surfaciques à la fois dans le milieu supérieur et dans le milieu inférieur (ou à l'extérieur et à l'intérieur de l'objet).

De cette manière, en se positionnant dans le voisinage de la surface supérieure  $S_1$ , au-dessus ou en dessous de la surface, les conditions aux limites imposent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega_0} = \psi_1(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega_1} \\ \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega_0} = \rho_{01} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega_1} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où  $\rho_{01} = 1$  dans le cas de la polarisation TE et  $\rho_{01} = \varepsilon_{r0} / \varepsilon_{r1}$  dans le cas de la polarisation TM.

Alors, si d'une part,  $\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \in \Omega_0)$  tend vers la surface  $S_1$ , à partir de l'équation (2.1) dérivée pour le milieu supérieur  $\Omega_0$ , on obtient la première équation intégrale :

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}') = \underbrace{+\frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_1} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow A_1} + \underbrace{\int_{S_1} g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} dS}_{\Rightarrow B_1}, \quad (2.10)$$

$$\forall \mathbf{r}' \in S_1.$$

D'autre part, si  $\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \in \Omega_1)$  tend vers la surface  $S_1$ , alors l'équation (2.2) dérivée pour

le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  permet d'écrire la deuxième équation intégrale :

$$\begin{aligned}
 0 = & \underbrace{-\frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_1} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{C}_1} + \frac{1}{\rho_{01}} \underbrace{\int_{S_1} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} dS}_{\Rightarrow \bar{D}_1}, \\
 & + \underbrace{\int_{S_2} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_{21}} - \underbrace{\int_{S_2} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_{21}}, \\
 & + \underbrace{\int_{S_3} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_3} \psi_3(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_{31}} - \underbrace{\int_{S_3} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_{31}}, \\
 & \forall \mathbf{r}' \in S_1.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ensuite, en se positionnant dans le voisinage de la surface de l'objet  $S_2$ , à l'extérieur ou à l'intérieur de l'objet, les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} \psi_2(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega_1} = \psi_2(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega_2} \\ \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega_1} = \rho_{12} \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega_2} \end{cases} \tag{2.12}$$

où  $\rho_{12} = 1$  dans le cas de la polarisation TE et  $\rho_{12} = \varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}$  dans le cas de la polarisation TM.

Si  $\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \in \Omega_1)$  tend vers la surface  $S_2$ , alors l'équation (2.2) dans  $\Omega_1$  permet d'obtenir la troisième équation intégrale :

$$\begin{aligned}
 0 = & \underbrace{+\frac{1}{2}\psi_2(\mathbf{r}') - \int_{S_2} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_2} + \underbrace{\int_{S_2} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_2}, \\
 & + \underbrace{\int_{S_1} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_{12}} - \underbrace{\int_{S_1} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_{12}} \frac{1}{\rho_{01}}, \\
 & + \underbrace{\int_{S_3} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_3} \psi_3(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_{32}} - \underbrace{\int_{S_3} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_{32}}, \\
 & \forall \mathbf{r}' \in S_2.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si cette fois  $\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \in \Omega_2)$  tend vers la surface  $S_2$ , alors de l'équation (2.3) pour le milieu

$\Omega_2$ , on en déduit la quatrième équation intégrale :

$$0 = \underbrace{-\frac{1}{2}\psi_2(\mathbf{r}') - \int_{S_2} \frac{\partial g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{C}_2} + \frac{1}{\rho_{12}} \underbrace{\int_{S_2} g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} dS}_{\Rightarrow \bar{D}_2}, \quad (2.14)$$

$\forall \mathbf{r}' \in S_2.$

Enfin, en se positionnant dans le voisinage de la surface inférieure  $S_3$ , au-dessus ou en dessous de la surface, les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} \psi_3(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega_1} = \psi_3(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega_3} \\ \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega_1} = \rho_{13} \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} \Big|_{\mathbf{r} \in \Omega_3} \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\rho_{13} = 1$  dans le cas de la polarisation TE et  $\rho_{13} = \varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r3}$  dans le cas de la polarisation TM.

Pour  $\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \in \Omega_1)$  qui tend vers la surface  $S_3$ , l'équation (2.2) dans le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  permet d'obtenir la cinquième équation intégrale :

$$\begin{aligned} 0 = & \underbrace{+\frac{1}{2}\psi_3(\mathbf{r}') - \int_{S_3} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_3} \psi_3(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_3} + \underbrace{\int_{S_3} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_3}, \\ & + \underbrace{\int_{S_1} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_{13}} - \underbrace{\int_{S_1} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_{13}} \frac{1}{\rho_{01}}, \\ & + \underbrace{\int_{S_2} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{A}_{23}} - \underbrace{\int_{S_2} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} dS}_{\Rightarrow \bar{B}_{23}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\forall \mathbf{r}' \in S_3.$

Pour  $\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \in \Omega_3)$  tendant vers la surface  $S_3$ , l'équation (2.4) pour le milieu inférieur  $\Omega_3$  permet d'obtenir la sixième équation intégrale :

$$0 = \underbrace{-\frac{1}{2}\psi_3(\mathbf{r}') - \int_{S_3} \frac{\partial g_3(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_3} \psi_3(\mathbf{r}) dS}_{\Rightarrow \bar{C}_3} + \frac{1}{\rho_{13}} \underbrace{\int_{S_3} g_3(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} dS}_{\Rightarrow \bar{D}_3}, \quad (2.17)$$

$\forall \mathbf{r}' \in S_3.$

Nous avons ainsi les six équations intégrales (2.10), (2.11), (2.13), (2.14), (2.16) et (2.17) qui constituent le modèle intégral, et relient le champ incident  $\psi_{\text{inc}}$  aux champs totaux  $\psi_i$  et leurs dérivées normales  $\partial\psi_i/\partial n_i$  sur les interfaces  $S_i$ . Les inconnues de ces six équations sont les courants surfaciques recherchés  $\{\psi_i, \partial\psi_i/\partial n_i\}$ . L'absence totale de méthodes analytiques pour la résolution de ce type d'équations nous conduit à envisager des résolutions numériques, ainsi que nous l'avons déjà souligné au premier chapitre. Nous allons donc à présent discrétiser ces équations intégrales par la Méthode des Moments pour ainsi obtenir un système linéaire ayant pour inconnues ces courants surfaciques.

## 2.3 Méthode des Moments

### 2.3.1 Discrétisation du modèle intégral

Nous pouvons maintenant appliquer la Méthode des Moments avec des fonctions de collocation. Des conditions aux limites sur les interfaces (2.9), (2.12) et (2.15), et des six équations intégrales (2.10), (2.11), (2.13), (2.14), (2.16) et (2.17), soient deux équations par interface, on en déduit un système linéaire contenant les courants surfaciques et leurs dérivées normales.

Ainsi, nous avons tout d'abord pour les équations liées à la surface supérieure :  $\forall m = 1, \dots, N_1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} \left( A_{1,mn} \psi_1(\mathbf{r}_n) + B_{1,mn} \frac{\psi_1(\mathbf{r}_n)}{\partial n_1} \right) &= \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_m), \\ \sum_{n=1}^{N_1} \left( C_{1,mn} \psi_1(\mathbf{r}_n) + \rho_{10} D_{1,mn} \frac{\psi_1(\mathbf{r}_n)}{\partial n_1} \right) + \sum_{n=1}^{N_2} \left( A_{21,mn} \psi_2(\mathbf{r}_n) + B_{21,mn} \frac{\psi_2(\mathbf{r}_n)}{\partial n_2} \right) \\ + \sum_{n=1}^{N_3} \left( A_{31,mn} \psi_3(\mathbf{r}_n) + B_{31,mn} \frac{\psi_3(\mathbf{r}_n)}{\partial n_3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ensuite, pour les équations liées à l'objet :  $\forall m = 1, \dots, N_2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} \left( A_{12,mn} \psi_1(\mathbf{r}_n) + \rho_{10} B_{12,mn} \frac{\psi_1(\mathbf{r}_n)}{\partial n_1} \right) + \sum_{n=1}^{N_2} \left( A_{2,mn} \psi_2(\mathbf{r}_n) + B_{2,mn} \frac{\psi_2(\mathbf{r}_n)}{\partial n_2} \right) \\ + \sum_{n=1}^{N_3} \left( A_{32,mn} \psi_3(\mathbf{r}_n) + B_{32,mn} \frac{\psi_3(\mathbf{r}_n)}{\partial n_3} \right) &= 0, \\ \sum_{n=1}^{N_2} \left( C_{2,mn} \psi_2(\mathbf{r}_n) + \rho_{21} D_{2,mn} \frac{\psi_2(\mathbf{r}_n)}{\partial n_2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$



Enfin, pour les équations liées à la surface inférieure :  $\forall m = 1, \dots, N_3$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_1} \left( A_{13,mn} \psi_1(\mathbf{r}_n) + \rho_{10} B_{13,mn} \frac{\psi_1(\mathbf{r}_n)}{\partial n_1} \right) + \sum_{n=1}^{N_2} \left( A_{23,mn} \psi_2(\mathbf{r}_n) + B_{23,mn} \frac{\psi_2(\mathbf{r}_n)}{\partial n_2} \right) \\ & + \sum_{n=1}^{N_3} \left( A_{3,mn} \psi_3(\mathbf{r}_n) + B_{3,mn} \frac{\psi_3(\mathbf{r}_n)}{\partial n_3} \right) = 0, \\ & \sum_{n=1}^{N_3} \left( C_{3,mn} \psi_2(\mathbf{r}_n) + \rho_{31} D_{3,mn} \frac{\psi_2(\mathbf{r}_n)}{\partial n_2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où les coefficients  $A_{i,mn}$ ,  $B_{i,mn}$ ,  $C_{i,mn}$ ,  $D_{i,mn}$ ,  $A_{ii',mn}$ , et  $B_{ii',mn}$  ( $i, i' = 1, 2, 3$ ) dépendent de la forme et des propriétés électriques des interfaces. Les coefficients n'ayant qu'un seul indice, en l'occurrence l'indice  $i$ , sont liés aux interfaces prises isolément, et sont donnés pour la surface supérieure par [48] :

$$A_{1,mn} = \begin{cases} -\frac{jk_0 v_n |\Delta_n| H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n, \\ +\frac{1}{2} - \frac{v_n |\Delta_n|}{4\pi} \frac{\gamma'(x_n)}{1 + \gamma^2(x_n)}, & \text{pour } m = n. \end{cases} \quad (2.21)$$

$$B_{1,mn} = \frac{j|\Delta_n| \sqrt{1 + \gamma_n^2}}{4} \begin{cases} \left[ 1 + \frac{2j}{\pi} \ln(0.164k_0 \sqrt{1 + \gamma_n^2} \Delta_n) \right], & \text{pour } m = n, \\ H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|), & \text{pour } m \neq n. \end{cases} \quad (2.22)$$

$$C_{1,mn} = \begin{cases} -\frac{jk_1 v_n |\Delta_n| H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \times [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)], & \text{pour } m \neq n, \\ -\frac{1}{2} - \frac{v_n |\Delta_n|}{4\pi} \frac{\gamma'(x_n)}{1 + \gamma^2(x_n)}, & \text{pour } m = n. \end{cases} \quad (2.23)$$

$$D_{1,mn} = \frac{j|\Delta_n| \sqrt{1 + \gamma_n^2}}{4} \begin{cases} \left[ 1 + \frac{2j}{\pi} \ln(0.164k_1 \sqrt{1 + \gamma_n^2} \Delta_n) \right], & \text{pour } m = n, \\ H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|), & \text{pour } m \neq n. \end{cases} \quad (2.24)$$

où

$$\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| = \sqrt{(x_n - z_n)^2 + (x_m - z_m)^2} \quad (2.25)$$

et  $(x_n, z_n) \in S_i$ ,  $(x_m, z_m) \in S_i$ ,  $\gamma = dz/dx$ ,  $v = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  est le sens de la normale à la surface,  $|\Delta_n|$  est le pas de discrétisation,  $H_0^{(1)}$  est une fonction de Hankel d'ordre zero de première espèce et  $H_1^{(1)}$  sa dérivée.

Les coefficients  $A_{2,mn}$ ,  $B_{2,mn}$ ,  $C_{2,mn}$ , et  $D_{2,mn}$ , sont obtenus à partir de  $A_{1,mn}$ ,  $B_{1,mn}$ ,  $C_{1,mn}$ , et  $D_{1,mn}$ , dans lesquels les nombres d'onde  $\{k_0, k_0, k_1, k_1\}$  sont respectivement remplacés par  $\{k_1, k_1, k_2, k_2\}$ . De la même manière, on obtient les coefficients  $A_{3,mn}$ ,  $B_{3,mn}$ ,  $C_{3,mn}$ , et  $D_{3,mn}$  en remplaçant les nombres d'onde par  $\{k_1, k_1, k_3, k_3\}$ .

De plus, les coefficients liés au couplage entre les trois interfaces sont donnés  $\forall i, i' = 1, 2, 3$  par :

$$A_{ii',nm} = -\frac{jk_1 v_{i,n} |\Delta_{i,n}| H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_{i,n} - \mathbf{r}_{i',m}\|)}{4 \|\mathbf{r}_{i,n} - \mathbf{r}_{i',m}\|} \times [\gamma_{i,n}(x_{i,n} - x_{i',m}) - (z_{i,n} - z_{i',m})] \quad (2.26)$$

et

$$B_{ii',nm} = \frac{j|\Delta_{i,n}| \sqrt{1 + \gamma_{i,n}^2}}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_{i,n} - \mathbf{r}_{i',m}\|). \quad (2.27)$$

Les indices  $i, n$  et  $i', m$  indiquent que les points considérés sont sur deux interfaces différentes.

Les coefficients ainsi définis sont en réalité les éléments des sous-matrices de la matrice impédance globale, de telle manière que les sous-matrices  $\bar{\mathbf{A}}_i$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_i$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_i$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_i$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{ii'}$ , et  $\bar{\mathbf{B}}_{ii'}$  sont respectivement obtenues à partir des coefficients  $A_{i,mn}$ ,  $B_{i,mn}$ ,  $C_{i,mn}$ ,  $D_{i,mn}$ ,  $A_{ii',mn}$ , et  $B_{ii',mn}$  ( $i, i' = 1, 2, 3$ ).

Nous rappelons que nous avons deux équations par interface, ce qui justifie que le nombre d'équations, qui est égal au nombre d'échantillons sur l'interface, n'est pas le même sur toutes les interfaces. Néanmoins, toutes les équations mises ensemble donnent un système linéaire complet. Dans ce qui suit, nous privilégions la résolution du système linéaire (2.18)-(2.20) par la méthode d'inversion de la matrice impédance. Les questions liées à la régularité et la stabilité de la matrice impédance ne se posent pas ici grâce à la géométrie du problème.

### 2.3.2 Matrice impédance

L'obtention de la matrice impédance complète facilite l'écriture du système linéaire (2.18)-(2.20) sous la forme matricielle globale :

$$\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.28)$$

où la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  est donnée par

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \frac{1}{\rho_{01}}\bar{\mathbf{D}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{B}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{31} & \bar{\mathbf{B}}_{31} \\ \bar{\mathbf{A}}_{12} & \frac{1}{\rho_{01}}\bar{\mathbf{B}}_{12} & \bar{\mathbf{A}}_2 & \bar{\mathbf{B}}_2 & \bar{\mathbf{A}}_{32} & \bar{\mathbf{B}}_{32} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{C}}_2 & \frac{1}{\rho_{12}}\bar{\mathbf{D}}_2 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{A}}_{13} & \frac{1}{\rho_{01}}\bar{\mathbf{B}}_{13} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{B}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_3 & \bar{\mathbf{B}}_3 \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{C}}_3 & \frac{1}{\rho_{13}}\bar{\mathbf{D}}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

La matrice impédance est de taille  $2(N_1 + N_2 + N_3) \times 2(N_1 + N_2 + N_3)$ .

Les vecteurs inconnus  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3]^T$  contiennent les courants surfaciques et leurs dérivées normales, qui s'écrivent :

$$\mathbf{X}_i = \left[ \psi_i(\mathbf{r}_1) \cdots \psi_i(\mathbf{r}_{N_i}) \quad \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r}_1)}{\partial n_i} \cdots \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r}_{N_i})}{\partial n_i} \right]^T \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{r}_{p \in [1; N_i]} \in S_i, i = \{1, 3\}$  pour les deux surfaces, et  $\mathbf{r}_{p \in [1; N_2]} \in S_2$  pour l'objet.

Le terme de droite  $\mathbf{b}$  est la source et contient des informations sur le champ incident :

$$\mathbf{b} = \left[ \underbrace{\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) \cdots \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_{N_1})}_{\mathbf{b}_1^T} \quad \underbrace{\underbrace{0 \cdots 0}_{N_1 \text{ fois}}}_{\mathbf{b}_2^T} \quad \underbrace{\underbrace{0 \cdots 0}_{N_2 \text{ fois}} \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{N_2 \text{ fois}}}_{\mathbf{b}_2^T} \quad \underbrace{\underbrace{0 \cdots 0}_{N_3 \text{ fois}} \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{N_3 \text{ fois}}}_{\mathbf{b}_3^T} \right]^T. \quad (2.31)$$

Il est commode d'écrire la matrice impédance sous forme condensée suivante :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{21} & \bar{\mathbf{Z}}_{31} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} & \bar{\mathbf{Z}}_{32} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{13} & \bar{\mathbf{Z}}_{23} & \bar{\mathbf{Z}}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Sous cette forme, les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont des matrices impédances de chacune des surfaces  $S_i$  prises isolément tandis que les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) avec  $i \neq j$  sont des matrices de couplage de la surface  $\bar{\mathbf{Z}}_i$  vers la surface  $\bar{\mathbf{Z}}_j$ .

Dans le cas de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces

rugueuses, les sous-matrices de la matrice impédance sont :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Z}}_{11} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \frac{\bar{\mathbf{D}}_1}{\rho_{01}} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}_{21} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{B}}_{21} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}_{31} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{A}}_{31} & \bar{\mathbf{B}}_{31} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} & \frac{\bar{\mathbf{B}}_{12}}{\rho_{01}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}_{22} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_2 & \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \frac{\bar{\mathbf{D}}_2}{\rho_{12}} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{32} & \bar{\mathbf{B}}_{32} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{13} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{13} & \frac{\bar{\mathbf{B}}_{13}}{\rho_{01}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}_{23} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{B}}_{23} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}_{33} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_3 & \bar{\mathbf{B}}_3 \\ \bar{\mathbf{C}}_3 & \frac{\bar{\mathbf{D}}_3}{\rho_{13}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il est précieux de remarquer que les matrices de couplage sont non nulles car les trois interfaces sont en interaction directe entre elles. Et puisqu'une interface ne peut être éclairée à la fois au dessus et en dessous (de l'extérieur et de l'intérieur pour un objet) par un même diffuseur, cela se traduit mathématiquement par le fait que les blocs supérieurs de matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{31}$  sont nuls car la surface supérieure n'est éclairée par l'objet et la surface inférieure que dans le milieu intermédiaire  $\Omega_1$ . De même, les blocs inférieurs de  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{32}$  sont nuls car l'objet n'est éclairé que de l'extérieur. Enfin, dans les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{13}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{23}$ , les blocs inférieurs sont nuls car la surface inférieure n'est éclairée que dans le milieu intermédiaire  $\Omega_1$ .

### Remarque 2.

- Si l'on considère uniquement la surface supérieure avec l'objet, on obtient une matrice impédance conforme au cas d'un objet enfoui sous une surface rugueuse :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

- Si par contre on considère uniquement la surface inférieure avec l'objet, on obtient une matrice impédance conforme au cas d'un objet au dessus d'une surface rugueuse :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{22} & \bar{\mathbf{Z}}_{32} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{23} & \bar{\mathbf{Z}}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

- En l'absence de l'objet, nous obtenons une matrice impédance conforme au cas de deux

interfaces rugueuses :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{31} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{13} & \bar{\mathbf{Z}}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Cette remarque établit une validation théorique et rapide du modèle intégral et de la méthode des moments par rapport aux travaux existants sur la diffraction électromagnétique, dans le cas de deux surfaces rugueuses [41], d'un objet enfoui sous une surface rugueuse [103], et d'un objet au dessus d'une surface rugueuse [104].

Notons par ailleurs que le modèle intégral et la méthode des moments développés ici sont aussi valables pour le cas de deux objets enfouis sous une surface rugueuse. En effet, il s'agit avant tout de deux interfaces enfouies sous une surface éclairée par l'onde incidente. Nous reviendrons sur ce cas plus loin, sans toutefois entrer dans les détails, car une telle étude sort du cadre de cette thèse.

### 2.3.3 Champs diffractés dans chaque milieu

Les courants surfaciques  $\psi_i$  et leurs dérivées normales  $\partial\psi_i/\partial n_i$  sur les trois interfaces  $S_i$  étant connus, on peut calculer les champs diffractés en champ proche  $\psi_{\text{sca},i}(\mathbf{r}')$  dans chacun des milieux  $\Omega_i$  :

$$\psi_{\text{sca},0}(\mathbf{r}') = + \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_1} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} \right] dS, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sca},1}(\mathbf{r}') = & - \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_1} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} \right] dS \\ & + \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_2} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} \right] dS \\ & + \int_{S_3} \left[ \psi_3(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_3} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} \right] dS, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\psi_{\text{sca},2}(\mathbf{r}') = - \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_2} - g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_2} \right] dS, \quad (2.38)$$

$$\psi_{\text{sca},3}(\mathbf{r}') = - \int_{S_3} \left[ \psi_3(\mathbf{r}) \frac{\partial g_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_3} - g_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_3(\mathbf{r})}{\partial n_3} \right] dS. \quad (2.39)$$

De plus, le champ diffracté en champ lointain dans le milieu  $\Omega_0$  est donné par

$$\psi_{\text{sca},0}^{\infty} = -\frac{1}{\psi_{\text{inc},0}} \int_{S_1} \left[ j\mathbf{k}_{\text{sca}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \psi_1(\mathbf{r}) + \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_1} \right] e^{-j\mathbf{k}_{\text{sca}} \cdot \mathbf{r}} dS, \quad (2.40)$$

où  $\psi_{\text{inc},0}$  est le module du champ incident  $\psi_{\text{inc}}$  dans le milieu  $\Omega_0$  et  $\hat{\mathbf{n}}_1$  un vecteur unitaire normal à la surface supérieure et orienté vers le milieu incident  $\Omega_0$ . Le vecteur  $\mathbf{k}_{\text{sca}}$  donne la direction de l'observation. A partir de l'onde de Thorsos, on obtient la Surface Équivalente Radar Normalisée (SERN) dans le milieu incident  $\Omega_0$  par l'expression (1.92).

### 2.3.4 Cas parfaitement conducteurs

Nous pouvons considérer les cas où l'objet et/ou la surface inférieure sont des conducteurs parfaits. Dans ces cas, les matrices impédances se simplifient. Si l'objet est un conducteur parfait, alors  $\psi_2$  s'annule sur l'interface de l'objet en polarisation Transverse Électrique (TE, conditions aux limites de Dirichlet) et la seule inconnue est  $\partial\psi_2/\partial n_2$ . Par contre, en polarisation Transverse Magnétique (TM, conditions aux limites de Neumann),  $\partial\psi_2/\partial n_2$  s'annule sur l'interface de l'objet et la seule inconnue est  $\psi_2$ . Alors nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{TE : } \bar{\mathbf{Z}}_{22} = \bar{\mathbf{B}}_2, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} & \frac{1}{\rho_{01}} \bar{\mathbf{B}}_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{32} & \bar{\mathbf{B}}_{32} \end{bmatrix}, \\ \quad \bar{\mathbf{Z}}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{B}}_{21} \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{23} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}^T. \\ \text{TM : } \bar{\mathbf{Z}}_{22} = \bar{\mathbf{A}}_2, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} & \frac{1}{\rho_{01}} \bar{\mathbf{B}}_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{32} & \bar{\mathbf{B}}_{32} \end{bmatrix}, \\ \quad \bar{\mathbf{Z}}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{A}}_{21} \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}^T. \end{array} \right. \quad (2.41)$$

D'autre part, si la surface inférieure est un conducteur parfait, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{TE : } \bar{\mathbf{Z}}_{33} = \bar{\mathbf{B}}_3, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{13} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{13} & \frac{1}{\rho_{01}} \bar{\mathbf{B}}_{13} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{B}}_{23} \end{bmatrix}, \\ \quad \bar{\mathbf{Z}}_{31} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{B}}_{31} \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{32} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}^T. \\ \text{TM : } \bar{\mathbf{Z}}_{33} = \bar{\mathbf{A}}_3, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{13} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{13} & \frac{1}{\rho_{01}} \bar{\mathbf{B}}_{13} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{B}}_{23} \end{bmatrix}, \\ \quad \bar{\mathbf{Z}}_{31} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{A}}_{31} \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{32} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{32} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}^T. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

A partir de ces deux cas, nous pouvons retrouver le cas où l'objet et la surface inférieure sont tous des conducteurs parfaits.

### 2.3.5 Validations numériques du modèle intégral

Nous avons vu dans la remarque 2 une validation théorique et rapide du modèle intégral et de la Méthode des Moments qui montre qu'en absence de l'un des trois diffuseurs, nous obtenons un résultat conforme avec la diffraction par les deux autres diffuseurs. Nous allons maintenant présenter quelques validations numériques du modèle en montrant sa conformité avec la théorie de la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses.

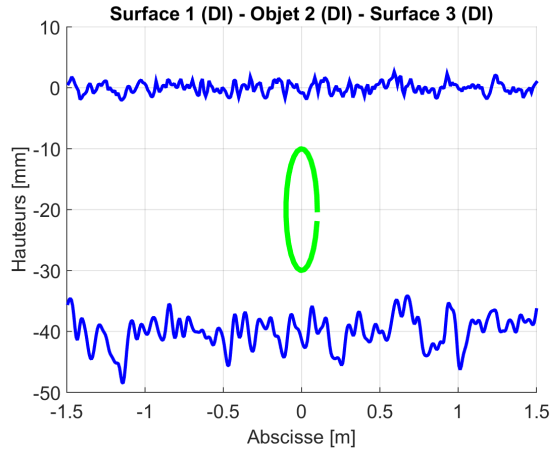


FIGURE 2.2 – Hauteurs des surfaces par rapport à l'abscisse pour une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation gaussienne. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 1$  mm et  $\sigma_{h,3} = 2.5$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. Le centre du cylindre elliptique est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. Le nombre de points par longueur d'onde dans le vide est  $N_{\lambda_0} = 10$ .

Pour ce faire, considérons deux surfaces rugueuses  $S_1$  et  $S_3$ , qui séparent trois milieux  $\Omega_i$  ( $i \in \{0, 1, 3\}$ ). Le milieu supérieur  $\Omega_0$  est considéré comme de l'air et sa permittivité relative vaut 1. Le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  est une couche d'épaisseur moyenne  $H = 40$  mm. Le milieu inférieur  $\Omega_3$ , quant à lui, est une couche d'épaisseur infinie. De plus, nous supposons que les trois milieux sont homogènes. Considérons que les permittivités relatives  $\epsilon_{r,i}$  des milieux intermédiaire et inférieur sont respectivement  $\epsilon_{r,1} = 2$  et  $\epsilon_{r,3} = 4$ .

Les deux surfaces ont une même longueur  $L = 3000$  mm, et sont générées par une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation gaussienne. De plus, nous supposons qu'elles ne sont pas corrélées. Pour la surface supérieure, nous considérons que l'écart-type des hauteurs est de l'ordre de  $0.6 - 1$  mm et la longueur de corrélation varie entre  $5 - 10$  mm, pour avoir une situation proche du cas des routes [105, 106]. Ces deux paramètres sont un peu plus grands pour la surface inférieure.

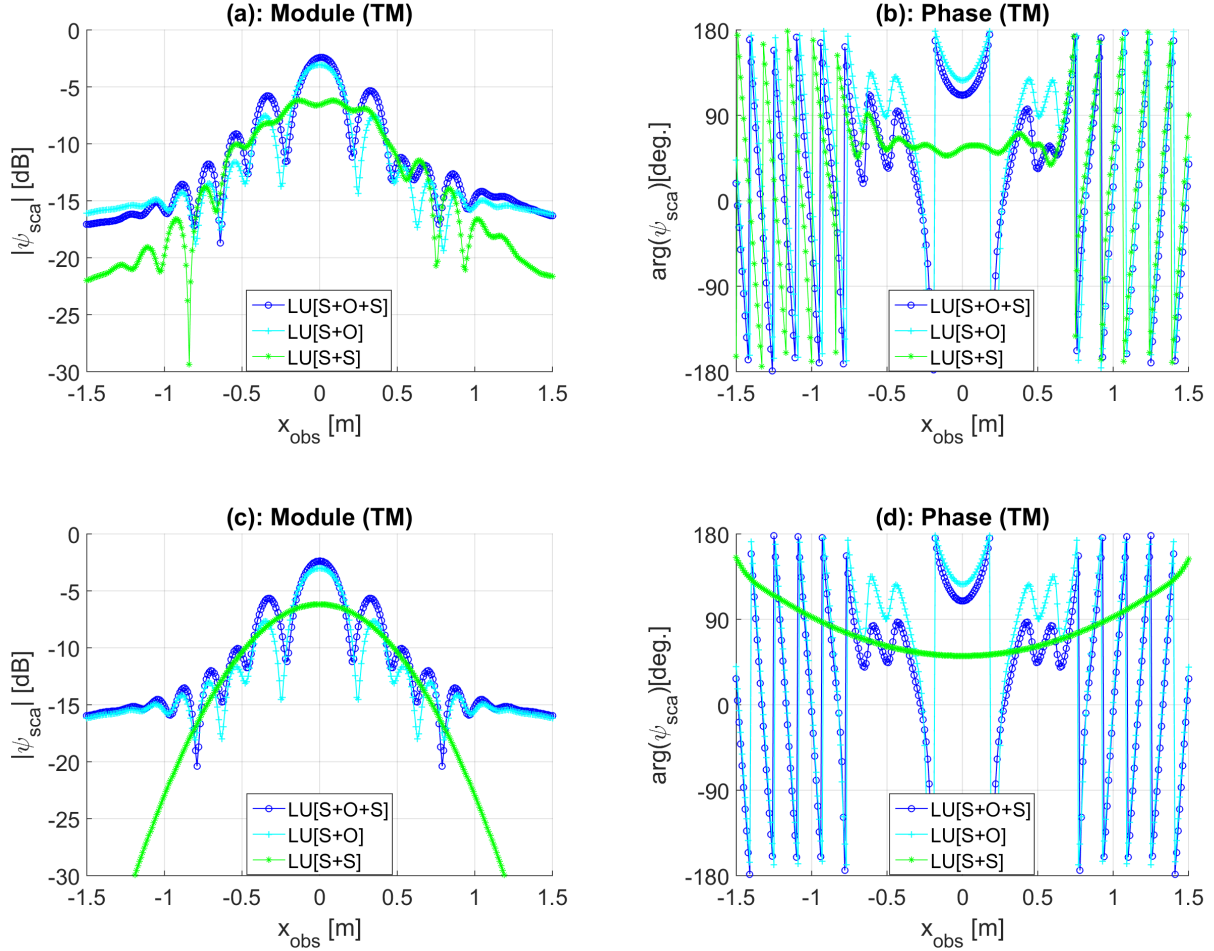


FIGURE 2.3 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) et phase par rapport à l’abscisse d’observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ), et pour une hauteur d’observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. L’onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), à la fréquence  $f = 2$  GHz, et dont le paramètre d’atténuation est  $g = L/6$ . Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (a)-(b) Surfaces rugueuses, avec les paramètres de la figure 2.2. (c)-(d) Surfaces planes.



Pour cette étude, nous considérons respectivement les écarts-types suivants  $\sigma_{h1} = 1$  mm et  $\sigma_{h3} = 2.5$  mm, et les longueurs de corrélation suivantes  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. Nous considérons dans ce manuscrit une seule réalisation des deux surfaces. Considérons maintenant un cylindre elliptique enfoui entre les deux surfaces, centré au point  $C = (0, -0.5H)$  et dont les grand et petit demi-axes sont respectivement  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. La figure 2.2 présente les hauteurs des surfaces (en mm) par rapport à l'abscisse (en mm).

Étant donné que nous utilisons un Radar à Pénétration de Sol, nous considérons une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{inc} = 0^\circ$ ), de fréquence  $f = 2$  GHz et dont le paramètre d'atténuation vaut  $g = L/6$ . La longueur d'onde dans le vide vaut  $\lambda_0 = 150$  mm et le nombre des points  $N_{\lambda_0}$  par longueur d'onde dans le vide est 10. Dans la légende, S+O+S représente le cas d'un objet enfoui entre deux surfaces, tandis que S+O représente un objet enfoui sous une surface, et S+S le cas de deux surfaces superposées. Dans toutes ces méthodes, les inverses des matrices impédances sont calculées par la méthode LU, qui servira de référence pour la validation de la méthode GPILE dérivée dans ce chapitre.

Les figures 2.3 (a)-(b) présentent le module et la phase du champ diffracté pour le scénario décrit ci-haut, alors que les figures 2.3 (c)-(d) présentent le cas où les deux surfaces sont planes, en conservant les autres paramètres du scénario. On peut bien voir sur ces figures la différence entre le champ diffracté du cas d'un objet enfoui entre deux interfaces et ceux du cas de deux interfaces ou d'un objet enfoui sous une interface. Cette différence provient des interactions entre les interfaces, car pour le premier cas, la surface supérieure interagit à la fois avec l'objet et la surface inférieure tandis que dans les autres cas elle interagit seulement avec l'un des deux diffuseurs enfouis. De plus, la symétrie des courbes est préservée pour le cas des surfaces planes, l'objet étant centré en  $x = 0$ .

Concernant les paramètres physiques tels que les permittivités relatives, nous montrons dans la figure 2.4 (a) que lorsque la permittivité relative de l'objet est égale à celle du milieu intermédiaire, alors le champ diffracté par un objet enfoui entre deux surfaces est égal à celui de deux surfaces, car l'onde n'est pas affecté par l'objet lors de son passage dans le milieu intermédiaire. D'autre part, lorsque la permittivité du milieu intermédiaire est égale à celle du milieu inférieure, alors la diffraction par un objet enfoui entre deux surfaces est égale à celle d'un objet enfoui sous une surface ainsi que le montre la figure 2.4 (b). Par ailleurs, on peut observer sur les figures 2.4 (c)-(d) que les contributions de l'objet ou de la surface inférieure sont beaucoup plus importantes lorsque ces deux diffuseurs sont des conducteurs parfaits.

