

Contribution au calcul de la diffusion d'une onde  
électromagnétique par des réflecteurs polyédriques  
au-dessus d'une surface rugueuse

Gildas Kubické

7 novembre 2008



## Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier Monsieur le professeur Serge Toutain de m'avoir accueilli au sein du laboratoire IREENA et pour la confiance qu'il m'a témoignée.

J'aimerais remercier vivement mes directeurs de thèse, Monsieur le professeur Joseph Saillard et Christophe Bourlier. Merci Joseph de m'avoir attiré si passionnément dans le "monde de la recherche" alors que je n'étais encore qu'élève-ingénieur, merci pour vos conseils avisés, votre pragmatisme, votre intégrité. Merci Christophe pour ta disponibilité, ta précieuse aide scientifique et pour toutes tes qualités humaines. Merci à vous deux de m'avoir permis de travailler ma thèse dans les meilleures conditions possibles.

Mes plus sincères remerciements vont à présent à Monsieur le professeur Marc Hélier d'avoir accepté d'être président du jury de thèse et de l'avoir rapporté, ainsi que Monsieur le professeur Marc Saillard qui m'a également fait l'honneur d'être rapporteur; merci à vous de m'avoir éclairé sur certains passages de mes travaux. Mes remerciements s'adressent aussi à Philippe Pouliguen pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail de thèse et pour nos discussions scientifiques très enrichissantes. Merci aussi à Messieurs Henri-José Mametsa et Christian Migairou pour avoir accepté d'être présents à ce jury.

Je souhaite également remercier l'ensemble du laboratoire et plus particulièrement mes proches collègues et amis, Julien, Janic, Nico, Yohann, Laurent ainsi que, même si ce fut plus bref, Nico D et Nico C. Un merci à Yann et Marc pour leur bonne humeur, et à Sandrine pour sa disponibilité et le travail qu'elle accomplit. Merci également à tous les autres que je n'oublie pas pour tous les bons moments passés.

Enfin, j'associe à mes remerciements tous mes proches. Merci à ma belle-famille (Isabelle, Marjorie, Dominique, Marie-Françoise ...) pour ces agréables moments de détente passés ensemble. Merci à Maowi pour tous ses "poussages de tête". Merci à vous mes amis (Jul', Fab, P'tite biche et tout le reste du groupe ainsi que Gaëlle, Bruno...) pour avoir su me divertir quand j'en avais besoin. Merci, Chantal et Yvan pour votre gentillesse, votre affabilité et votre hospitalité qui m'ont permis de trouver un équilibre nécessaire. Merci à vous (Daniel, Edith, Pascale, Gilles, Fabien...) qui, même loin, avez su m'encourager. Merci à toi ma sœur, pour la complicité que nous avons et pour la confiance que tu me témoignes. Merci à vous, papa et maman, sans qui rien n'aurait pu être possible. Pour m'avoir toujours soutenu et cru en moi, pour m'avoir inculqué vos valeurs, votre morale, votre sens du travail, pour avoir été pour moi les meilleurs exemples à suivre : merci à vous deux !

Mes derniers remerciements sont bien sûr destinés à Stéphanie pour m'avoir si affectueusement soutenu. Plus que quiconque, je ne saurai trouver les mots pour te remercier suffisamment. Du fond du cœur, merci de me rendre chaque jour si heureux.



---

La clef de toutes les sciences est sans contredit le point d'interrogation; nous devons la plupart des découvertes au : Comment? Et la sagesse dans la vie consiste peut-être à se demander, à tout propos : Pourquoi?

Honoré de Balzac, *La peau de chagrin*.



---

*À Lina*



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>14</b>
<b>Liste des acronymes</b>	<b>23</b>
<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>1 Onde électromagnétique, méthodes de résolution et description de la scène</b>	<b>29</b>
1.1 Ondes électromagnétiques . . . . .	29
1.1.1 Équations de Maxwell . . . . .	29
1.1.2 Équations de propagation, onde plane et équation de Helmholtz . . . . .	31
1.1.3 Conditions aux limites . . . . .	32
1.2 Représentation intégrale des champs . . . . .	33
1.2.1 Cas vectoriel - scène 3D . . . . .	33
1.2.1.1 Fonction et théorème de Green . . . . .	34
1.2.1.2 Principe de Huygens et théorème d'extinction . . . . .	34
1.2.1.3 Approximation champ lointain . . . . .	36
1.2.2 Cas scalaire - scène 2D . . . . .	36
1.3 Coefficient de diffusion, SER et signature polarimétrique d'une cible . . . . .	38
1.3.1 Puissances incidente, diffusée et transmise . . . . .	38
1.3.2 Coefficient de diffusion . . . . .	39
1.3.3 Surface Equivalente Radar (SER) . . . . .	40
1.3.4 Signature polarimétrique . . . . .	41
1.3.4.1 Vecteur de Jones . . . . .	42
1.3.4.2 Matrice de diffraction . . . . .	42
1.4 Méthodes de résolution des équations . . . . .	44
1.4.1 Modèles rigoureux . . . . .	44
1.4.1.1 Méthodes différentielles . . . . .	45
1.4.1.2 Méthodes intégrales . . . . .	45

1.4.1.3	Conclusion . . . . .	46
1.4.2	Modèles asymptotiques hautes fréquences . . . . .	46
1.4.2.1	Méthodes orientées “rayon” . . . . .	46
1.4.2.2	Méthodes orientées “courant” . . . . .	47
1.4.2.3	Conclusion . . . . .	48
1.4.3	Modèles asymptotiques propres aux surfaces rugueuses . . . . .	48
1.5	Analyse de la scène étudiée . . . . .	49
1.5.1	Réflecteurs polyédriques . . . . .	50
1.5.1.1	Polyèdres . . . . .	50
1.5.1.2	Facettage des polyèdres : les réflecteurs polyédriques . . . . .	50
1.5.1.3	Définitions de la classe et de l’ordre d’un réflecteur polyédrique . . . . .	51
1.5.1.4	De l’intérêt de l’utilisation de ces réflecteurs . . . . .	52
1.5.1.5	Problème scalaire - Scène 2D . . . . .	53
1.5.2	Surface rugueuse aléatoire . . . . .	53
1.5.2.1	Description statistique d’une surface rugueuse . . . . .	54
1.5.2.2	Génération du profil par une méthode spectrale . . . . .	55
1.5.2.3	Cas particulier de la mer . . . . .	57
1.6	Vers une résolution du problème : le choix des méthodes . . . . .	57
1.7	Conclusion . . . . .	59
<b>2</b>	<b>Diffusion par un diffuseur placé en espace libre - cas scalaire</b>	<b>61</b>
2.1	Diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle . . . . .	61
2.1.1	Diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle par la Méthode des Moments . . . . .	62
2.1.1.1	Équations intégrales - cas d’une surface parfaitement conductrice	62
2.1.1.2	Discretisation par la Méthode des Moments et résolution . . . . .	63
2.1.1.3	Onde de Thorsos . . . . .	65
2.1.1.4	Coefficient de diffusion . . . . .	66
2.1.1.5	Cas d’un milieu inférieur diélectrique . . . . .	67
2.1.1.6	Approximation haute impédance . . . . .	69
2.1.1.7	Vers une méthode dite exacte et rapide . . . . .	70
2.1.2	Forward-Backward - Spectral Acceleration (FB-SA) . . . . .	71
2.1.2.1	Principe de la méthode Forward-Backward (FB) . . . . .	71
2.1.2.2	Principe de la Spectral Acceleration (SA) . . . . .	72
2.1.2.3	Convergence des méthodes FB et FB-SA pour une surface gaussienne . . . . .	76

---

2.1.2.4	Convergence des méthodes FB et FB-SA pour une surface de mer	79
2.2	Diffraction par un objet en espace libre	82
2.2.1	Diffraction par un cylindre elliptique infini PC par la MdM	82
2.2.2	Validation de la MdM à l'aide de la solution analytique exacte du cylindre circulaire PC	85
2.2.3	Diffraction par une croix par la méthode des moments	90
2.2.4	Modèle asymptotique analytique de la diffraction par une croix en hautes fréquences	92
2.2.4.1	Diffraction par une plaque linéique par l'OP	93
2.2.4.2	Diffraction par un dièdre par l'OP combinée à l'OG	98
2.2.4.3	Résultats	102
2.3	Conclusion	104
<b>3</b>	<b>Diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse - cas scalaire</b>	<b>107</b>
3.1	Positionnement du problème	107
3.2	Diffusion de la scène par la Méthode des Moments	108
3.2.1	Equations intégrales - cas de deux diffuseurs quelconques diélectriques placés dans le milieu incident	108
3.2.2	Discrétisation par la Méthode des Moments	111
3.2.3	Cas d'un diffuseur quelconque PC proche d'un diffuseur quelconque diélectrique	113
3.2.4	Cas de deux diffuseurs quelconques PC	114
3.3	Méthode PILE étendue combinée à la FB-SA	115
3.3.1	Intérêt de la méthode PILE classique	115
3.3.2	Généralisation de la méthode PILE : la méthode PILE étendue	118
3.3.2.1	Formulation mathématique	118
3.3.2.2	Interprétation physique	120
3.3.2.3	Convergence de PILE étendue	121
3.3.3	Intégration de la FB-SA : Résultats et complexité de la méthode	127
3.3.3.1	Complexité de la méthode PILE+FB-SA	127
3.3.3.2	Convergence de PILE+FB-SA	128
3.3.3.3	Application à une croix au-dessus d'une surface de mer	131
3.4	Hybridation de PILE étendue par intégration de l'Optique Physique	137
3.4.1	Formulation mathématique de l'intégration de l'OP	137
3.4.2	Résultats de la méthode hybride PILE+FB-SA+OP	140
3.4.3	Application à une croix au-dessus d'une surface de mer	143