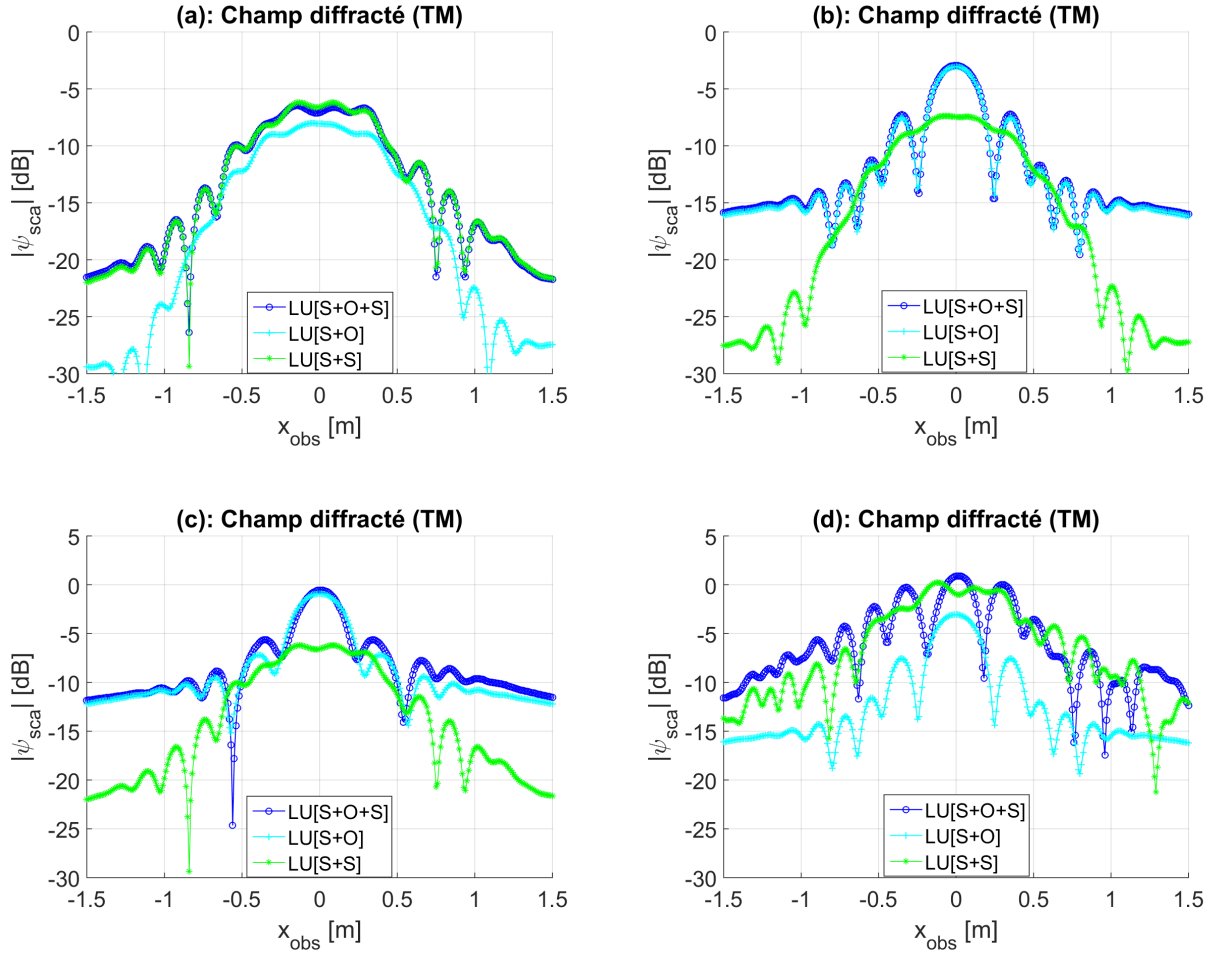


FIGURE 2.4 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{sca}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (a) L'objet a la même permittivité que le milieu intermédiaire. (b) La permittivité du milieu intermédiaire est égale à celle du milieu inférieur. (c) L'objet est un conducteur parfait. (d) La surface inférieure est un conducteur parfait.

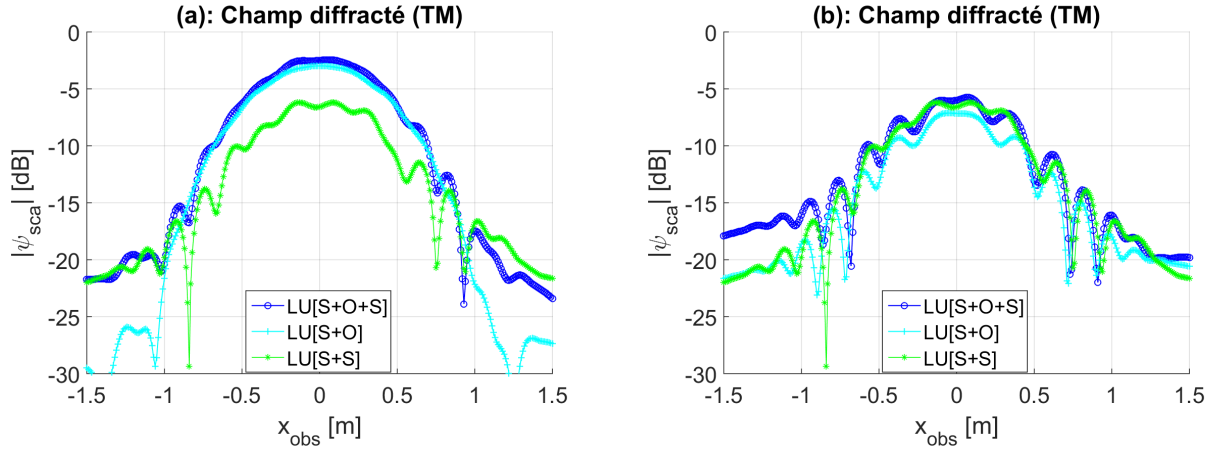


FIGURE 2.5 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. (a) Grand cylindre de centre  $C = (0, -0.5H)$ , avec  $a = 1000$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Petit cylindre de centre  $C = (0, -0.5H)$ , avec  $a = b = 10$  mm.

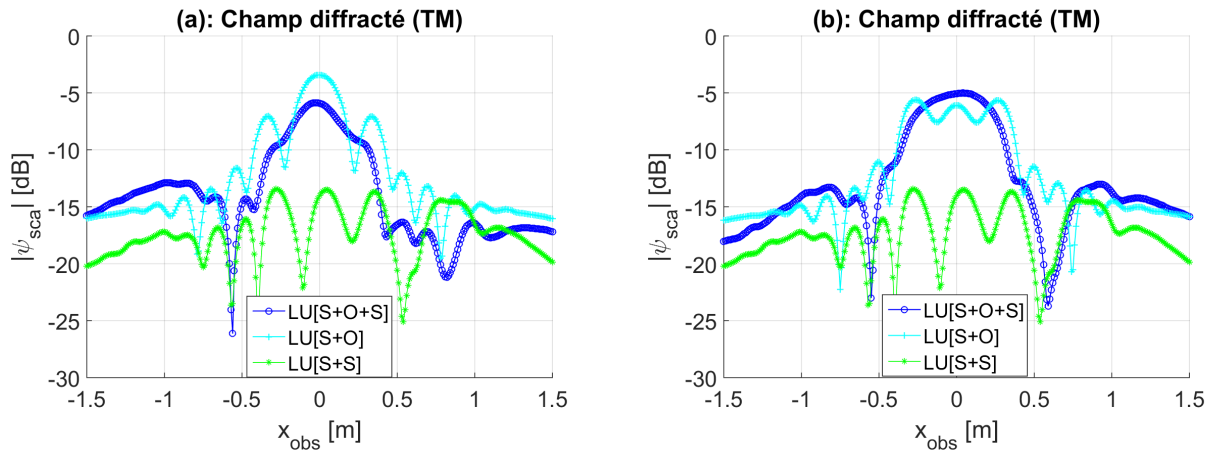


FIGURE 2.6 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2, excepté l'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 240$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les dimensions du cylindre elliptique sont  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. Le centre du cylindre varie. (a)  $C = (0, -0.1H)$ . (b)  $C = (0, -0.15H)$ .

De même, nous montrons l'impact de certains paramètres géométriques de l'objet (comme sa taille, sa position et sa forme) sur le champ diffracté. La figure 2.5 (a) présente le cas d'un grand cylindre elliptique de demi-grand axe  $a = 1000$  mm tandis que la figure 2.5 (b) présente le cas d'un petit cylindre elliptique de demi-grand axe  $a = 10$  mm. Le demi-petit axe est  $b = 10$  mm pour les deux cylindres. On peut voir sur les niveaux des courbes que la contribution de l'objet varie proportionnellement à sa taille. Plusieurs simulations numériques que nous ne présentons pas ici montrent également que le champ diffracté par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, tend vers celui de deux surfaces rugueuses lorsque l'objet devient plus petit, les autres paramètres restant par ailleurs les mêmes.

Pour ce qui est de la position, i.e. la profondeur de l'objet, il nous paraît raisonnable d'envisager l'évidence que la contribution de l'objet varie avec sa profondeur. En effet, les figures 2.6 (a) et (b) montrent que même une petite variation de profondeur peut avoir un impact significatif sur l'allure du signal. Sur ces deux figures par exemple, où l'épaisseur entre les deux surfaces est plus grande comparé au scénario décrit dans la figure 2.2, soit  $H = 240$  mm, pour mieux visualiser l'impact de la profondeur sur le champ diffracté, nous avons les deux positions suivantes  $C = (0, -0.1H)$  et  $C = (0, -0.15H)$ , ce qui fait une différence de seulement 12 mm, et pourtant la différence est déjà perceptible. Nous verrons au chapitre prochain que la différence de l'allure du signal peut provenir des interférences constructives et/ou destructives entre la contribution de l'objet et celle de l'une des surfaces, selon que l'objet est proche de l'une de deux surfaces.

Du reste, il a déjà été établi que le champ diffracté dans le cas de deux interfaces rugueuses superposées dépend de plusieurs paramètres géométriques et physiques tels que les permittivités des milieux, les paramètres statistiques des interfaces et l'épaisseur entre ces interfaces [41]. S'agissant maintenant de l'étude d'un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, plusieurs simulations que nous avons présentés dans cette étude montrent qu'en plus des paramètres des surfaces, le champ diffracté dépend aussi des paramètres de l'objet tels que sa taille, sa forme, sa position et sa permittivité. De cette manière, la sensibilité du champ diffracté à la variation de ces paramètres pourrait permettre une caractérisation de l'objet dans un problème inverse.

Nous venons de voir comment calculer les courants surfaciques par la méthode des moments à partir d'un modèle intégral. La complexité algorithmique de l'inversion de la matrice impédance obtenue par la méthode des moments nous conduit à envisager des méthodes numériques approchées. En effet, l'efficacité d'un algorithme peut être évaluée

par les ressources matérielles mises à disposition lors de son exécution d'une part, et par son temps d'exécution d'autre part. Ainsi, la complexité algorithmique peut être spatiale (la quantification de l'utilisation de la mémoire) ou bien temporelle (la quantification de la vitesse d'exécution). Pour notre cas, nous voulons établir un algorithme optimal du point de vue des deux types de complexité, mais en mettant plus l'accent sur la complexité spatiale, car l'espace mémoire disponible est une condition sine qua none pour la mise en œuvre de l'algorithme. Par exemple, dans le scénario de base représenté dans la figure 2.3 (a)-(b), la matrice impédance globale est de taille  $N = 1422$  ( $N$  étant le nombre total d'échantillons sur les trois diffuseurs) et donc la complexité mémoire est de  $1422^2$  pour la méthode d'inversion classique LU. La complexité en nombre d'opérations, quant à elle, est de  $1422^3$  pour cette méthode. Le calcul des courants surfaciques par la méthode LU prend presque 3 secondes sur un ordinateur portable de 4 Go Ram, avec un processeur Intel® Celeron® CPU N3060@ 1.60Ghz 1.60Ghz.

Nous allons à présent étendre l'algorithme PILE [41] au cas d'un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, afin de réduire la complexité de l'inversion de la matrice impédance obtenue par la Méthode des Moments. Mais avant cette opération, nous présentons un état de l'art sur la méthode PILE, ses variantes et ses extensions.

## 2.4 Méthodes de résolution GPILE

### 2.4.1 Méthodes rapides

Dans le cas de la diffraction par deux surfaces rugueuses, le nombre d'inconnues augmente et la matrice impédance devient de grande taille, ce qui accorde un intérêt particulier aux méthodes rapides. Certaines méthodes ont été consacrées à l'obtention d'une solution rigoureuse : la méthode PILE (Propagation Inside-Layer Expansion) [41], la méthode EBCM (Extended Boundary Condition Method) [107], la méthode FBNSA (Forward-Backward Novel Spectral Acceleration) [108], la méthode SDFMM (Steepest Descent Fast Multipole Method) [109]. Toutefois, ces méthodes ont quelques contraintes : la méthode EBCM est limitée à des faibles écarts-types des hauteurs ; dans le cas de la SDFMM, la profondeur de l'objet enfoui doit être inférieure à une longueur d'onde en espace libre pour satisfaire la contrainte de structure quasi-plane de la méthode. Dans le cas de la FBNSA, le domaine de convergence de la méthode reste flou, en particulier en ce qui concerne les configurations dans lesquelles des ondes guidées existent.

La méthode PILE [41] quant à elle est rigoureuse, d'une formulation mathématique simple et une interprétation physique intuitive. Elle s'inspire des méthodes intégrales adaptées au problème d'objets enfouis sous une surface rugueuse [110, 111, 112, 113, 114, 115, 116]. Son originalité réside dans le fait qu'elle exploite la forme particulière des matrices blocs de la matrice impédance. En effet, la résolution du système linéaire (obtenu par la MdM) s'effectue en plusieurs étapes : deux étapes pour résoudre les interactions locales (calcul des inverses des matrices locales) et deux autres pour les couplages (calcul des produits matrices vecteurs). De cette façon, la méthode PILE permet d'utiliser n'importe quel algorithme rapide développé pour une seule interface. Ainsi, l'inversion de la matrice impédance aboutit à un processus itératif, sous forme d'un développement en série qui prend en compte les réflexions multiples de l'onde dans les couches. Par ailleurs, le domaine de validité très large de la méthode PILE lui permet de gérer la plupart des configurations étudiées dans la littérature et permet également d'en étudier de nouvelles, en particulier sans restrictions pour les grandes rugosités. La seule limitation de la méthode PILE [41] est sa complexité comparativement aux autres méthodes rapides (complexité de  $\mathcal{O}(N^2)$  contre  $\mathcal{O}(N \log N)$  pour la BMIA/CAG et  $\mathcal{O}(N)$  pour la FB).

Pour pallier le défaut de complexité de la méthode PILE présentée dans [41], Déchamps et Bourlier l'ont accélérée en utilisant l'algorithme rapide BMIA/CAG [117]. La BMIA/CAG a été adaptée pour prendre en compte le couplage entre les deux interfaces. La méthode résultante, PILE-BMIA/CAG, présente une complexité de seulement  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Déchamps et Bourlier ont proposé une autre accélération de la méthode PILE en adaptant la nouvelle accélération spectrale (NSA), à la fois aux interactions locales et aux étapes de couplage. La méthode résultante, PILE-FBNSA [118], présente une complexité de  $\mathcal{O}(N)$ .

Pour la diffusion par un objet enfoui sous une surface rugueuse, des hypothèses de simplification sont introduites en vue de résoudre le problème de manière analytique, voir par exemple [119, 120, 121]. Pour traiter une forme quelconque de géométrie et tout champ incident, la MdM peut être appliquée, ce qui nécessite l'inversion de la matrice impédance. Bourlier *et al.* ont appliqué la méthode PILE pour calculer la diffusion par un objet enfoui sous une surface rugueuse [122]. Pour accélérer la méthode PILE et traiter de plus larges problèmes, les interactions locales sur la surface sont calculées à l'aide de la méthode rapide Forward-Backward (FB), associée à une accélération spectrale (SA). Comme le nombre d'inconnues sur la surface est beaucoup plus grand que sur l'objet, la complexité de la méthode est alors de  $\mathcal{O}(N)$ .

De plus, Bourlier *et al.* [103] ont calculé les champs diffractés par deux cylindres emboîtés l'un dans l'autre, deux surfaces rugueuses superposées ou un objet enfoui sous une surface rugueuse par la méthode PILE combinée à l'approximation de l'optique physique (PO), afin d'accélérer le calcul des interactions locales sur le diffuseur non éclairé, qui est supposé être parfaitement conducteur. La matrice impédance des deux diffuseurs est ensuite inversée par blocs à l'aide d'un développement en série de Taylor obtenu via l'algorithme du complément de Schur.

Dans le même esprit, Kubické *et al.* [104, 123, 124, 125] ont développé la méthode EPILE (Extended Propagation Inside-Layer Expansion) pour traiter le cas plus général de la diffusion provenant de deux diffuseurs illuminés. Dans ces travaux, la méthode EPILE est appliquée au cas d'un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse. Pour accélérer l'algorithme, la méthode EPILE est combinée à la FB-SA dans [104, 124, 125] en vue de calculer les interactions locales sur la surface rugueuse. De même, dans [123] elle est combinée à la fois à la FB-SA et à l'approximation de l'optique physique en vue d'accélérer le calcul des interactions locales sur l'objet parfaitement conducteur (PC) au-dessus d'une surface de mer agitée.

A la suite de ces travaux, la méthode EPILE a été adaptée au cas de plus de deux diffuseurs. Plusieurs méthodes portaient déjà sur le cas de trois diffuseurs, notamment dans l'étude de la diffraction par deux objets enfouis sous une surface rugueuse [126, 127, 109]. Ainsi, Liang *et al.* ont généralisé la méthode EPILE combinée à la FB au cas de plusieurs objets situés au-dessus d'une surface rugueuse dans [128]. Ensuite, Guo *et al.* [129] ont appliqué la EPILE combinée à la FB au problème de diffusion par deux objets parfaitement conducteurs, situés l'un au-dessus et l'autre en dessous d'une surface rugueuse. Les mêmes auteurs ont étendu cette étude au cas où les deux objets sont diélectriques dans [130].

Bourlier *et al.* [131] ont présenté une généralisation de la méthode PILE (GPILE : Generalized Propagation Inside-Layer Expansion), permettant ainsi de calculer le champ électromagnétique diffusé par tout milieu 1-D stratifié composé de plusieurs interfaces rugueuses aléatoires séparant des milieux homogènes. En particulier, cette méthode permet de distinguer l'écho primaire de la surface supérieure ainsi que les échos multiples provenant des interfaces intermédiaires et inférieure. La méthode GPILE est alors appliquée pour simuler le signal du radar à pénétration de sol (GPR). Les signaux simulés sont analysés en vue d'étudier la sensibilité du signal GPR à tout matériau en décollement au sein de la structure en couches d'une chaussée.

Nous allons maintenant présenter la méthode PILE pour ensuite l'étendre à l'étude de la diffraction par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, en suivant la même méthodologie que dans [131]. Pour ce faire, nous formerons un diffuseur composite à partir de l'objet et la surface inférieure. Ayant appliqué la méthode PILE à la nouvelle structure, nous pourrons alors détailler les calculs des courants sur l'objet et sur la surface inférieure en réutilisant l'algorithme PILE ou l'algorithme EPILE. Les méthodes ainsi obtenues seront aussi valables pour la diffraction par deux objets enfouis sous une surface rugueuse, car les équations intégrales ainsi que les conditions aux limites sont les mêmes.

## 2.4.2 Méthode PILE

Nous présentons la méthode PILE dans le cas d'un objet diélectrique enfoui sous une surface rugueuse. Les résultats obtenus seront aussi valables pour la diffraction électromagnétique par deux surfaces superposées ou par un objet enfoui dans un autre objet. Considérons un objet délimité par l'interface  $S_2$ , enfoui sous une surface rugueuse  $S_1$ , comme le montre la figure 2.7. La matrice impédance dans ce cas est égale à

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Pour réduire la complexité algorithmique du calcul de l'inverse de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$ , nous allons utiliser l'algorithme dual du complément de Schur basé sur la partition de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$  en blocs [132, 133, 134] :

$$\bar{\mathbf{Z}}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}} & \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{V}} & \bar{\mathbf{W}} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

où les matrices  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{W}}$  peuvent s'exprimer en fonction de quatre matrices blocs de  $\bar{\mathbf{Z}}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{T}} = [\bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}]^{-1} \\ \bar{\mathbf{U}} = -[\bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}]^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \\ \bar{\mathbf{V}} = -\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} [\bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}]^{-1} \\ \bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} + \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} [\bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}]^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}. \end{cases} \quad (2.45)$$



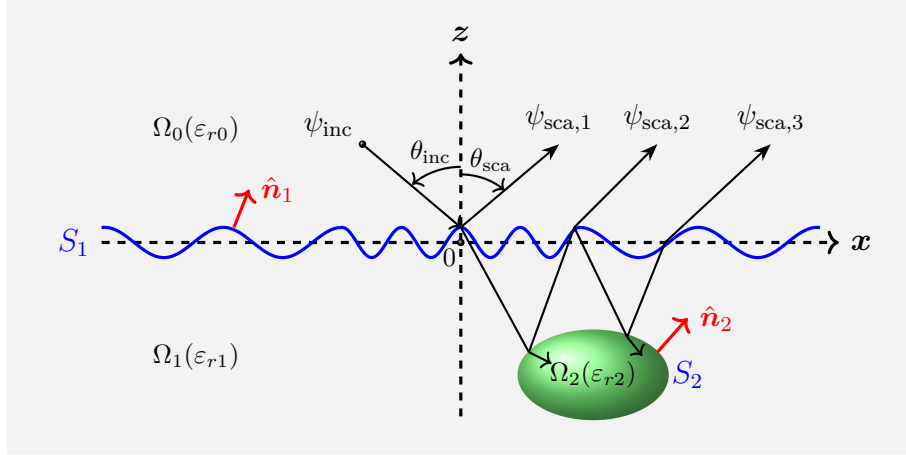


FIGURE 2.7 – Diffraction électromagnétique par un objet enfoui sous une surface rugueuse 1-D.

Nous pouvons alors réécrire la solution du système sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{U}}\mathbf{b}_2 \\ \bar{\mathbf{V}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{W}}\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

L'expression précédente a l'avantage de partitionner le système de départ en deux sous-systèmes de tailles réduites. Nous verrons par la suite d'autres avantages qu'offre cette démarche.

D'emblée, on peut remarquer que le calcul de  $\mathbf{X}_1$  se réduit à  $\mathbf{X}_1 = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{b}_1$ , car  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$  (l'objet n'étant pas éclairé).

D'où

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12} \right]^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (2.47)$$

De cette expression, on en déduit :

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12} \right]^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (2.48)$$

Notons la matrice

$$\bar{\mathbf{M}}_c = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12}, \quad (2.49)$$

que nous appelons dès maintenant *matrice caractéristique* entre les deux interfaces (la surface et l'objet). L'expression (2.48) s'écrit alors

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_c \right]^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (2.50)$$

Il est possible de développer  $[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_c]^{-1}$  en série de puissances par analogie à  $1/(1-a) = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ , avec  $|a| < 1$ . Pour assurer la convergence de l'algorithme, on recourt à la norme spectrale  $\|\cdot\|_{\text{sr}}$ , qui est le plus grand module de valeurs propres de la matrice caractéristique  $\bar{\mathbf{M}}_c$ . Cette norme est toujours strictement inférieure à 1 comme le montre [41], ce qui assure la convergence de l'algorithme, soit

$$\|\bar{\mathbf{M}}_c\|_{\text{sr}} = \|\bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}\|_{\text{sr}} < 1. \quad (2.51)$$

Le développement ainsi effectué nous permet de réécrire l'expression (2.48) sous la forme

$$\mathbf{X}_1^{(p)} = \left( \sum_{p=0}^P \bar{\mathbf{M}}_c^p \right) \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (2.52)$$

Notons par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1^{(0)} &= \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Y}_1^{(1)} &= \bar{\mathbf{M}}_c \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{Y}_1^{(0)} \\ \mathbf{Y}_1^{(2)} &= \bar{\mathbf{M}}_c^2 \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{Y}_1^{(1)} \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}_1^{(p)} &= \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{Y}_1^{(p-1)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

D'où

$$\mathbf{X}_1^{(p)} = \sum_{p=0}^P \mathbf{Y}_1^{(p)}. \quad (2.54)$$

Cette dernière expression est un développement limité du vecteur contenant les courants surfaciques et leurs dérivées normales sur l'interface.

Le calcul des courants surfaciques sur l'interface de l'objet se résume à

$$\mathbf{X}_2 = \bar{\mathbf{V}} \mathbf{b}_1 = - \left[ \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right] \bar{\mathbf{T}} \mathbf{b}_1 = - \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \mathbf{X}_1. \quad (2.55)$$

L'expression de  $\mathbf{X}_2$  montre que les contributions contenues dans les courants totaux sur la surface et provenant des diffractions multiples sont propagées par  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  sur l'interface de l'objet, où  $\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}$  prend en compte les interactions locales. Le signe (-) devant  $\mathbf{X}_1$  est dû au fait que l'objet est dans le milieu transmis par rapport à la surface. Par ailleurs, nous présentons en annexe A les calculs des courants surfaciques par la méthode de substitution, et obtenons les mêmes résultats que ceux de l'algorithme du complément de Schur.

**Remarque 3.** Pour dériver la méthode PILE dans le cas de deux surfaces rugueuses

superposées  $S_1$  et  $S_3$  (sans l'objet), il suffit de substituer dans l'algorithme précédent les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}, \bar{\mathbf{Z}}_{22}, \bar{\mathbf{Z}}_{21}$  respectivement par  $\bar{\mathbf{Z}}_{13}, \bar{\mathbf{Z}}_{33}, \bar{\mathbf{Z}}_{31}$ .

Nous avons déjà souligné que la convergence de la méthode PILE repose sur la relation (2.51) sur la matrice caractéristique  $\bar{\mathbf{M}}_c$ . La construction de cette matrice ne dépend pas de l'onde incidente mais des différents paramètres du système, comme les permittivités des milieux, les paramètres statistiques des interfaces et l'épaisseur entre les surfaces (la profondeur de l'objet dans ce cas). Une étude de l'impact de ces paramètres sur la convergence de la méthode, à travers les variations de la norme utilisée dans la relation (2.51) a été menée dans [41]. Cette étude montre que la norme est plus grande en polarisation Transverse Électrique qu'en polarisation Transverse Magnétique. De plus, la variation de la norme est inversement proportionnelle à celle de l'épaisseur de la couche (la profondeur de l'objet dans ce cas). Toutefois, elle est plus grande dans le cas parfaitement conducteur que dans le cas diélectrique, ce qui justifie pourquoi la méthode PILE converge plus rapidement pour le cas diélectrique que pour le cas parfaitement conducteur. Cette étude montre aussi que la norme ne varie pas significativement pour de faibles variations de rugosités.

Nous pouvons à présent étendre l'algorithme PILE au cas de trois diffuseurs (dont l'un seulement est éclairé), en utilisant l'astuce de former un diffuseur composite. Cette astuce permet de réduire le problème au cas de deux diffuseurs et facilite ainsi la mise en œuvre de la méthode PILE.

### 2.4.3 Méthode GPILE : Première approche

Il est important de rappeler que nous avons un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses et ainsi toutes les interfaces sont en interaction (action réciproque) directe les unes sur les autres. Nous appellerons interactions *principales* celles provenant de la surface éclairée (de la surface supérieure vers l'objet ou vers la surface inférieure) et *secondaires* toutes les interactions entre les interfaces non éclairées (entre l'objet et la surface inférieure).

Pour construire la méthode GPILE, nous allons suivre la même démarche que pour la méthode construite dans le cas de trois surfaces superposées [131]. Nous considérons d'une part la surface supérieure comme le *diffuseur 1* (le seul diffuseur éclairé) et d'autre part l'objet et la surface inférieure comme un seul diffuseur, que l'on appellera *diffuseur composite 2*. Nous pouvons alors appliquer la méthode PILE à la nouvelle structure. Les

matrices impédances pour cette structure s'écrivent :

$$\bar{\mathbf{P}}_{11} = \bar{\mathbf{Z}}_{11}, \quad \bar{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{22} & \bar{\mathbf{Z}}_{32} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{23} & \bar{\mathbf{Z}}_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}}_{12} = (\bar{\mathbf{Z}}_{12} \quad \bar{\mathbf{Z}}_{13})^T, \quad \bar{\mathbf{P}}_{21} = (\bar{\mathbf{Z}}_{21} \quad \bar{\mathbf{Z}}_{31}). \quad (2.56)$$

La matrice impédance globale devient

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{21} \\ \bar{\mathbf{P}}_{12} & \bar{\mathbf{P}}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

de sorte que le système linéaire (2.28) se note  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Y} = \mathbf{b}$ , où les vecteurs inconnus  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2]^T$  contiennent les courants surfaciques et leurs dérivées normales sur les diffuseurs 1 et 2.

La méthode PILE permet alors d'obtenir les courants surfaciques  $\mathbf{Y}_1$  et  $\mathbf{Y}_2$  sur les deux diffuseurs :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 = \left( \sum_{p=0}^P \bar{\mathbf{N}}_c^p \right) \bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Y}_2 = -\bar{\mathbf{P}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{12} \mathbf{Y}_1, \quad p > 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

où

$$\bar{\mathbf{N}}_c = \bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{21} \bar{\mathbf{P}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{12} \quad (2.59)$$

est la matrice de couplage du diffuseur composite 2 vers le diffuseur 1 et ramène ainsi les contributions du diffuseur composite 2 sur le diffuseur 1. Par ailleurs, nous pouvons calculer les courants sur le diffuseur composite 2 à l'aide de l'algorithme EPILE :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_2 = -\left( \sum_{p=0}^P \bar{\mathbf{N}}_c^p \right) \bar{\mathbf{P}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{12} \bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{N}}_c = \bar{\mathbf{P}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{12} \bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{21}. \end{cases} \quad (2.60)$$

Cette dernière expression est visiblement plus complexe que la première. Dans ce qui suit, nous ne considérons que les expressions (2.58)-(2.59) pour les calculs des courants surfaciques sur les deux diffuseurs. Pour implémenter efficacement l'algorithme GPILÉ, nous considérons les formules de récurrence :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1^{(0)} = \bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1, \quad \text{pour } p = 0 \\ \mathbf{Y}_1^{(p)} = \bar{\mathbf{N}}_c \cdot \mathbf{Y}_1^{(p-1)}, \quad \text{pour } p > 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

La convergence de cette méthode repose sur la valeur de la norme spectrale de  $\bar{\mathbf{N}}_c$  i.e. le plus grand module de valeurs propres de cette matrice. Notée  $\|\bar{\mathbf{N}}_c\|_{\text{sr}}$ , cette norme est

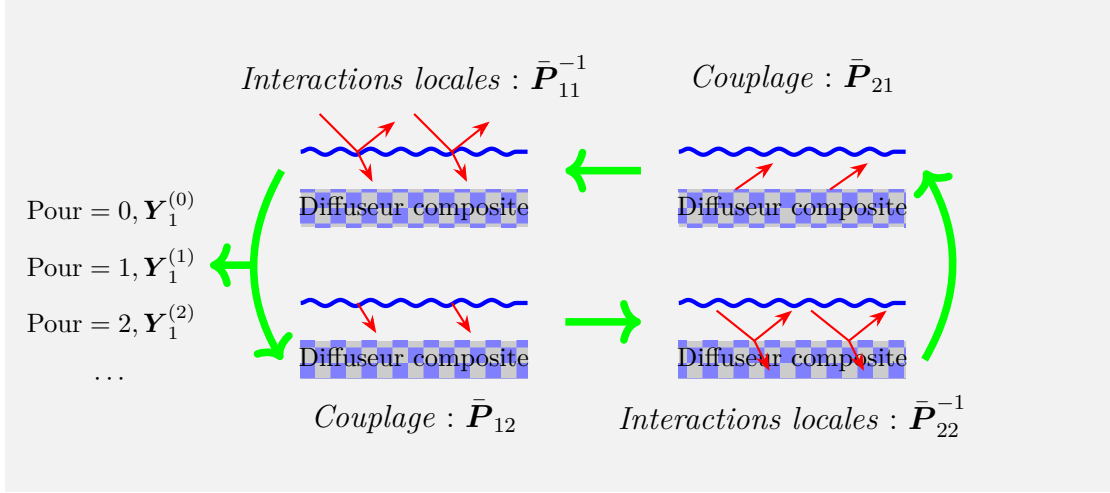


FIGURE 2.8 – Interprétation physique de la première approche de la méthode GPILE.

toujours strictement inférieure à 1 comme le montre [41], ce qui assure la convergence de l'algorithme.

L'interprétation physique est simple (voir figure 2.8), les courants totaux sur le diffuseur 1 sont les contributions de  $\mathbf{Y}_1^{(p)}$  et correspondent aux itérations successives de  $p$  telles que :

- (i) Pour  $p = 0$ ,  $\mathbf{Y}_1^{(0)} = \bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$  prend en compte les interactions locales du diffuseur 1 sans tenir compte de la présence du diffuseur composite 2.
- (ii) Pour  $p = 1$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_{12}$  propage les contributions du diffuseur 1 sur le diffuseur composite 2, où  $\bar{\mathbf{P}}_{22}^{-1}$  prend en compte les interactions locales du diffuseur composite 2 et  $\bar{\mathbf{P}}_{21}$  repropage les contributions résultantes sur le diffuseur 1, où  $\bar{\mathbf{P}}_{11}^{-1}$  intègre les contributions du diffuseur 1.

De cette façon, la matrice caractéristique  $\bar{\mathbf{N}}_c$  ramène au diffuseur 1 les contributions du diffuseur composite 2 et l'ordre  $p$  correspond au nombre d'allers-retours de l'onde entre les deux diffuseurs.

#### 2.4.4 Méthode GPILE : Deuxième approche

Nous allons maintenant détailler les calculs des courants sur chaque interface dans l'esprit de la méthode PILE originelle. Pour ce faire, nous noterons les courants sur la surface supérieure, l'objet et la surface inférieure respectivement par  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  et  $\mathbf{X}_3$ . Remarquons d'entrée de jeu que  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_1$ , car le diffuseur 1 de la section précédente correspond à

la surface supérieure. Il suffit alors de détailler les calculs de la matrice caractéristique  $\bar{\mathbf{N}}_c$  pour obtenir une expression équivalente à  $\mathbf{X}_1$ , le seul verrou étant d'inverser la matrice  $\bar{\mathbf{P}}_{22}$ , qui est une matrice bloc comme le montre les relations (2.56). En réutilisant l'algorithme du complément de Schur, nous obtenons :

$$\bar{\mathbf{N}}_c = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \left[ \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{Z}}_{12} + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right] + \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{31} \left[ \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{Z}}_{12} + \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right] \quad (2.62)$$

où les matrices  $\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{W}}$  sont données par (2.45) en fonction des quatre matrices blocs de  $\bar{\mathbf{P}}_{22}$ .

Rappelons par ailleurs que la matrice  $\bar{\mathbf{N}}_c$  est la somme des contributions de l'objet et de la surface inférieure sur la surface supérieure. Nous pouvons ressortir explicitement les deux contributions en notant

$$\bar{\mathbf{N}}_{c,21} = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \left[ \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{Z}}_{12} + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right] \quad (2.63)$$

et

$$\bar{\mathbf{N}}_{c,31} = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{31} \left[ \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{Z}}_{12} + \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right]. \quad (2.64)$$

Nous verrons après développement de ces deux expressions que les matrices  $\bar{\mathbf{N}}_{c,21}$  et  $\bar{\mathbf{N}}_{c,31}$  sont des matrices caractéristiques pour les interactions principales et ramènent respectivement les contributions de l'objet et de la surface inférieure vers la surface supérieure.

En injectant les relations (2.45) dans ces matrices caractéristiques, nous obtenons leurs approximations par le développement en série de Taylor (avec troncature à l'ordre  $Q$ )

$$\bar{\mathbf{N}}_{c,21} \approx \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{\mathbf{M}}_{c,32}^q \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}'_{12}) \quad (2.65)$$

et

$$\bar{\mathbf{N}}_{c,31} \approx \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{31} \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \left[ \bar{\mathbf{Z}}_{13} - \bar{\mathbf{Z}}_{23} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{\mathbf{M}}_{c,32}^q \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}'_{12}) \right] \quad (2.66)$$

dans lesquelles

$$\bar{\mathbf{M}}_{c,32} = \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{32} \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{23} \quad (2.67)$$

est la matrice caractéristique qui ramène les contributions de la surface inférieure vers l'objet, prenant en compte une interaction secondaire à l'ordre  $q$ . La matrice

$$\bar{\mathbf{Z}}'_{12} = \bar{\mathbf{Z}}_{32} \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \quad (2.68)$$

représente la matrice de couplage entre la surface supérieure et l'objet via la surface inférieure.

Nous présentons en appendice A les calculs des courants surfaciques par la méthode de substitution. Une expression équivalente à la matrice caractéristique  $\bar{N}_{c,31}$  obtenue par cette méthode est :

$$\bar{N}_{c,31} \approx \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} (\bar{Z}_{13} - \bar{Z}'_{13}) \quad (2.69)$$

où

$$\bar{M}_{c,23} = \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{32} \quad (2.70)$$

et la matrice

$$\bar{Z}'_{13} = \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12} \quad (2.71)$$

représente la matrice de couplage entre la surface supérieure et la surface inférieure via l'objet.

L'expression (2.69) fait ressortir la symétrie du problème par rapport à la relation (2.65), contrairement à l'expression (2.66). Elle sera privilégiée pour le reste de cette étude. Par ailleurs, les matrices de contribution de l'objet et de la surface inférieure sont constituées chacune de deux contributions, l'une directe et l'autre indirecte. Ce sont les matrices de couplage  $\bar{Z}_{12}$  et  $\bar{Z}'_{12}$  qui permettent de quantifier ces contributions pour l'objet. Les matrices de couplage  $\bar{Z}_{13}$  et  $\bar{Z}'_{13}$  jouent le même rôle pour la surface inférieure.

De cette façon, nous pouvons mettre en évidence les matrices caractéristiques de chacune des contributions de deux diffuseurs enfouis. Pour l'objet, nous avons respectivement les contributions directe et indirecte :

$$\begin{cases} \bar{N}_{c,21,Dir} \approx +\bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{21} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12}, \\ \bar{N}_{c,21,Ind} \approx -\bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{21} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}'_{12}, \end{cases} \quad (2.72)$$

de telle sorte que  $\bar{N}_{c,21} = \bar{N}_{c,21,Dir} + \bar{N}_{c,21,Ind}$ , où les indices "Dir" et "Ind" signifient "Directe" et "Indirecte".

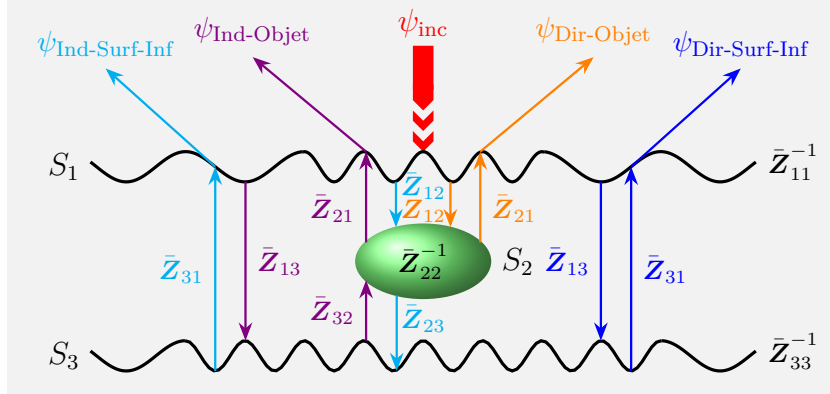


FIGURE 2.9 – Représentation graphique des contributions de l'objet et de la surface inférieure. Les contributions directe et indirecte de l'objet sont respectivement notées :  $\psi_{Dir-Objet}$  et  $\psi_{Ind-Objet}$ . Celles de la surface inférieure sont respectivement notées :  $\psi_{Dir-Surf-Inf}$  et  $\psi_{Ind-Surf-Inf}$ .

De même, pour la surface inférieure nous avons :

$$\begin{cases} \bar{N}_{c,31,Dir} \approx +\bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{13}, \\ \bar{N}_{c,31,Ind} \approx -\bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}'_{13}, \end{cases} \quad (2.73)$$

de telle manière que  $\bar{N}_{c,31} = \bar{N}_{c,31,Dir} + \bar{N}_{c,31,Ind}$ .

La mise en évidence de ces contributions aura une importance capitale dans l'étude des réponses temporelles au chapitre prochain. Nous nous limitons à ce stade à une représentation graphique de ces contributions dans la figure 2.9.

Avant de poursuivre les développements mathématiques, nous prenons la convention d'écriture suivante :

$$\bar{N}_{c,21} \approx \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,21}^q = \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{21} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{Z}_{22}^{-1} (\bar{Z}_{12} - \bar{Z}'_{12}) \quad (2.74)$$

$$\bar{N}_{c,31} \approx \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,31}^q = \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} (\bar{Z}_{13} - \bar{Z}'_{13}) \quad (2.75)$$

Les matrices soulignées ne sont pas des matrices sommes respectivement des puissances des matrices  $\bar{M}_{c,21}$  et  $\bar{M}_{c,31}$ , mais plutôt des matrices obtenues d'un produit dont l'une de



matrices est somme des puissances de matrices  $\bar{M}_{c,32}$  et  $\bar{M}_{c,23}$ . Cette convention facilitera l'écriture de l'expression finale de la méthode GPILÉ.

En regroupant en une expression les deux contributions pour calculer les courants totaux sur la surface supérieure, nous obtenons :

$$\mathbf{X}_1 = \sum_{p=0}^P \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,21}^q + \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,31}^q \right)^p \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1, \quad (2.76)$$

et au final,

$$\mathbf{X}_1 = \sum_{p=0}^P \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_c^q \right)^p \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (2.77)$$

Il est important de souligner que les ordres  $p$  et  $q$  sont quelconques. En fait, d'après la construction de la méthode (voir première approche), l'ordre principal  $p$  représente le nombre d'allers-retours de l'onde entre la surface supérieure et l'objet ou la surface inférieure. Quant à l'ordre secondaire  $q$ , il représente les allers-retours de l'onde entre l'objet et la surface inférieure, et vice versa.

Les calculs des courants sur les autres interfaces se font par les mêmes types de manipulations algébriques, et nous obtenons pour l'objet

$$\mathbf{X}_2 = - \left( \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{Z}}_{12} + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right) \mathbf{X}_1 = -\bar{\mathbf{T}} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}'_{12} \right) \mathbf{X}_1, \quad (2.78)$$

d'où

$$\mathbf{X}_2 = - \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}'_{12} \right) \mathbf{X}_1. \quad (2.79)$$

Et pour la surface inférieure

$$\mathbf{X}_3 = - \left( \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{Z}}_{12} + \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right) \mathbf{X}_1 = -\bar{\mathbf{V}} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}'_{12} \right) \mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \mathbf{X}_1, \quad (2.80)$$

de laquelle découle

$$\mathbf{X}_3 = \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{23} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}'_{12} \right) \mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \mathbf{X}_1. \quad (2.81)$$

Les calculs des courants surfaciques sur la surface inférieure par la méthode de substitution

(voir annexe A) donne :

$$\mathbf{X}_3 = - \left( \sum_{q=0}^Q \bar{\mathbf{M}}_{c,23}^q \right) \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}_{13} - \bar{\mathbf{Z}}'_{13}) \mathbf{X}_1. \quad (2.82)$$

Les expressions des courants surfaciques sur l'objet (2.79) et sur la surface inférieure (2.82) ont une interprétation physique conforme avec la méthode EPILE [104].

**Remarque 4.** *Comme nous l'avons établi pour le modèle intégral ainsi que la matrice impédance obtenue après discrétisation par la méthode des moments, nous pouvons ici aussi établir une validation théorique et rapide des méthodes GPILE par rapport aux méthodes PILE et EPILE. En effet, en l'absence de l'un des trois diffuseurs, nous obtenons une méthode numérique conforme à la diffraction par les deux autres diffuseurs. Ainsi, si l'on considère uniquement la surface supérieure et l'objet, alors la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}'_{13}$  s'annule (ce qui reviendrait à considérer que la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1}$  est nulle) et nous obtenons la méthode PILE pour le cas d'un objet enfoui sous une surface rugueuse. En l'absence de l'objet, nous obtenons la méthode PILE pour le cas de deux interfaces superposées, car la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}'_{12}$  s'annule (ce qui reviendrait à considérer que la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}$  est nulle). Enfin, en l'absence de la surface supérieure, nous obtenons la méthode EPILE pour le cas d'un objet au dessus d'une surface.*

**Remarque 5.** *On peut calculer les courants sur la surface supérieure selon l'expression (2.77) et les calculer sur l'objet et la surface inférieure en utilisant l'algorithme EPILE [104]. En considérant que l'objet et la surface inférieure sont éclairés respectivement par les champs  $-\bar{\mathbf{Z}}_{12}\mathbf{X}_1$  et  $-\bar{\mathbf{Z}}_{13}\mathbf{X}_1$ , on obtient les relations (2.79) et (2.82). Le signe  $(-)$  dans les champs vient du fait que les deux diffuseurs sont dans le milieu transmis par rapport à la surface supérieure.*

**Remarque 6.** *La différence fondamentale entre les deux approches de la méthode GPILE, i.e. entre la relation (2.58) et les relations (2.77), (2.79) et (2.82), est le fait que dans la première approche (2.58), la matrice impédance  $\bar{\mathbf{P}}_{22}$  (pour la surface inférieure et l'objet) est inversée directement, ce qui revient à prendre en compte une infinité d'interactions secondaires ( $Q = \infty$ ), alors que dans la deuxième approche (2.77), (2.79) et (2.82), il ne s'agit que d'une approximation de l'inverse de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{P}}_{22}$ , obtenue par un développement en série de Taylor à l'ordre  $Q = 0, 1, 2$ , etc. De cette façon, la matrice somme des contributions de deux diffuseurs enfouis peut s'écrire  $\bar{\mathbf{N}}_c = \sum_{q=0}^Q \bar{\mathbf{M}}_c^q$ ,*

et les expressions (2.77), (2.79) et (2.82) permettent alors de calculer numériquement les contributions de chacun des trois diffuseurs pour un écho donné.

**Remarque 7.** *Il est précieux de constater que si à la place d'un objet nous avons une surface ouverte, il n'y aurait pas d'interaction directe entre la surface supérieure et la surface inférieure, ce qui se traduirait par  $\bar{\mathbf{Z}}_{13} = \bar{\mathbf{0}}$  (et par conséquent  $\bar{\mathbf{Z}}_{31} = \bar{\mathbf{0}}$ ). Il en découlerait que  $\bar{\mathbf{M}}_{c,31} = \bar{\mathbf{0}}$  et on retrouverait une méthode GPILE équivalente à celle développée dans [131] pour le cas de trois interfaces superposées.*

Pour les simulations numériques, nous implémentons l'expression (2.77) pour calculer les courants sur la surface supérieure et les expressions (2.79) et (2.82) pour le calcul des courants respectivement sur l'objet et sur la surface inférieure. Les matrices caractéristiques seront approchées par les expressions (2.65) et (2.69). Pour éviter de calculer des produits de matrices lors de l'approximation des matrices caractéristiques, nous allons commencer le processus en calculant les courants et leurs dérivées normales sur la surface supérieure pour  $P = 0$ , ce qui revient à calculer un produit matrice-vecteur. Ayant le vecteur courant sur la surface supérieure à cet ordre, nous pouvons alors le calculer pour l'ordre  $P = 1$  par produits matrice-vecteur et ainsi de suite. Cette procédure est bien adaptée au calcul des courants pour toute valeur de  $Q$ . De cette façon, les courants sur l'objet et sur la surface inférieure seront également calculés pour toute valeur de  $P$  et  $Q$  par produits matrice-vecteur.

## 2.5 Simulations Numériques

La méthode GPILE a été dérivée à partir de la méthode PILE en couplant la surface supérieure et l'objet avec la surface inférieure en un seul diffuseur composite. De cette façon, en découplant l'objet et la surface inférieure, on peut étudier numériquement l'impact des ordres  $p$  et  $q$  sur la convergence de l'algorithme, ainsi que les contributions de l'objet et de la surface inférieure sur le champ diffracté dans le milieu incident. Par ailleurs, les ordres  $p$  et  $q$  permettent d'analyser l'influence de l'écho primaire de la surface supérieure et des échos multiples dans le milieu intermédiaire. Dans ce qui suit, nous utilisons les mêmes paramètres numériques que dans la section 2.3.5, où nous avons validé le modèle rigoureux des équations intégrales et la méthode des moments par la conformité des simulations numériques au phénomène physique en étude.

### 2.5.1 Convergence de GPILE : Impact des ordres P et Q

Pour tester la convergence de l’algorithme GPILE, nous présentons le champ diffracté en champ proche et calculons les Erreurs Relatives Résiduelles (ERR) par la relation (2.83). En effet, la Méthode des Moments avec l’inversion classique LU contient un nombre infini d’interactions entre les trois diffuseurs, alors que pour GPILE on ne considère qu’un nombre limité d’interactions. Nous avons défini deux types d’interactions, celles appelées *principales* (entre la surface supérieure et la surface inférieure ou l’objet) et celles appelées *secondaires* (entre l’objet et la surface inférieure). Ainsi, les ordres  $p$  et  $q$  de GPILE sont respectivement l’ordre principal et l’ordre secondaire. L’erreur relative résiduelle est calculée par

$$\text{ERR} = \frac{\text{norm}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{LU}})}{\text{norm}(\mathbf{X}_{\text{LU}})}, \quad (2.83)$$

où la norme d’un vecteur de composantes  $\mathbf{x}_i$  et de longueur  $N$  est donnée par

$$\text{norm}(\mathbf{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_i|^2}. \quad (2.84)$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{X}$  peut représenter les courants surfaciques  $\psi_i$  ou leurs dérivées normales  $\partial\psi_i/\partial n_i$ , calculés par la méthode GPILE sur chaque interface. Dans le cadre de cette étude,  $\mathbf{X}$  représentera plutôt le champ diffracté en champ proche. Le label LU signifie que le vecteur est calculé par l’algorithme d’inversion LU.

Nous présentons les figures suivantes, où nous comparons à la fois les méthodes GPILE et LU, ainsi que les méthodes PILE pour les cas de deux surfaces superposées ou d’un objet enfoui sous une surface. Cela nous permet d’étudier les performances (précision) de GPILE et aussi de montrer les contributions des deux diffuseurs enfouis. Nous présentons les modules des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l’abscisse d’observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ). Dans la légende, S+O+S représente le cas d’un objet enfoui entre deux surfaces, tandis que S+O représente un objet enfoui sous une surface, et S+S le cas de deux surfaces superposées. Ensuite, nous avons les ordres  $P$  et  $Q$  (ou seulement  $P$  pour PILE). Le nombre entre parenthèses est l’ERR par rapport à la méthode de référence LU.

Nous examinons tout d’abord l’impact de l’ordre principal  $p$ . Ainsi, dans la figure 2.10, les méthodes PILE et GPILE sont présentées pour  $P = 0$ . On observe que les champs diffractés calculés par les trois méthodes sont exactement les mêmes, car à cet ordre, les trois méthodes ne calculent que le premier écho, en ne tenant compte que de la surface

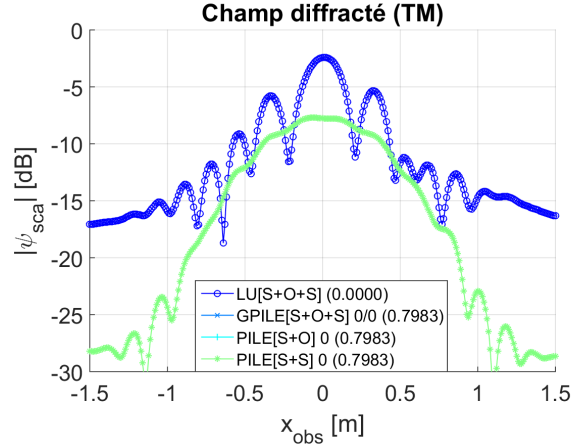


FIGURE 2.10 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{sca}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. L'ordre  $P = 0$ .

supérieure. Dans les figures 2.11 (a)-(b),  $P = 1$ , des différences entre les trois méthodes apparaissent car pour les méthodes PILE, la surface supérieure n'interagit qu'avec la surface inférieure ou l'objet, tandis que pour la méthode GPILE, la surface supérieure interagit à la fois avec la surface inférieure et l'objet. Ceci permet de mettre en évidence la présence de l'objet entre les deux surfaces. Dans les figures 2.11 (c)-(d), avec  $P = 2$ , on observe un parfait accord entre la méthode LU et la méthode GPILE lorsque  $Q = 1$ , ce qui montre que  $P = 2$  est suffisant pour prendre en compte toutes les contributions significatives. Notons également que  $P = 2$  signifie que l'onde effectue deux allers-retours entre la surface supérieure et la surface inférieure ou l'objet.

Pour évaluer l'impact de l'ordre secondaire  $q$ , plusieurs simulations numériques, que nous ne présentons pas ici montrent que  $Q = 0$  ou 1 est suffisant pour la convergence de l'algorithme lorsque  $P \geq 1$  et que les ordres supérieurs de  $q$  n'ont pas d'impact significatif sur la précision de GPILE. De plus,  $Q = 0$  signifie que l'onde n'effectue pas d'aller-retour entre l'objet et la surface inférieure, et vice versa. Cependant, même pour  $Q = 0$ , il existe des interactions entre ces deux diffuseurs via les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}'_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}'_{13}$  comme le montrent respectivement les relations (2.65) et (2.69).

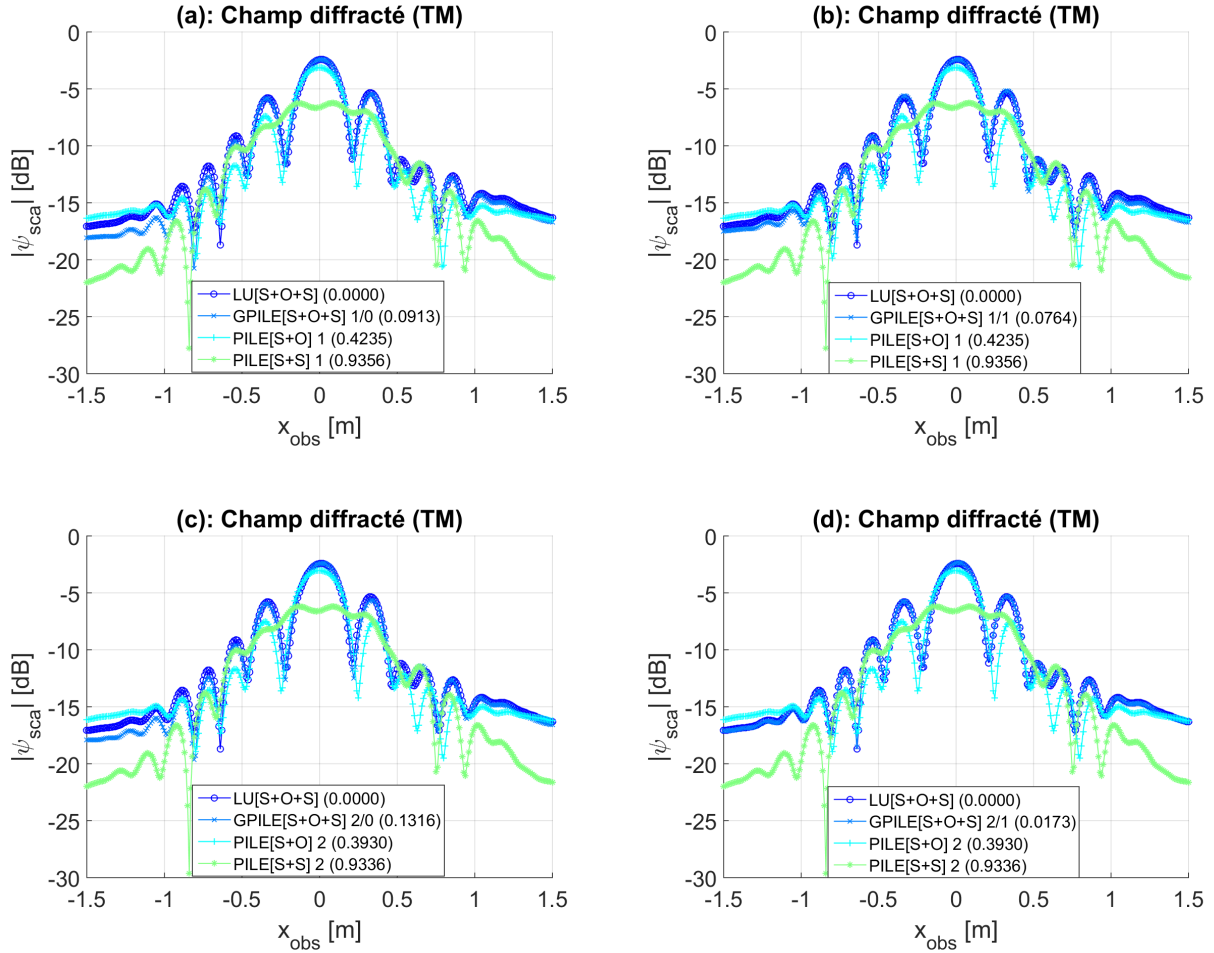


FIGURE 2.11 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{sca}|$ ) par rapport à l’abscisse d’observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d’observation  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L’onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. Les ordres  $P$  et  $Q$  varient. (a)  $P = 1$  et  $Q = 0$ . (b)  $P = Q = 1$ . (c)  $P = 2$  et  $Q = 0$ . (d)  $P = 2$  et  $Q = 1$ .

## 2.5.2 Variation de quelques paramètres géométriques et physiques

Dans cette section, nous testons la convergence de la méthode GPILE sur des cas extrêmes obtenus par le changement des valeurs de paramètres. Il s'agit de faire varier d'abord des paramètres des surfaces comme la rugosité, mais aussi et surtout les paramètres géométriques et physiques de l'objet comme sa taille, sa forme, sa position et sa permittivité. Ainsi, les figures 2.12 (a) et 2.12 (b) présentent respectivement le cas où l'objet a la même permittivité relative que le milieu intermédiaire et le cas où le milieu intermédiaire a la même permittivité relative que le milieu inférieur. Aussi, nous présentons dans les figures 2.12 (c) et 2.12 (d) respectivement le cas où l'objet est un conducteur parfait et le cas où la surface inférieure est un conducteur parfait. Ces deux derniers cas montrent que la méthode GPILE converge beaucoup moins vite lorsque l'un de diffuseurs enfoui est un conducteur parfait. C'est un défaut qu'elle hérite de la méthode PILE [41].

La figure 2.13 (a) présente le scénario de base décrit dans la figure 2.2 avec des surfaces planes, les autres paramètres restant les mêmes. La figure 2.13 (b), quant à elle, présente le cas de deux surfaces fortement rugueuses par rapport au scénario de base, avec des doubles des écarts-types, i.e.  $\sigma_{h,1} = 2$  mm et  $\sigma_{h,3} = 5$  mm. Les figures 2.14 (a)-(b) présentent respectivement le cas d'un grand cylindre de dimensions  $a = 1000$  mm et  $b = 10$  mm, et d'un petit cylindre de dimensions  $a = b = 10$  mm. Les deux cylindres sont centrés en  $C = (0, -0.5H)$ . On observe alors que la méthode GPILE converge malgré les variations de la rugosité des surfaces et de la taille de l'objet.

Les figures 2.15 (a)-(b), quant à elles, présentent deux cylindres de même dimensions ( $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm), mais enfouis à deux profondeurs différentes, soient  $C = (0, -0.1H)$  et  $C = (0, -0.15H)$  où  $H = 240$  mm. Les ERR pour ces deux cas sont légèrement supérieures à 2%. Nous verrons au chapitre prochain que lorsque l'objet est proche de la surface supérieure, alors le signal de GPILE est perturbé par les interférences entre l'écho de l'objet et celui de la surface supérieure.

Remarquons que, dans tous les scénarii classiques, notre méthode GPILE converge pour  $P = 2$  et  $Q = 1$  sur le critère d'une ERR de moins de 2% sur le champ diffracté. Cette remarque vaut également pour les simulations numériques que nous présenterons dans le chapitre prochain sur le domaine temporel, dans lesquelles la bande de fréquence considérée est la bande de Ricker [0.2 – 6.0] GHz. De ce qui précède, nous concluons que la méthode GPILE avec les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$  est une référence pour l'étude de la

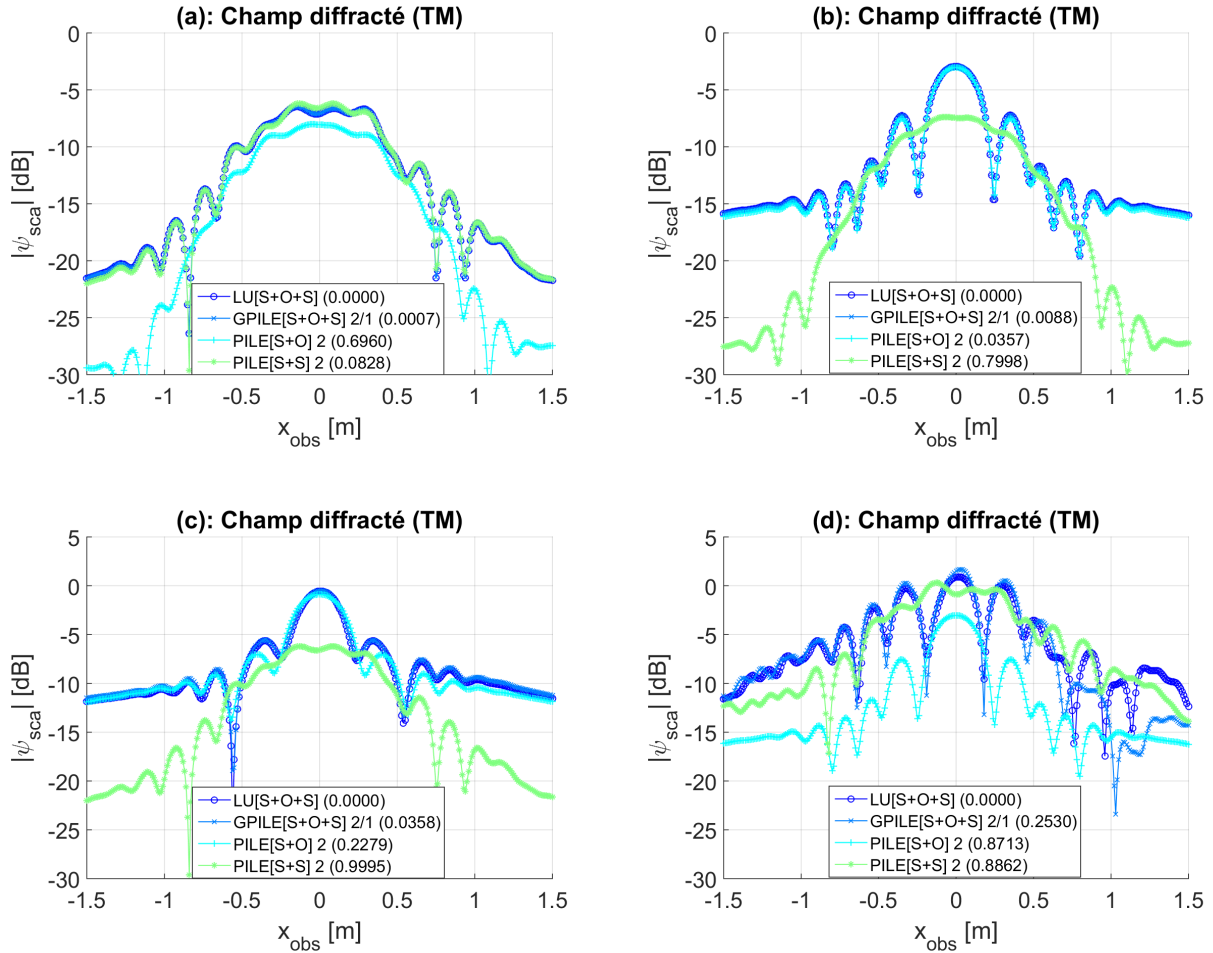


FIGURE 2.12 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) L'objet a la même permittivité que le milieu intermédiaire. (b) La permittivité du milieu intermédiaire est égale à celle du milieu inférieur. (c) L'objet est un conducteur parfait. (d) La surface inférieure est un conducteur parfait.



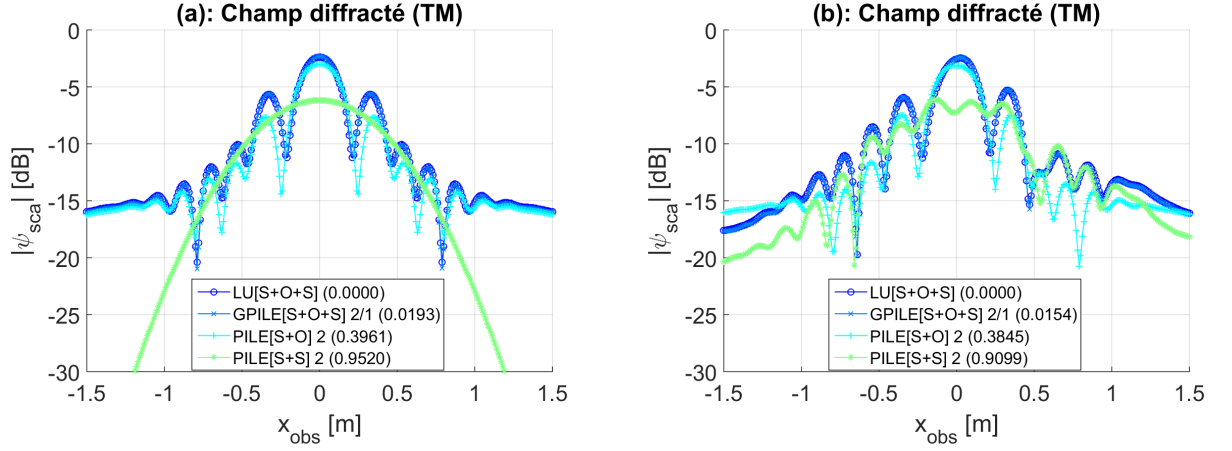


FIGURE 2.13 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.5H)$ , et  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) Surfaces planes. (b) Surfaces fortement rugueuses par rapport au scénario de base présenté dans la figure 2.2, avec de doubles des écarts-types :  $\sigma_{h,1} = 2$  mm et  $\sigma_{h,3} = 5$  mm.

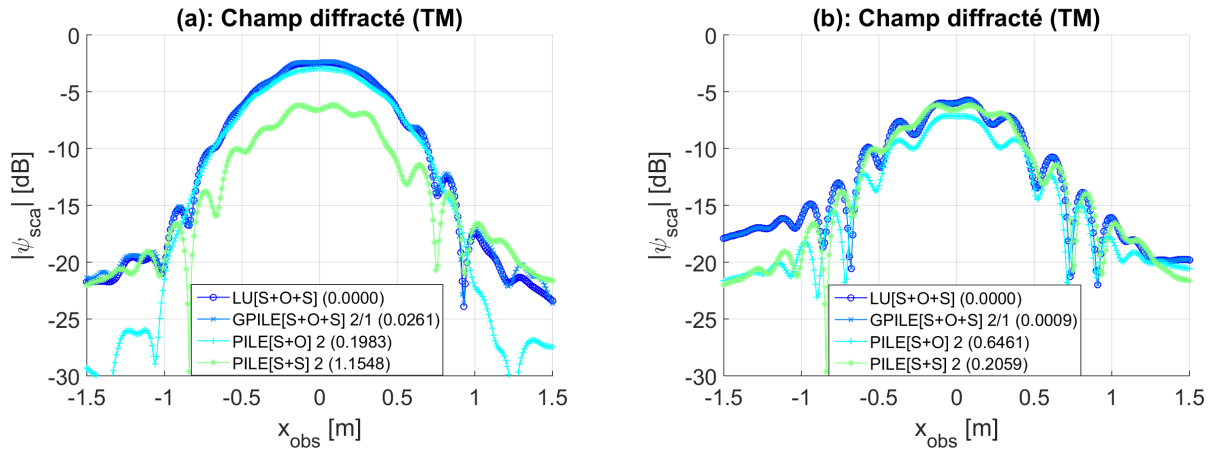


FIGURE 2.14 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Le cylindre elliptique est centré en  $C = (0, -0.5H)$ . Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) Grand cylindre avec  $a = 1000$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Petit cylindre avec  $a = b = 10$  mm.

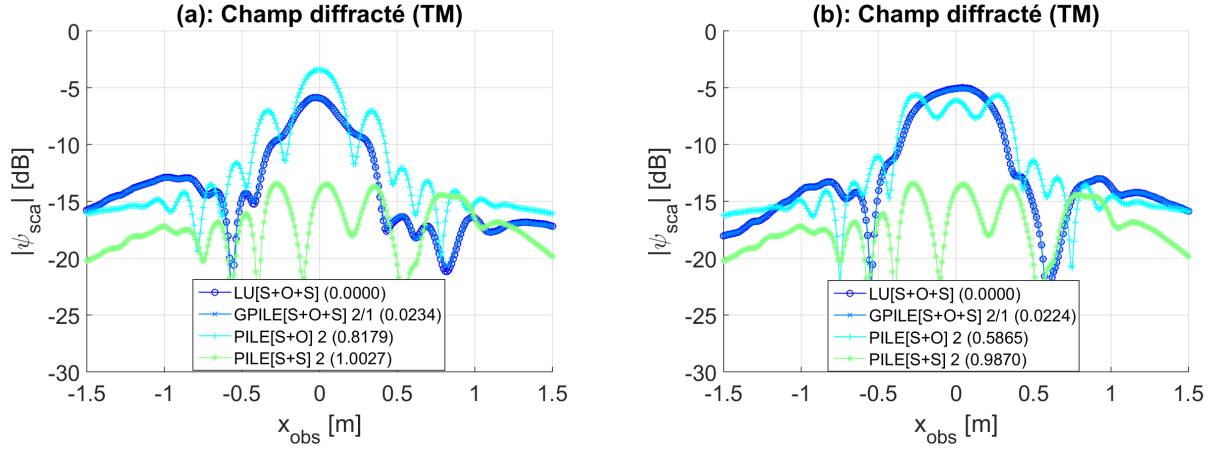


FIGURE 2.15 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces sont les mêmes que dans la figure 2.2, excepté l'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 240$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ . Les dimensions du cylindre elliptique sont  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. Le centre du cylindre varie. (a)  $C = (0, -0.1H)$ . (b)  $C = (0, -0.15H)$ .

diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses.

Pour le reste, la complexité mémoire de la méthode GPILE est la même que celle de la méthode LU, i.e.  $(N_1 + N_2 + N_3)^2$ . Par contre, la complexité en nombre d'opérations est de  $(2N_1)^3 + (2N_2)^3 + (2N_3)^3$  pour GPILE au lieu de  $(N_1 + N_2 + N_3)^3$ . En plus, le temps de calcul des courants surfaciques dépend des ordres  $P$  et  $Q$ . Pour le scénario de base, l'inversion de la matrice impédance par la méthode LU prend 3 secondes sur un ordinateur portable de 4 Go Ram, avec un processeur Intel® Celeron® CPU N3060@ 1.60Ghz 1.60Ghz, alors que la méthode GPILE avec les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$  prend moins de 3 secondes. Les valeurs supérieures de  $P$  et  $Q$  n'ajoutent que quelques secondes.

## 2.6 Cas de deux objets enfouis sous une surface

Les équations intégrales, les conditions aux limites, ainsi que toutes les méthodes numériques dérivées dans cette étude s'appliquent aussi au cas de la diffraction électromagnétique par deux objets diélectriques enfouis sous une surface rugueuse. Plus généralement, ces méthodes numériques peuvent s'adapter à tous les cas de la diffraction par trois diffuseurs dont l'un seulement est éclairé (y compris la diffraction par trois surfaces

superposées [131], par un objet enfoui sous deux surfaces superposées, par un objet enfoui dans un autre objet qui est lui aussi enfoui sous une surface, par un objet enfoui dans un objet qui est lui aussi enfoui dans un autre objet, etc.). Nous verrons ici aussi que les simulations numériques sont conformes à la réalité physique.

Pour ce faire, considérons deux cylindres enfouis sous une surface plane, de longueur  $L = 3000$  mm, et centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm, ainsi que le montre la figure 2.16. La permittivité relative du milieu inférieur vaut 2. L'onde incidente est une onde de Thorsos, avec les mêmes valeurs des paramètres que pour toutes les simulations précédentes. Ce scénario est choisi de manière à valider le modèle intégral et la méthode GPILE grâce à la symétrie de la géométrie du problème.

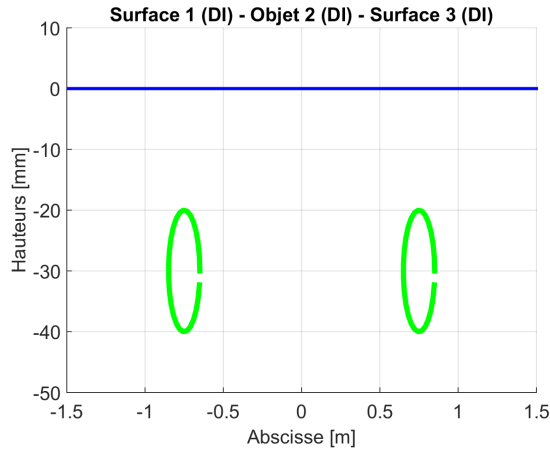


FIGURE 2.16 – Surface plane, de longueur  $L = 3000$  mm. Deux cylindres elliptiques enfouis sous la surface, centrés en  $C = (\pm 750, 30)$  mm, et de dimensions  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm.