3.5	Vers une résolution asymptotique du problème . . . . .	144
3.6	Conclusion . . . . .	146
<b>4</b>	<b>Diffusion par un réflecteur polyédrique en espace libre - cas vectoriel</b>	<b>147</b>
4.1	Etat de l'art et positionnement du problème . . . . .	147
4.1.1	Rappel sur les réflecteurs polyédriques . . . . .	148
4.1.2	Etat de l'art . . . . .	149
4.1.3	Vers un modèle valide pour des angles d'excitation et d'observation arbitraires . . . . .	150
4.2	Signature polarimétrique bistatique d'un trièdre . . . . .	150
4.2.1	Changement de repères : projection des composantes de la matrice de diffraction . . . . .	151
4.2.2	Contribution des simples réflexions du trièdre . . . . .	152
4.2.3	Contribution des doubles réflexions du trièdre . . . . .	155
4.2.4	Contribution des triples réflexions du trièdre . . . . .	158
4.2.5	Contribution des simples diffractions d'arêtes du trièdre . . . . .	162
4.2.6	Résultats et validité du modèle de la signature d'un trièdre . . . . .	163
4.3	Signature bistatique d'un réflecteur polyédrique . . . . .	167
4.3.1	Calcul de la matrice de diffraction du réflecteur polyédrique . . . . .	167
4.3.2	Résultats et validité du modèle de la signature d'un réflecteur octaédrique d'ordre 1 . . . . .	168
4.3.3	Résultats et validité du modèle de la signature d'un quart de réflecteur octaédrique d'ordre 2 . . . . .	172
4.3.3.1	Réflecteur de grande taille : $L = 10\lambda_0$ . . . . .	172
4.3.3.2	Réflecteur de plus petite taille : $L = 5\lambda_0$ . . . . .	175
4.3.3.3	Comparaison du temps de calcul . . . . .	176
4.3.4	Propriétés intrinsèques des réflecteurs polyédriques . . . . .	177
4.3.4.1	Influence de la classe du réflecteur polyédrique . . . . .	177
4.3.4.2	Influence de l'ordre du réflecteur polyédrique . . . . .	179
4.4	Conclusion . . . . .	181
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>183</b>
	<b>Annexes</b>	<b>188</b>
	<b>A Représentation intégrale des champs en 3D</b>	<b>189</b>
	<b>B Calcul de l'intégration de l'OP numérique dans la méthode PILE étendue -</b>	

<b>cas TE</b>	<b>193</b>
B.1 Calcul sur le champ incident . . . . .	193
B.2 Calcul du couplage entre la surface inférieure et l'objet . . . . .	194
B.2.1 Propagation de la dérivée normale du champ surfacique en TE . . . . .	194
B.2.2 Propagation du champ surfacique en TE . . . . .	195
B.2.3 Discrétisation des fonctions de propagation . . . . .	196
B.3 Calcul du couplage entre les faces . . . . .	196
<b>C Rotation d'Euler</b>	<b>199</b>
C.1 Rotation d'angle $\alpha_e$ . . . . .	199
C.2 Rotation d'angle $\beta_e$ . . . . .	200
C.3 Rotation d'angle $\gamma_e$ . . . . .	200
<b>D Matrice de diffraction de la surface d'une plaque triangulaire par l'Optique Physique</b>	<b>203</b>
D.1 Matrice de diffraction de la surface d'un réflecteur plan quelconque . . . . .	203
D.1.1 Equations intégrales et diverses approximations . . . . .	203
D.1.2 Développement analytique pour un réflecteur plan . . . . .	205
D.2 Matrice de diffraction de la surface d'un réflecteur en forme de triangle rectangle	208
D.3 Matrice de diffraction de la surface d'un réflecteur en forme de triangle quelconque	209
<b>E Matrice de diffraction d'une arête par la Méthode des Courants Equivalents</b>	<b>211</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>217</b>



# Table des figures

1.1	Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface délimitant deux milieux LHI semi-infinis. . . . .	33
1.2	Le problème de la diffraction : un objet de contour $S$ occupant un volume $V$ placé dans un volume $V_0$ en présence d'une source $\mathbf{J}$ . . . . .	35
1.3	Illustration de l'approximation en champ lointain pour un problème 3D. . . . .	36
1.4	Illustration de l'approximation en champ lointain pour un problème 2D. . . . .	37
1.5	Illustration de l'angle solide pour le calcul de la puissance diffusée. . . . .	39
1.6	Illustration des vecteurs et des angles en convention FSA (Forward Scattering Alignment). Les angles $\pi - \theta_i$ , $\theta_s$ , $\phi_i$ et $\phi_s$ sont des angles orientés et sont illustrés ici dans leur sens positif. . . . .	43
1.7	Deux des cinq solides de Platon. . . . .	50
1.8	Le trièdre (tétraèdre non régulier facetté). . . . .	51
1.9	Le réflecteur octaédrique (obtenu par facettage de l'octaèdre). . . . .	51
1.10	Le réflecteur icosaédrique (obtenu par facettage de l'icosaèdre). . . . .	51
1.11	Réseau de trièdres d'ordre 2. . . . .	52
1.12	Le réflecteur octaédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres = $8 \times 2^2 = 32$ ). . . . .	52
1.13	Le réflecteur octaédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres = $8 \times 4^2 = 128$ ). . . . .	52
1.14	Le réflecteur icosaédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres = $20 \times 2^2 = 80$ ). . . . .	53
1.15	Le réflecteur icosaédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres = $20 \times 4^2 = 320$ ). . . . .	53
1.16	Surface rugueuse 1D de statistique gaussienne (à gauche) et sa distribution des hauteurs (à droite). . . . .	54
2.1	Définition de $\theta_i$ et $\theta_s$ pour une scène 2D. Ces angles orientés sont illustrés ici dans leur sens positif. . . . .	65
2.2	Illustration du calcul du produit matriciel $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b}' - \bar{\mathbf{Z}}^f \mathbf{X}^{bf}$ ( $\mathbf{b}' = [\mathbf{b} \ \mathbf{0}]$ , $\mathbf{X}^{bf} = \mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f$ et $\mathbf{X}^{bf} = \left[ \mathbf{X}^{1bf^t} \ \mathbf{X}^{2bf^t} \right]^t$ qui est un vecteur de longueur $2N$ ) de la méthode Forward-Backward pour un milieu inférieur diélectrique. Les inconnues sont $\{X_i^{1f}, X_i^{2f}\}$ avec $i \in [2; N]$ . Pour le premier ordre, $\mathbf{X}^b = \mathbf{0}$ . . . . .	73