Les figures 2.17 (a)-(b) présentent le module et la phase du cas de deux cylindres elliptiques identiques où  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm, et de permittivité relative égale à 7. On observe une symétrie parfaite du champ diffracté (module et phase) par les deux cylindres enfouis sous la surface plane. Les méthodes PILE et GPILE, que nous présentons dans la figure 2.18 (a) reproduisent cette symétrie. Par contre, les champs diffractés calculés par les méthodes PILE (ou LU pour l'un des objets seul enfoui sous la surface) sont antisymétriques par rapport à l'axe des ordonnées  $z = 0$ . Ceci est conforme à la position de ces deux objets. De plus, l'ERR de la méthode GPILE par rapport à LU est de moins de 2%, tandis que les ERR de deux méthodes PILE sont égales. La figure 2.18 (b) présente le cas où la surface est rugueuse, avec une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d'auto-corrélation gaussienne. L'écart-type des

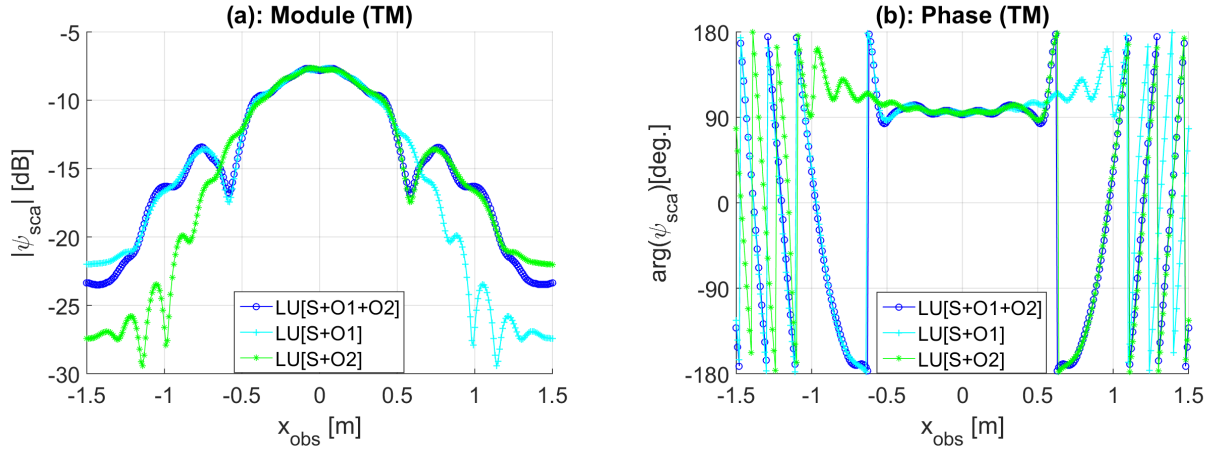


FIGURE 2.17 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{sca}|$ ) et phase par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{obs} = 470$  mm. La surface est plane. Les deux cylindres sont centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. (a) Le module. (b) La phase.

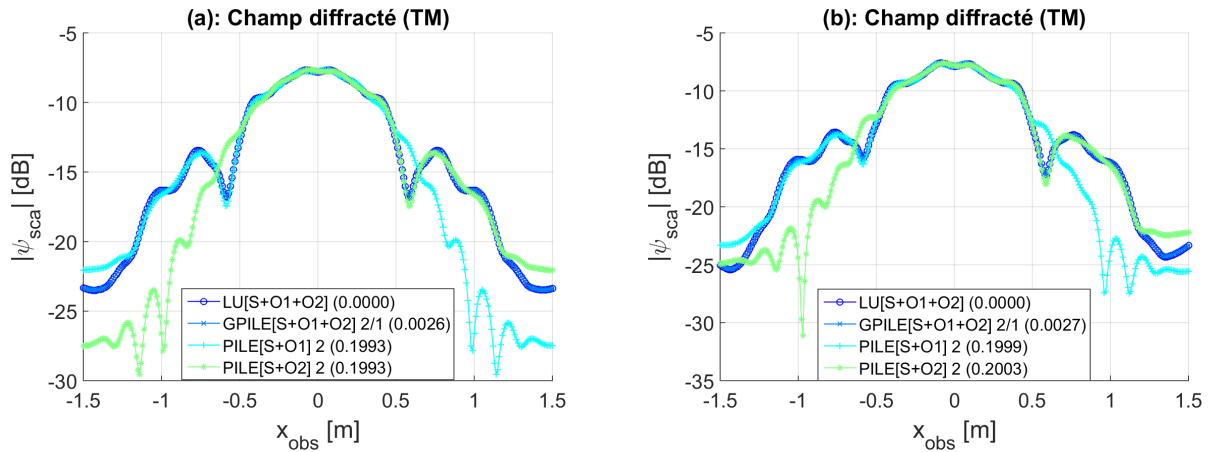


FIGURE 2.18 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{sca}|$ ) par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{obs} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{obs} = 470$  mm. Les deux cylindres elliptiques sont centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. Les ordres de GPILE sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . (a) La surface est plane. (b) La surface est rugueuse.

hauteurs est  $\sigma_h = 1$  mm. On observe alors que la symétrie des courbes n'est plus parfaite, mais l'ERR reste satisfaisante.

Dans la figure 2.19 (a), l'objet de gauche est largement plus grand que celui de droite. A gauche,  $a = 750$  mm et  $b = 10$  mm, tandis qu'à droite,  $a = b = 10$  mm. On peut voir sur les niveaux des courbes et sur l'ERR que la contribution de l'objet de gauche est plus grande que celle de l'objet de droite. D'autre part, nous savons que lorsque les permittivités relatives de deux objets sont égales à celle du milieu inférieur, i.e.  $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = \epsilon_{r,3} = 2$ , alors l'onde n'est pas affectée par les objets lors de son passage dans le milieu inférieur. Ainsi, le problème de deux objets enfouis se réduit à celui d'une surface, comme on peut le voir sur la figure 2.19 (b). De même, en prenant la permittivité relative de l'objet de gauche égale à celle du milieu inférieur, alors le problème de deux objets enfouis sous une surface se réduit à celui d'un objet enfoui sous une surface, ainsi que le montre la figure 2.19 (c). Enfin, nous présentons dans la figure 2.19 (d) le cas d'un objet conducteur parfait (objet de gauche) où on observe que sa contribution est beaucoup plus importante.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. Pour ce faire, nous avons dérivé un modèle rigoureux à l'aide de la méthode d'équations intégrales. Ensuite, nous avons discrétisé ces équations par la MdM. Afin de pouvoir effectivement diminuer la complexité de l'inversion de la matrice impédance obtenue lors de la discrétisation par la MdM, nous avons présenté deux algorithmes d'approximation de l'inverse matricielle, tous construits à partir de la méthode PILE. Les méthodes obtenues, appelées GPILE, héritent de l'algorithme PILE la formulation mathématique simple et l'interprétation physique intuitive.

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont validés par rapport à la théorie de diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses. Ainsi, ces méthodes serviront de référence pour l'étude de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. Par ailleurs, les méthodes GPILE peuvent être accélérées par des algorithmes rapides utilisés pour la méthode PILE, tels que la BMIA/CAG [117], la Forward-Backward [118], etc. D'autre part, nous présentons dans l'annexe B une méthode asymptotique, en l'occurrence, la méthode d'AK pour résoudre le même problème. Toutefois, au vu des nombreuses interactions entre les trois diffuseurs, cette méthode exige plus d'opérations de calcul que la méthode GPILE et n'est donc pas concurrentielle.

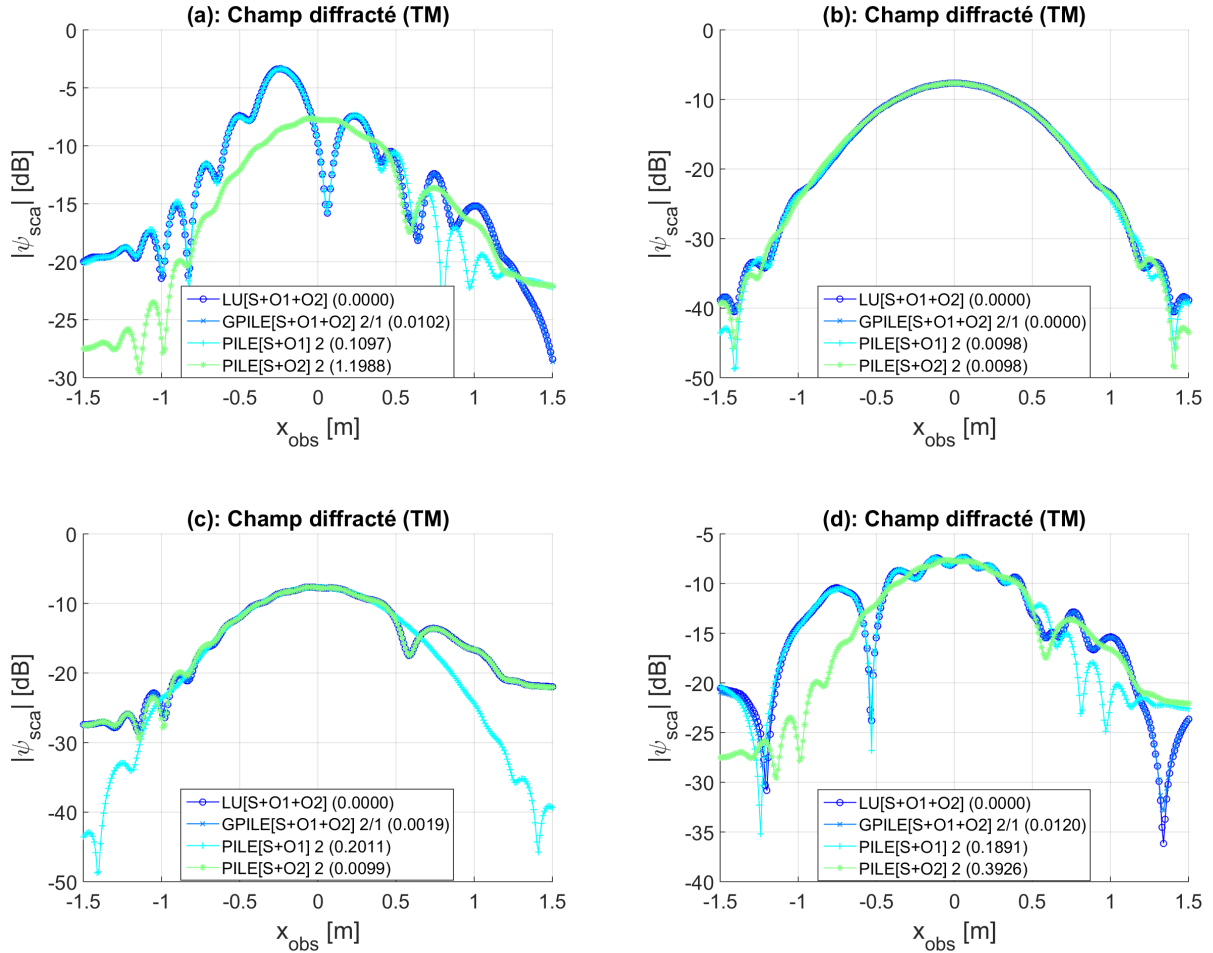


FIGURE 2.19 – Module des champs diffractés en décibels ( $10 \log_{10} |\psi_{\text{sca}}|$ ) et phase par rapport à l'abscisse d'observation ( $x_{\text{obs}} \in [-L/2; L/2]$ ) et pour une hauteur d'observation  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. La surface est plane. Les deux cylindres sont centrés aux points  $C = (\pm 750, 30)$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos avec les mêmes paramètres que dans la figure 2.3. (a) Le cylindre de gauche est plus grand que celui de droite avec comme dimensions  $a = 750$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Les deux cylindres ont la même permittivité que le milieu inférieur  $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = \epsilon_{r,3} = 2$ , avec  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (c) Le cylindre de gauche a la même permittivité que le milieu inférieur  $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = 2$ , avec  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (d) Le cylindre de gauche est un conducteur parfait, avec  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm.

# APPLICATION AU RADAR À PÉNÉTRATION DE SOL

---

## Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application à laquelle est dédiée cette thèse, à savoir, fournir un modèle de signal pour les fissures enfouies sous la base d'une route. Un tel modèle permettrait ainsi d'améliorer la compréhension du phénomène de diffusion dans des milieux multicouches avec défauts. Pour ce faire, il suffit d'adapter les propriétés géométriques et physiques de l'objet enfoui entre deux surfaces à celles de ce type de fissure. Reste alors à s'assurer que cette application est bien dans les limites de validité de la méthode GPILÉ, i.e. dans la capacité de cette méthode à reproduire des simulations qui gardent un sens physique conforme à la réalité.

Le système GPR et les configurations de sol nécessitent principalement des résultats dans le domaine temporel, pour l'avantage qu'ils offrent de présenter les variations dans l'allure du signal au cours du temps. Ceci impose de transformer en mode temporel tous les résultats obtenus par la méthode GPILÉ, car cette méthode a été développée pour résoudre les équations intégrales dans le domaine fréquentiel. Un tel processus exige d'abord de réaliser des simulations sur une bande de fréquences couvrant la bande GPR, et ensuite de transformer les résultats en mode temporel à l'aide de la Transformation de Fourier Discrète (TFD). Par souci de rapidité, nous optons pour l'utilisation de la Transformation de Fourier Rapide (FFT : Fast Fourier Transform), qui est un algorithme d'accélération du calcul de la Transformation de Fourier Discrète. Au terme de cette opération, nous serons en mesure de distinguer l'écho primaire de la surface supérieure et les échos multiples provenant des interactions entre la surface supérieure et la surface inférieure, ainsi que l'objet. L'analyse de la réponse temporelle sera la clef de la détection de l'objet enfoui entre les deux interfaces.

Ce chapitre débute par une étude complète de la diffraction par un objet enfoui entre

deux surfaces rugueuses dans le domaine temporel. En reprenant un scénario proche de celui décrit au chapitre précédent (voir section 2.3.5), nous présentons tout d'abord les réponses fréquentielles et temporelles, puis les temps de retard des échos des trois diffuseurs, et enfin une analyse détaillée du signal. Nous montrons ainsi que tous les phénomènes observés corroborent la réalité physique. Ce scénario est choisi de manière à distinguer les échos des trois diffuseurs, même si, comme on le verra, il est impossible d'éviter certaines interférences. Après une présentation de l'état de l'art sur la détection des fissures par le GPR, nous présentons le modèle de fissure horizontale, puis verticale. Nous en déduisons alors un modèle général de signal qui met en évidence l'impact d'une fissure enfouie sous la base d'une route.

## 3.1 Réponses fréquentielle et temporelle

Dans cette section, nous utilisons les méthodes PILE et GPILE pour fournir des simulations numériques des données GPR pour un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. La méthode GPILE 2/1 ( $P = 2$  et  $Q = 1$ ) sera la référence pour nos simulations numériques, ainsi que nous l'avons déjà souligné au chapitre précédent. Pour calculer les réponses GPR, ces méthodes sont simulées sur  $N_f$  fréquences régulièrement espacées couvrant une bande du signal GPR.

### 3.1.1 Impulsion de Ricker

Considérons en signal d'entrée une impulsion de Ricker. Cette impulsion a été utilisée en géophysique pour étudier les signaux sismiques [135, 136]. Elle peut être spécifiée de manière unique avec un seul paramètre " $f_c$ " qui est la fréquence centrale. Dans le domaine temporel, ce signal est défini par [137]

$$s(t) = (2\pi^2 f_c^2 t^2 - 1) \exp(-\pi^2 f_c^2 t^2). \quad (3.1)$$

L'impulsion de Ricker est proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction gaussienne. Plus précisément, c'est le négatif normalisé de la dérivée seconde d'une fonction gaussienne. D'un point de vue physique, c'est une fonction qui décrit une onde à court terme. Du point de vue mathématique, c'est une ondelette. L'impulsion de Ricker est une ondelette à phase nulle, avec un pic central et deux lobes latéraux plus petits. Elle est



symétrique dans le domaine temporel (voir figure 3.1 (b)) et a une moyenne nulle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = 0. \quad (3.2)$$

Dans le domaine de Fourier, l'impulsion de Ricker est définie par

$$\hat{s}(f) = -\frac{2f^2}{f_c^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{f^2}{f_c^2}\right), f \geq 0. \quad (3.3)$$

La valeur absolue du spectre est maximale pour la fréquence  $f = f_c$  et la valeur du maximum est  $\hat{s}_0 = 2/(e\sqrt{\pi})$ . Pour nos simulations numériques, nous prenons la fréquence centrale  $f_c = 2$  GHz. La figure 3.1 présente la transformée de Fourier du signal en fonction de la fréquence  $f$  et le signal en fonction du temps  $t$ . Comme le montre la figure 3.1 (a), le signal est hermitien, i.e.  $\hat{s}(-f)^* = \hat{s}(+f)$ , où le symbole  $(*)$  représente le complexe conjugué. Le nombre des fréquences choisi est  $N_f = 117$  et la bande de fréquences est  $[0.2 - 6.0]$  GHz. Pour avoir une meilleure résolution dans le domaine fréquentiel, nous avons appliqué la technique du *zero-padding* en vue d'augmenter le nombre de fréquences  $N_f$  à  $2^{12} = 4096$ . Ainsi, le pas d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel est de  $\Delta f = 0.00142$  GHz.

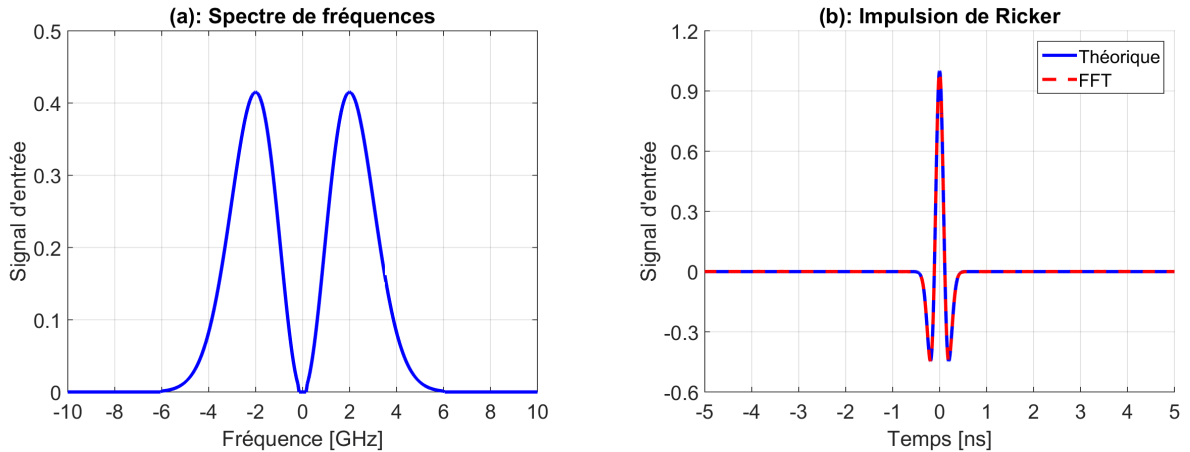


FIGURE 3.1 – (a) La transformée de Fourier du signal en fonction de la fréquence  $f$  (en GHz). (b) Signal en fonction du temps  $t$  (en ns).

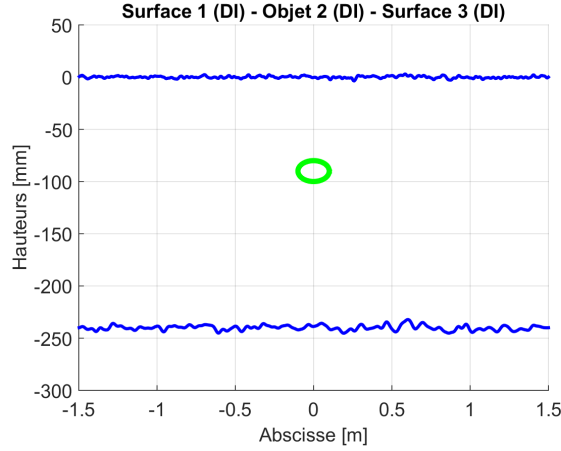


FIGURE 3.2 – Hauteurs des surfaces rugueuses par rapport à l’abscisse pour une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne et une fonction d’auto-corrélation gaussienne. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 1$  mm et  $\sigma_{h,3} = 2.5$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. L’épaisseur entre les deux surfaces  $H = 240$  mm. Le centre du cylindre elliptique est  $C = (0, -0.375H)$ , de demi-grand axe  $a = 100$  mm et demi-petit axe  $b = 10$  mm.

### 3.1.2 Réponses fréquentielles

La figure 3.3 présente les réponses fréquentielles du module du champ diffracté en fonction de la fréquence  $f$ . Les paramètres de simulation sont les mêmes que ceux du scénario décrit dans la section 2.3.5, à l’exception de l’épaisseur  $H = 240$  mm et du centre du cylindre  $C = (0, -0.375H)$ . En fait, l’épaisseur est plus grande pour distinguer les échos de deux surfaces d’une part, et l’objet est suffisamment éloigné de deux surfaces pour isoler son écho d’autre part. Le nombre de points par longueur d’onde dans le vide est  $N_{\lambda_0} = 10$ . La géométrie du nouveau scénario est représentée dans la Figure 3.2. L’abscisse et la hauteur d’observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. La figure 3.3 (a) montre le signal d’entrée et le champ diffracté. Dans la figure 3.3 (b), les méthodes GPILE et PILE donnent les mêmes résultats car pour  $P = 0$ , les trois méthodes sont calculées pour le premier écho uniquement, i.e. l’onde incidente n’interagit qu’avec la surface supérieure. Dans les figures 3.3 (c)-(d), des différences entre les trois méthodes apparaissent car pour les deux méthodes PILE (S+O et S+S), la surface supérieure n’interagit qu’avec la surface inférieure ou l’objet, alors que pour la méthode GPILE ( $P=2$ ), la surface supérieure interagit à la fois avec la surface inférieure et l’objet. En revanche, la différence non remarquable entre ces deux figures montre que le troisième écho de GPILE est faible.

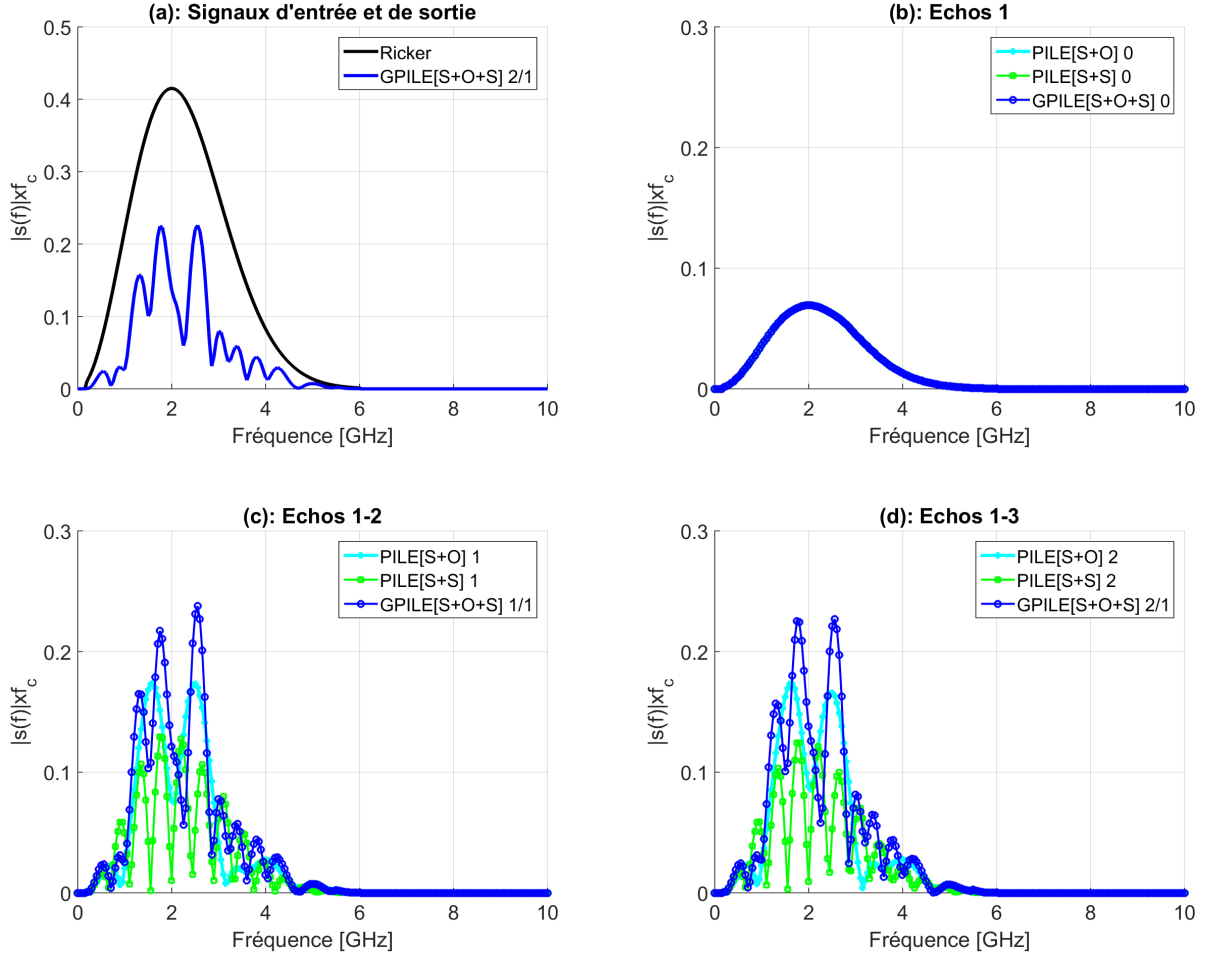


FIGURE 3.3 – Réponses fréquentielles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. La fonction de densité de probabilité des hauteurs est gaussienne et la fonction d'auto-corrélation est gaussienne. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 1$  mm et  $\sigma_{h,3} = 2.5$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{\text{ch},1} = 15$  mm et  $L_{\text{ch},3} = 30$  mm. Le centre du cylindre est  $C = (0, -0.375H)$ , de demi-grand axe  $a = 100$  mm et demi-petit axe  $b = 10$  mm. L'onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), à la fréquence centrale  $f_c = 2$  GHz, et dont le paramètre d'atténuation est  $g = L/6$ . (a) Signal d'entrée et signal de sortie. (b) Premier écho ( $P = 0$ ). (c) Deux premiers échos ( $P = 1, Q = 1$ ). (d) Trois premiers échos ( $P = 2, Q = 1$ ).

### 3.1.3 Temps des échos

La figure 3.4 présente les réponses temporelles du champ diffracté. Les paramètres des simulations sont les mêmes que dans les figures 3.3. Dans le cas d'interfaces lisses, les trois premiers échos de la surface inférieure surviennent aux instants  $T_1$ ,  $T_{2,S}$  et  $T_{3,S}$  définis respectivement par :

$$\begin{cases} T_1 = 2z_{\text{obs}}/c \\ T_{2,S} = T_1 + 2H\Re(\sqrt{\epsilon_{r,1}}) \\ T_{3,S} = T_1 + 4H\Re(\sqrt{\epsilon_{r,1}}) \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $c$  est la célérité de la lumière et  $H$  est l'épaisseur de la couche (la distance moyenne entre les deux surfaces). Nous pouvons obtenir les temps des deuxième et troisième échos pour l'objet en remplaçant  $H$  par  $H_{12}$  dans les relations (3.4), où  $H_{12}$  est la profondeur de l'objet. Les temps de ces échos s'écrivent  $T_{2,O}$  et  $T_{3,O}$ . Notons que la profondeur de l'objet peut être calculée de trois manières différentes : premièrement par rapport au centre de l'objet, deuxièmement par rapport au sommet supérieur, et enfin par rapport au sommet inférieur. Chaque façon de calculer la profondeur de l'objet donne un résultat différent. Dans cette étude, nous allons calculer la profondeur de l'objet par rapport à son centre.

Rappelons que ces échos sont calculés pour les méthodes PILE. Pour la méthode GPILE, les deuxième et troisième échos résultent des diffractions multiples entre l'objet et la surface inférieure dans le milieu intermédiaire  $\Omega_1$ . Ainsi, pour  $P = 1$  et  $Q = 0$ , le deuxième écho est constitué de deux contributions : l'une de l'objet et l'autre de la surface inférieure. Chacune de ces contributions comporte deux composantes : l'une directe et l'autre indirecte (cf. figure 2.9). Pour l'objet par exemple, nous avons vu dans les relations (2.72) que la matrice de contribution est composée par la contribution directe, exprimée par la relation  $\bar{\mathbf{N}}_{c,21,\text{Dir}} = +\bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  (qui prend en compte la contribution de l'onde provenant de la diffraction sur l'objet de l'onde transmise par la surface supérieure), et la contribution indirecte exprimée par la relation  $\bar{\mathbf{N}}_{c,21,\text{Ind}} = -\bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{32}\bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{13}$  (qui prend en compte la contribution de l'onde provenant de la diffraction sur l'objet, provenant de la diffraction sur la surface inférieure, qui elle-même a été transmise par la surface supérieure). Pour la surface inférieure, les contributions directe et indirecte sont mises en évidence par les relations (2.73), et représentées respectivement par les matrices de contribution  $\bar{\mathbf{N}}_{c,31,\text{Dir}} = +\bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{31}\bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{13}$  et  $\bar{\mathbf{N}}_{c,31,\text{Ind}} = -\bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{31}\bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{23}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12}$ .

De plus, les échos des contributions directes de l'objet et de la surface inférieure surviennent à des instants différents, car pour le premier, l'onde effectue un aller-retour vers

l'objet, tandis que pour le second l'onde effectue un aller-retour vers la surface inférieure. A contrario, les échos des contributions indirectes de ces deux diffuseurs arrivent au même instant (voir Contr. Ind. Objet et Contr. Ind. Surf. Inf. dans la figure 3.5 (b)). Pour l'objet, l'onde va d'abord vers la surface inférieure, puis passe par l'objet avant de revenir vers la surface supérieure. Pour la surface inférieure, l'onde passe par le même chemin mais en sens inverse. Théoriquement, les échos des contributions indirectes arrivent en même temps que l'écho de la contribution directe de la surface inférieure. Cependant, en pratique, un décalage temporel se crée autour de  $T_{2,S}$  pour les échos des contributions indirectes en raison de la diffraction sur l'objet. Ainsi, nous pouvons déjà prédire à ce stade que les deux contributions de la surface inférieure et la contribution indirecte de l'objet produiront des interférences dans le voisinage de  $T_{2,S}$ . Nous verrons plus loin quelles sont les conséquences des interférences entre ces trois contributions.

Pour  $Q = 1$ , il suffit d'ajouter le temps d'un aller-retour entre l'objet et la surface inférieure, donné par  $T_{OS} = T_{2,S} - T_{2,O}$  (en ajoutant également le temps de diffraction sur les deux diffuseurs). On en déduit que la contribution directe de l'objet à l'ordre  $Q = 1$  arrive théoriquement au temps  $T_{2,O} + T_{OS} = T_{2,S}$ . De ce fait, elle s'ajoute aux trois contributions qui produisaient déjà des interférences dans le voisinage de  $T_{2,S}$  pour  $Q = 0$ . Les trois autres contributions à l'ordre  $Q = 1$ , pour leur part, arrivent au temps  $T_{2,S} + T_{OS}$ .

Il est précieux de remarquer à ce stade déjà que lorsque l'objet est très proche de la surface supérieure, alors  $T_{2,O}$  est proche de  $T_1$ , car  $T_{SO}$  est très faible. Ainsi, les deux échos de l'objet interfèrent avec l'écho primaire de la surface supérieure. Si, par contre, l'objet est très proche de la surface inférieure, alors  $T_{2,O}$  est proche de  $T_{2,S}$ , car  $T_{OS}$  est très faible. Il en découle que les contributions directes et indirectes de deux diffuseurs à l'ordre  $Q = 0$ , et leurs résultantes pour l'ordre  $Q = 1$  arrivent autour de  $T_{2,S}$ , ce qui complexifie l'analyse du signal, ainsi que nous le verrons plus loin.

### 3.1.4 Analyse du signal

Dans les figures 3.4, les méthodes PILE montrent l'impact de l'objet et de la surface inférieure seuls, tandis que la méthode GPILÉ prend également en compte les interactions multiples entre les deux diffuseurs enfouis. Comme on peut le voir sur les figures 3.4 (a)-(b), le premier écho a la même forme que le signal d'entrée. La figure 3.4 (c) montre que le deuxième écho de l'objet a deux pics entre  $[3.5 - 4.5]$  ns. Le premier pic provient du signal émanant directement de l'antenne, tandis que le second pic provient de la forme

fermée de l'objet et de la rugosité de la surface supérieure. Le deuxième écho de la surface inférieure a un pic entre  $[5 - 5.5]$  ns et deux lobes latéraux. Ce pic est suivi de quelques pics de faibles intensités liés à la rugosité des deux surfaces. Pour plus de détail sur les effets de la rugosité des interfaces, nous renvoyons à la lecture de [131].

Les temps calculés pour les deuxièmes échos des deux diffuseurs enfouis sont cohérents avec les temps observés. Nous avons calculé la profondeur de l'objet par rapport à son centre et avons obtenu  $T_{2,O} = 3.98$  ns, ce qui correspond au point d'amplitude nulle (point d'inflexion). D'autre part, si nous calculons la profondeur de l'objet par rapport à son sommet supérieur, nous aurons  $T_{2,O} = 3.88$  ns, ce qui correspond au pic d'amplitude maximum et si on calcule cette profondeur par rapport au sommet inférieur de l'objet, on aura  $T_{2,O} = 4.07$  ns, ce qui correspond au pic d'amplitude minimum. Ces particularités sont liées aux paramètres du scénario, car l'onde incidente est en incidence normale et l'objet est centré au point abscisse nulle. Lorsque l'objet est centré en un point d'abscisse non nulle, les particularités observées sur le signal de l'objet sont détruites. Plus généralement, l'écho de l'objet devrait être localisé sur une fenêtre temporelle au lieu d'un instant précis.