2.3	Contour d'intégration de la fonction de Green scalaire $H_0^{(1)}$ dans le plan complexe $\phi$ . $C_\phi$ est le contour d'origine et $C_\delta$ le contour déformé. Pour le cas plan, $\delta = \pi/4$ .	74
2.4	Interprétation géométrique des zones éclairée et ombrée dans l'approche SA. Le point courant est le point de réception (indice $m$ ) excité par un ensemble de points sources (indice $n$ ).	75
2.5	Comparaison du coefficient de diffusion en dB calculé avec la méthode FB avec celui calculé par la MdM. Dans la légende entre parenthèses figurent l'ordre de l'itération ( $P_{\text{FB}}$ ) suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion $\epsilon_{\text{FB}}^\sigma$ . Les paramètres de la scène sont les mêmes que le tableau 2.2 avec $\sigma_z/\lambda_0 = 2$ , les résultats pour le cas (a) sont représentés sur les figures du haut (TE et TM) et ceux pour le cas (c) sont représentés sur les figures du bas (TE et TM).	78
2.6	Mêmes variations que la figure 2.5 mais la comparaison est effectuée entre la méthode FB-SA (avec $x_{d0} = 3L_c$ ) et la MdM. Dans la légende entre parenthèses figurent l'ordre de l'itération ( $P_{\text{FB}}$ ) suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion $\epsilon_{\text{FB-SA}}^\sigma$ .	78
2.7	Comparaison du coefficient de diffusion en dB calculé avec les méthodes FB et FB-SA avec celui calculé par la MdM. Dans la légende entre parenthèses figurent l'ordre de l'itération ( $P_{\text{FB}}$ ) suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. $x_{d0} = 0.5L_c$ pour la FB-SA. Les paramètres de la scène sont les mêmes que ceux du tableau 2.4 avec $f = 3$ GHz, $u_{10} = 5$ m/s et $\theta_i = 0^\circ$ . Cas TE sur les figures du haut, cas TM sur celles du bas. Méthode FB sur les figures de gauche, et méthode FB-SA sur celles de droite.	81
2.8	Erreur relative $\epsilon^\sigma$ des méthodes FB et FB-SA en fonction du paramètre $\alpha$ pour deux vitesses de vent $u_{10}$ pour les polarisations TE et TM. $\Delta x = \lambda_0/10$ , $N = 3000$ échantillons, $g = L/6$ pour l'onde de Thorsos, $f = 3$ GHz, $\theta_i = 0^\circ$ , $P_{\text{FB}} = 4$ en TE et $P_{\text{FB}} = 1$ en TM.	81
2.9	Illustration des paramètres de l'échantillonnage de l'ellipse.	84
2.10	Représentation graphique des angles $\theta_i$ et $\theta_s$ (utilisés dans la MdM) et des angles locaux $\theta'_i$ et $\theta'_s$ utilisés dans la solution analytique.	84
2.11	Module des coefficients $C_n$ en fonction de l'indice de la somme $n$ : illustration de la convergence de la solution analytique. Cas d'un cylindre PC infini suivant son axe de révolution et de rayon $b = a = 5\lambda$ . Paramètres de calcul : $N_c = 40$ et $\theta_i = 0^\circ$ .	87
2.12	Comparaisons du champ total sur la surface en module et phase, de la SER et de la phase du champ diffracté entre la MdM et la solution analytique en polarisation TM. Cas d'un cylindre PC infini suivant son axe de révolution et de rayon $b = a = 5\lambda$ . Paramètres de calcul : $N_c = 40$ , $N_\lambda = 20$ soit $N = 629$ inconnues, $\theta_i = 0^\circ$ , calcul en champ lointain à une distance $r' = 2000a$ .	88
2.13	Comparaisons de la dérivée normale du champ total sur la surface en module et phase, de la SER et de la phase du champ diffracté entre la MdM et la solution analytique en polarisation TE. Même paramètres que la figure 2.12.	88
2.14	Illustration de l'échantillonnage de la plaque.	91
2.15	Illustration des angles locaux et du repère local associés à la plaque.	93

2.16	Comparaison du champ total surfacique et de sa dérivée normale obtenus avec la MdM et l'OP. $L = 10\lambda$ , $\mathbf{OO}' = \mathbf{0}$ , $\alpha = 0^\circ$ , $\Delta s = \lambda/20$ , $e = \lambda/20$ et $\theta_i = 0^\circ$ . . . . .	96
2.17	Comparaison de la SER et de la phase du champ diffracté obtenus avec la MdM, la méthode asymptotique "OP+Huygens" et la méthode asymptotique "OP+Babinet". $L = 10\lambda$ , $\mathbf{OO}' = \mathbf{0}$ , $\alpha = 0^\circ$ , $\Delta s = \lambda/20$ , $e = \lambda/20$ et $\theta_i = 0^\circ$ . . . . .	97
2.18	Comparaison de la SER obtenue avec la MdM, la méthode asymptotique "OP+Huygens" et la méthode asymptotique "OP+Babinet" en polarisation TE. $L = 10\lambda$ , $\mathbf{OO}' = \mathbf{0}$ , $\Delta s = \lambda/20$ et $e = \lambda/20$ . . . . .	98
2.19	Illustration des repères locaux du dièdre et des faces 1 et 2. La face 2 est excitée sur son côté externe, une partie de la face 1 n'est pas excitée. . . . .	98
2.20	Illustration de la SR de la face 1 avec ombrage en excitation et ombrage en observation. . . . .	99
2.21	Illustration, dans les repères locaux des faces, de la DR (face 1 $\rightarrow$ face 2) avec ombrage en observation. . . . .	101
2.22	Numérotation des faces et des dièdres dans la croix. . . . .	102
2.23	Comparaison de la dérivée normale du champ surfacique (cas TE) sur la croix. $\theta_i = 45^\circ$ , $L = 5\lambda$ , $\alpha = 0^\circ$ , $e = \lambda/15$ , $\Delta s = \lambda/20$ . . . . .	102
2.24	Comparaison de la SER (cas TE) d'une croix. $\theta_i = 0^\circ$ , $L = 10\lambda$ , $e = \lambda/15$ , $\Delta s = \lambda/20$ . . . . .	103
2.25	SER (cas TE) de la croix. Comparaison entre les résultats obtenus par la MdM et par les différentes contributions de la méthode asymptotique. $\theta_i = 55^\circ$ , $\alpha = 0^\circ$ , $L = 10\lambda$ , $e = \lambda/15$ , $\Delta s = \lambda/20$ . . . . .	104
3.1	Illustration de la scène étudiée : un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse. . . . .	107
3.2	Le problème de la diffusion par deux diffuseurs placés dans le milieu incident. . . . .	109
3.3	Le problème de la diffusion par deux diffuseurs. le diffuseur 2 est inclus dans le diffuseur 1. . . . .	116
3.4	Module du champ total sur la surface rugueuse en fonction de l'abscisse normalisée. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. $\theta_i = 0^\circ$ , $L_c = 2\lambda_0$ , $\epsilon_{r1} = 2 + 0.01i$ , $\sigma_z = \lambda_0$ , $L_{surf} = 120\lambda_0$ , $g = L_{surf}/6$ , $N_{cyl} = 126$ , $z_c = -4\lambda_0$ , $a = b = 2\lambda_0$ , polarisation TE. En haut PILE, au milieu PILE+FB (avec $P_{FB} = 7$ ), en bas PILE+FB-SA ( $x_{d0} = 3L_c$ ). Les résultats issus de la MdM sont tracés sur chaque courbe. . . . .	116
3.5	Comparaison du coefficient de diffusion obtenu avec les méthodes PILE, PILE+FB, PILE+FB-SA et la MdM pour la polarisation TE. $P_{PILE} = 4$ pour chaque méthode. Dans la légende : l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.4. . . . .	117
3.6	Module du champ total en fonction de l'abscisse normalisée $x/\lambda_0$ et de la hauteur normalisée $h/\lambda_0$ pour la polarisation TE et pour différents ordres de la méthode PILE. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.4 sauf $\sigma_z = 0.5\lambda_0$ , $L_{surf} = 80\lambda_0$ , $\theta_i = 30^\circ$ et $g = L_{surf}/4$ . . . . .	118
3.7	Interprétation physique du développement en série (3.51). . . . .	120