Pour analyser le deuxième écho de GPILE 1/1 présenté dans la figure 3.4 (c), il faut dissocier ses composantes, à savoir, le deuxième écho de GPILE 1/0 et l'écho d'une interaction entre l'objet et la surface inférieure. Il convient donc d'analyser tout d'abord le deuxième écho de GPILE 1/0 et ensuite discuter de la contribution de l'interaction entre les deux diffuseurs enfouis. En effet, le deuxième écho de GPILE 1/0 est composé par la somme des échos des contributions directes et indirectes des deux diffuseurs enfouis, ce qui fait un total de quatre composantes. Nous présentons dans la figure 3.5 (a) le deuxième écho de GPILE 1/0 ainsi que ses quatre composantes. On observe dans cette figure que GPILE 1/0 coïncide avec la contribution directe de l'objet dans le voisinage de  $T_{2,O}$ . Ceci reste vrai pour tout scénario où l'objet est suffisamment éloigné des deux surfaces, de sorte que les interférences produites par les échos de celles-ci ne perturbent pas le signal de GPILE 1/0 (les cas d'un objet proche de l'une des surfaces sera traité plus loin). On se rappellera aussi que l'écho de la contribution directe de l'objet arrive bien avant les échos des trois autres contributions qui, quant à eux, arrivent théoriquement au même instant. Ainsi, on observe un décalage temporel autour de  $T_{2,S} = 5.39$  ns, entre d'une part les deux contributions indirectes et d'autre part la contribution directe de la surface inférieure, à cause de la diffraction sur l'objet. De cette façon, l'écho de GPILE 1/0 résulte des interférences entre ces trois contributions autour de  $T_{2,S}$ . Ceci a pour effet majeur de

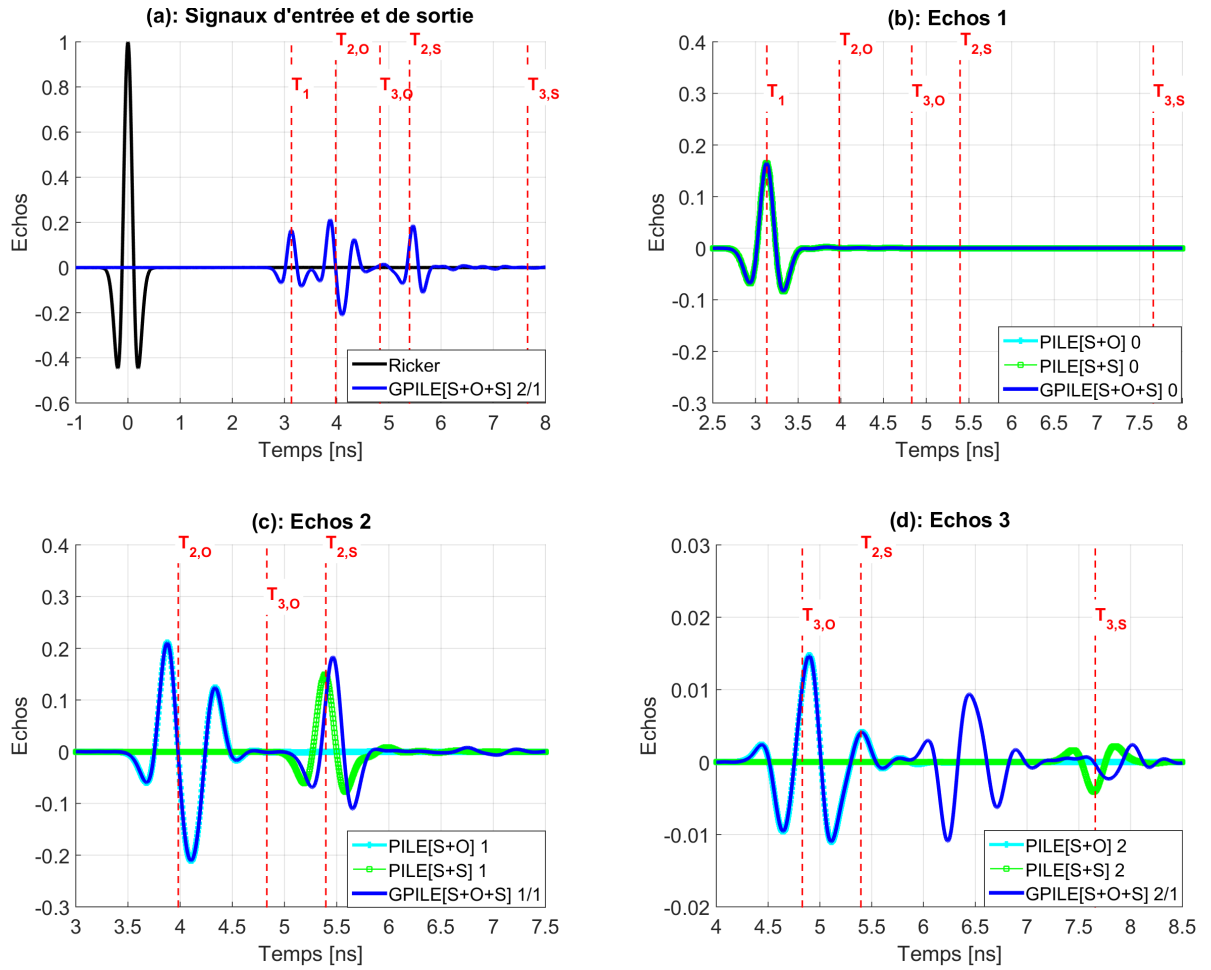


FIGURE 3.4 – Réponses temporelles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.3. (a) Signal d'entrée et signal de sortie. (b) Premier écho ( $P = 0$ ). (c) Deuxième écho ( $P = 1, Q = 1$ ). (d) Troisième écho ( $P = 2, Q = 1$ ).

produire un signal dont l'amplitude et l'allure dépendent de la nature de ces interférences (constructives ou destructives). De plus, ces interférences produisent un décalage temporel entre GPILE 1/0 et les deux contributions indirectes, ainsi que la contribution directe de la surface inférieure.

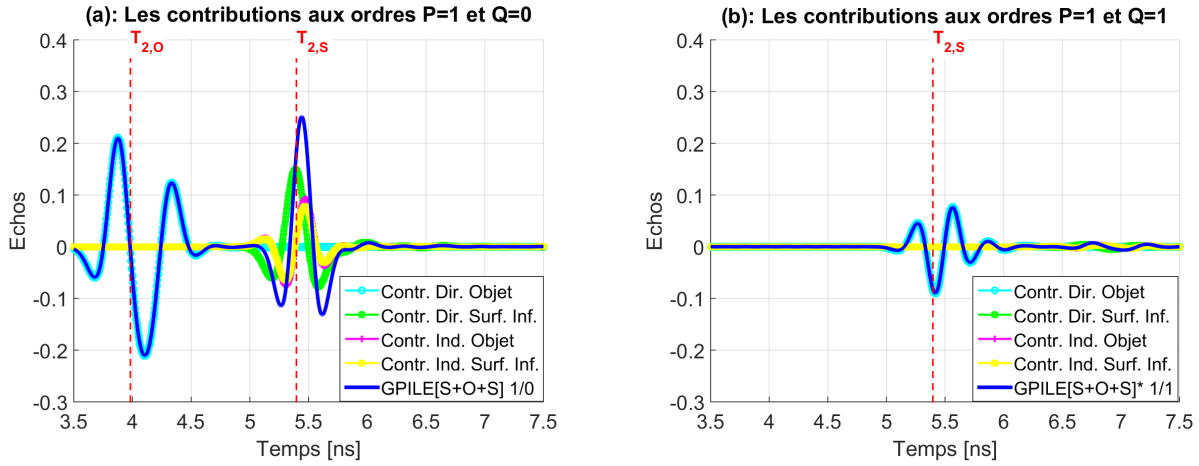


FIGURE 3.5 – Réponses temporelles du module du champ diffracté : contributions directe et indirecte. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces, de l'objet et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.4. (a) Les contributions aux ordres  $p = 1, q = 0$ . (b) Les contributions aux ordres  $p = 1, q = 1$ .

Nous allons maintenant discuter de la contribution de l'interaction entre les deux diffuseurs enfouis, i.e. la prise en compte des contributions pour l'ordre  $q = 1$ . Nous présentons dans la figure 3.5 (b) les quatre contributions uniquement pour l'ordre  $q = 1$ , ce qui revient à ne prendre en compte que les allers-retours des contributions directes et indirectes de deux diffuseurs enfouis à l'ordre  $q = 0$ . Dans la légende, GPILE\* 1/1 symbolise la somme de ses quatre contributions (à ne pas confondre avec GPILE 1/1 qui est la somme des contributions de GPILE 1/0 et GPILE\* 1/1). Ainsi, pour  $q = 1$ , l'écho de la contribution directe de l'objet arrive théoriquement à l'instant  $T_{2,s} = 5.39$  ns et produit une interférence avec GPILE 1/0 dans le voisinage de  $T_{2,s}$ . Pour ce scénario, cette interférence est destructive et justifie la différence d'amplitude entre GPILE 1/1 et GPILE 1/0 autour de  $T_{2,s}$ , comme le montre la figure 3.6. Les trois autres contributions pour  $q = 1$  arrivent au temps  $T_{2,s} + T_{\text{OS}} = 6.81$  ns et peuvent être observées sur GPILE\* 1/1 dans les figures 3.5 (b). Ces contributions justifient la différence d'amplitude entre GPILE 1/0 et GPILE 1/1 entre  $[6.5 - 7.5]$  ns, comme on peut le voir sur la figure 3.6.

Par ailleurs, nous avons déjà souligné que lorsque l'objet est proche de l'une des sur-



faces, alors ses contributions interfèrent avec celle de la surface proche. C'est ainsi que l'écho primaire de la surface supérieure interfère avec le deuxième écho de l'objet (ses deux contributions), lorsque celui-ci est proche de la surface supérieure. De même, lorsque l'objet est proche de la surface inférieure, alors les quatre échos de deux diffuseurs enfouis, aussi bien pour  $q = 0$  que pour  $q = 1$ , arrivent théoriquement autour de l'instant  $T_{2,S}$ , produisant des interférences qui rendent l'allure du signal temporel de GPILE difficile à interpréter.

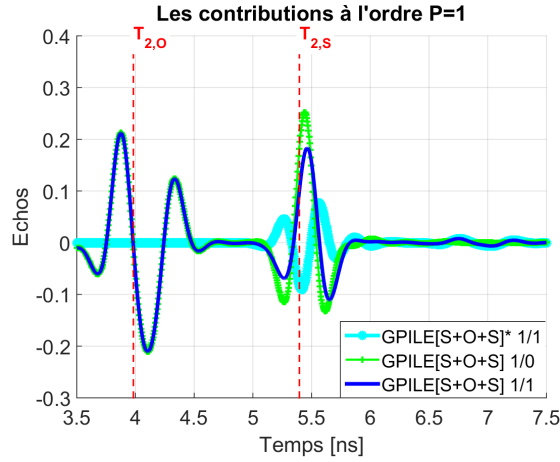


FIGURE 3.6 – Réponses temporelles du module du champ diffracté pour GPILE. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres de surfaces, de l'objet et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.3.

Nous voulons maintenant analyser les différentes contributions qui composent le troisième écho de GPILE. Pour ce faire, rappelons que le deuxième écho est composé de quatre contributions, à savoir, une contribution directe et une autre indirecte pour chacun des deux diffuseurs enfouis. Chacune des quatre contributions du deuxième écho créera quatre contributions pour le troisième écho, soit un total de 16 contributions pour une valeur fixée de  $Q$ . Nous nous intéressons tout d'abord aux cas d'échos qui ne contiennent pas d'interactions secondaires, i.e. pour lesquels  $Q = 0$ . On a vu que pour le second écho, la contribution directe de l'objet arrive avant sa contribution indirecte, qui elle arrive en même temps que les deux contributions de la surface inférieure. Ainsi, nous pouvons regrouper les échos de 16 contributions qui constituent le troisième écho de GPILE en trois classes. Dans la première classe, nous avons l'écho qui ne contient que la contribution directe de l'objet, à la fois pour le deuxième écho et pour le troisième écho. Cet écho survient au temps  $T_{S,O} + T_{2,O} = 4.64$  ns où  $T_{S,O}$  est le temps d'un aller-retour de l'onde

entre la surface supérieure et l'objet, ce qui explique pourquoi PILE(S+O) coïncide avec GPILE entre [4 – 6] ns comme le montre la figure 3.4 (d). Dans la seconde classe, nous avons tous les autres échos qui contiennent la contribution directe de l'objet, quelle que soit la contribution de la surface inférieure. Ces échos sont au nombre de 6 et surviennent au temps  $T_{SO} + T_{2,S} = 6.15$  ns et peuvent être observés dans l'intervalle [6 – 7] ns. Dans la troisième classe, nous avons tous les échos qui ne contiennent pas la contribution directe de l'objet, et ce quelle que soit la contribution de la surface inférieure. Ces échos sont au nombre de 9 et arrivent au temps  $T_{SS} + T_{2,S} = T_{3,S} = 7.65$  ns, où  $T_{SS}$  est le temps d'un aller-retour de l'onde entre la surface supérieure et la surface inférieure, et peuvent être observés dans l'intervalle [7 – 8.5] ns.

Notons enfin que pour  $Q = 1$ , il suffit d'ajouter le temps d'un aller-retour de l'onde entre l'objet et la surface inférieure, et de recalculer tous les temps d'écho de contributions. Cependant, nous n'allons pas détailler ici ces calculs d'autant que ces contributions sont très faibles, ainsi que nous l'avons déjà souligné.

Nous venons de présenter une analyse détaillée des temps de retard des échos et des amplitudes des signaux pour la diffraction par un objet (un cylindre elliptique) enfoui entre deux surfaces rugueuses. Ce scénario a été choisi de manière à distinguer les échos des trois diffuseurs. Nous allons maintenant implémenter des scénarii où les interférences entre les échos de trois diffuseurs sont prépondérantes sur l'allure ainsi que l'amplitude du signal.

## 3.2 Variations de paramètres de l'objet

Dans cette section, nous présentons quelques scénarii obtenus par la variation de l'un des paramètres de l'objet, notamment, sa taille, sa profondeur et sa permittivité. Nous nous référons pour comparaison au scénario présenté dans les figures 3.4, dont nous reprenons uniquement les signaux de sortie dans la figure 3.7 (a). Pour ce faire, nous avons d'abord le cas d'un objet plus petit, dont les grand demi-axe et petit demi-axe sont respectivement  $a = 25$  mm et  $b = 2.5$  mm (à savoir le quart des dimensions du cylindre du scénario de base). Ce cas est présenté dans la figure 3.7 (b), où l'on voit que l'objet contribue beaucoup moins. Ensuite, nous avons le cas d'un objet dont la permittivité est égale à celle du milieu intermédiaire dans la figure 3.7 (c) où la contribution est minimale. Enfin, le cas d'un objet conducteur parfait dans la figure 3.7 (d) où la contribution est maximale.

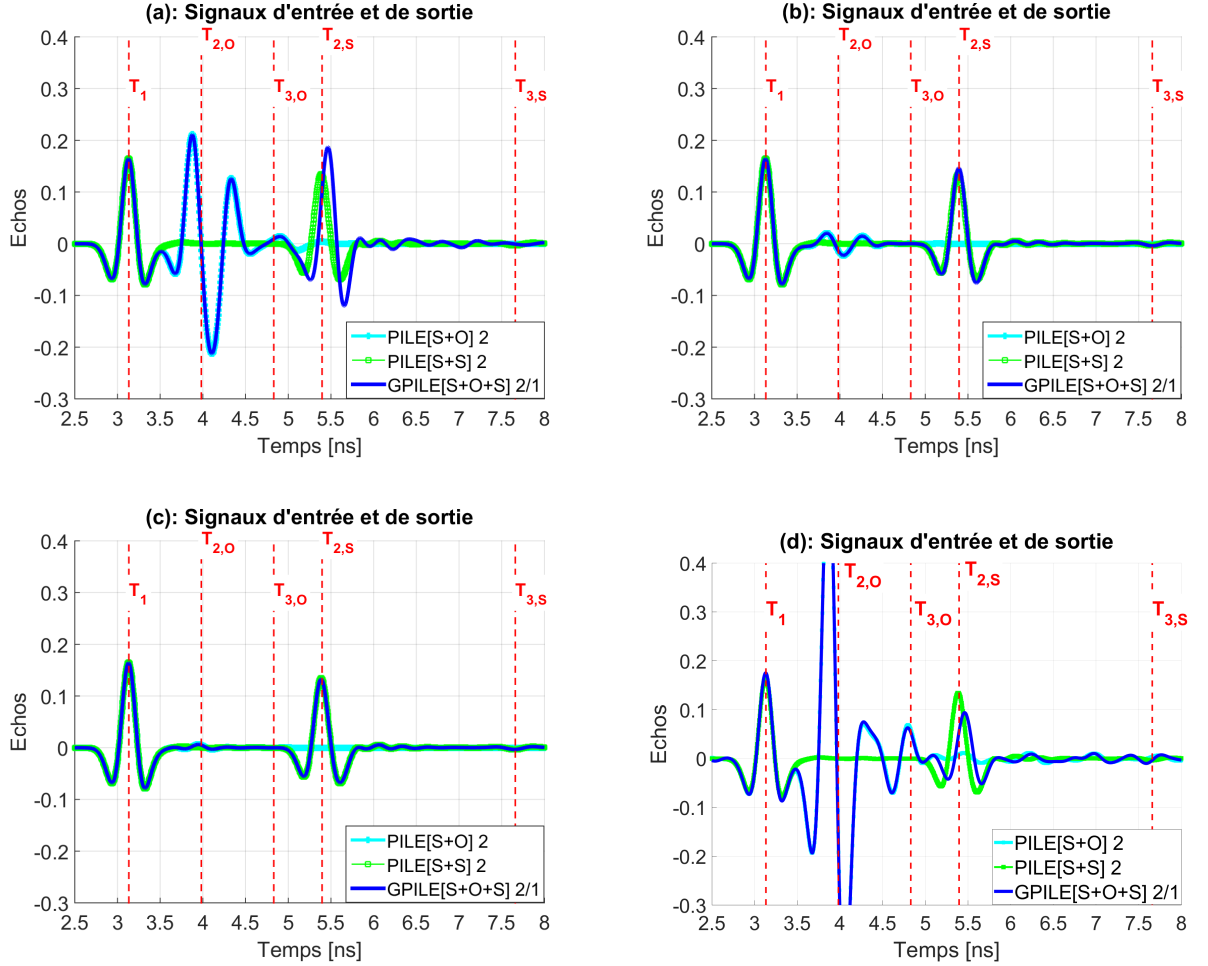


FIGURE 3.7 – Réponses temporelles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces sont les mêmes que dans la figure 3.3. Le cylindre est centré en  $C = (0, -0.375H)$ . (a) Un cylindre de dimensions  $a = 100$  mm et  $b = 10$  mm. (b) Un cylindre plus petit, de dimensions  $a = b = 10$  mm. (c) Même paramètres géométriques que (a), mais avec un cylindre de même permittivité que le milieu intermédiaire  $\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{r,1} = 2$ . (d) Même paramètres géométriques que (a), mais avec un cylindre conducteur parfait.

Aussi, nous accordons une importance particulière à la profondeur de l'objet et présentons dans les figures 3.8 quelques scénarii obtenus par la variation de la profondeur. Les ordonnées des profondeurs considérées sont respectivement  $-0.1H$ ,  $-0.15H$ ,  $-0.875H$  et  $-0.925H$ , où  $H$  est l'épaisseur entre les deux interfaces. On observe alors que l'amplitude de l'écho de l'objet diminue lorsque la profondeur augmente (hors toute interférence avec les échos des deux surfaces). En fait, le scénario de base a été choisi de telle sorte que les échos des trois diffuseurs soient distincts (surtout les deuxièmes échos) et sans interférence majeure. Dans un tel cas, le premier et le deuxième échos de GPILE coïncident avec ceux de PILE(S+O). En considérant maintenant un cas extrême où l'objet est très proche de la surface supérieure, il peut arriver que le premier écho de la surface supérieure se superpose avec le deuxième écho de l'objet (car  $T_{2,O} \approx T_1$  lorsque  $H_{12}$  est très faible), donnant ainsi dans un premier cas une interférence constructive qui se traduit par un seul pic de plus grande amplitude, comme dans la figure 3.8 (a); et dans un second cas, une interférence destructive comme dans la figure 3.8 (b). Ces interférences expliquent aussi le décalage temporel qu'on observe autour de  $T_1$  dans ces deux figures.

Si par contre, l'objet est très proche de la surface inférieure, alors les contributions directe et indirecte de l'objet surviennent quasiment au même instant que celles de la surface inférieure. Un tel scénario est plus complexe que tous les autres cas, mais se rapproche de l'application à laquelle est dévolue cette thèse. En effet, comme  $T_{2,O}$  et  $T_{2,S}$  sont très proches, les contributions directes et indirectes des deux diffuseurs enfouis (les contributions directes étant largement plus importantes que les contributions indirectes dans beaucoup de cas) se superposent, et créent des interférences (constructives et/ou destructives) qui rendent l'allure du signal de GPILE difficile à interpréter. De plus, les quatre contributions à l'ordre  $q = 0$  arrivent presque au même instant que leurs résultantes à l'ordre  $q = 1$ . Il découle que le signal de GPILE 1/1 se compose de huit échos, qui interfèrent autour de  $T_{2,S}$ , rendant le signal GPILE difficile à analyser. Dans ces cas, il faut posséder aussi le signal de la méthode PILE du cas de deux surfaces pour interpréter correctement le signal de GPILE du cas d'un objet enfoui entre deux interfaces. Les figures 3.8 (c)-(d) présentent des tels scénarii.

Un autre scénario encore plus difficile à analyser est celui d'un objet enfoui entre deux surfaces séparées par une couche relativement mince. Ceci implique que l'objet enfoui est proche des deux surfaces à la fois. Ainsi, les échos des trois diffuseurs vont se superposer. Dans un tel cas, l'écho primaire de la surface supérieure interfère avec les deuxièmes échos de la surface inférieure et de l'objet autour de  $T_1$ . De même, les deuxièmes échos de deux

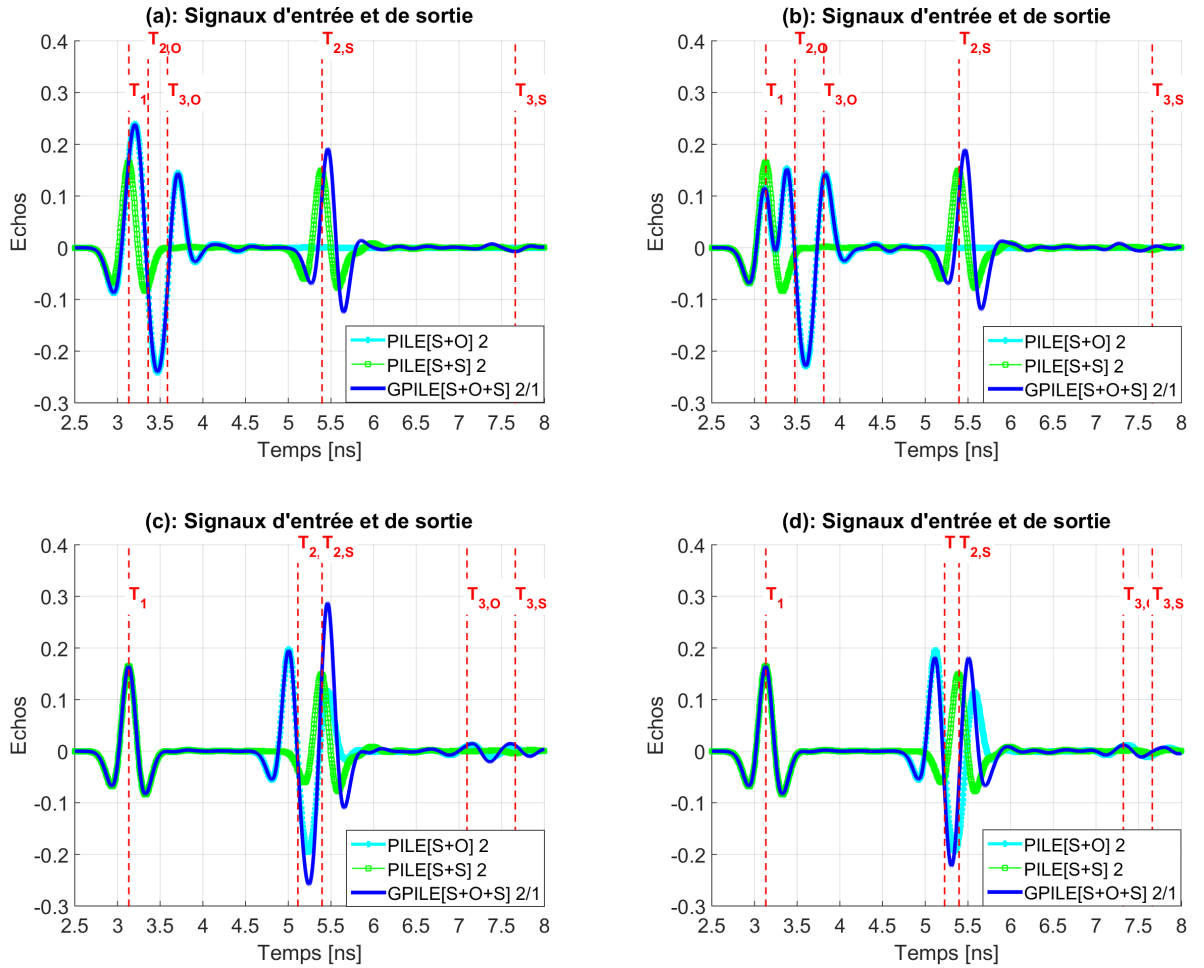


FIGURE 3.8 – Réponses temporelles du module du champ diffracté. L'abscisse et la hauteur d'observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces et de l'onde incidente sont les mêmes que dans la figure 3.3. Les ordonnées des profondeurs varient en fonction de l'épaisseur  $H$  entre ces interfaces. (a)  $-0.1H$ . (b)  $-0.15H$ . (c)  $-0.875H$ . (d)  $-0.925H$ .

diffuseurs enfouis interfèrent autour de  $T_{2,O}$  et de  $T_{2,S}$ , qui sont très proches. De cette façon, la fenêtre temporelle de GPILE est très réduite, de sorte que son signal peut avoir une allure difficile à prédire.

De tout ce qui précède, nous en déduisons que la différence entre les signaux de GPILE et PILE(S+S) est une preuve de l'existence d'un objet (ou un défaut) dans la couche située entre les deux surfaces. Le point d'inflexion sur le signal de l'objet enfoui peut être un élément qui permet d'estimer la profondeur de l'objet, et d'envisager ainsi l'existence des interférences, s'il est avéré que l'objet est proche de l'une des interfaces. La fenêtre temporelle d'ouverture du signal de l'objet peut être un élément qui conduit à l'estimation de sa taille. Du reste, l'amplitude du signal pourrait être un élément décisif sur l'obtention de la permittivité connaissant la taille de l'objet.

La suite de cette étude est consacrée à l'adaptation des paramètres géométriques et physiques de l'objet à celles d'une fissure interne. Mais avant de poursuivre cette étude, arrêtons-nous un instant pour dresser un bilan des résultats acquis à ce stade.

### 3.3 Bilan des résultats

Dans cette section, nous réunissons toutes les informations nécessaires à la poursuite de notre investigation. Il s'agit de présenter un résumé sur la convergence de la méthode GPILE, la sensibilité du champ diffracté à la variation des paramètres du scénario, les temps des échos, l'analyse des amplitudes des échos et la forme du signal.

#### 3.3.1 Convergence de la méthode GPILE

La méthode GPILE converge pour les valeurs de  $P = 2$  et  $Q = 1$ , selon le critère de convergence d'une ERR de moins de 2% sur le champ diffracté en champ proche. Ainsi, deux allers-retours de l'onde entre la surface supérieure et l'objet, ainsi que la surface inférieure suffisent pour prendre en compte toutes les contributions significatives. De même, un aller-retour de l'onde entre l'objet et la surface inférieure suffit.

#### 3.3.2 Dépendance aux paramètres

En plus des paramètres liés aux deux surfaces (la rugosité, l'épaisseur entre les surfaces et les permittivités relatives des milieux), le champ diffracté dépend aussi des paramètres

géométriques et physiques de l'objet telles que sa taille, sa forme, sa position et sa permittivité. Nous reviendrons sur l'impact des changements de ces paramètres sur l'allure du signal.

### 3.3.3 Temps de retard des échos

Les temps des échos des surfaces dépendent de la rugosité de ces surfaces [131]. Les temps des deuxième et troisième échos des diffuseurs enfouis dépendent de la profondeur du diffuseur et de la permittivité du milieu intermédiaire. De plus, la profondeur de l'objet peut être calculée par rapport au centre ou l'un des sommets (supérieur ou inférieur) de l'objet, donnant pour chaque cas des résultats différents. Ces possibilités font que le deuxième écho de l'objet peut survenir sur une fenêtre temporelle donnée au lieu d'un instant précis. Théoriquement, l'écho de la contribution directe de l'objet arrive avant l'écho de sa contribution indirecte qui, quant à lui, arrive au même instant que les échos des contributions directe et indirecte de la surface inférieure. En pratique, les échos des contributions indirectes sont en léger retard par rapport à l'écho de la contribution directe de la surface inférieure, à cause de la diffraction sur l'objet. Ces trois derniers échos sont une cause inévitable d'interférences dans la construction du signal de GPILE.

### 3.3.4 Interférences

Le phénomène d'interférence nécessite une attention particulière. Selon que la résultante de cette interférence est de plus grande amplitude, on parle d'une interférence *constructive*, et une interférence est dite *destructive* si les deux ondes sont en opposition. Nous pouvons distinguer deux catégories d'interférences dans les échos qui composent GPILE : les interférences qui sont présentes quel que soit le scénario choisi et celles qui viennent de la géométrie du problème (distance entre les trois diffuseurs). Dans la première catégorie, nous avons par exemple les interférences entre les contributions indirectes de deux diffuseurs enfouis et la contribution directe de la surface inférieure, pour les mêmes valeurs de  $p$  et  $q$ . A ces trois contributions s'ajoute la contribution d'un aller-retour entre l'objet et la surface inférieure de la contribution directe de l'objet, i.e. la contribution de l'objet pour  $q + 1$ . Pour la deuxième catégorie, nous pouvons citer les interférences entre l'écho primaire de la surface supérieure et le deuxième écho de l'objet (aussi bien la contribution directe qu'indirecte), lors que l'objet est très proche de la surface supérieure. De même, lors que l'objet est très proche de la surface inférieure, les échos de ces deux

contributions interfèrent avec les échos de la première catégorie.

### 3.3.5 Amplitude des échos

L'écho de l'objet est proportionnel à sa taille, à sa permittivité, et varie avec la profondeur. En d'autres termes, plus un objet est grand, plus il contribue ; plus un objet est profond moins il contribue (hors interférences), et sa contribution est maximale lorsque l'objet est un conducteur parfait. De plus, pour les mêmes valeurs de paramètres, les amplitudes des deuxièmes échos de l'objet et de la surface inférieure sont quasiment du même ordre de grandeur que l'amplitude de l'écho primaire de la surface supérieure pour des scénarii classiques. Par contre, les amplitudes des troisièmes échos sont faibles par rapport aux amplitudes des deuxièmes échos (qui peuvent être de l'ordre du dixième pour certains scénarii).

### 3.3.6 Forme du signal

L'écho primaire de la surface supérieure est corrélé au signal d'entrée. Cette corrélation se détériore ensuite pour plusieurs raisons, notamment, à cause non seulement de la rugosité des interfaces et/ou de la forme de l'objet, mais aussi des interférences entre les échos des trois diffuseurs. Pour des ordres supérieurs de  $P$  et  $Q$  s'ajoutent les interactions multiples entre les trois diffuseurs.

Nous venons de regrouper toutes les informations nécessaires à l'étude de l'impact d'une fissure interne sur le signal GPR. Avant de poursuivre cette étude, il est opportun de préciser les limites dans lesquelles le GPR peut effectivement être utilisé dans la détection des fissures, pour ainsi recourir à des paramètres et des scénarii réalistes dans notre étude.

## 3.4 GPR et fissures incrustées

La gestion de l'entretien des routes représente une tâche complexe pour les autorités routières. En effet, l'évaluation du niveau de dégradation et la réhabilitation des routes nécessitent de disposer d'informations précises et à jour sur l'état de la chaussée. La fissuration est la cause majeure de détérioration des chaussées. Elle est la source d'une accélération des dégradations spécifiques pour chaque type de chaussée, car les matériaux



utilisés pour les chaussées possèdent des propriétés mécaniques variables, associés à des modes de rupture qui leur sont propres.

Le béton bitumineux est un des matériaux les plus largement utilisés pour les routes et les chaussées en raison de ses avantages tels que la fluidité, la facilité de réparation et le confort de conduite élevé. Les fissures dans les chaussées bitumineuses sont généralement causées par une défaillance par fatigue sous des charges de trafic, ainsi que les conditions climatiques. Dans les chaussées minces (20 à 25 mm d'épaisseur moyenne), la fissuration commence au bas de la couche bitumineuse où la contrainte de traction est la plus élevée, puis elle se propage jusqu'à la surface. Dans les chaussées épaisses (40 mm d'épaisseur), les fissures commencent généralement par le haut en raison des contraintes de traction localisées élevées dues à l'interaction pneu-chaussée. Ainsi, les défauts dans les chaussées peuvent être classés en deux types : les défauts incrustés et les défauts ouverts. Les défauts incrustés (tels que les décollements) sont des défauts qui se produisent dans la chaussée [17, 18]. Les défauts ouverts sont les fissures superficielles visibles de l'extérieur [138].

L'imagerie numérique a été largement utilisée dans la détection des fissures ouvertes depuis de nombreuses années. Ces fissures pouvaient être identifiées correctement et automatiquement après un traitement ultérieur de l'image. Au cours des dernières décennies, diverses méthodes basées sur des approches de traitement d'image ont été proposées pour la détection de fissures grâce l'avancée de la technologie des caméras à grande vitesse et du matériel de stockage de grande taille [1]. Dans [139], différentes méthodes pour identifier automatiquement la fissure et sa profondeur à l'aide de techniques de traitement d'images sont présentées. Une enquête détaillée est menée pour identifier les défis de recherche et les réalisations présentes dans ce domaine.

En ce qui concerne une fissure enfouie sous la surface de la route, les images numériques et la détection manuelle sont non concluantes [1]. Le Radar à Pénétration de Sol (GPR) est un outil très puissant pour la surveillance de la chaussée et la détection de décollements ou de défauts incrustés [9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 15, 16, 17, 18, 19]. Le GPR offre plusieurs avantages, notamment, son taux d'acquisition de données élevé [20], sa sensibilité aux variations de permittivité [21], de teneur en eau [22, 23] et de porosité des matériaux [24], etc. Le GPR demeure à ce jour la plus haute résolution de toutes les méthodes géophysiques utilisées pour le test non destructif [25]. De plus, le GPR peut détecter des caractéristiques structurelles subtiles, cartographier en détail l'emplacement et la profondeur des barres des armatures en acier [26].

Par ailleurs, l'épaisseur de la base de la route et la profondeur d'une fissure étant

variées, le choix approprié de la fréquence radar est également important pour la précision dans la localisation. Dans [140], un système GPR est utilisé pour détecter les fissures qui se forment et se propagent dans l'échantillon pendant la dessiccation. Cette étude a identifié les types de signaux et l'épaisseur des fissures qui peuvent être détectées à l'aide du dispositif GPR. Les résultats indiquent qu'une fissure de 1 ou 2 mm d'épaisseur peut être détectée en fonction de sa position et de sa forme à l'aide du GPR commercialisé sur le marché. Toutefois, ces fissures doivent être séparées d'une distance d'au moins 50 mm, sinon, les interférences entre les fissures pourraient compliquer l'interprétation des données.

L'application de la méthode GPILÉ à la détection de fissures exige de tester la capacité de cette méthode à produire des simulations numériques réalistes pour le cas d'un objet très petit et très proche au moins de l'une des deux surfaces. Pour ce test, nous devons sélectionner une méthode de référence dont les performances ne sont liées ni à l'épaisseur de l'objet, ni à la distance moyenne entre l'objet et l'une des deux surfaces. Dans le cadre de cette étude spécifique, nous avons sélectionné la méthode de l'optique physique comme référence. Nous présentons dans la prochaine section la méthode de l'optique physique et son extension à un milieu multicouche.

### **3.5 Validation de la méthode GPILÉ par la méthode de l'Optique Physique pour la géométrie des fissures**

La méthode de l'optique physique est une méthode asymptotique en approximation hautes fréquences. Un de ses avantages sur la Méthode des Moments est qu'elle ne nécessite pas la résolution d'un système linéaire [141]. Pour cette raison, la méthode de l'optique physique est souvent utilisée pour le calcul de la diffraction électromagnétique par de surfaces de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde. Cet avantage devient crucial lorsqu'il faut calculer le champ diffracté sur une large bande des fréquences (sur plusieurs fréquences pour le besoin de la réponse temporelle). La méthode de l'optique physique utilise les coefficients de Fresnel que nous avons déjà présentés au chapitre premier. Rappelons tout de même que certaines hypothèses sont nécessaires pour mettre en œuvre cette méthode. En effet, les milieux sont supposés LHI, d'indices de réfraction différents et séparés par des interfaces planes.

### 3.5.1 Formulation de la méthode OP pour une interface

Considérons une surface  $S_{01}$ , délimitant deux milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ , et éclairée par une onde incidente telle que décrite dans la figure 3.9. La méthode de l'optique physique consiste d'abord à substituer (par discrétisation) la surface par  $N$  échantillons donnés, ensuite à utiliser l'approximation du plan tangent. Les courants surfaciques peuvent alors être obtenus par les coefficients de Fresnel et la direction du champ réfléchi est calculée par les lois de Snell-Descartes. Ainsi, les champs totaux sur la surface sont donnés par [48]

$$\psi_0(\mathbf{r}) = [1 + \mathcal{R}_{01}(\mathbf{r})] \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad (3.5)$$

pour tout  $\mathbf{r}$  situé dans la région éclairée de la surface,  $S_{\text{Ecl}}$ , et valent 0 pour tout  $\mathbf{r}$  situé dans la région non éclairée de la surface,  $S_{\text{Omb}}$ , de sorte que  $S_{01} = S_{\text{Ecl}} \cup S_{\text{Omb}}$ .  $\mathcal{R}$  est le coefficient de Fresnel en réflexion, défini par

$$\mathcal{R}_{01}^{TE} = \frac{n_0 \cos \chi_{\text{inc}} - n_1 \cos \chi_t}{n_0 \cos \chi_{\text{inc}} + n_1 \cos \chi_t}, \quad (3.6)$$

pour la polarisation transverse électrique, et

$$\mathcal{R}_{01}^{TM} = \frac{n_0 \cos \chi_t - n_1 \cos \chi_{\text{inc}}}{n_0 \cos \chi_t + n_1 \cos \chi_{\text{inc}}}, \quad (3.7)$$

pour la polarisation transverse magnétique, où  $\chi_{\text{inc}}$  est l'angle d'incidence locale défini par le vecteur incident  $\hat{\mathbf{k}}_{\text{inc}}$  et la normale locale  $\hat{\mathbf{n}}$ , par la relation

$$\cos \chi_{\text{inc}} = -\hat{\mathbf{k}}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Pour obtenir les dérivées normales des champs totaux, nous considérons que l'onde incidente est une onde plane définie par

$$\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \psi_{\text{inc},0} e^{j\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.8)$$

Ainsi, les dérivées normales des champs totaux sont données par [48]

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial n}(\mathbf{r}) = j\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) [1 - \mathcal{R}(\mathbf{r})] \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

pour tout  $\mathbf{r} \in S_{\text{Ecl}}$ , et valent 0 ailleurs.