3.8	Comparaison des coefficients de diffusion obtenus avec la méthode PILE et la MdM avec différentes valeurs de $P_{\text{PILE}}$ . Dans la légende : l'ordre $P_{\text{PILE}}$ suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont donnés par les cas (c) et (d) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3. . . . . .	124
3.9	Comparaison des champs totaux surfaciques obtenus avec la méthode PILE et la MdM avec différentes valeurs de $P_{\text{PILE}}$ en polarisation TM. Dans la légende : l'ordre $P_{\text{PILE}}$ suivi de l'erreur relative sur le champ surfacique. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.8(b) (Cas (d) du tableau 3.1 et cas (a) du tableau 3.3). De plus, les champs surfaciques obtenus par la MdM lorsque l'objet (figure de gauche) et la surface (figure de droite) sont considérés en espace-libre, sont tracés. . . . .	125
3.10	Module du champ total rayonné pour un cylindre au-dessus d'une surface rugueuse gaussienne diélectrique. Les paramètres sont donnés par le cas (e) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3. . . . .	125
3.11	Module du champ total en dB sur la surface rugueuse gaussienne en fonction de l'abscisse normalisée. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. Mêmes paramètres que pour la figure 3.9(b) (cas (d) du tableau 3.1 et cas (a) du tableau 3.3). En haut PILE, au milieu PILE+FB (avec $P_{\text{FB}} = 2$ ), en bas PILE+FB-SA ( $x_{d0} = 3L_c$ ). Les résultats issus de la MdM sont tracés sur chaque courbe. . . . .	128
3.12	Comparaison du coefficient de diffusion obtenus avec les méthodes PILE, PILE+FB, PILE+FB-SA et la MdM pour la polarisation TE. $P_{\text{PILE}} = 4$ pour chaque méthode. Dans la légende : l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.11. . . . .	129
3.13	Illustration de la scène maritime. Cas (a) du tableau 3.2 et cas (c) du tableau 3.3.	129
3.14	Module du champ total sur la surface de la croix. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. La scène est illustrée sur la figure 3.13. Cas (a) du tableau 3.2 et cas (c) du tableau 3.3. En haut PILE, au milieu PILE+FB (avec $P_{\text{FB}} = 2$ ), en bas PILE+FB-SA ( $x_{d0} = 0.05L_c$ ). Les résultats issus de la MdM sont tracés sur chaque courbe. . . . .	130
3.15	Module du champ total sur la surface de mer en dB et coefficient de diffusion en dB pour une croix au-dessus d'une surface de mer. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.14. . . . .	130
3.16	Coefficient de diffusion total ( $P = 50$ réalisations) pour une croix au-dessus de la mer. Cinq longueurs $L_2$ différentes, cas (c) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3, $P_{\text{FB}} = 5$ , $x_{d0} = 0.05L_c$ et $P_{\text{PILE}} = 10$ . . . . .	132
3.17	Coefficient de diffusion total ( $P = 50$ réalisations) pour une croix au-dessus de la mer. Cinq longueurs $L_2$ différentes, cas (d) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3, $P_{\text{FB}} = 2$ , $x_{d0} = 0.05L_c$ et $P_{\text{PILE}} = 10$ . . . . .	133
3.18	Référence. . . . .	134
3.19	Cas TM. . . . .	134
3.20	Fréquence. . . . .	134
3.21	Vitesse $u_{10}$ . . . . .	135

3.22	Angle $\alpha$ . . . . .	135
3.23	Angle $\theta_i$ . . . . .	136
3.24	Module du champ total sur la surface de la croix. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. La scène est illustrée sur la figure 3.13 et les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 3.14. . . . .	141
3.25	Module du champ total sur la surface de mer en dB et coefficient de diffusion en dB pour une croix au-dessus d'une surface de mer. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.24. . . . .	141
3.26	Coefficient de diffusion en dB pour une croix au-dessus d'une surface de mer. Cas (b) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3. . . . .	142
3.27	Comparaison du coefficient de diffusion total issu de la méthode PILE+FB-SA+OP avec celui issu de la méthode PILE+FB-SA. Les paramètres communs aux deux figures sont donnés au tableau 3.8. . . . .	143
3.28	Comparaison du coefficient de diffusion total issu de la méthode PILE+FB-SA+OP avec celui issu de la méthode PILE+FB-SA. Les paramètres communs aux deux figures sont donnés au tableau 3.8. . . . .	143
3.29	Géométrie du problème et illustration des différentes étapes de calcul de la méthode PILE. . . . .	145
4.1	Réseau de trièdres d'ordre 2. . . . .	148
4.2	Le réflecteur octaédrique d'ordre 1 (nombre de trièdres = $8 \times 1^2 = 8$ ). . . . .	148
4.3	Le réflecteur octaédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres = $8 \times 2^2 = 32$ ). . . . .	148
4.4	Le réflecteur octaédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres = $8 \times 4^2 = 128$ ). . . . .	148
4.5	Le réflecteur icosaédrique d'ordre 1 (nombre de trièdres = $20 \times 1^2 = 20$ ). . . . .	149
4.6	Le réflecteur icosaédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres = $20 \times 2^2 = 80$ ). . . . .	149
4.7	Le réflecteur icosaédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres = $20 \times 4^2 = 320$ ). . . . .	149
4.8	Illustration des ombrages en excitation et observation. . . . .	151
4.9	Définitions de la numérotation des faces et du repère local du trièdre $k$ . . . . .	153
4.10	Définitions des faces indexées et du repère local de la face $j_1$ pour le calcul des SR. . . . .	153
4.11	Ombrage en excitation sur la face $j_1$ pour les SR. . . . .	153
4.12	Ombrage en observation sur la face $j_1$ pour les SR. . . . .	154
4.13	Exemple d'ombrage en excitation et en observation pour le calcul des SR. . . . .	154
4.14	Surface de la face $j_2$ excitée par le champ initialement réfléchi par la face $j_1$ lors de la première réflexion de la DR ; le sens indirect est considéré. . . . .	157
4.15	Ombrage en observation sur la face $j_2$ pour le calcul de la DR ; le sens indirect est considéré. . . . .	157
4.16	Intersections des surfaces illuminées et observées sur la face $j_2$ pour le calcul de la DR pour un sens indirect : pas d'ombrage en excitation sur la face $j_1$ . . . . .	157

4.17	Intersections des surfaces illuminées et observées sur la face $j_2$ pour le calcul de la DR pour un sens indirect : ombrage en excitation sur la face $j_1$ . . . . .	158
4.18	Surface de la face $j_3$ excitée par le champ initialement réfléchi par la face $j_2$ lors de la seconde réflexion de la TR ; le sens indirect est considéré. . . . .	160
4.19	Ombrage en observation sur la face $j_3$ pour le calcul de la TR ; le sens indirect est considéré. . . . .	160
4.20	Intersections des surfaces illuminées et observées sur la face $j_3$ pour le calcul de la TR pour un sens indirect. . . . .	161
4.21	Numérotation des arêtes externes du trièdre. . . . .	162
4.22	Arête de la face $j_1$ . . . . .	162
4.23	Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\phi_s = 45^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . . . . .	164
4.24	Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\theta_s = 60^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . . . . .	165
4.25	Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\theta_s = 60^\circ$ , $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ , $\phi_i = 180 + 30 = 210^\circ$ . . . . .	165
4.26	Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\phi_s = 45^\circ$ , $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ , $\phi_i = 180 - 30 = 150^\circ$ . . . . .	166
4.27	Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\phi_s = -30^\circ$ , $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ , $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ . . . . .	166
4.28	Numérotation des trièdres dans le réflecteur octaédrique d'ordre 1. . . . .	167
4.29	Comparaison de la SER d'un octaèdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\phi_s = 45^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . . . . .	169
4.30	Comparaison de la SER d'un octaèdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\theta_s = 45^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . De plus les SER pour les contributions SR+SD seules et SR+DR+SD seules, sont tracées . . . . .	170
4.31	Comparaison de la SER d'un octaèdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\theta_s = 45^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . . . . .	170
4.32	Comparaison de la SER d'un octaèdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\theta_s = 30^\circ$ , $\theta_i = 180 - 30 = 150^\circ$ , $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ . . . . .	171
4.33	Comparaison de la SER d'un octaèdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\theta_s = 50^\circ$ , $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ , $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ . . . . .	172

4.34	Illustration du quart de réflecteur octaédrique d'ordre 2. . . . .	173
4.35	Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec $L = 10\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\phi_s = 30^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées. . . . .	173
4.36	Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec $L = 10\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\theta_s = 60^\circ$ , $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ , $\phi_i = 180 + 0 = 180^\circ$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées. . . . .	174
4.37	Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec $L = 5\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique : $\phi_s = 30^\circ$ , $\theta_i = \pi - \theta_s$ , $\phi_i = \pi + \phi_s$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées. . . . .	175
4.38	Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec $L = 5\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique : $\theta_s = 60^\circ$ , $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ , $\phi_i = 180 + 0 = 180^\circ$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées. . . . .	176
4.39	SER monostatique $\sigma_{\theta\theta}$ de l'octaèdre d'ordre 1 ( $L = 0.4035$ m et $f = 10$ GHz). . . . .	177
4.40	SER monostatique $\sigma_{\theta\theta}$ de l'icosaèdre d'ordre 1 ( $L = 0.4035$ m et $f = 10$ GHz). . . . .	178
4.41	Fonction de répartition de la SER $\sigma_{\theta\theta}$ pour les réflecteurs octaédriques et icosaédriques d'ordre 1 et de la sphère de rayon 0.4035 m. Les SER étant calculées sur $4\pi$ stéradians. . . . .	179
4.42	Fonction de répartition de la différence $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$ pour les réflecteurs octaédriques et icosaédriques d'ordre 1, 2 et 4. Les SER étant calculées sur $4\pi$ stéradians. . . . .	180
4.43	$\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$ pour le réflecteur octaédrique d'ordre 4. $L = 0.3$ m et $f = 10$ GHz. Dynamique de 20 dB. . . . .	180
4.44	$\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$ pour le réflecteur octaédrique d'ordre 4. $L = 0.3$ m et $f = 10$ GHz. Dynamique de 50 dB. . . . .	181
4.45	Géométrie du problème et illustration des différentes étapes de calcul de la méthode PILE. . . . .	186
C.1	Rotation d'angle $\alpha_e$ . . . . .	199
C.2	Rotation d'angle $\beta_e$ . . . . .	200
C.3	Rotation d'angle $\gamma_e$ . . . . .	200
D.1	Configuration pour la diffraction par la surface d'un réflecteur plan. . . . .	205
D.2	Configuration géométrique d'une plaque triangulaire rectangle. . . . .	208
D.3	Décomposition d'un triangle quelconque. . . . .	210
D.4	Repères locaux des deux triangles rectangles. . . . .	210
E.1	Définition des angles $\beta_i$ et $\beta_s$ dans les plans d'incidence et de diffraction. . . . .	212