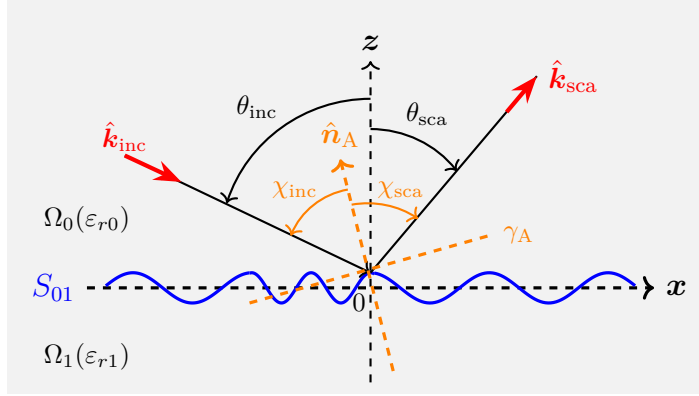


FIGURE 3.9 – Optique physique pour une interface rugueuse 1-D.

Le champ diffracté en champ lointain obtenu par la méthode de l'optique physique s'écrit alors :

$$\psi_{\text{sca},0}^{\infty,0} = -j \int_{S_{\text{Ecl}}} \{ \mathbf{k}_{\text{sca}} \cdot \hat{\mathbf{n}} [1 + \mathcal{R}(\mathbf{r})] + \mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{n}} [1 - \mathcal{R}(\mathbf{r})] \} e^{j(\mathbf{k}_{\text{inc}} - \mathbf{k}_{\text{sca}}) \cdot \mathbf{r}} \mathbf{dS}. \quad (3.10)$$

Il permet de calculer la surface équivalente radar pour la méthode de l'optique physique à l'aide de la relation (1.86). La méthode de l'optique physique est valide pour  $\rho_0 \cos^3 \chi_{\text{inc}} \gg \lambda_0$ , où  $\rho_0$  est le rayon de courbure locale de la surface, et  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le milieu incident  $\Omega_0$ .

### 3.5.2 Extension au cas des milieux multicouches

Les coefficients de Fresnel pour une interface peuvent être définis de manière globale pour un milieu multicouche aux indices de réfraction différents, et dont les couches sont séparées par des interfaces planes. En effet, considérons d'abord le cas de deux interfaces planes  $S_{01}$  et  $S_{12}$  représentées dans la figure 3.10. Soit  $H_1$  l'épaisseur du milieu  $\Omega_1$ , i.e. la distance entre les surfaces  $S_{01}$  et  $S_{12}$  avec  $(i, j = 0, 1 \text{ ou } 1, 2)$ . Soient  $\theta_i$  et  $\theta_j$  respectivement l'angle incident et l'angle de transmission par rapport à la surface  $S_{ij}$ , délimitant les milieux  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ . Alors le coefficient de Fresnel de réflexion et de transmission globaux, entre les milieux  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  peuvent être calculés par la méthode de la matrice de transfert, et on obtient [142] :

$$\mathcal{R}_{012} = \frac{\mathcal{R}_{01} + \mathcal{R}_{12} \exp(2jk_{1,z}H_1)}{1 + \mathcal{R}_{01}\mathcal{R}_{12} \exp(2jk_{1,z}H_1)}, \quad (3.11)$$

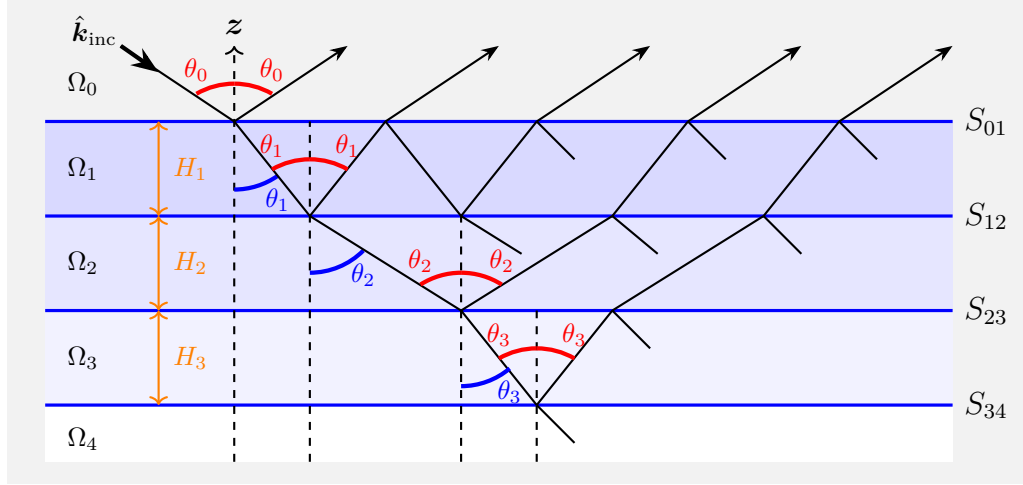


FIGURE 3.10 – Représentation des champs diffractés par un milieu multicouche.

$$\mathcal{T}_{012} = \frac{\mathcal{T}_{01}\mathcal{T}_{12} \exp(jk_{1,z}H_1)}{1 + \mathcal{R}_{01}\mathcal{R}_{12} \exp(2jk_{1,z}H_1)}, \quad (3.12)$$

où

$$k_{1,z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1,x}^2},$$

est la composante suivant  $z$  du vecteur d'onde dans  $\Omega_1$ . Ces relations s'adaptent aussi bien à des couches minces qu'à des couches de fortes permittivités, les permittivités pouvant prendre de valeurs complexes.

La généralisation des coefficients de Fresnel globaux à  $n$  interfaces se fait aisément par un raisonnement par récurrence. Par exemple, pour trois interfaces, les coefficients de Fresnel de réflexion global s'écriront :

$$\mathcal{R}_{0123} = \frac{\mathcal{R}_{01} + \mathcal{R}_{123} \exp(2jk_{1,z}H_1)}{1 + \mathcal{R}_{01}\mathcal{R}_{123} \exp(2jk_{1,z}H_1)}, \quad (3.13)$$

avec

$$\mathcal{R}_{123} = \frac{\mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{23} \exp(2jk_{2,z}H_1)}{1 + \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23} \exp(2jk_{2,z}H_1)}, \quad (3.14)$$

où  $\mathcal{R}_{12}$  et  $\mathcal{R}_{23}$  sont respectivement les coefficients de Fresnel en réflexion sur les interfaces  $S_{12}$  et  $S_{23}$ .

Et le coefficient de Fresnel de transmission global seront :

$$\mathcal{T}_{0123} = \frac{\mathcal{T}_{01}\mathcal{T}_{123} \exp(jk_{1,z}H_1)}{1 + \mathcal{R}_{01}\mathcal{R}_{123} \exp(2jk_{1,z}H_1)}, \quad (3.15)$$

avec

$$\mathcal{T}_{123} = \frac{\mathcal{T}_{12}\mathcal{T}_{23} \exp(jk_{1,z}H_2)}{1 + \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23} \exp(2jk_{1,z}H_1)}, \quad (3.16)$$

où  $\mathcal{T}_{12}$  et  $\mathcal{T}_{23}$  sont respectivement les coefficients de Fresnel en transmission sur les interfaces  $S_{12}$  et  $S_{23}$ . Ainsi, par récurrence, on obtient les coefficients de Fresnel globaux pour  $n$  couches.

Nous pouvons à présent procéder à la validation numérique du modèle intégral, de la discrétisation par la Méthode des Moments et de l'algorithme GPILE dans le contexte de la détection des fissures internes. Il s'agit de montrer que le modèle intégral (et par conséquent sa discrétisation par la Méthode des Moments) est bien adapté au cas des objets d'une épaisseur très fine, et situés très près de la surface inférieure. Une telle validation sera une occasion de montrer la conformité des résultats numériques au phénomène de diffraction par des surfaces rugueuses ou lisses dans le contexte de notre application. Aussi, cette validation permettra de tester la convergence de la méthode GPILE dans les conditions de la géométrie des fissures enfouies. En effet, en considérant la méthode de l'optique physique comme référence, nous serons en mesure de calculer l'Erreur Relative Résiduelle sur les courants surfaciques et/ou leurs dérivées normales obtenus par la Méthode des Moments avec l'inversion LU ou par l'algorithme GPILE.

Le choix des paramètres géométriques et physiques pour la validation numérique est restreint par la réalité physique, les ressources informatiques disponibles ainsi que les contraintes de mise en œuvre d'une méthode numérique. Cette dernière contrainte par exemple, impose que les longueurs des interfaces ou le périmètre de l'objet, l'épaisseur entre les interfaces, la profondeur de l'objet et son épaisseur, et enfin sa distance par rapport à la surface inférieure ne soient pas plus petits que le plus petit des pas de discrétisation sur les trois diffuseurs. En bref, aucune distance entre deux échantillons quelconques ne doit être plus courte que le plus petit des pas de discrétisation. A ceci s'ajoute la contrainte de convergence de la Méthode des Moments qui, quant à elle, est subordonnée à la longueur d'onde dans le vide.

Par ailleurs, nous avons vu que l'expression des dérivées des courants surfaciques (3.9) est valable uniquement lorsque le champ incident est une onde plane. Or, nous avons signalé au chapitre premier la difficulté d'utiliser une onde plane dans l'étude de

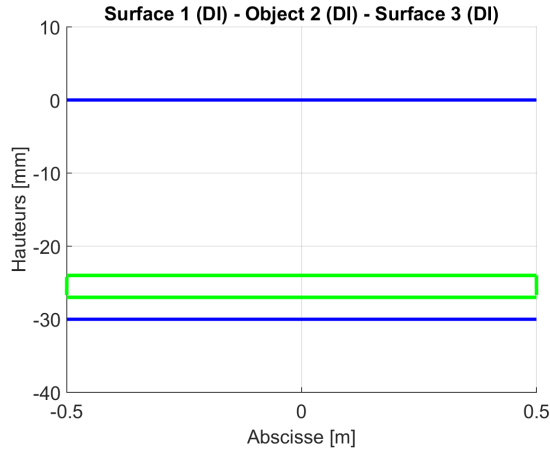


FIGURE 3.11 – Les deux surfaces sont planes et de longueur  $L = 1000$  mm. L'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 30$  mm. L'objet est rectangulaire, de même envergure que les deux surfaces, d'épaisseur  $e = 3$  mm, et sa base est située à 3 mm au-dessus de la surface inférieure.

la diffraction par des surfaces à cause notamment des effets de bords. Nous sommes donc contraints ici aussi d'utiliser une onde apodissée, comme l'onde de Thorsos par exemple. Ceci a pour effet majeur de créer un décalage entre les courants surfaciques obtenus par la méthode de l'optique physique et celles que nous obtiendrons par notre approche. Ce décalage peut être très significatif sur les dérivées des courants surfaciques. Dans ce qui suit, nous ne présentons que les résultats numériques des courants surfaciques (sans leurs dérivées normales), en s'assurant tout de même que l'ERR sur les dérivées normales est satisfaisante. Nous retenons le critère de moins de 2% d'ERR sur les courants et leurs dérivées normales. Pour ce faire, considérons deux surfaces planes  $S_1$  et  $S_3$ , de longueur  $L = 1000$  mm, qui séparent trois milieux homogènes  $\Omega_i$  ( $i \in \{0, 1, 3\}$ ). Le milieu supérieur  $\Omega_0$  est considéré comme de l'air et sa permittivité relative vaut  $\epsilon_{r,0} = 1$ . Le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  est une couche d'épaisseur moyenne  $H = 30$  mm et dont la permittivité relative vaut  $\epsilon_{r,1} = 4.5$ . Le milieu inférieur  $\Omega_3$  est une couche d'épaisseur infinie et de permittivité relative égale à  $\epsilon_{r,3} = 7$ .

Considérons maintenant un objet enfoui entre les deux surfaces, de même envergure que la longueur des deux interfaces, et aplati aux deux pôles de sorte qu'il soit rectangulaire. De plus, l'épaisseur de l'objet est choisie égale à sa distance par rapport à la surface inférieure. Pour satisfaire la contrainte d'implémentation numérique sur les distances entre échantillons, nous considérons que l'épaisseur de l'objet est plus grande que le plus petit des pas de discrétisation sur les trois diffuseurs. Pour avoir un scénario proche de l'ap-

plication, la permittivité relative de l'objet varie entre 2 et 20. La figure 3.11 présente les hauteurs des surfaces (en mm) par rapport à l'abscisse (en mm). Le présent scénario revient à considérer un milieu multicouche, avec quatre interfaces planes et donc cinq milieux, de sorte que les milieux au-dessus et en dessous de l'objet ont la même permittivité relative, qui est en fait la permittivité du milieu intermédiaire. Pour l'onde incidente, considérons une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), de fréquence  $f = 2$  GHz et dont le paramètre d'atténuation vaut  $g = L/6$ .

Nous pouvons définir deux protocoles de validation numérique de la méthode GPILE dans le contexte de notre application. Le premier protocole consiste à fixer d'abord l'épaisseur de l'objet (et donc sa distance par rapport à la surface inférieure), sa permittivité relative, ainsi que le nombre des points par longueur d'onde dans le vide. Ainsi, en considérant un critère raisonnable sur l'ERR, nous pouvons déterminer quelles sont les valeurs de  $P$  et  $Q$  pour lesquelles la méthode GPILE (sous contrôle de la Méthode des Moments) converge vers la méthode de l'optique physique. Pour le second protocole, nous retenons les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$  comme référence pour la méthode GPILE. Ce protocole consiste d'abord à fixer l'épaisseur de l'objet ainsi que sa permittivité relative, et ensuite à faire varier le nombre des points par longueur d'onde dans le vide, jusqu'à trouver le nombre de points qu'il convient de prendre pour s'assurer que les ERR sur la Méthode des Moments et l'algorithme GPILE par rapport à la méthode de l'optique physique sont satisfaisantes. Nous retenons le second protocole pour notre étude. L'épaisseur de départ est 1 mm et les nombres des points considérés par longueur d'onde dans le vide sont 10, 20, 30 et 50. Nous aurions pu considérer aussi 100 points par longueur d'onde dans le vide, mais cela nous semble être un défi difficile à surmonter compte tenu du temps d'une simulation, eu égard aux ressources informatiques disponibles.

De prime abord, il faut se rendre à l'évidence que pour une épaisseur fixée, la Méthode des Moments et l'algorithme GPILE sont plus précis pour des permittivités relatives élevées de l'objet et lorsque le nombre de points par longueur d'onde dans le vide est grand. De toutes les simulations réalisées, il ressort que pour une permittivité relative comprise entre 2 et 20, l'ERR sur les courants surfaciques est de moins de 2% pour une épaisseur de l'objet de plus de 3 mm, en prenant 50 points par longueur d'onde dans le vide. Nous présentons dans les figures 3.12 quelques simulations pour une permittivité de l'objet égale à 2. Dans la légende, PO représente la méthode de l'optique physique, LU représente la Méthode des Moments, tandis que notre algorithme est désigné par GPILE, et est implémenté pour les ordres  $P = 2$  et  $Q = 1$ .



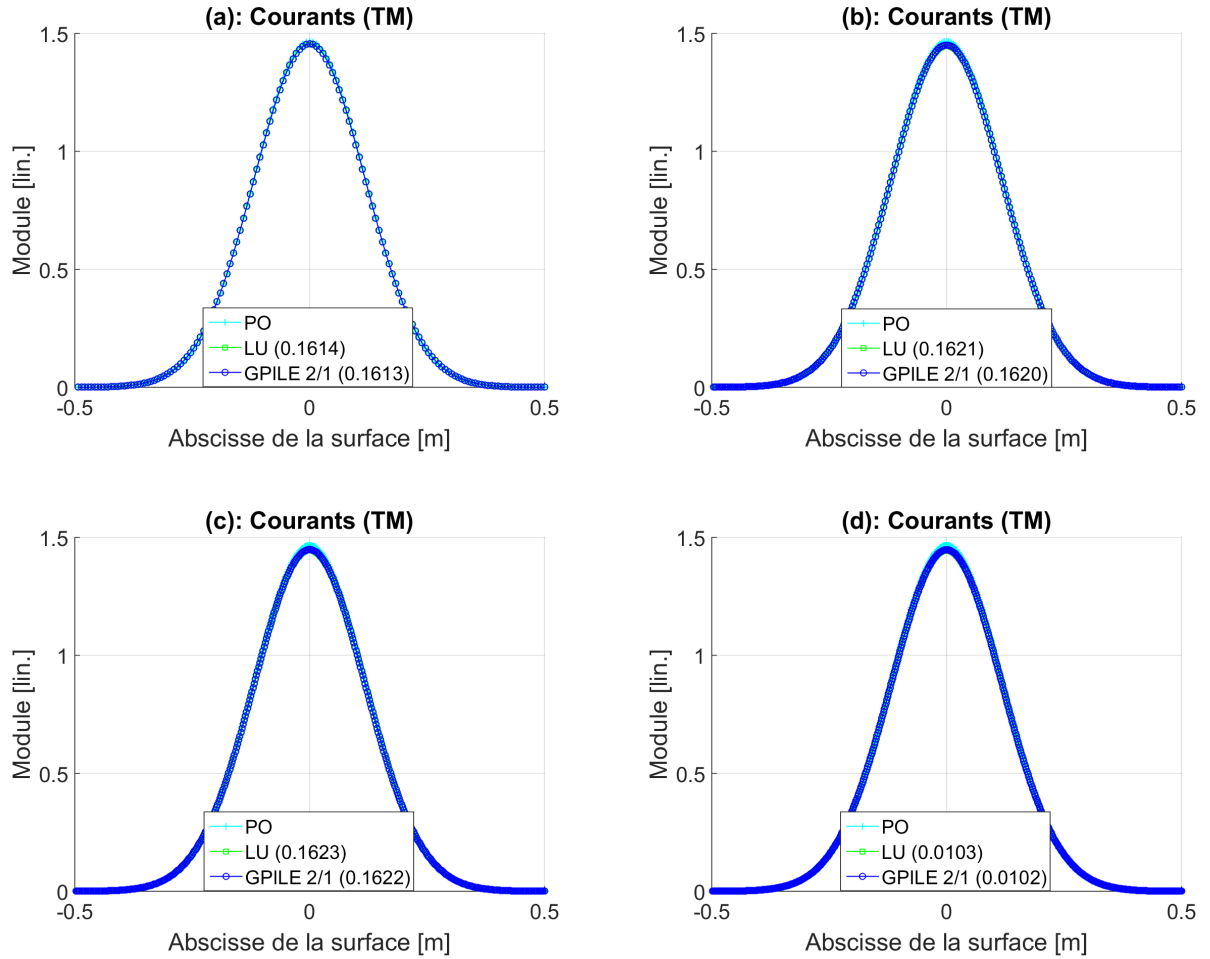


FIGURE 3.12 – Module des courants surfaciques par la méthode de l'optique physique. L'onde incidente est une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), à la fréquence  $f = 2$  GHz, et dont le paramètre d'atténuation est  $g = L/6$ . Les ordres de GPILE sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . Les deux surfaces sont planes de longueur  $L = 1000$  mm. L'épaisseur entre les deux surfaces  $H = 30$  mm. L'objet est rectangulaire, de même envergure que les deux surfaces, d'épaisseur  $e = 3$  mm, et situé à 3 mm au dessus de la surface inférieure. La permittivité relative de l'objet vaut  $\epsilon_{r,2} = 2$ . Le nombre de points  $N_{\lambda_0}$  par longueur d'onde dans le vide varie. (a)  $N_{\lambda_0} = 10$ . (b)  $N_{\lambda_0} = 20$ . (c)  $N_{\lambda_0} = 30$ . (d)  $N_{\lambda_0} = 50$ .

Ayant décrit le contexte limite dans lequel la méthode des moments et l'algorithme GPILÉ donnent des résultats conformes à la réalité physique, étant donné les ressources informatiques disponibles, nous pouvons enfin aborder l'analyse des signaux pour des fissures horizontale puis verticale, enfouies sous la base d'une route.

### 3.6 Modèle de signal pour les fissures horizontales

Dans cette section, nous présentons et analysons l'impact des fissures horizontales enfouies sous la base d'une route sur les signaux GPR. Ainsi, les paramètres des simulations sont choisis conformément au Radar à Pénétration de Sol utilisé dans la surveillance des routes [143]. Nous considérons une onde de Thorsos en incidence normale ( $\theta_{\text{inc}} = 0^\circ$ ), de fréquence centrale  $f_c = 2$  GHz et dont le paramètre d'atténuation vaut  $g = L/6$ .

Considérons deux surfaces rugueuses  $S_1$  et  $S_3$ , qui séparent trois milieux  $\Omega_i$  ( $i \in \{0, 1, 3\}$ ). Le milieu supérieur  $\Omega_0$  est considéré comme de l'air et sa permittivité relative vaut 1. Le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  est un revêtement d'asphalte ultra mince (UTAS : Ultra-Thin Asphalt Surfacing) d'épaisseur moyenne  $H = 30$  mm. Le milieu inférieur  $\Omega_3$ , quant à lui, est composé par une bande de roulement. L'asphalte et la bande de roulement sont considérés comme étant homogènes en incidence normale et dans la bande des fréquences d'étude [144]. Les permittivités relatives de l'asphalte et de la bande de roulement  $\epsilon_{r,i}$  varient entre 4 et 8. Leurs conductivités  $\sigma_i$  sont comprises entre  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$  S/m. Pour les simulations numériques, les valeurs de permittivités relatives seront respectivement  $\epsilon_{r,1} = 4.5$  et  $\epsilon_{r,3} = 7$ , et les conductivités  $\sigma_1 = 5 \times 10^{-3}$  S/m et  $\sigma_3 = 10^{-2}$  S/m. Pour un milieu non-dissipatif, la permittivité relative complexe est donnée par la relation (1.12). Avec cette expression, les permittivités relatives complexes des milieux peuvent être obtenues pour une fréquence donnée. Par exemple, pour  $f = 2$  GHz, les permittivités relatives des milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$  deviennent  $\epsilon_{r,1} = 4.5 + j0.045$  et  $\epsilon_{r,3} = 7 + j0.090$ .

Les deux surfaces ont une même longueur  $L = 1000$  mm, et sont générées par une fonction de densité de probabilité des hauteurs gaussienne. De plus, nous supposons qu'elles ne sont pas corrélées. Quant à la fonction d'auto-corrélation, plusieurs études [105, 106] montrent qu'elle est plus proche d'une fonction exponentielle plutôt que gaussienne. Pour la surface supérieure, l'écart-type des hauteurs est de l'ordre de 0.6 – 1 mm et la fonction d'auto-corrélation varie entre 5 – 10 mm [105, 106]. Ces deux paramètres sont un peu plus grands pour la surface inférieure. Pour cette étude, nous considérons respectivement les écarts-types suivants  $\sigma_{h,1} = 0.6$  mm et  $\sigma_{h,3} = 0.8$  mm, et les longueurs de corrélation

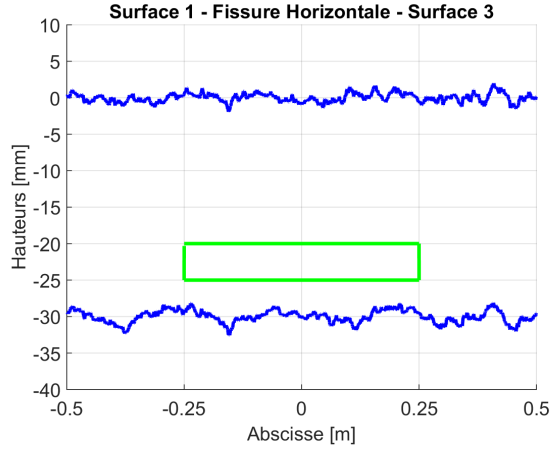


FIGURE 3.13 – Les deux surfaces sont rugueuses et de longueur  $L = 1000$  mm. La fonction de densité de probabilité des hauteurs est gaussienne et la fonction d’auto-corrélation est exponentielle. Les écarts-types des hauteurs sont  $\sigma_{h,1} = 0.6$  mm et  $\sigma_{h,3} = 0.8$  mm. Les longueurs de corrélation sont  $L_{ch,1} = 15$  mm et  $L_{ch,3} = 30$  mm. L’épaisseur entre les deux surfaces  $H = 30$  mm. La fissure est de longueur  $L_H = 500$  mm, d’épaisseur  $e = 5$  mm, et située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d’onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ .

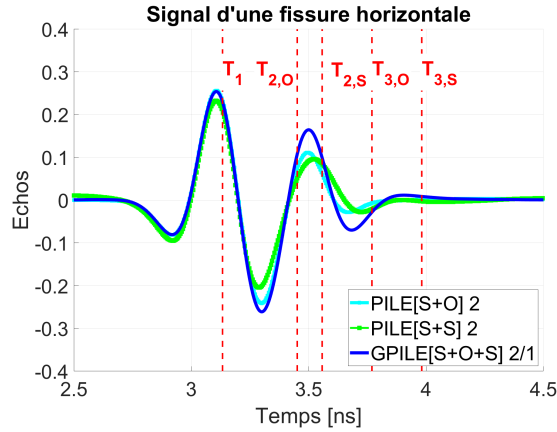


FIGURE 3.14 – Réponses temporelles du champ diffracté par une fissure horizontale. L’abscisse et la hauteur d’observation sont respectivement  $x_{obs} = 0$  et  $z_{obs} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces sont les mêmes que dans la figure 3.13. La fissure est de longueur  $L_H = 500$  mm, d’épaisseur  $e = 5$  mm et située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d’onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ . Les ordres de la méthode GPILE sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . La permittivité relative de la fissure vaut  $\epsilon_{r,2} = 2$ .

suivantes  $L_{\text{ch},1} = 6.4$  mm et  $L_{\text{ch},3} = 15$  mm. Dans ces simulations, nous ne considérons qu'une seule réalisation des surfaces.

Considérons une fissure horizontale enfouie entre les deux surfaces. Puisque nous traitons des surfaces 1D, la fissure aura une forme rectangulaire. De plus, selon l'orientation de ce rectangle, il s'agira d'une fissure horizontale ou verticale. D'une part, pour une fissure horizontale, la longueur sera de 500 mm et l'épaisseur 5 mm, la base du rectangle étant à 5 mm de la surface inférieure. Nous présentons dans la figure 3.13 la géométrie du problème de la fissure horizontale enfouie entre deux surfaces rugueuses. D'autre part, pour une fissure verticale, la hauteur sera de 10 mm et la largeur égale à 5 mm, la base du rectangle étant à 5 mm de la surface inférieure. Nous y reviendrons dans la prochaine section.

Nous présentons le champ diffracté par une fissure horizontale dans la figure 3.14, où la permittivité relative de la fissure vaut 2. Le signal de GPILE corrobore les faits déjà établis sur les interférences entre les échos des trois diffuseurs. En effet, la fissure étant proche des deux interfaces à cause de la minceur de la couche, il se produit une interférence entre l'écho primaire de la surface supérieure et le deuxième écho de l'objet autour de  $T_1 = 3.13$  ns. De même, l'écho de l'objet s'étale sur une fenêtre temporelle presque aussi large que celle de la couche, de sorte qu'il produit également une interférence avec l'écho de la surface inférieure autour de  $T_{2,S} = 3.56$  ns. Ces interférences ont pour effets majeurs de perturber le signal de GPILE, et par conséquent de créer des décalages sur les temps des échos.

D'autre part, nous ne présentons pas les quatre contributions des deux diffuseurs enfouis, respectivement aux ordres  $q = 0$  ainsi que  $q = 1$ , car le GPR ne produit que le signal de GPILE. Nous avons présenté ces contributions dans les sections précédentes uniquement dans l'objectif d'élaborer une analyse basée sur la compréhension fine des échos. Toutefois, nous savons que ces contributions surviennent théoriquement autour de l'instant  $T_{2,S} = 3.56$  ns, qui du reste est proche à la fois de  $T_{2,O} = 3.42$  ns et de  $T_1 = 3.13$  ns. Il s'en suit donc que nous avons huit échos de deux diffuseurs enfouis et l'écho primaire de la surface supérieure, soit un total de neuf échos, qui interfèrent sur une fenêtre temporelle réduite à cause de la minceur de la couche, rendant ainsi l'allure du signal de GPILE difficile à interpréter. Nous n'avons pas eu besoin de faire varier la permittivité de la fissure pour aboutir à cette conclusion.

Par ailleurs, on observe une différence entre les réponses temporelles des deux surfaces et de la fissure enfouie entre les deux surfaces. Même si les deux signaux semblent avoir la

même forme, avec des pics quasiment aux mêmes instants, ces pics n'ont pas les mêmes amplitudes. La différence d'amplitude est visiblement liée à la présence de la fissure enfouie entre les deux surfaces. Cette différence est donc l'élément essentiel qui permettrait la détection de la fissure enfouie sous la base d'une route. Pour ce qui est de la caractérisation géométrique de la fissure, nous pensons que des algorithmes avancés du traitement de signal peuvent répondre à cette question qui, du reste, sort du cadre de cette thèse.

### 3.7 Modèle de signal pour les fissures verticales

Reconsidérons la géométrie des deux surfaces présentée dans la figure 3.13, avec les mêmes valeurs de paramètres physiques des milieux. A présent, l'objet enfoui entre les deux surfaces est une fissure verticale, dont la hauteur est égale à 20 mm et la largeur égale à 5 mm, la base du rectangle étant à 5 mm de la surface inférieure. La géométrie de la fissure verticale enfouie entre les deux surfaces est présentée dans la figure 3.15. Les paramètres de l'onde incidente sont les mêmes que pour les simulations de la fissure horizontale.

Nous présentons le champ diffracté par la fissure verticale dans la figure 3.16, où la permittivité relative de la fissure vaut 2. Comme on aurait pu s'y attendre, le signal de la fissure verticale enfouie entre les deux surfaces corrobore les faits déjà établis, entre autres, des nombreuses interférences concentrées dans une fenêtre temporelle réduite.

Du reste, comme pour la fissure horizontale, la réponse temporelle de la fissure verticale enfouie entre les deux surfaces est différente de celle de deux surfaces. En plus, les deux signaux n'ont pas la même allure comme nous l'avons aussi observés pour le cas de la fissure horizontale. Nous espérons que des algorithmes du traitement de signal peuvent révéler d'autres nuances qui permettent de distinguer une fissure horizontale d'une fissure verticale sur base de la réponse temporelle.

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est employé à présenter une application de la méthode numérique rigoureuse pour la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses au radar à pénétration de sol. Nous avons privilégié de présenter les résultats dans le domaine temporel afin d'identifier les échos issus des différentes contributions. Ceci a nécessité de réaliser des simulations sur une bande des fréquences, et de transformer les

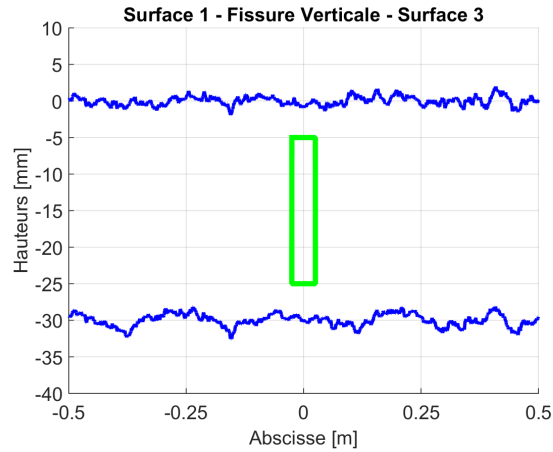


FIGURE 3.15 – Les paramètres des surfaces sont les mêmes que dans la figure 3.13. La fissure est de largeur  $L_V = 5$  mm, de hauteur  $H_V = 20$  mm, et située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d’onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ .

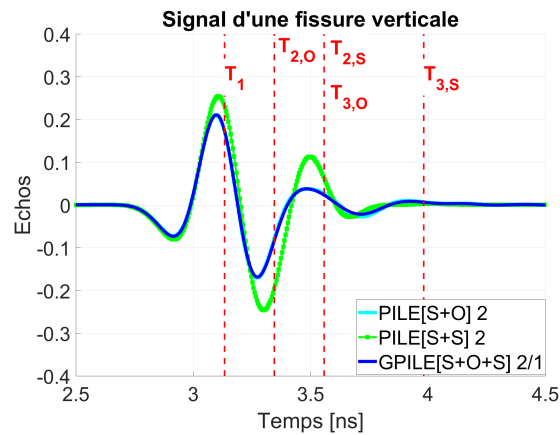


FIGURE 3.16 – Réponses temporelles du module du champ diffracté par une fissure verticale. L’abscisse et la hauteur d’observation sont respectivement  $x_{\text{obs}} = 0$  et  $z_{\text{obs}} = 470$  mm. Les paramètres des surfaces et de l’onde sont les mêmes que dans la figure 3.14. La fissure a une largeur  $L_V = 5$  mm, une hauteur  $H_V = 20$  mm, et est située à 5 mm au-dessus de la surface inférieure. Le nombre de points par longueur d’onde dans le vide  $N_{\lambda_0} = 50$ . Les ordres de la méthode GPILE sont  $P = 2$  et  $Q = 1$ . La permittivité relative de la fissure vaut  $\epsilon_{r,2} = 2$ .

résultats dans le domaine temporel grâce à la transformation de Fourier inverse rapide. Pour ce faire, nous avons utilisé pour signal d'entrée une impulsion de Ricker.

Ayant mis à contribution l'avantage qu'offre la méthode GPILE développée dans ce manuscrit, à savoir, mettre en évidence les échos successifs des trois diffuseurs, nous avons pu réaliser plusieurs simulations sur des scénarii différents. Les premières simulations ont porté sur un scénario choisi de manière à distinguer les échos des trois diffuseurs, et ont conduit à l'élaboration d'une analyse générale du signal. Nous avons également accordé une attention particulière à la variation de la profondeur de l'objet. Ce paramètre géométrique a révélé toute la complexité du problème, car lorsque l'objet est proche de l'une des interfaces, il se produit des interférences entre les échos de celui-ci et celles des interfaces, rendant l'allure du signal de GPILE difficile à interpréter.

Ainsi, le problème d'une fissure enfouie sous la base d'une route se ramène à celui d'un objet enfoui dans une couche mince. Il s'est avéré après analyse des signaux dans ce cas que toutes les contributions des trois diffuseurs se regroupent dans une fenêtre temporelle très réduite. Toutefois, la différence entre le signal de deux surfaces et celui de la fissure enfouie entre les deux surfaces montre bien la présence de la fissure sous la base de la route, même si l'interprétation des données n'est pas aisée. On en déduit que la détection de la fissure est possible, mais l'interprétation des données dépend de l'épaisseur de la couche et de la profondeur de la fissure. Autrement dit, l'épaisseur de la couche devrait être suffisamment large et la fissure suffisamment éloignée des deux surfaces qui délimitent la couche. Une distance d'au moins 50 mm entre la fissure et les deux surfaces qui délimitent la couche serait un bon compromis, comme le suggère [140] pour les cas de plusieurs fissures enfouies sous une route. Ainsi, une telle contrainte impose que l'épaisseur de la dite chaussée soit grande.





# CONCLUSION

---

Le travail dont nous avons rendu compte dans ce manuscrit a porté sur la modélisation de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. Une application est dédiée au domaine du génie civil, en l'occurrence, la surveillance des routes. Compte tenu des succès rencontrés depuis quelques décennies par les méthodes numériques rigoureuses en électromagnétisme, il était intéressant, dans la perspective de travaux sur la surveillance des routes, d'étudier la possibilité de mise en œuvre de modèles numériques pour calculer le champ diffracté par une fissure enfouie sous la base d'une route.

Ainsi, après une introduction succincte, nous avons présenté au premier chapitre le problème de diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses, ce qui nous a conduit à considérer les ondes électromagnétiques d'une part et les surfaces rugueuses d'autre part. Nous avons identifié un certain nombre de difficultés qu'il convient de surmonter dans l'élaboration d'une méthode de résolution pour ce problème. En effet, en dehors des problèmes numériques classiques comme la consistance, la stabilité et la convergence, il se pose le problème de prise en charge de géométries complexes comme celles des objets et des surfaces rugueuses. C'est ainsi que nous avons opté pour la méthode intégrale de frontière où la discrétisation passe par la Méthode des Moments, car cette méthode permet de suivre le profil d'une surface sans avoir à affiner le maillage dans le voisinage de la surface, contrairement à la méthode des différences finies par décomposition de domaine temporel.

Nous avons ensuite proposé, au deuxième chapitre, un modèle rigoureux pour la diffraction par un objet enfoui entre deux surfaces, à l'aide de la méthode intégrale de frontières dans le domaine fréquentiel. Le modèle ainsi obtenu est composé de six équations intégrales (deux par interface), avec des conditions aux limites appropriées sur les interfaces. Puis le modèle a été discrétisé par la Méthode des Moments, en vue d'obtenir un système linéaire dont les inconnues sont les courants surfaciques recherchés. Une validation théorique et rapide du modèle a été réalisée via la matrice impédance, grâce notamment à la réduction du problème aux cas de la diffraction par deux surfaces superposées, par un objet enfoui sous surface et par un objet au-dessus d'une surface. La résolution de ce système linéaire par la méthode classique d'inversion LU était une occasion de valider

---

numériquement le modèle intégral, à l'aide de la conformité à la théorie de la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses.

Nous avons de même présenté un algorithme qui permet non seulement de diminuer la complexité algorithmique de la Méthode des Moments, mais aussi et surtout, de mettre en exergue la contribution de l'objet sur le champ diffracté, facilitant ainsi la détection de l'objet enfoui entre les deux surfaces. Plusieurs simulations numériques ont été réalisées sur quelques scénarii, montrant alors la convergence de notre méthode malgré des cas extrêmes obtenus par le changement des valeurs de paramètres du système. Il a été clairement établi qu'en plus des paramètres des surfaces (les rugosités et l'épaisseur entre ces interfaces), le champ diffracté dépend aussi des paramètres de l'objet tels que sa taille, sa forme, sa position et sa permittivité. Nous avons observé également que le champ diffracté par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses tend vers celui de deux surfaces rugueuses lorsque l'objet devient plus petit, les autres paramètres restant les mêmes par ailleurs.

D'autre part, le système GPR et les configurations de sols nécessitant des résultats dans le domaine temporel, pour l'avantage que ce domaine offre de présenter les variations dans l'allure d'un signal au cours du temps, nous avons ainsi présenté au troisième chapitre des simulations en mode temporel, obtenues grâce à la transformation de Fourier inverse rapide. Ces simulations étaient d'abord réalisées sur un scénario où l'épaisseur entre les interfaces était si grande et l'objet bien éloigné de deux interfaces de sorte qu'il était possible d'isoler les échos des trois diffuseurs, en vue d'en tirer une analyse plus générale. Ces simulations ont permis de mettre en évidence l'écho primaire de la surface supérieure et les échos multiples provenant des interactions entre la surface supérieure et l'objet, ainsi que la surface inférieure. Les temps des échos observés étaient conformes aux temps calculés et l'analyse des amplitudes des échos fut alors une opportunité de montrer que le signal corrobore la réalité physique. De cette manière, la sensibilité du champ diffracté à la variation de ces paramètres pourrait permettre une caractérisation géométrique et physique de l'objet.

Ainsi, nous avons montré que la contribution de l'objet est proportionnelle à sa taille, sa permittivité et varie avec la profondeur. Ce dernier paramètre a été d'une importance particulière dans notre étude. Nous avons ainsi montré que lorsque l'objet est proche de l'une des deux surfaces, alors son deuxième écho interfère avec l'écho de cette surface. Qu'il s'agisse de la surface supérieure, cette interférence peut être simplement constructive ou destructive. Par contre, pour un objet proche de la surface inférieure, le problème devient plus complexe, car les contributions directe et indirecte de l'objet surviennent quasiment

---

au même instant que celles de la surface inférieure, et rendent l'allure du signal de GPILÉ difficile à interpréter. Il en va de même lorsque la couche entre les deux surfaces est mince, car l'objet est à la fois proche des deux surfaces. Ce cas est plus complexe que tous les autres, mais se rapproche de l'application à laquelle est dédiée cette thèse. Nous avons ainsi clos ce chapitre par une étude de l'impact sur le signal GPR d'une fissure enfouie sous la base d'une route.

L'application de la méthode GPILÉ à la détection de fissures a exigé de tester la capacité de cette méthode à reproduire des simulations numériques réalistes pour le cas d'un objet très mince, et proche des deux surfaces. Nous avons sélectionné la méthode de l'optique physique comme référence puisque cette méthode ne dépend ni de l'épaisseur de l'objet, ni de la distance moyenne entre l'objet et les deux surfaces. Selon le protocole de validation numérique que nous avons choisi, il ressort qu'augmenter le nombre de nœuds par longueur d'onde dans le vide (50 nœuds par exemple) permet d'effectuer des simulations numériques fiables dans le contexte de la géométrie des fissures internes.

L'analyse des échos des contributions en vue d'approfondir la compréhension des interférences dans le cas de fissures internes s'est avérée très rude. En effet, la géométrie du problème, i.e. une fissure (un objet très mince) proche des deux surfaces, produit des interférences entre les trois diffuseurs. Ces interférences sont au nombre de neuf rien que pour un aller-retour de l'onde entre les trois diffuseurs. On observe alors que la fenêtre temporelle de la couche entre les deux surfaces est très réduite, alors même que tous les échos se confinent dans cette fenêtre, rendant ainsi l'allure du signal de la fissure enfouie entre les deux surfaces difficile à interpréter. Toutefois, la différence entre les signaux de la fissure enfouie entre les deux surfaces et les surfaces seules permet la détection de la fissure. De plus, une fissure horizontale n'induit pas la même réponse électromagnétique qu'une fissure verticale. A cet effet, nous pensons que des algorithmes avancés du traitement de signal peuvent aider à caractériser géométriquement la fissure.

Au terme de cette étude, nous concluons que la détection de la fissure est possible et l'interprétation des données pourrait être facilitée par l'épaisseur de la couche d'une part, et par la profondeur de la fissure d'autre part. En d'autres termes, l'épaisseur de la couche devrait être suffisamment large et la fissure suffisamment éloignée des deux surfaces qui délimitent la couche, pour mettre en évidence la contribution de la fissure. Une distance d'au moins 50 mm entre la fissure et les deux surfaces qui délimitent la couche serait un bon compromis, ainsi que le suggère [140] pour les cas de fissures entre elles. Une telle contrainte impose que l'épaisseur de la dite chaussée soit conséquente. Ainsi, l'amplitude

---

de l'écho, son allure, son ouverture temporelle sont des éléments qui pourraient conduire à la caractérisation géométrique et physique de la fissure dans un problème inverse.

Les résultats présentés dans cette thèse ont pour retombée scientifique principale une nouvelle modélisation électromagnétique adaptée à des milieux multicouches avec fissures. Il était question de fournir un modèle de signal qui prend en compte les fissures, i.e. qui permettrait de détecter les fissures enfouies sous les routes. Ainsi, nous avons pu contribuer à l'amélioration de la compréhension du phénomène de diffusion dans des milieux complexes. Cette thèse a répondu favorablement à une problématique du projet *Amélioration de la Connaissance de milieux complexes composés de fissures et Inversion Multi Paramètres* (Projet ANR-18-CE22-0020). Du point de vue économique, les résultats de cette thèse s'inscrivent dans une perspective d'amélioration des politiques d'entretien et de gestion durable des routes, avec notamment une politique de maintenance préventive.

Le gain lié à la modélisation numérique rigoureuse de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, à l'aide d'algorithmes plus efficaces en termes de nombre d'opérations ou du temps de calcul et de prise en compte des géométries complexes, nous conduit à envisager d'autres études. En effet, nous pourrions approfondir l'étude sur la diffraction électromagnétique par deux objets enfouis sous une surface, avec des applications à la détection des mines anti-personnelles. Une telle étude ne nécessitera pas d'autres développements mathématiques, car nous avons montré que le modèle intégral, la Méthode des Moments, ainsi que l'algorithme GPILE sont les mêmes, puisqu'il s'agit du problème de trois diffuseurs dont un seul est éclairé. Dans tous les cas, il sera intéressant d'accélérer la méthode GPILE par des algorithmes tels que FB, BMIA/CAG, etc. De plus, une extension en trois dimensions de la méthode GPILE permettra des applications plus réalistes dans des domaines variés.

Enfin, on pourra envisager de résoudre le problème de la diffraction par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, aussi bien en deux dimensions qu'en trois dimensions, par une méthode des différences finies non standards. En effet, cette méthode a relevé le défi d'augmenter l'ordre d'approximation des dérivées dans les équations de Maxwell, permettant de s'affranchir des problèmes numériques classiques liés à la consistance et la stabilité (et donc la convergence) des schémas aux différences finies. La seule difficulté sera alors de trouver un maillage qui s'adapte bien à des géométries complexes, car la méthode aux différences finies utilise une grille cartésienne. A cet égard, nous pensons que la conception d'un schéma numérique à pas variable, dont le pas serait subordonné à la géométrie de l'interface, est une piste envisageable.

# RÉSOLUTIONS DU SYSTÈME $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ PAR LA MÉTHODE DE SUBSTITUTION

---

Nous présentons des résolutions du système  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  par la méthode de substitution. Ces résolutions permettent d'obtenir les mêmes résultats que les méthodes PILE, EPILE et GPILE. De plus, elles montrent l'équivalence entre différentes approches de la méthode GPILE.

## A.1 Méthode PILE

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}_{11}\mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{21}\mathbf{X}_2 = \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12}\mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{22}\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

obtenu pour le cas de la diffraction électromagnétique par deux diffuseurs dont un seul est éclairé (deux surfaces superposées, un objet enfoui sous une surface ou un objet contenu dans un autre objet). De la seconde équation, on en déduit l'expression des courants surfaciques sur le second diffuseur

$$\mathbf{X}_2 = -\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12}\mathbf{X}_1. \quad (\text{A.2})$$

En remplaçant l'expression de  $\mathbf{X}_2$  dans la première équation, nous obtenons les courants surfaciques sur le premier diffuseur

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (\text{A.3})$$

---

De cette expression découle

$$\mathbf{X}_1^{(p)} = \left( \sum_{p=0}^P \bar{M}_c^p \right) \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1, \quad (\text{A.4})$$

avec

$$\bar{M}_c = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}. \quad (\text{A.5})$$

Ainsi s'établit la méthode PILE pour le cas de deux diffuseurs, dont un seul est éclairé.

## A.2 Méthode EPILE

Considérons maintenant le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}_{11} \mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{21} \mathbf{X}_2 = \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} \mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{22} \mathbf{X}_2 = \mathbf{b}_2, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

établi pour la diffraction électromagnétique par deux diffuseurs éclairés (deux objets ou un objet au-dessus d'une surface). Pour résoudre ce système, nous pouvons procéder de deux manières :

- (i) Nous tirons de la seconde équation l'expression de  $\mathbf{X}_2$  que nous injectons dans la première équation, ce qui donne

$$\mathbf{X}_2 = \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2 - \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \mathbf{X}_1 \quad (\text{A.7})$$

et

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{Z}}_{11} - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2 \right), \quad (\text{A.8})$$

d'où

$$\mathbf{X}_1 = \left( \sum_{p=0}^P \bar{M}_{c,21}^p \right) \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2 \right) \quad (\text{A.9})$$

avec

$$\bar{M}_{c,21} = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}. \quad (\text{A.10})$$

L'expression de  $\mathbf{X}_2$  devient

$$\mathbf{X}_2 = \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2 - \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \left( \sum_{p=0}^P \bar{M}_{c,21}^p \right) \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \mathbf{b}_2 \right). \quad (\text{A.11})$$

(ii) De la première équation, nous tirons  $\mathbf{X}_1$ , qui est ensuite injectée dans la seconde équation pour obtenir l'expression de  $\mathbf{X}_2$ , et on a :

$$\mathbf{X}_2 = \left( \sum_{p=0}^P \bar{M}_{c,12}^p \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} (\mathbf{b}_2 - \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1), \quad (\text{A.12})$$

où

$$\bar{M}_{c,12} = \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \quad (\text{A.13})$$

et

$$\mathbf{X}_1 = \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \left( \sum_{p=0}^P \bar{M}_{c,12}^p \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} (\mathbf{b}_2 - \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1). \quad (\text{A.14})$$

Nous avons ainsi le choix entre les expressions (A.9) et (A.14) pour  $\mathbf{X}_1$ , et les expressions (A.11) et (A.12) pour  $\mathbf{X}_2$ . La préférence pour les expressions (A.9) et (A.12) est motivée par leurs interprétations physiques intuitives ainsi que la simplicité d'implémentation. Dans la suite, nous utiliserons ces critères pour sélectionner l'algorithme optimal de GPILÉ dans le cas de la diffraction par un objet enfoui entre deux surfaces.

### A.3 Méthode GPILÉ

Considérons enfin le cas d'un objet enfoui entre deux surfaces (ou de deux objets enfouis sous une surface). Le système linéaire s'écrira :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{21} & \bar{\mathbf{Z}}_{31} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} & \bar{\mathbf{Z}}_{32} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{13} & \bar{\mathbf{Z}}_{23} & \bar{\mathbf{Z}}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}_{11} \mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{21} \mathbf{X}_2 + \bar{\mathbf{Z}}_{31} \mathbf{X}_3 = \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} \mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{22} \mathbf{X}_2 + \bar{\mathbf{Z}}_{32} \mathbf{X}_3 = \mathbf{0}, \\ \bar{\mathbf{Z}}_{13} \mathbf{X}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_{23} \mathbf{X}_2 + \bar{\mathbf{Z}}_{33} \mathbf{X}_3 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Nous avons ici aussi deux possibilités pour résoudre ce système :

(i) Nous tirons l'expression de  $\mathbf{X}_3$  dans la troisième équation et nous l'injectons dans la deuxième équation, ce qui permet d'exprimer  $\mathbf{X}_2$  en fonction de  $\mathbf{X}_1$  et on a :

$$\mathbf{X}_2 = \left( \mathbf{I} - \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{32} \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{23} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{32} \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{13} - \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right) \mathbf{X}_1 \quad (\text{A.16})$$

et donc

$$\mathbf{X}_2 = - \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{\mathbf{Z}}_{22}^{-1} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{12} - \bar{\mathbf{Z}}_{32} \bar{\mathbf{Z}}_{33}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{13} \right) \mathbf{X}_1 \quad (\text{A.17})$$

où

$$\bar{M}_{c,32} = \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{32} \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{23}. \quad (\text{A.18})$$

L'expression de  $\mathbf{X}_2$  est ensuite introduite dans la troisième équation, ce qui permet d'écrire  $\mathbf{X}_3$  en fonction de  $\mathbf{X}_1$  et on obtient

$$\mathbf{X}_3 = -\bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{13} \mathbf{X}_1 + \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{23} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{Z}_{22}^{-1} \left( \bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{32} \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{13} \right) \mathbf{X}_1. \quad (\text{A.19})$$

Puis, les expressions de  $\mathbf{X}_2$  et  $\mathbf{X}_3$  sont introduites dans la première équation, réécrite sous la forme

$$\mathbf{X}_1 + \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{21} \mathbf{X}_2 + \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \mathbf{X}_3 = \bar{Z}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \quad (\text{A.20})$$

et on obtient

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \mathbf{I} - \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,21}^q + \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,31}^q \right) \right]^{-1} \bar{Z}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1, \quad (\text{A.21})$$

où les matrices caractéristiques sont données par

$$\sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,21}^q = \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{21} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{Z}_{22}^{-1} \left( \bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{32} \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{13} \right) \quad (\text{A.22})$$

et

$$\sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,31}^q = \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \bar{Z}_{33}^{-1} \left[ \bar{Z}_{13} - \bar{Z}_{23} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,32}^q \right) \bar{Z}_{22}^{-1} \left( \bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{32} \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{13} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

Et au final,

$$\mathbf{X}_1 = \sum_{p=0}^P \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,21}^q + \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,31}^q \right)^p \bar{Z}_{11}^{-1} \mathbf{b}_1. \quad (\text{A.24})$$

Remarquons que les résultats obtenus sont exactement les mêmes que ceux de la deuxième approche de la méthode GPILÉ (2.65),(2.66) et (2.77), dérivée à partir de l'algorithme du complément de Schur.

- (ii) Nous tirons d'abord  $\mathbf{X}_2$  dans la deuxième équation, que nous injectons dans la troisième équation. Ceci permet d'écrire  $\mathbf{X}_3$  en fonction de  $\mathbf{X}_1$ . L'expression de



$\mathbf{X}_3$  étant ensuite introduite dans la deuxième équation nous donne explicitement  $\mathbf{X}_2$  en fonction de  $\mathbf{X}_1$ . Les expressions de  $\mathbf{X}_2$  et  $\mathbf{X}_3$  introduites dans la première équation nous donnent la relation (A.24) où cette fois les matrices caractéristiques s'écrivent

$$\sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,21}^q = \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{21} \bar{Z}_{22}^{-1} \left[ \bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{32} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} \left( \bar{Z}_{13} - \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12} \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

et

$$\sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,31}^q = \bar{Z}_{11}^{-1} \bar{Z}_{31} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} \left( \bar{Z}_{13} - \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12} \right) \quad (\text{A.26})$$

où

$$\bar{M}_{c,23} = \bar{Z}_{33}^{-1} \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{32}. \quad (\text{A.27})$$

On en déduit les courants surfaciques sur l'objet et sur la surface inférieure

$$\mathbf{X}_2 = -\bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12} \mathbf{X}_1 + \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{32} \left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} \left( \bar{Z}_{13} - \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12} \right) \mathbf{X}_1 \quad (\text{A.28})$$

et

$$\mathbf{X}_3 = -\left( \sum_{q=0}^Q \bar{M}_{c,23}^q \right) \bar{Z}_{33}^{-1} \left( \bar{Z}_{13} - \bar{Z}_{23} \bar{Z}_{22}^{-1} \bar{Z}_{12} \right) \mathbf{X}_1. \quad (\text{A.29})$$

La seconde formulation est aussi équivalente à celle de la deuxième approche de la méthode GPILE, dérivée à partir de l'algorithme du complément de Schur.

Pour avoir des expressions qui ressortent la symétrie du problème, nous convenons de prendre les expressions (A.17) et (A.29) pour les courants surfaciques sur l'objet et sur la surface inférieure (et donc les relations (A.22) et (A.26) pour les matrices caractéristiques). Ainsi, nous obtenons des expressions qui ont une interprétation physique conforme à la fois aux méthodes PILE, EPILE et GPILE.



# APPROXIMATION DE KIRCHHOFF

---

Les méthodes numériques rigoureuses pour les modèles différentiels ou intégraux sont basées sur la résolution des équations de Maxwell locales, dans lesquelles le pas de discrétisation est restreint par la convergence de la méthode. Ces modèles permettent d'obtenir un résultat précis et servent alors de référence pour les modèles asymptotiques. Dans le cas de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, nous avons dérivé un modèle rigoureux à l'aide des équations intégrales dans le chapitre 2, que nous avons ensuite discrétisé par la méthode des moments. Pour diminuer la complexité algorithmique de la méthode des moments, nous avons développé des méthodes basées sur l'algorithme PILE, nommées GPILE, qui ont permis de mettre en évidence les contributions de deux diffuseurs enfouis. Eu égard à la complexité de l'algorithme GPILE, nous avons envisagé de recourir à la méthode d'Approximation de Kirchhoff.

Sur base des différentes interactions mises en évidence par la méthode GPILE, nous construisons dans cette annexe la méthode d'Approximation de Kirchhoff pour le cas d'un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses. Pour ce faire, nous présentons d'abord cette méthode pour le cas d'une interface.

## B.1 Approximation de Kirchhoff pour une interface

Considérons une surface rugueuse  $S$ , invariante selon la direction  $\mathbf{y}$  et délimitant deux milieux notés  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . La surface est de longueur  $L$  finie, et centrée en abscisse et en ordonnée. Elle est définie par  $z = \zeta(x)$ . Par convention, la normale à la surface est orientée selon la direction du milieu incident. La situation est décrite par la figure B.1.

### B.1.1 Équations Intégrales

Pour obtenir les champs totaux dans chacun des milieux, nous devons connaître le champ diffracté en réflexion dans le milieu incident et le champ diffracté en transmission

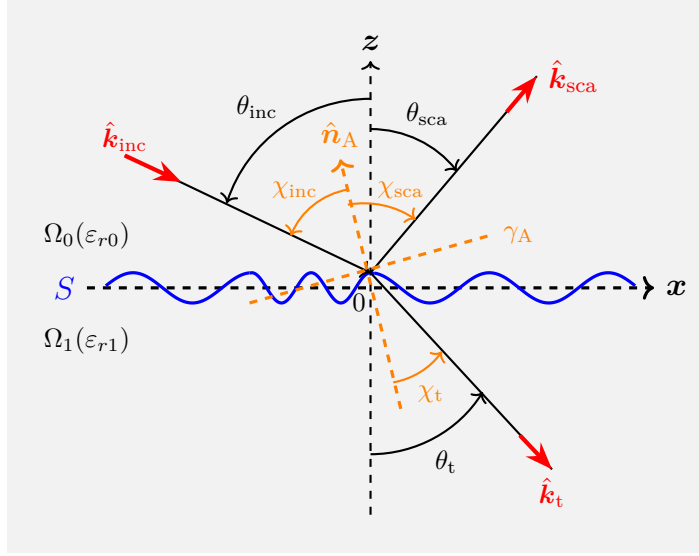


FIGURE B.1 – Diffraction électromagnétique par une interface rugueuse 1-D.

dans le milieu inférieur. Notons aussi que les ondes incidente, et diffractées en réflexion ou en transmission, vérifient l'équation de Helmholtz (1.64).

Le principe de Huygens et le théorème d'extinction permettent d'établir l'équation intégrale du champ diffracté en réflexion, en un point donné  $A$  de la surface

$$\left. \begin{array}{l} \forall \mathbf{R} \in \Omega_0, E_0(\mathbf{R}) \\ \forall \mathbf{R} \in \Omega_1, 0 \end{array} \right\} = E_{\text{inc}}(\mathbf{R}) + \int_S \left[ E_0(\mathbf{R}_A) \frac{\partial g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial \mathbf{N}_A} - g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_0(\mathbf{R}_A)}{\partial \mathbf{N}_A} \right] dS \quad (\text{B.1})$$

où  $E_0(\mathbf{R}_A) = E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A) + E_{\text{sca}}(\mathbf{R}_A)$  est le champ total sur la surface dans le milieu incident ;  $E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A)$  est le champ incident et  $E_{\text{sca}}(\mathbf{R}_A)$  le champ diffracté en réflexion ;  $\hat{\mathbf{N}}_A$  est la normale à la surface  $S$  au point  $A$ , et est donnée par

$$\hat{\mathbf{N}}_A = \frac{-\gamma_A \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma_A^2}} \quad (\text{B.2})$$

où  $\gamma_A = \partial \zeta_A / \partial x_A$  avec  $\zeta_A = \zeta(x_A)$  (cf. figure B.1).

De même, l'onde transmise dans le milieu  $\Omega_1$  est donnée par

$$\left. \begin{array}{l} \forall \mathbf{R} \in \Omega_0, 0 \\ \forall \mathbf{R} \in \Omega_1, E_1(\mathbf{R}) \end{array} \right\} = - \int_S \left[ E_1(\mathbf{R}_A) \frac{\partial g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial \mathbf{N}_A} - g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial \mathbf{N}_A} \right] dS \quad (\text{B.3})$$

où  $E_1(\mathbf{R}_A) = E_t(\mathbf{R}_A)$  est le champ total sur la surface dans le milieu  $\Omega_1$ , i.e. le champ total est égal à l'onde diffractée en transmission dans le milieu inférieur. La résolution des équations intégrales (B.1) et (B.3) nécessite la connaissance des fonctions de Green, des champs totaux dans les milieux (respectivement  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ ), ainsi que leurs dérivées normales. Les expressions des fonctions de Green sont données par

$$g_{0,1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_{0,1} \|\mathbf{R} - \mathbf{R}_A\|) \quad (\text{B.4})$$

où  $k_{0,1}$  est le nombre d'onde dans le milieu  $\Omega_{0,1}$ .

En champ lointain,  $\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_A\| = \|\mathbf{R}_A - \mathbf{R}\| \simeq R - \hat{\mathbf{k}}_{\text{sca}} \cdot \mathbf{R}$  en phase et  $\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_A\| \simeq R$  en amplitude. L'application de la relation [145]

$$H_0^{(1)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \exp \left[ j \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad x \longrightarrow +\infty \quad (\text{B.5})$$

conduit à l'expression

$$g_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \simeq \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha R}} \exp \left( -\frac{j\pi}{4} \right) \exp [j(k_\alpha R - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{R}_A)]. \quad (\text{B.6})$$

Dans cette expression,  $s \equiv \text{sca}$  et  $\alpha = 0$  dans le cas de la réflexion, et  $s \equiv t$  et  $\alpha = 1$  dans le cas de la transmission.

### B.1.2 Équations de Kirchhoff-Helmholtz

D'entrée de jeu, nous précisons que l'Approximation de Kirchhoff que présentons ici est en fait l'approximation du plan tangent. Elle consiste à assimiler la surface en chacun de ses points à un plan tangent infini. De cette façon, le champ réfléchi par la surface peut être calculé à partir du champ incident à l'aide des lois de l'Optique Géométrique (OG). Ainsi, le coefficient de Fresnel permet de calculer son amplitude et à l'aide de la loi de Snell-Descartes, on peut calculer sa direction. Les expressions des coefficients de Fresnel en réflexion  $\mathcal{R}_{01}$  et en transmission  $\mathcal{T}_{01}$  sont données en polarisation transverse électrique

(TE) et transverse magnétique (TM) par

$$\mathcal{R}_{01}^{TE} = \frac{n_0 \cos \chi_{\text{inc}} - n_1 \cos \chi_t}{n_0 \cos \chi_{\text{inc}} + n_1 \cos \chi_t}, \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{T}_{01}^{TE} = \frac{2n_0 \cos \chi_{\text{inc}}}{n_0 \cos \chi_{\text{inc}} + n_1 \cos \chi_t}, \quad (\text{B.8})$$

pour la polarisation transverse électrique, et

$$\mathcal{R}_{01}^{TM} = \frac{n_0 \cos \chi_t - n_1 \cos \chi_{\text{inc}}}{n_0 \cos \chi_t + n_1 \cos \chi_{\text{inc}}}, \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{T}_{01}^{TM} = \frac{2n_0 \cos \chi_{\text{inc}}}{n_0 \cos \chi_t + n_1 \cos \chi_{\text{inc}}}, \quad (\text{B.10})$$

en polarisation transverse magnétique, où  $\chi_{\text{inc}}$  est l'angle d'incidence locale défini par le vecteur incident  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{inc}}$  et la normale locale  $\hat{\mathbf{N}}_A$ , par la relation

$$\cos \chi_{\text{inc}} = -\hat{\mathbf{K}}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A. \quad (\text{B.11})$$

Les champs réfléchis et transmis au point  $A$  peuvent alors s'écrire

$$\begin{cases} E_{\text{sca}}(\mathbf{R}_A) = \mathcal{R}_{01}(\chi_{\text{inc}})E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A), \\ E_t(\mathbf{R}_A) = \mathcal{T}_{01}(\chi_{\text{inc}})E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A). \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Ceci permet de réécrire les champs totaux dans chaque milieu

$$\begin{cases} E_0(\mathbf{R}_A) = [1 + \mathcal{R}_{01}(\chi_{\text{inc}})]E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A), \\ E_1(\mathbf{R}_A) = \mathcal{T}_{01}(\chi_{\text{inc}})E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A). \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Considérons que l'onde incidente est plane progressive monochromatique (OPPM)

$$E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A) = E_0 \exp(j\hat{\mathbf{K}}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{R}_A)\hat{\mathbf{e}}_i. \quad (\text{B.14})$$

Il faut maintenant déterminer les dérivées normales des champs totaux. Or nous savons que la dérivée normale d'une fonction  $U$  est donnée par

$$\frac{\partial U}{\partial N_A} = \nabla U \cdot \hat{\mathbf{N}}_A \quad (\text{B.15})$$

Ainsi, les dérivées normales des champs totaux seront

$$\begin{cases} \frac{\partial E_0(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = [\mathbf{K}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A + \mathbf{K}_{sca,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A \mathcal{R}_{01}(\chi_{inc})] E_{inc}(\mathbf{R}_A) \\ \frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = \mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A \mathcal{T}_{01}(\chi_{inc}) E_{inc}(\mathbf{R}_A). \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

où  $\mathbf{K}_{sca,sp}$  et  $\mathbf{K}_{t,sp}$  sont les vecteurs d'ondes respectivement réfléchi et transmis dans la direction spéculaire.

Les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{sca,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A &= -\mathbf{K}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A \\ n_1 \mathbf{K}_{t,sp} \wedge \hat{\mathbf{N}}_A &= n_0 \mathbf{K}_{inc} \wedge \hat{\mathbf{N}}_A, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

introduites dans les expressions (B.16) permettent de simplifier les dérivées normales des champs totaux

$$\begin{cases} \frac{\partial E_0(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = j \mathbf{K}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A [1 - \mathbf{K}_{sca,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A \mathcal{R}_{01}(\chi_{inc})] E_{inc}(\mathbf{R}_A) \\ \frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = \mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A \mathcal{T}_{01}(\chi_{inc}) E_{inc}(\mathbf{R}_A). \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

De la même manière, la dérivée normale des fonctions de Green en champ lointain donne

$$\frac{\partial g_{0,1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = -i \mathbf{K}_{sca,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A g_{0,1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A). \quad (\text{B.19})$$

Ces expressions permettent alors d'écrire les équations Kirchhoff-Helmholtz (KH) sous l'approximation de Kirchhoff de la manière suivante

$$E_{sca}(\mathbf{R}) = +j \int_S (+2 \mathbf{K}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{R}_{01}(\chi_{inc}) E_{inc}(\mathbf{R}_A) g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_A) dS \quad (\text{B.20})$$

$$E_t(\mathbf{R}) = -j \int_S (-2 \mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{T}_{01}(\chi_{inc}) E_{inc}(\mathbf{R}_A) g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_A) dS, \quad (\text{B.21})$$

où  $\Xi(\mathbf{R}_A)$  est la fonction d'illumination de la surface.

La fonction d'illumination de la surface vaut 1 lorsque le point A de la surface est illuminé par l'onde incidente et vu par l'onde diffractée et vaut 0 dans le cas contraire.

---

En d'autres termes, elle vaut 1 si le rayon incident de direction  $\mathbf{K}_{inc}$  ne traverse pas la surface avant de la rencontrer au point A considéré, et si l'onde diffractée dans la direction d'observation  $\mathbf{K}_{sca}$  ne rencontre pas la surface.

## B.2 Approximation de Kirchhoff pour un objet enfoui entre deux interfaces

Dans le cas de la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses, toutes les interfaces sont en interaction directe les unes avec les autres, ainsi que le montre la Figure B.2. Ceci nécessite de développer une méthode asymptotique qui prend en compte toutes les interactions. Ces interactions étant au nombre de quatre, nous avons appelé interactions *principales* les deux interactions provenant de la surface éclairée (de la surface supérieure vers l'objet ou vers la surface inférieure) et *secondaires* les deux interactions entre les interfaces non éclairées (entre l'objet et la surface inférieure). Pour construire la méthode d'Approximation de Kirchhoff, nous commencerons par calculer le champ diffracté en réflexion (premier écho,  $P = 0$ ) et en transmission par la surface supérieure. Ensuite, le champ diffracté par la surface supérieure en transmission sera considéré comme le champ incident pour l'objet et la surface inférieure. Enfin, il faudra calculer les diffractions en réflexion sur l'objet et sur la surface inférieure, en tenant compte des interactions mises en évidence par la méthode GPILE. Ces réflexions seront à leur tour diffractées sur la surface supérieure en réflexion dans le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  et en transmission dans le milieu incident  $\Omega_0$ . Ceci permettra alors de calculer le champ diffracté dans le milieu incident en deuxième écho, donnant ainsi l'Approximation de Kirchhoff d'ordres  $P = 1$  et  $Q = 0$ .

Dans ce qui suit, nous allons exposer la méthode d'Approximation de Kirchhoff pour un ordre principal  $p$  et secondaire  $q$ . Pour une grandeur quelconque  $X_{ij}^{p,q}$ , les exposants représenteront les ordres  $p$  et  $q$  tandis que les indices  $i$  et  $j$  signifient que l'on calcule la diffraction sur la surface  $S_j$  d'une onde émise par la surface  $S_i$  (exceptée pour l'onde incidente). Les indices  $sca$  et  $t$  indiqueront respectivement qu'il s'agit d'une onde diffractée en réflexion ou en transmission.



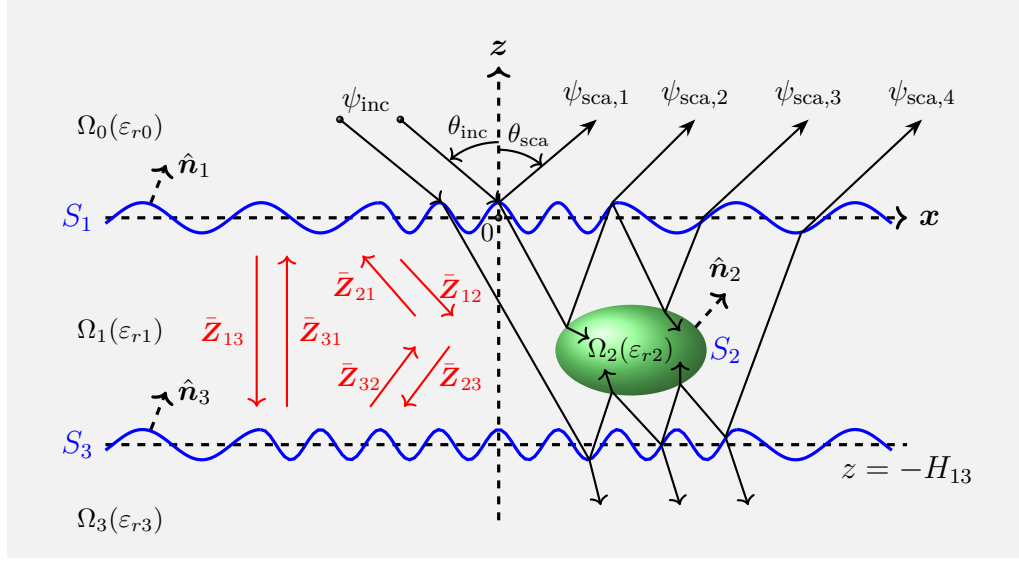


FIGURE B.2 – Diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses 1-D.

### B.2.1 Pour $P = 0$

Le champ diffracté en réflexion sur la surface supérieure, en un point  $A$ , est donné par l'équation de Kirchhoff-Helmholtz sous l'approximation de Kirchhoff :

$$E_{1,\text{sca}}^{0,0}(\mathbf{R}) = +j \int_{S_1} (+2\mathbf{K}_{1,\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{R}_{01}(\chi_{\text{inc}}) E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A) g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi_{1,\text{sca}}^{0,0}(\mathbf{R}_A) dS_1. \quad (\text{B.22})$$

Ce champ diffracté dans le milieu incident  $E_{1,\text{sca}}^{0,0}(\mathbf{R})$  constitue l'Approximation de Kirchhoff du premier écho ( $P = 0$ ).