E.2 Définition des angles  $\psi_i$  et  $\psi_s$  dans le plan normal à l'arête. . . . . 212

## Liste des acronymes

**BSA** Back Scattering Alignment  
**DR** Double(s) Réflexion(s)  
**EFIE** Electric Field Integral Equation  
**FB** Forward-Backward  
**FB-SA** Forward-Backward with Spectral Acceleration  
**FSA** Forward Scattering Alignment  
**IBC** Impedance Boundary Condition  
**LHI** Linéaire Homogène Isotrope  
**LU** Low-Up  
**MCE** Méthode des Courants Equivalents  
**MdM** Méthode des Moments  
**MFIE** Magnetic Field Integral Equation  
**MLFMM** Multi-Level Fast Multipole Method  
**OG** Optique Géométrique  
**OP** Optique Physique  
**PC** Parfaitement Conducteur(-trice)  
**PILE** Propagation-Inside-Layer Expansion  
**SD** Simple(s) Diffraction(s)  
**SER** Surface Equivalente Radar  
**SR** Simple(s) Réflexion(s)  
**TC** Très Conducteur(-trice)  
**TE** polarisation Transverse Electrique (polarisation H)  
**TM** polarisation Transverse Magnétique (polarisation V)  
**TR** Triple(s) Réflexion(s)



# Introduction

Inventé en 1904 par l'allemand Christian Hülsmeier, le radar (radio detection and ranging) permet de détecter la présence d'un objet et sa distance (avion, bateau, réflecteur, pluie...). Les applications sont variées, tant dans le domaine militaire que civil. Mais depuis la seconde guerre mondiale, l'objectif n'est plus seulement de détecter une cible. La reconnaissance et l'identification de l'objet faisant obstacle à l'onde électromagnétique deviennent alors des enjeux majeurs. Cependant, ceci est difficilement réalisable lorsque la cible recherchée est noyée dans un environnement dit hostile, tout particulièrement en présence d'une surface rugueuse : par exemple détecter un objet situé au-dessus de la mer peut relever d'un challenge.

Une cible radar particulièrement intéressante est le réflecteur polyédrique. En effet, celui-ci favorise le retour de l'onde incidente et possède intrinsèquement un fort pouvoir réflecteur pour des domaines angulaires importants. Cette propriété est très utile pour contribuer à la détection. Le réflecteur octaédrique est ainsi notamment utilisé comme cible radar pour le pistage de ballons-sondes utilisés en aérologie, le suivi de position de navires par des radars côtiers ou embarqués, le balisage de récifs...

Ces réflecteurs sont également intéressants pour des applications militaires. En effet, même si de grands progrès ont été réalisés concernant la furtivité électromagnétique des engins militaires, il est important de noter qu'un objet ne peut pas être furtif sur toutes les gammes de fréquence et d'angles de monostatisme et de bistatisme ; le leurrage s'avère alors nécessaire. Classiquement la protection d'un navire face à une menace électromagnétique de type radar peut s'effectuer en déployant des leurres souvent composés de nuages de dipôles : les chaffs. Ces leurres, qui génèrent des phénomènes de diffusion volumique, sont parfois aisément décelables et donc vulnérables face aux menaces radar de nouvelle génération. Ainsi, les avancées technologiques dans la discrimination et l'identification de cible radar imposent des études systématiques de recherche de plus grande vraisemblance des systèmes de leurrage. Le réflecteur polyédrique s'avère alors très intéressant pour assurer cette fonction. En effet, une de ses propriétés est de produire des réflexions simples et multiples, qui sont des phénomènes souvent observés lors de la diffraction d'une onde électromagnétique par un navire. Alors, la réponse électromagnétique d'un réflecteur polyédrique peut être plus adaptée ou plus crédible selon les critères de traitement des signaux radar.

Cependant, les études de fiabilité et d'efficacité de ces réflecteurs nécessitent de très nombreux tests du fait du nombre important de paramètres influençant leur signature électromagnétique : angles d'émission et de réception, fréquences émises, taille des réflecteurs, distance entre les réflecteurs... De plus, dans un contexte maritime, la réponse radar du réflecteur polyédrique peut s'avérer fortement modifiée. Le besoin d'un modèle requérant un temps de calcul raisonnable est alors indispensable pour dimensionner les paramètres de la scène, optimiser la mise en œuvre et le déploiement des réflecteurs et ainsi limiter le volume des mesures sur site, qui sont très onéreuses.

Dans les applications citées ci-dessus, les réflecteurs polyédriques sont souvent de grandes dimensions devant la longueur d'onde. Une modélisation électromagnétique d'une telle scène réaliste (problème tridimensionnel) semble inenvisageable par des méthodes rigoureuses, compte tenu de l'espace mémoire et du temps de calcul nécessaires (domaine des hautes fréquences). De ce fait, la mise en œuvre de méthodes asymptotiques analytiques s'avère indispensable.

Les objectifs de cette thèse sont de répondre aux besoins et exigences actuels, tant dans le domaine civil que militaire, en proposant l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par des réflecteurs polyédriques situés au-dessus d'une surface rugueuse.

Vu le nombre très élevé d'inconnues à traiter, les méthodes rigoureuses, utilisées comme méthodes de référence, ne peuvent pas être développées sur des PC standards de bureau. Il est donc nécessaire de réaliser la validation des modèles asymptotiques sur une scène 2D (invariant selon une direction, permettant néanmoins de prédire les niveaux des co-polarisations). A titre d'exemple, la scène composée d'un obstacle cruciforme (symbolisant le réflecteur polyédrique) au-dessus d'une surface de mer monodimensionnelle sera analysée. Cependant, même dans le cas 2D, des scènes impliquant une grande surface de mer peuvent rendre les méthodes numériques "classiques", telle que la Méthode des Moments, inutilisables. Une étude sera donc menée sur l'utilisation de méthodes dites "exactes" et rapides existantes afin d'aboutir à un modèle rigoureux de la scène 2D calculable sur un PC de bureau. En possession d'un outil de calcul "exact" comme référence, un modèle asymptotique de la diffusion par la scène pourra alors être envisagé. Dans cette thèse, on se focalisera notamment sur l'obtention d'une méthode "exacte" et rapide ainsi que sur l'étude d'un modèle de la diffraction par des réflecteurs polyédriques en espace libre. Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre a pour objectif de situer le contexte en rappelant les notions et les moyens nécessaires pour modéliser la diffusion par un réflecteur polyédrique au-dessus d'une surface de mer. Pour cela, la propagation des ondes électromagnétiques ainsi que la représentation intégrale des champs sont rappelées. Le coefficient de diffusion, la Surface Equivalente Radar (SER) et la signature polarimétrique sont définis. Ces outils, caractérisant le pouvoir réflecteur d'un obstacle, nécessitent la connaissance du champ diffracté ou diffusé. Celui-ci est modélisable à l'aide de diverses méthodes de calcul dont un large éventail est présenté dans ce chapitre. Les domaines de validité et les contraintes d'utilisation de ces méthodes seront également entrevus. L'analyse de la scène est exposée dans ce premier chapitre. Les réflecteurs polyédriques sont présentés et les notions de classe et d'ordre des réflecteurs sont définies. La description des surfaces rugueuses aléatoires ainsi qu'une méthode permettant de générer un profil rugueux sont exposées pour clore ce chapitre.

Le chapitre 2 détaille la modélisation de la diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle (surface linéique : scène 2D) à l'aide de la Méthode des Moments (MdM). Cette étude introduit des méthodes rigoureuses dites "exactes" et rapides telles que la "Forward-Backward" (FB) et la "Forward-Backward with Spectral Acceleration" (FB-SA). Une discussion sur la validité des modèles obtenus et appliqués à une surface de mer finalise l'étude sur la surface rugueuse seule. La seconde partie de ce chapitre est dévolue à la modélisation de la diffraction par une croix (obstacle cruciforme) en espace libre, assimilable à un réflecteur polyédrique dans une scène bidimensionnelle. L'application de la MdM sur l'objet est validée en considérant en premier lieu un cylindre circulaire dont la solution analytique est connue. Enfin, un modèle asymptotique analytique, combinant les approximations de l'Optique Géométrique (OG) et de l'Optique Physique (OP), est proposé. Les résultats obtenus avec ce modèle sont comparés à ceux issus de la MdM.

Dans le chapitre 3, le calcul de la diffusion par une scène 2D constituée d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse est entrepris. Les phénomènes de couplage sont tout d'abord mis en exergue en étudiant les équations intégrales de la scène. En utilisant l'étude menée au chapitre 2, la MdM est appliquée et sert de méthode de référence. La méthode Propagation-Inside-Layer Expansion (PILE) développée lors des travaux de thèse de N. Déchamps [1], est ensuite rappelée puis étendue au cas de deux objets placés dans le milieu du champ incident.

A l'aide de la méthode PILE étendue, les méthodes FB et FB-SA, étudiées au chapitre 2, sont alors appliquées pour les interactions locales sur la surface rugueuse. La validité du modèle numérique "exact" et rapide proposé est discutée et des résultats pour des applications maritimes micro-ondes sont présentés. La dernière partie de ce chapitre détaille l'intégration de l'OP sur l'objet dans la méthode PILE étendue pour aboutir à un modèle hybride. La validité de celui-ci est finalement discutée.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la modélisation de la diffraction par un réflecteur polyédrique (scène 3D) en espace libre (sans la présence de surface rugueuse). Le modèle asymptotique analytique, similaire à celui proposé pour la croix dans le cas 2D, est basé sur le problème élémentaire de la diffraction par un trièdre avec prise en compte des ombrages. Dans un premier temps, les phénomènes de simple, double et triple réflexion et de simple diffraction d'arête sont modélisés. Des comparaisons avec une méthode de référence testeront ensuite la validité du modèle asymptotique obtenu. Puis, celui-ci est appliqué à différents réflecteurs polyédriques, une étude est finalement menée pour dégager des propriétés intrinsèques. On montrera notamment que la classe et l'ordre du réflecteur polyédrique ont une influence directe sur la signature de l'obstacle en terme de directivité et de dépolarisation.

Finalement, une conclusion générale résume l'ensemble des points traités au cours de cette thèse ; quelques perspectives pour la suite de ces travaux sont proposées.



# Chapitre 1

## Onde électromagnétique, méthodes de résolution et description de la scène

---

*Cette thèse se place dans le contexte de la modélisation de la diffusion d'onde électromagnétique par des obstacles au-dessus de la mer. Les techniques utilisées pour la résolution d'un tel problème sont variées et dépendent en particulier de la scène étudiée. Elles s'appuient toutes sur un formalisme commun découlant des équations de Maxwell. Ainsi nous rappellerons brièvement, dans ce premier chapitre, quelques notions d'électromagnétisme afin de pouvoir mieux justifier notre choix dans les méthodes à retenir par la suite. Notre démarche nous conduira à définir des indicateurs permettant de caractériser le pouvoir réflecteur d'obstacles et de surfaces. Enfin nous présenterons les méthodes générales utilisées pour résoudre des problèmes de diffusion d'onde. La dernière partie de ce premier chapitre sera dédiée à la description de la scène, et plus particulièrement à la caractérisation d'une surface aléatoire et des réflecteurs polyédriques.*

---

### 1.1 Ondes électromagnétiques

#### 1.1.1 Équations de Maxwell

C'est au 19<sup>ème</sup> siècle qu'une théorie unifiant électricité et magnétisme vit le jour, bien que l'hypothèse d'un lien entre ces phénomènes existât bien avant. En 1819, Hans Ørsted remarqua qu'un courant électrique qui circule dans un fil dévie l'aiguille d'une boussole située à proximité, démontrant alors la présence d'un champ magnétique. A partir de cette expérience, André-Marie Ampère élabora une théorie où l'électricité et le magnétisme étaient présentés comme deux phénomènes corrélés par le biais d'un théorème qui porte son nom. Michael Faraday, introduisit alors le concept de "champ", concluant ainsi le débat sur l'éventuelle notion d'interaction instantanée à distance. En 1864, à l'instar de Isaac Newton qui avait uni les phénomènes en mécanique classique, James Clerk Maxwell parvint à unifier mathématiquement les diverses relations entre

champs magnétique et électrique. Sous la forme d'un ensemble de vingt équations, les équations de Maxwell présentaient pour la première fois une théorie unifiée de l'électromagnétisme. A partir de cette nouvelle théorie, Maxwell pressentit que la lumière n'était qu'un type particulier d'onde électromagnétique<sup>1</sup> unifiant ainsi optique et électromagnétisme. Le système d'équations fut simplifié en 1884 par les physiciens Heaviside et Gibbs en quatre équations. Elles sont données sous forme locales, en régime variable (charge en mouvement), en présence ou non d'un milieu matériel quelconque, par [2] :

$$\text{(Equation de Maxwell-Gauss magnétique)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Faraday)} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Gauss électrique)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1c)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Ampère)} \quad \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.1d)$$

Les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  désignent ici les vecteurs champs électrique et magnétique, exprimés en  $V/m$  et en  $A/m$ . Ils forment ensemble le champ électromagnétique. Le symbole  $\nabla$  est l'opérateur "nabla" défini dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales (coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques ...) associé au repère dans lequel les équations de Maxwell sont appliquées. Précisons dès à présent que dans ce manuscrit les vecteurs seront notés en gras, les vecteurs unitaires en gras et surmontés d'un chapeau et les matrices seront notées en gras et surmontées d'une barre.  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  désignent respectivement les vecteurs induction électrique et magnétique, exprimés en  $C/m^2$  et en *Tesla*. Les équations (1.1a) et (1.1b) expriment la loi de l'induction, elles donnent les relations de structure des champs indépendamment du milieu matériel. Les équations (1.1c) et (1.1d), quant à elles, relient le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) aux sources ( $\rho, \mathbf{j}$ ), qui représentent respectivement les densités de charge (en  $C/m^3$ ) et de courant (en  $A/m^2$ ), en tenant compte du milieu matériel. En effet,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  sont liés aux champs électrique et magnétique par des relations constitutives tenant compte du milieu (vide, matériau diélectrique...). Si le milieu est considéré linéaire homogène et isotrope (LHI)<sup>2</sup>, ces relations s'expriment [2]

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (1.2b)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.2c)$$

où  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide ( $\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12}$  F/m et  $\mu_0 \simeq 1.256 \times 10^{-6}$  H/m et  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1/c$  où  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s est la vitesse de la lumière dans le vide),  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  et  $\sigma$  sont, respectivement, la permittivité relative, la perméabilité relative et la conductivité du milieu. Précisons dès à présent que dans ce manuscrit les milieux considérés seront toujours des milieux LHI et non magnétiques ( $\mu_r = 1$ ).

A partir de ces équations, nous pouvons d'ores et déjà évoquer le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un ou plusieurs objets. Ce problème fait intervenir deux phénomènes : la propagation d'une onde dans un milieu LHI (dans le milieu où est placé l'objet et dans le milieu constituant l'objet) ainsi que le comportement de l'onde à l'interface entre le milieu de l'objet et le milieu dans lequel il est placé.

<sup>1</sup>Ceci fut ensuite confirmé expérimentalement en 1888 par l'allemand Heinrich Rudolf Hertz.

<sup>2</sup>La linéarité caractérise le fait que les grandeurs  $\epsilon$  et  $\mu$  sont indépendantes de la puissance de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , l'homogénéité que  $\epsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas du point considéré, et l'isotropie que  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des scalaires.

### 1.1.2 Équations de propagation, onde plane et équation de Helmholtz

La propagation des ondes électromagnétiques est décrite à partir des équations de Maxwell. En considérant un milieu LHI en présence de charges et de courant ( $\rho \neq 0$  et  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ ), à partir des quatre équations de Maxwell, des relations constitutives (1.2a) et (1.2b) et de quelques relations vectorielles, on démontre que les champs électrique et magnétique vérifient les équations de propagation suivantes [3, 4] :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (1.3a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \wedge \mathbf{j}, \quad (1.3b)$$

où (1.3a) représente l'équation d'onde électrique et (1.3b) représente l'équation d'onde magnétique.

Dans le cas où il y a absence de charges dans le milieu de propagation ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0} = \sigma \mathbf{E}$ ) et en utilisant l'équation (1.2c), les équations de propagation deviennent

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (1.4a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (1.4b)$$

Physiquement, ce cas correspond à la propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau bon conducteur.