Le champ diffracté en transmission est donné par l'équation :

$$E_{1,\text{t}}^{0,0}(\mathbf{R}) = -j \int_{S_1} (-2\mathbf{K}_{1,\text{t,sp}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{T}_{01}(\chi_{\text{inc}}) E_{\text{inc}}(\mathbf{R}_A) g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi_{1,\text{sca}}^{0,0}(\mathbf{R}_A) dS_1. \quad (\text{B.23})$$

### B.2.2 Pour $P = 1, Q = 0$

Le champ diffracté en transmission par la surface supérieure dans le milieu intermédiaire  $\Omega_1$  étant connu, il constitue un champ incident pour l'objet et la surface inférieure. Ainsi, nous pouvons établir les équations intégrales de Kirchhoff-Helmholtz pour les contributions directes et indirectes de deux diffuseurs enfouis. Pour obtenir les contributions directes, nous devons tout d'abord calculer les diffractions de l'onde transmise par la sur-

face supérieure sur l'objet et sur la surface inférieure. Sur l'objet, nous avons en un point  $B$

$$E_{12,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}) = +j \int_{S_2} (+2\mathbf{K}_{12,\text{inc}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_B) \mathcal{R}_{12}(\chi_{12}^{1,0}) E_{1,t}^{0,0}(\mathbf{R}_B) g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_B) \Xi_{12,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_B) dS_2, \quad (\text{B.24})$$

et la surface inférieure en un point  $C$

$$E_{13,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}) = +j \int_{S_3} (+2\mathbf{K}_{13,t,\text{sp}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_C) \mathcal{R}_{13}(\chi_{13}^{1,0}) E_{1,t}^{0,0}(\mathbf{R}_C) g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_C) \Xi_{13,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_C) dS_3. \quad (\text{B.25})$$

Ces deux champs étant diffractés en transmission sur la surface supérieure, ils donnent les contributions directes de l'objet

$$E_{21,t,\text{Dir}}^{1,0}(\mathbf{R}) = -j \int_{S_1} (-2\mathbf{K}_{21,t,\text{sp}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{T}_{10}(\chi_{21,\text{sca}}^{1,0}) E_{12,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi_{21,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) dS_1, \quad (\text{B.26})$$

et de la surface inférieure

$$E_{31,t,\text{Dir}}^{1,0}(\mathbf{R}) = -j \int_{S_1} (-2\mathbf{K}_{31,t,\text{sp}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{T}_{10}(\chi_{31,\text{sca}}^{1,0}) E_{13,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi_{31,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) dS_1. \quad (\text{B.27})$$

Pour les contributions indirectes, on calcule d'abord la diffraction de  $E_{12,r}^{1,0}(\mathbf{R})$  sur la surface inférieure

$$E_{23,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}) = +j \int_{S_3} (+2\mathbf{K}_{23,\text{inc}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_C) \mathcal{R}_{13}(\chi_{23}^{1,0}) E_{12,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_C) g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_C) \Xi_{23,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_C) dS_3 \quad (\text{B.28})$$

et la diffraction de  $E_{13,r}^{1,0}(\mathbf{R})$  sur l'objet

$$E_{32,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}) = +j \int_{S_2} (+2\mathbf{K}_{32,\text{inc}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_B) \mathcal{R}_{12}(\chi_{32}^{1,0}) E_{13,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_B) g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_B) \Xi_{32,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_B) dS_2. \quad (\text{B.29})$$

De cette façon, les contributions indirectes de ces deux diffuseurs s'écrivent

$$E_{21,t,\text{Ind}}^{1,0}(\mathbf{R}) = -j \int_{S_1} (-2\mathbf{K}_{21,t,\text{sp}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{T}_{10}(\chi_{21,\text{sca}}^{1,0}) E_{32,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi_{21,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) dS_1 \quad (\text{B.30})$$

pour l'objet et

$$E_{31,t,\text{Ind}}^{1,0}(\mathbf{R}) = -j \int_{S_1} (-2\mathbf{K}_{31,t,\text{sp}}^{1,0} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) \mathcal{T}_{10}(\chi_{31,\text{sca}}^{1,0}) E_{32,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) g_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi_{31,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}_A) dS_1 \quad (\text{B.31})$$

---

pour la surface inférieure.

Ainsi, le deuxième écho obtenu par l'Approximation de Kirchhoff est la somme de ces quatre contributions :

$$E_{1,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R}) = E_{21,\text{t,Dir}}^{1,0}(\mathbf{R}) + E_{31,\text{t,Dir}}^{1,0}(\mathbf{R}) + E_{21,\text{t,Ind}}^{1,0}(\mathbf{R}) + E_{31,\text{t,Ind}}^{1,0}(\mathbf{R}). \quad (\text{B.32})$$

De cette façon, l'Approximation de Kirchhoff d'ordres principal  $P = 1$  et secondaire  $Q = 0$  est donnée par la somme de deux premiers échos.

**Remarque 8.** *Pour  $P = 1$  et  $Q = 0$ , nous avons 10 équations intégrales à considérer, ce qui pose déjà à ce stade le problème du gain lié à la complexité de cette méthode par rapport à GPILE, alors même que sa précision est de loin inférieure à celle de GPILE!*

### B.2.3 Pour $P = Q = 1$

Pour calculer la méthode d'Approximation de Kirchhoff pour les ordres  $P = Q = 1$ , il faut ajouter d'autres diffractions, notamment, la diffraction de  $E_{12,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R})$  sur la surface inférieure (déjà calculée) ensuite la diffraction de l'onde résultante sur l'objet et enfin sa diffraction en transmission sur la surface supérieure. Le même processus est appliqué à  $E_{13,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R})$ ,  $E_{32,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R})$  et  $E_{23,\text{sca}}^{1,0}(\mathbf{R})$ . En soustrayant les équations intégrales calculées aux ordres  $P = 1$  et  $Q = 0$ , nous obtenons un total de 10 équations intégrales supplémentaires, ce qui rend la méthode d'Approximation de Kirchhoff non concurrentielle par rapport à GPILE.



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Shengli LI et al., « A localization method for concealed cracks in the road base based on ground penetrating radar », in : *Advances in Mechanical Engineering* 8.12 (2016), DOI : 10.11771687814016683154.
- [2] Wenjing XUE et al., « Pavement health monitoring system based on an embedded sensing network », in : *Journal of Materials in Civil Engineering* 26.10 (2014), p. 04014072.
- [3] C. PLATI, K. GEORGOULI et A. LOIZOS, « Review of NDT assessment of road pavements using GPR », in : *Nondestructive Testing of Materials and Structures*, Springer, 2013, p. 855-860.
- [4] N. AHMAD, H. LORENZL et M. P. WISTUBA, « Crack detection in asphalt pavements - How useful is the GPR? », in : *2011 6th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR)*, IEEE, 2011, p. 1-6.
- [5] Qiang LI et al., « Non-destructive survey of pavement layer thicknesses with ground penetrating radar », in : *2013 IEEE International Conference of IEEE Region 10 (TENCON 2013)*, IEEE, 2013, p. 1-4.
- [6] Bruno BEAUCAMP, Cyrille FAUCHARD et Laurent LAGUERRE, « Non destructive Assessment of Hot Mix Asphalt compaction with a Step Frequency Radar : Case study », in : *2013 7th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR)*, IEEE, 2013.
- [7] Shreedhar Savant TODKAR et al., « Detection of debondings with ground penetrating radar using a machine learning method », in : *2017 9th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR)*, IEEE, 2017, p. 1-6.
- [8] Filippo GIUSTOZZI, Maurizio CRISPINO et Gerardo FLINTSCH, « Effectiveness of preventive maintenance treatments on road pavements », in : *7th International Conference on Maintenance and Rehabilitation of Pavements and Technological Control, MAIREPAV*, 2012, p. 1-8.

- 
- [9] Andrea BENEDETTO et al., « Reliability of signal processing technique for pavement damages detection and classification using ground penetrating radar », in : *IEEE Sensors Journal* 5.3 (2005), p. 471-480.
- [10] Imad L. AL-QADI et S. LAHOUAR, « Measuring layer thicknesses with GPR – Theory to practice », in : *Construction and building materials* 19.10 (2005), p. 763-772.
- [11] Samer LAHOUAR et Imad L. AL-QADI, « Automatic detection of multiple pavement layers from GPR data », in : *NDT & E International* 41.2 (2008), p. 69-81.
- [12] Umberto SPAGNOLINI et Vittorio RAMPA, « Multitarget detection/tracking for monostatic ground penetrating radar : Application to pavement profiling », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 37.1 (1999), p. 383-394.
- [13] Umberto SPAGNOLINI, « Permittivity measurements of multilayered media with monostatic pulse radar », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 35.2 (1997), p. 454-463.
- [14] Timo SAARENKETO et Tom SCULLION, « Road evaluation with ground penetrating radar », in : *Journal of Applied Geophysics* 43.2-4 (2000), p. 119-138.
- [15] Alex BIRTWISLE et Erica UTSI, « The use of ground penetrating radar to detect vertical subsurface cracking in airport runways », in : *Proceedings of the 12th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR2008)*, Birmingham, UK, 2008.
- [16] M. SOLLA et al., « Approach to identify cracking in asphalt pavement using GPR and infrared thermographic methods : Preliminary findings », in : *NDT & E International* 62 (2014), p. 55-65.
- [17] Jean-Michel SIMONIN et al., « Progress in monitoring the debonding within pavement structures during accelerated pavement testing on the fatigue carousel », in : *8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements*, Springer, 2016, p. 749-755.
- [18] J.-M. SIMONIN et al., « Case study of detection of artificial defects in an experimental pavement structure using 3D GPR systems », in : *Proceedings of the 15th International Conference on Ground Penetrating Radar*, IEEE, 2014, p. 847-851.

- 
- [19] Nectaria DIAMANTI et David REDMAN, « Field observations and numerical models of GPR response from vertical pavement cracks », in : *Journal of Applied Geophysics* 81 (2012), p. 106-116.
- [20] Antonis GIANNOPOULOS, « Modelling ground penetrating radar by GprMax », in : *Construction and building materials* 19.10 (2005), p. 755-762.
- [21] Antoine ROBERT, « Dielectric permittivity of concrete between 50 MHz and 1 GHz and GPR measurements for building materials evaluation », in : *Journal of Applied Geophysics* 40.1-3 (1998), p. 89-94.
- [22] Johan Alexander HUISMAN et al., « Measuring soil water content with ground penetrating radar : A review », in : *Vadose Zone Journal* 2.4 (2003), p. 476-491.
- [23] Guy SERBIN et Dani OR, « Ground-penetrating radar measurement of soil water content dynamics using a suspended horn antenna », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 42.8 (2004), p. 1695-1705.
- [24] John H. BRADFORD, William P. CLEMENT et Warren BARRASH, « Estimating porosity with ground-penetrating radar reflection tomography : A controlled 3-D experiment at the Boise Hydrogeophysical Research Site », in : *Water Resources Research* 45.4 (2009).
- [25] Josef STRYK, « Road diagnostics-ground penetrating radar possibilities », in : *Intersectii/Intersections* 5.1 (2008), p. 48-57.
- [26] Nectaria DIAMANTI, David REDMAN et Antonios GIANNOPOULOS, « A study of GPR vertical crack responses in pavement using field data and numerical modelling », in : *Proceedings of the XIII International Conference on Ground Penetrating Radar*, IEEE, 2010, p. 1-6.
- [27] Xianyang GAO et al., « Simulation of ground penetrating radar for anti-personnel landmine detection », in : *2018 17th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR)*, IEEE, 2018, p. 1-4.
- [28] Iraklis GIANNAKIS, Antonios GIANNOPOULOS et Craig WARREN, « A realistic FDTD numerical modeling framework of ground penetrating radar for landmine detection », in : *IEEE journal of selected topics in applied earth observations and remote sensing* 9.1 (2015), p. 37-51.
- [29] Weilin LI et al., « Application of ground-penetrating radar for detecting internal anomalies in tree trunks with irregular contours », in : *Sensors* 18.2 (2018), p. 649.

- 
- [30] Tiao LU, Wei CAI et Pingwen ZHANG, « Discontinuous Galerkin time-domain method for GPR simulation in dispersive media », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 43.1 (2005), p. 72-80.
- [31] David A. CASPER et K.-J. Samuel KUNG, « Simulation of ground-penetrating radar waves in a 2-D soil model », in : *Geophysics* 61.4 (1996), p. 1034-1049.
- [32] Disala UDUWAWALA et al., « A complete FDTD simulation of a real GPR antenna system operating above lossy and dispersive grounds », in : *Progress In Electromagnetics Research* 50 (2005), p. 209-229.
- [33] G. KLYSZ et al., « Simulation of direct wave propagation by numerical FDTD for a GPR coupled antenna », in : *NDT & E International* 39.4 (2006), p. 338-347.
- [34] Anxing ZHAO, Yansheng JIANG et Wenbing WANG, « Exploring independent component analysis for GPR signal processing », in : *Progress In Electromagnetics Research Symposium*, 2005, p. 750-753.
- [35] Anxing ZHAO, Yansheng JIANG et Wenbing WANG, « Signal-to-noise ratio enhancement in multichannel GPR data via the Karhunen-Loève transform », in : *PIERS Online* 1.6 (2005), p. 754-757.
- [36] Kane S. YEE, « Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14.3 (1966), p. 302-307.
- [37] Craig WARREN et Antonios GIANNOPOULOS, « Creating finite-difference time-domain models of commercial ground-penetrating radar antennas using Taguchi's optimization method », in : *Geophysics* 76.2 (2011), G37-G47.
- [38] Craig WARREN, Antonios GIANNOPOULOS et Iraklis GIANNAKIS, « gprMax : Open source software to simulate electromagnetic wave propagation for Ground Penetrating Radar », in : *Computer Physics Communications* 209 (2016), p. 163-170.
- [39] Craig WARREN et al., « A CUDA-based GPU engine for gprMax : Open source FDTD electromagnetic simulation software », in : *Computer Physics Communications* 237 (2019), p. 208-218.
- [40] Xiao-Kun WEI et al., « Spatially-filtered FDTD subgridding for ground penetrating radar numerical modeling », in : *2017 9th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR)*, IEEE, 2017, p. 1-4.



- 
- [41] Nicolas DÉCHAMPS et al., « Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces : Propagation-inside-layer expansion method », in : *Journal of the Optical Society of America A* 23.2 (2006), p. 359-369.
- [42] David J. GRIFFITHS, *Introduction to Electrodynamics*, Fourth Edition, 2021.
- [43] S ORFANIDIS, *Electromagnetic waves and antennas ; sophocles j*, 2004.
- [44] Bo THIDÉ, *Electromagnetic field theory*, Upsilon books, 2004.
- [45] Gerhard KRISTENSSON, *Scattering of electromagnetic waves by obstacles*, SciTech Publishing, 2016.
- [46] Nicolas PINEL et Christophe BOULIER, *Electromagnetic wave scattering from random rough surfaces : Asymptotic models*, John Wiley & Sons, 2013.
- [47] Leung TSANG et al., *Scattering of electromagnetic waves : numerical simulations*, t. 25, John Wiley & Sons, 2004.
- [48] Christophe BOURLIER, Nicolas PINEL et Gildas KUBICKÉ, *Method of moments for 2D scattering problems : basic concepts and applications*, John Wiley & Sons, 2013.
- [49] Wolfram HERGERT et Thomas WRIEDT, *The Mie theory : basics and applications*, t. 169, Springer, 2012.
- [50] S. H. LOU, L. TSANG et C. H. CHAN, « Application of the finite element method to Monte Carlo simulations of scattering of waves by random rough surfaces : penetrable case », in : *Waves in Random Media* 1.4 (1991), p. 287.
- [51] S. H. LOU et al., « Monte Carlo simulations of scattering of waves by a random rough surface with the finite element method and the finite difference method », in : *Microwave and Optical Technology Letters* 3.5 (1990), p. 150-154.
- [52] Jian-Ming JIN, *The finite element method in electromagnetics*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2014.
- [53] John L. VOLAKIS, Arindam CHATTERJEE et Leo C. KEMPEL, *Finite Element Method for Electromagnetics : Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*, 1998.
- [54] Karl S. KUNZ et Raymond J. LUEBBERS, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, 1993.

- 
- [55] Stephen D. GEDNEY, *Introduction to the finite-difference time-domain (FDTD) method for electromagnetics*, t. 6, Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics, Morgan & Claypool Publishers, 2011.
- [56] Allen TAFLOVE et Susan C. HAGNESS, *Computational electromagnetics : the finite-difference time-domain method*, Third Edition, t. 3, The Electrical Engineering Handbook, Artech House Publishers, 2005.
- [57] Wenbo SUN, Huiying PAN et Gorden VIDEEN, « General finite-difference time-domain solution of an arbitrary electromagnetic source interaction with an arbitrary dielectric surface », in : *Applied optics* 48.31 (2009), p. 6015-6025.
- [58] Roger F. HARRINGTON, *Field computation by moment methods*, Wiley-IEEE Press, 1968.
- [59] M.I. AKSUN et Raj MITTRA, « Choices of expansion and testing functions for the method of moments applied to a class of electromagnetic problems », in : *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 41.3 (1993), p. 503-509.
- [60] Walton C. GIBSON, *The method of moments in electromagnetics*, Third Edition, Chapman et Hall/CRC, 2022.
- [61] Babak ALAVIKIA et Omar M. RAMAHI, « Electromagnetic scattering from cylindrical objects above a conductive surface using a hybrid finite-element–surface integral equation method », in : *Journal of the Optical Society of America A* 28.12 (2011), p. 2510-2518.
- [62] Run-Wen XU et Li-Xin GUO, « An efficient hybrid method for scattering from arbitrary dielectric objects buried under a rough surface : TM case », in : *Optics Express* 22.6 (2014), p. 6844-6858.
- [63] Run-Wen XU et al., « Study on scattering from multilayer rough surfaces with an object buried with FEM/PML », in : *Microwave and Optical Technology Letters* 58.2 (2016), p. 429-433.
- [64] Hua Long SUN, Chuang Ming TONG et Peng PENG, « Improved hybrid FEM/MOM combining MLFMA for composite electromagnetic scattering », in : *Electromagnetics* 37.8 (2017), p. 513-529.
- [65] Pasquale IMPERATORE et al., « Modelling scattering of electromagnetic waves in layered media : An up-to-date perspective », in : *International Journal of Antennas and Propagation* 2017 (2017).

- 
- [66] Ronald E. MICKENS, *Nonstandard finite difference models of differential equations*, world scientific, 1994.
- [67] Ronald E. MICKENS, *Applications of nonstandard finite difference schemes*, World Scientific, 2000.
- [68] Ronald E MICKENS, *Advances in the applications of nonstandard finite difference schemes*, World Scientific, 2005.
- [69] Ronald E MICKENS, *Nonstandard Finite Difference Schemes : Methodology and Applications*, World Scientific, 2020.
- [70] James B. COLE, « High accuracy solution of Maxwell's equations using nonstandard finite differences », in : *Computers in Physics* 11.3 (1997), p. 287-292.
- [71] Kisalaya CHAKRABARTI et James B. COLE, « Simulation study on the detection of size, shape and position of three different scatterers using non-standard time domain time inverse Maxwell's algorithm », in : *Optics Express* 18.5 (2010), p. 4148-4157.
- [72] Kisalaya CHAKRABARTI et James B. COLE, « An non-destructive investigation of irregularities by using non-standard time domain time inverse algorithm », in : *14th Asia Pacific Conference on Non-Destructive Testing (APCNDT)*, 2013.
- [73] James Bradford COLE et Saswatee BANERJEE, *Computing the Flow of Light : Nonstandard FDTD Methodologies for Photonics Design*, SPIE Press, 2017.
- [74] Kailash C PATIDAR, « On the use of nonstandard finite difference methods », in : *Journal of Difference Equations and Applications* 11.8 (2005), p. 735-758.
- [75] KC PATIDAR, « Nonstandard finite difference methods : recent trends and further developments », in : *Journal of Difference Equations and Applications* 22.6 (2016), p. 817-849.
- [76] Marc SONGOLO et Brigitte BIDÉGARAY-FESQUET, « Nonstandard finite-difference schemes for the two-level Bloch model », in : *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing* 9.04 (2018), p. 1850033.
- [77] Marc SONGOLO et Brigitte BIDÉGARAY-FESQUET, « Strang splitting schemes for N-level Bloch models », in : *arXiv preprint arXiv :1909.10932* (2019).

- 
- [78] Marc SONGOLO et Brigitte BIDÉGARAY-FESQUET, « Extending nonstandard finite difference schemes rules to systems of nonlinear ODEs with constant coefficients », in : *arXiv preprint arXiv :2107.05332* (2021).
- [79] David A. KAPP et Gary S. BROWN, « A new numerical method for rough-surface scattering calculations », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 44.5 (1996), p. 711.
- [80] Robert J. ADAMS et Gary S. BROWN, « An iterative solution of one-dimensional rough surface scattering problems based on a factorization of the Helmholtz operator », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 47.4 (1999), p. 765-767.
- [81] Dennis HOLLIDAY, Lester L. DERAAD et Gaetan J. ST-CYR, « Forward-backward : A new method for computing low-grazing angle scattering », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 44.5 (1996), p. 722.
- [82] Dennis HOLLIDAY, Lester L DERAAD et Gaetan J. ST-CYR, « Forward-backward method for scattering from imperfect conductors », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 46.1 (1998), p. 101-107.
- [83] Antonio IODICE, « Forward-backward method for scattering from dielectric rough surfaces », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 50.7 (2002), p. 901-911.
- [84] Hsi-Tseng CHOU et Joel T. JOHNSON, « A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the forward-backward method », in : *Radio Science* 33.5 (1998), p. 1277-1287.
- [85] Hsi-Tseng CHOU et Joel T. JOHNSON, « Formulation of forward-backward method using novel spectral acceleration for the modeling of scattering from impedance rough surfaces », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 38.1 (2000), p. 605-607.
- [86] Danai TORRUNGRUENG, Hsi-Tseng CHOU et Joel T. JOHNSON, « A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from two-dimensional large-scale perfectly conducting random rough surfaces with the forward-backward method », in : *IEEE transactions on geoscience and remote sensing* 38.4 (2000), p. 1656-1668.

- 
- [87] Danai TORRUNGRUENG, Joel T. JOHNSON et Hsi-Tseng CHOU, « Some issues related to the novel spectral acceleration method for the fast computation of radiation/scattering from one-dimensional extremely large scale quasi-planar structures », in : *Radio Science* 37.2 (2002), p. 1-20.
- [88] L. TSANG, C. H. CHAN et H. SANGANI, « Banded matrix iterative approach to Monte-Carlo simulations of scattering of waves by large-scale random rough surface problems : TM case », in : *Electronics Letters* 29.2 (1993), p. 166-167.
- [89] L. TSANG et al., « A banded matrix iterative approach to Monte Carlo simulations of large-scale random rough surface scattering : TE case », in : *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 7.9 (1993), p. 1185-1200.
- [90] Leung TSANG et al., « Monte-Carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the BMIA/canonical grid method », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 43.8 (1995), p. 851-859.
- [91] Petr BECKMANN et Andre SPIZZICHINO, *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, New edition, Artech House Publishers, 1987.
- [92] Tanos Mikhael ELFOUHAILY et Charles-Antoine GUÉRIN, « A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces », in : *Waves in random media* 14.4 (2004), R1-R40.
- [93] Antonios GIANOPOULOS et Nectaria DIAMANTI, « Numerical modelling of ground-penetrating radar response from rough subsurface interfaces », in : *Near Surface Geophysics* 6.6 (2008), p. 357-369.
- [94] Bo YANG et Carey RAPPAPORT, « Response of realistic soil for GPR applications with 2-D FDTD », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 39.6 (2001), p. 1198-1205.
- [95] Eric I. THORSOS, « The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 83.1 (1988), p. 78-92.
- [96] Karl F. WARNICK et Weng Cho CHEW, « Numerical simulation methods for rough surface scattering », in : *Waves in Random Media* 11.1 (2001), R1-R30.
- [97] Nico M TEMME, *Special functions : An introduction to the classical functions of mathematical physics*, John Wiley & Sons, 1996.

- 
- [98] Marc SONGOLO, Nicolas PINEL et Christophe BOURLIER, « Rigorous numerical method for electromagnetic scattering by an object buried between two rough surfaces », in : *2021 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium IGARSS*, IEEE, 2021, p. 3522-3525.
- [99] Marc SONGOLO, Nicolas PINEL et Christophe BOURLIER, « Full Wave Modeling of Electromagnetic Scattering by an Object buried between two Rough Surfaces : Application to GPR », in : (2021).
- [100] Nicolas DÉCHAMPS, « Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles », thèse de doct., Nantes, 2004.
- [101] Gildas KUBICKÉ, « Contribution au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des réflecteurs polyédriques au-dessus d'une surface rugueuse », thèse de doct., Nantes, 2008.
- [102] Mohammad KOUALI, « Diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse-Problème vectoriel 3D », thèse de doct., Nantes, 2012.
- [103] Christophe BOURLIER, Nicolas PINEL et Gildas KUBICKÉ, « Propagation-inside-layer-expansion method combined with physical optics for scattering by coated cylinders, a rough layer, and an object below a rough surface », in : *Journal of the Optical Society of America A* 30.9 (2013), p. 1727-1737.
- [104] G. KUBICKÉ, C. BOURLIER et J. SAILLARD, « Scattering by an object above a randomly rough surface from a fast numerical method : Extended PILE method combined with FB-SA », in : *Waves in Random and Complex Media* 18.3 (2008), p. 495-519.
- [105] Eric S. LI et Kamal SARABANDI, « Low grazing incidence millimeter-wave scattering models and measurements for various road surfaces », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 47.5 (1999), p. 851-861.
- [106] Fifame KOUDOGBO, Paul COMBES et Henri-Jose MAMETSA, « Numerical and experimental validations of IEM for bistatic scattering from natural and manmade rough surfaces », in : *Progress In Electromagnetics Research* 46 (2004), p. 203-244.

- 
- [107] C.-H. KUO et Mahta MOGHADDAM, « Scattering from multilayer rough surfaces based on the extended boundary condition method and truncated singular value decomposition », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 54.10 (2006), p. 2917-2929.
- [108] Christopher D. MOSS et al., « Forward-backward method with spectral acceleration for scattering from layered rough surfaces », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 54.3 (2006), p. 1006-1016.
- [109] Magda EL-SHENAWEE, « Polarimetric scattering from two-layered two-dimensional random rough surfaces with and without buried objects », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 42.1 (2004), p. 67-76.
- [110] M. SAILLARD et G. TOSO, « Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies », in : *Radio Science* 32.4 (1997), p. 1347-1359.
- [111] A SENTENAC, H GIOVANNINI et Marc SAILLARD, « Scattering from rough inhomogeneous media : splitting of surface and volume scattering », in : *Journal of the Optical Society of America A* 19.4 (2002), p. 727-736.
- [112] Leung TSANG, Guifu ZHANG et Kyung PAK, « Detection of a buried object under a single random rough surface with angular correlation function in EM wave scattering », in : *Microwave and Optical Technology Letters* 11.6 (1996), p. 300-304.
- [113] Chao-Fu WANG et Yeow-Beng GAN, « Electromagnetic scattering from a circular target above or below rough surface », in : *Progress In Electromagnetics Research* 40 (2003), p. 207-227.
- [114] Guifu ZHANG et Leung TSANG, « Angular correlation function of wave scattering by a random rough surface and discrete scatterers and its application in the detection of a buried object », in : *Waves in random media* 7.3 (1997), p. 467-478.
- [115] Guifu ZHANG, Leung TSANG et Yasuo KUGA, « Studies of the angular correlation function of scattering by random rough surfaces with and without a buried object », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 35.2 (1997), p. 444-453.
- [116] Guifu ZHANG, Leung TSANG et Kyung PAK, « Angular correlation function and scattering coefficient of electromagnetic waves scattered by a buried object under a two-dimensional rough surface », in : *Journal of the Optical Society of America A* 15.12 (1998), p. 2995-3002.

- 
- [117] Nicolas DECHAMPS et Christophe BOURLIER, « Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to an updated BMIA/CAG approach », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 55.10 (2007), p. 2790-2802.
- [118] Nicolas DECHAMPS et Christophe BOURLIER, « Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to the forward-backward novel spectral acceleration », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 55.12 (2007), p. 3576-3586.
- [119] Daniel E. LAWRENCE et Kamal SARABANDI, « Electromagnetic scattering from a dielectric cylinder buried beneath a slightly rough surface », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 50.10 (2002), p. 1368-1376.
- [120] Muhammad Arshad FIAZ et al., « Scattering by a circular cylinder buried under a slightly rough surface : the cylindrical-wave approach », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 60.6 (2012), p. 2834-2842.
- [121] M. A. FIAZ et al., « Asymptotic solution for a scattered field by cylindrical objects buried beneath a slightly rough surface », in : *Near Surface Geophysics* 11.2 (2013), p. 177-184.
- [122] Christophe BOURLIER, Gildas KUBICKÉ et Nicolas DÉCHAMPS, « Fast method to compute scattering by a buried object under a randomly rough surface : PILE combined with FB-SA », in : *Journal of the Optical Society of America A* 25.4 (2008), p. 891-902.
- [123] Gildas KUBICKE et Christophe BOURLIER, « A fast hybrid method for scattering from a large object with dihedral effects above a large rough surface », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 59.1 (2010), p. 189-198.
- [124] Gildas KUBICKÉ, Christophe BOURLIER et Joseph SAILLARD, « Monostatic Radar Cross Section of an object above a sea surface from a rigorous method », in : *Comptes Rendus Physique* 11.1 (2010), p. 68-76.
- [125] Gildas KUBICKE, Christophe BOURLIER et Joseph SAILLARD, « Scattering from canonical objects above a sea-like one-dimensional rough surface from a rigorous fast method », in : *Waves in Random and Complex Media* 20.1 (2010), p. 156-178.



- 
- [126] Magda EL-SHENAWE, « Scattering from multiple objects buried beneath two-dimensional random rough surface using the steepest descent fast multipole method », in : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 51.4 (2003), p. 802-809.
- [127] Magda EL-SHENAWE et Carey RAPPAPORT, « Electromagnetic scattering interference between two shallow objects buried under 2-D random rough surfaces », in : *IEEE Microwave and Wireless Components Letters* 13.6 (2003), p. 223-225.
- [128] Yu LIANG, Lixin GUO et Zhensen WU, « The EPILE combined with the generalized-FBM for analyzing the scattering from targets above and on a rough surface », in : *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 9 (2010), p. 809-813.
- [129] Lixin GUO, Yu LIANG et Zhensen WU, « A study of electromagnetic scattering from conducting targets above and below the dielectric rough surface », in : *Optics Express* 19.7 (2011), p. 5785-5801.
- [130] Yu LIANG, Li-Xin GUO et Zhen-Sen WU, « The fast EPILE combined with FBM for electromagnetic scattering from dielectric targets above and below the dielectric rough surface », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 49.10 (2011), p. 3892-3905.
- [131] Christophe BOURLIER, Cédric LE BASTARD et Vincent BALTAZART, « Generalization of PILE method to the EM scattering from stratified subsurface with rough interlayers : Application to the detection of debondings within pavement structure », in : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 53.7 (2015), p. 4104-4115.
- [132] Peter LANCASTER et Miron TISMENETSKY, *The theory of matrices : with applications*, Elsevier, 1985.
- [133] Ben NOBLE, *Applied linear algebra*, rapp. tech., 1988.
- [134] Tzon-Tzer LU et Sheng-Hua SHIOU, « Inverses of  $2 \times 2$  block matrices », in : *Computers & Mathematics with Applications* 43.1-2 (2002), p. 119-129.
- [135] Norman RICKER, « The form and laws of propagation of seismic wavelets », in : *3rd World Petroleum Congress*, OnePetro, 1951.
- [136] Harold RYAN, *Ricker, Ormsby; Klander, Bntterwo-A Choice of Wavelets*, 1994.

- 
- [137] Christophe BOURLIER, Cédric LE BASTARD et Nicolas PINEL, « Full wave PILE method for the electromagnetic scattering from random rough layers », in : *Proceedings of the 15th International Conference on Ground Penetrating Radar*, IEEE, 2014, p. 545-551.
- [138] Sylvie CHAMBON et Jean-Marc MOLIARD, « Automatic road pavement assessment with image processing : review and comparison », in : *International Journal of Geophysics* 2011 (2011).
- [139] Arun MOHAN et Sumathi POOBAL, « Crack detection using image processing : A critical review and analysis », in : *Alexandria Engineering Journal* 57.2 (2018), p. 787-798.
- [140] HU LEVATTI et al., « Ground penetrating radar system for detection of desiccation cracks in soils », in : *Third International Symposium on Computational Geomechanics (COMGEO III)*, International Centre for Computational Engineering, 2013.
- [141] Andrey V OSIPOV et Sergei A TRETYAKOV, *Modern electromagnetic scattering theory with applications*, John Wiley & Sons, 2017.
- [142] Hideki HIRAYAMA et al., « An accurate illumination model for objects coated with multilayer films », in : *Computers & Graphics* 25.3 (2001), p. 391-400.
- [143] Renbiao WU, Xi LI et Jian LI, « Continuous pavement profiling with ground-penetrating radar », in : *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation* 149.4 (2002), p. 183-193.
- [144] Nicolas PINEL et al., « Asymptotic modeling of coherent scattering from random rough layers : Application to road survey by GPR at nadir », in : *International Journal of Antennas and Propagation* 2012 (2012).
- [145] M ABRAMOWITZ et IA STEGUN, « Handbook of Mathematical Functions (ninth corrected printing) », in : *National Bureau of Standards* (1970).



---

**Titre :** Modélisation numérique rigoureuse pour la diffraction électromagnétique par un objet enfoui entre deux interfaces rugueuses. Application au Radar à Pénétration de Sol

**Mot clés :** Diffraction Électromagnétique, Surfaces Rugueuses, Méthode d'Équation Intégrale, Méthode des Moments, Radar à Pénétration de Sol, Fissures.

**Résumé :** Dans cette thèse, nous présentons une méthode numérique efficace pour calculer les réponses fréquentielles et temporelles du champ diffracté par un objet enfoui entre deux surfaces rugueuses pour un problème 2-D. Cette méthode est appelée méthode Generalized PILE (GPILE), car elle étend la méthode PILE qui ne considère que deux surfaces ou un objet enfoui sous une surface au cas de trois interfaces dont l'une est éclairée. La méthode GPILE résout rigoureusement les équations de Maxwell en utilisant une formulation matricielle simple. Les résultats obtenus ont une interprétation physique simple et

nous permettent d'étudier l'influence de l'objet enfoui entre les deux surfaces rugueuses. On distingue l'écho primaire de la surface supérieure, les échos multiples provenant de la surface inférieure et de l'objet. La méthode GPILE est appliquée pour simuler le signal du radar à pénétration de sol (GPR). La réponse temporelle qui en résulte permet alors de détecter la présence de l'objet enfoui entre les deux surfaces rugueuses. Enfin, les propriétés géométriques et physique de l'objet sont adaptées à celle d'une fissure enfouie sous la base d'une route pour se conformer à l'application à laquelle est dédiée cette thèse.

---

**Title:** Rigorous numerical method for electromagnetic scattering by an object buried between two rough surfaces. Application to Ground Penetrating Radar

**Keywords:** Electromagnetic Scattering, Rough Surfaces, Integral Equation Method, Method of Moments, Ground Penetrating Radar, Cracks.

**Abstract:** In this thesis, we present an efficient numerical method to calculate the frequency and time responses of the field scattered by an object buried between two random rough surfaces for a 2-D problem. This method is called Generalized PILE (GPILE) method because it extends the PILE method which considers only two surfaces or an object buried under a surface. The GPILE method solves rigorously the Maxwell equations by using a simple matrix formulation. The obtained results have a straightforward physical interpretation and allow us to investigate the influence of the object buried between

the two rough surfaces. We distinguish the primary echo of the upper surface, the multiple echoes coming from the lower surface and those arising from the object. The GPILE method is applied to simulate the Ground Penetrating Radar (GPR) signal at nadir. The resulting time response helps the user to detect the presence of the object buried between the two random rough surfaces. Finally, the geometrical and physical properties of the object are adapted to that of a crack buried under a road to comply with the application to which this thesis is dedicated.