Enfin, dans le cas d'un milieu diélectrique parfait ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) les équations se réduisent à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \square \mathbf{E} = 0, \quad (1.5a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \square \mathbf{H} = 0, \quad (1.5b)$$

où le symbole  $\square$  désigne l'opérateur d'Alembertien. Puisque les champs électrique et magnétique sont liés par les équations de Maxwell, l'onde peut être représentée par un seul de ces champs, en général le champ électrique. Une solution particulière de l'équation de propagation (1.5a) est l'onde plane progressive monochromatique<sup>3</sup> qui a pour expression réelle :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \Re\left(\mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Phi)}\right) = \Re\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{\pm i\omega t}\right), \quad (1.6a)$$

$$\text{avec } \mathbf{k} = \sqrt{\epsilon\mu\omega} \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.6b)$$

où  $\mathbf{y} = \Re(\mathbf{x})$  signifie que les composantes du vecteur  $\mathbf{y}$  sont les parties réelles des composantes du vecteur  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{\mp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp i\Phi}$ ,  $\Phi$  un terme de phase constant,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde dans le milieu,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le milieu,  $\omega$  la pulsation,  $\hat{\mathbf{u}}$  un vecteur unitaire orienté dans le sens de la propagation de l'onde plane et  $\mathbf{E}_0$  un vecteur complexe qui donne la polarisation de l'onde. Par la suite nous utiliserons l'onde plane progressive monochromatique d'expression complexe  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , elle aussi solution de l'équation de propagation, plus aisée à manipuler<sup>4</sup>. Le choix du signe dans  $e^{\pm i\omega t}$  est arbitraire, conduisant à deux conventions. Dans ce manuscrit la

<sup>3</sup>Ici elle est donnée sous forme vectorielle, l'onde est donc supposée polarisée et correspond à un champ vectoriel.

<sup>4</sup>L'onde  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , grandeur physique, est alors obtenue en prenant la partie réelle.

convention  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  est retenue<sup>5</sup>. Par la suite le facteur  $e^{-i\omega t}$  sera sous-entendu et supprimé des équations. En appliquant l'expression de l'onde plane progressive monochromatique à l'équation de propagation, la dérivée par rapport au temps se ramène à la multiplication par le terme  $-i\omega$ . L'équation de propagation devient alors l'équation dite de Helmholtz. Elle s'exprime en présence d'une source ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ ) :

$$-(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{j}, \quad (1.7)$$

et en l'absence de source ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) :

$$-(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Précisons que si nous notons  $\psi$  une des trois composantes du champ  $\mathbf{E}$ , alors elle vérifie l'équation de Helmholtz scalaire :

$$(\Delta + k^2)\psi = 0, \quad (1.9)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur "laplacien" défini dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales (coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques ...) associé au repère dans lequel le calcul est effectué.

De plus il est possible de montrer [4] que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont orthogonaux à la direction de propagation portée par le vecteur  $\mathbf{k}$  et forment ainsi le trièdre direct  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k})$ . Il est ensuite possible d'écrire, pour la propagation dans un milieu LHI assimilé au vide, que

$$\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{k}_0\| = \omega \epsilon_0 \|\mathbf{E}\|, \quad (1.10)$$

soit finalement

$$\eta_0 = \frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \frac{E}{H} = \frac{\|\mathbf{k}_0\|}{\omega \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad (1.11)$$

où  $\eta_0$  est l'impédance d'onde dans le vide qui est réelle et positive dans le vide ( $\approx 120\pi\Omega$ ) ; les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont donc en phase.

Les équations établies dans cette partie, permettent de décrire la propagation de l'onde dans un milieu LHI infini. Cependant, un problème de diffraction fait intervenir au moins deux milieux différents. Il est alors nécessaire de décrire le comportement de l'onde à l'interface entre deux milieux.

### 1.1.3 Conditions aux limites

Tout milieu est par nature fini, borné par au moins un milieu différent. Il est donc important de caractériser le comportement des ondes à la frontière des deux milieux. Pour cela, de nouvelles équations valides au niveau de l'interface avec un autre milieu doivent être établies. Ces équations, obtenues à partir des équations de Maxwell<sup>6</sup>, sont les conditions aux limites. Considérons la scène présentée sur la figure 1.1. Une surface  $S$  sépare un milieu (0) d'un milieu (1) et  $\hat{\mathbf{n}}$ , la normale à  $S$ , est orientée de (1) vers (0).

<sup>5</sup>La différence entre les deux conventions implique d'importants changements. La dérivée par rapport au temps notamment donnera un signe opposé selon la condition choisie. Notons cependant que pour passer d'une convention à l'autre il suffit de prendre le conjugué de toutes les expressions.

<sup>6</sup>Une démonstration rigoureuse existe au sens mathématique en utilisant la théorie des distributions de L. Schwartz, et en considérant que les équations de Maxwell sont vraies au sens des distributions.

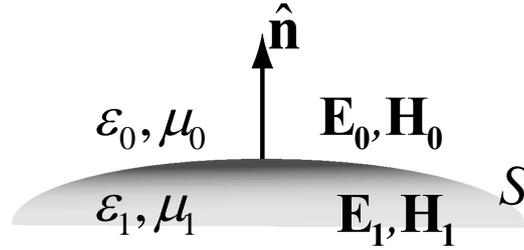


FIG. 1.1 – Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface délimitant deux milieux LHI semi-infinis.

Les conditions aux limites (appelées aussi relations de continuité) s'expriment :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (1.12a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}_1) = \rho_s, \quad (1.12b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (1.12c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (1.12d)$$

où  $\mathbf{J}_s$  est la densité surfacique de courant électrique et  $\rho_s$  la densité surfacique de charge électrique. Ces équations imposent la *continuité* de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  et de la composante normale de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Elles imposent également la *discontinuité* de la composante normale de l'induction électrique  $\mathbf{D}$  (mesurée par  $\rho_s$ ) et de la composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  (mesurée par  $\mathbf{J}_s$ ). Si les milieux 0 et 1 sont des diélectriques parfaits alors  $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$  et  $\rho_s = 0$ .

Si le milieu inférieur est parfaitement conducteur, les conditions aux limites deviennent :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (1.13a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 = \rho/\epsilon_1, \quad (1.13b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad (1.13c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_s. \quad (1.13d)$$

Précisons que le comportement du champ à l'infini peut être vu comme une condition aux limites [5] et cette condition doit être satisfaite pour que le problème soit bien posé. La condition de rayonnement à l'infini est que l'onde doit s'éloigner des sources et s'annuler à l'infini.

## 1.2 Représentation intégrale des champs

A l'aide des conditions aux limites et de l'équation de propagation, le problème de la diffraction peut être résolu. En effet, le phénomène de propagation d'une onde ainsi que son comportement à la frontière de deux milieux ont été décrits. Nous verrons plus loin les différentes méthodes existantes pour résoudre ce problème, cependant il convient de décrire dans un premier temps la représentation intégrale des champs, nécessaire pour les méthodes choisies pour ce travail.

### 1.2.1 Cas vectoriel - scène 3D

Pour obtenir la représentation intégrale, présentons tout d'abord deux outils : la fonction de Green ainsi que le théorème de Green.

### 1.2.1.1 Fonction et théorème de Green

On appelle *fonction de Green* la solution élémentaire d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Connue pour un grand nombre d'opérateurs intégrés-différentiels linéaires [6, 7], elle joue un grand rôle en mathématiques et en physique. Pour notre application, l'équation de propagation (1.3a) applique un opérateur intégrés-différentiel (l'opérateur d'alembertien  $\square\bullet$ ) à l'inconnue (le champ rayonné  $\mathbf{E}$ ) comme conséquence d'une donnée (le champ incident résultant d'une distribution de charge et/ou de courant). Comme nous l'avons vu, chaque composante du champ  $\mathbf{E}$  vérifie l'équation de propagation scalaire où l'opérateur intégrés-différentiel est  $(\Delta + k^2)\bullet$ . La fonction de Green associée à cet opérateur vérifie par conséquent

$$(\Delta + k^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.14)$$

Pouvant être vu comme un *propagateur* [8], la fonction de Green dépend toujours de deux vecteurs positions  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  : respectivement point source et point d'observation. Elle correspond physiquement au rayonnement d'une source ponctuelle. Finalement, la solution de l'équation (1.14) est [3, 7, 9] :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}. \quad (1.15)$$

Pour obtenir les représentations intégrales, il est nécessaire de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface. Ceci est réalisé avec l'analogie vectoriel du second théorème de Green [10, 11], basé sur le théorème d'Ostrogradski. Il s'écrit dans le cas vectoriel

$$\iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dv = \iint_S [\mathbf{P} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{P})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (1.16)$$

où  $S$  est une surface délimitant un volume  $V$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale à la surface  $S$  dirigée vers l'extérieur du volume  $V$ .  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont deux fonctions vectorielles de point (aussi appelé "champ de vecteurs" ou encore "champ vectoriel") quelconques, continues et de dérivées premières et secondes continues (fonctions de classe  $C^2$ ) en tout point appartenant au volume  $V$  ou à la surface  $S$ .

### 1.2.1.2 Principe de Huygens et théorème d'extinction

Considérons la scène présentée sur la figure 1.2. Une source  $\mathbf{J}$  est placée dans un milieu  $\Omega_0$  de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$  contenant un objet de milieu  $\Omega_1$  de permittivité  $\epsilon_1$  et de perméabilité  $\mu_1$ .  $S$  est la surface délimitant le volume  $V$  et sa normale,  $\hat{\mathbf{n}}$ , est dirigée vers l'extérieur de  $V$  (donc dirigée vers l'intérieur de  $V_0$ ).  $S_\infty$  est la surface délimitant le volume  $V_0$  à l'infini et sa normale pointe vers l'extérieur de  $V_0$ .

Le calcul détaillé dans l'annexe A montre qu'à partir de la relation (1.16), appliquée au volume  $V_0$ , et des équations de Maxwell, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{r}' \notin V_0 \end{cases} = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \\ & + \iint_S [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')i\omega\mu(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}))\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds. \end{aligned} \quad (1.17)$$

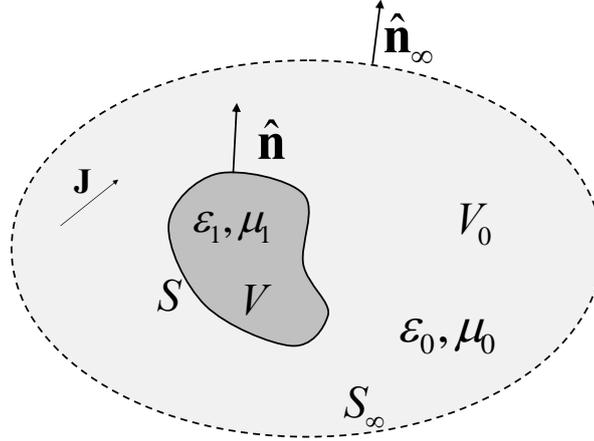


FIG. 1.2 – Le problème de la diffraction : un objet de contour  $S$  occupant un volume  $V$  placé dans un volume  $V_0$  en présence d'une source  $J$ .

Pour  $\mathbf{r}' \notin V_0$ , l'équation (1.17) devient

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}') = - \iint_S [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds. \quad (1.18)$$

Cette équation est connue sous le nom de théorème vectoriel d'extinction de Ewald-Oseen [2] et impose l'annulation du champ total à l'intérieur de l'objet de volume  $V$  ; le champ incident étant compensé par la contribution des champs surfaciques. En définissant le champ total  $\mathbf{E}$  comme la somme de  $\mathbf{E}_i$ , le champ incident et de  $\mathbf{E}_s$  le champ diffracté<sup>7</sup>, l'équation (1.17) devient dans le volume  $V_0$  :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = \iint_S [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds. \quad (1.19)$$

Cette équation est connue sous le nom de principe de Huygens et permet de propager les champs surfaciques à l'extérieur du volume  $V$ , formant le champ total après sommation avec le champ incident.

Si l'objet de volume  $V$  est diélectrique, le champ n'est pas forcément nul pour  $\mathbf{r}' \notin V_0$ . En appliquant le calcul détaillé dans l'annexe A à partir de la relation (1.16), appliquée cette fois-ci au volume  $V$  on obtient une nouvelle équation :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{r}' \notin V \end{cases} = - \iint_S [g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu_1(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds, \quad (1.20)$$

où  $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la fonction de Green dans le milieu  $\Omega_1$ . Pour  $\mathbf{r}' \in V$ , l'équation (1.20) fait apparaître le principe de Huygens appliqué dans le volume  $V$  ; pour  $\mathbf{r}' \notin V$ , on reconnaît l'expression du théorème d'extinction. Ainsi, l'équation (1.20) impose l'annulation du champ

<sup>7</sup>Pour le champ diffracté, nous avons repris ici l'indice  $s$  signifiant *scattered*.

rayonné vers l'extérieur de l'objet et permet de calculer le champ total dans l'objet. Alors, le problème a été décomposé en deux parties, l'une recherchant les sources équivalentes créant le champ total dans le volume  $V_0$  (équation (1.17)) et l'autre recherchant les sources équivalentes créant le champ total dans le volume  $V$  (équation (1.20)).

A noter qu'un autre formalisme, d'écriture plus récente, se basant sur le formalisme dyadique, est parfois utilisé [12]. Les deux formalismes sont mathématiquement équivalents. Le formalisme dyadique permet de condenser les écritures vectorielles.

### 1.2.1.3 Approximation champ lointain

Comme présenté sur la figure 1.3, lorsque le récepteur est situé à grande distance de l'objet diffractant (dont la plus grande dimension caractéristique est très inférieure à la distance le séparant du système de réception), l'hypothèse de champ lointain permet de simplifier les équations intégrales.

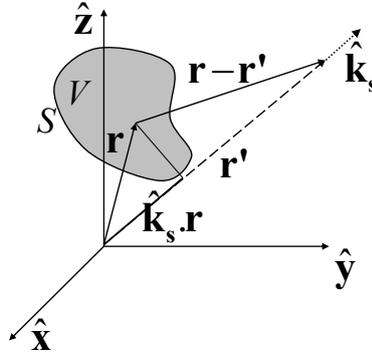


FIG. 1.3 – Illustration de l'approximation en champ lointain pour un problème 3D.

Cette hypothèse, parfois nommée *condition de Fraunhofer*, consiste à supposer les vecteurs  $\mathbf{r}'$  et  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  parallèles lorsque  $\|\mathbf{r}'\| = r' \gg \|\mathbf{r}\| = r$ ; le champ diffracté se comportant localement au niveau du récepteur comme une onde plane. Ainsi, la fonction de Green peut être simplifiée

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \approx \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} e^{-ik\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.21)$$

### 1.2.2 Cas scalaire - scène 2D

Pour l'étude de scènes dans lesquelles les surfaces sont invariantes selon une direction (nous choisissons arbitrairement la direction  $\hat{\mathbf{y}}$ ) les champs électromagnétiques peuvent être traités comme des grandeurs scalaires. En effet, le champ diffusé se propage dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}_s$  qui reste contenue dans le plan d'incidence parallèle au plan  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$ . Ainsi, nous pouvons prendre pour inconnue la composante  $\psi$  selon  $\hat{\mathbf{y}}$  du champ électromagnétique.  $\psi$  est donc la composante transverse au plan d'incidence. De ce fait, en polarisation dite Transverse Electrique (TE : le champ électrique est transverse au plan d'incidence) l'inconnue est la composante transverse du champ électrique alors qu'en polarisation Transverse Magnétique (TM : le champ magnétique est transverse au plan d'incidence) l'inconnue est la composante transverse du champ magnétique. On parle alors de problème scalaire ou encore de problème plan (ou à deux dimensions) beaucoup plus simple à traiter que le problème 3D. Ainsi avec  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ , dans le cas TE nous

avons

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \psi(x, z)\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi(x, z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

et dans le cas TM

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \psi(x, z)\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi(x, z) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

L'équation de Helmholtz devient alors l'équation de Helmholtz scalaire

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = i\omega\mu J, \quad (1.24)$$

et la fonction de Green pour le problème scalaire, avec la convention  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , est donnée par

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|), \quad (1.25)$$

où  $H_0^{(1)}(x)$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0.

A partir du second théorème de Green appliqué au cas scalaire et avec un calcul plus simple que celui mené pour le cas vectoriel (annexe A), la représentation intégrale des champs pour une scène 2D est obtenue

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \in V \end{cases} = \psi_i(\mathbf{r}') + \int_S \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right] ds, \quad (1.26)$$

où en se plaçant dans le volume  $V$  on obtient le théorème d'extinction

$$\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_S \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right] ds, \quad (1.27)$$

et dans le volume  $V_0$  on obtient le principe de Huygens

$$\psi_s(\mathbf{r}') = + \int_S \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right] ds. \quad (1.28)$$

De même que pour le cas 3D, pour un cas plan comme présenté sur la figure 1.4, l'approximation champ lointain peut être utilisée lorsque  $r' \gg r$  et en supposant  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| \approx r' - \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}$ .

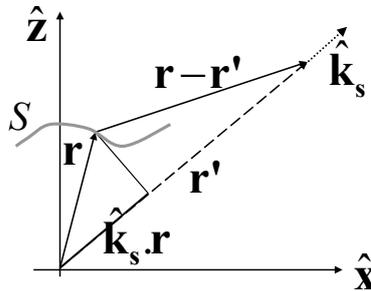


FIG. 1.4 – Illustration de l'approximation en champ lointain pour un problème 2D.

D'après (1.25), la fonction de Green devient en champ lointain

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^1(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \approx \frac{i e^{ikr' - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi kr'}} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.29)$$

### 1.3 Coefficient de diffusion, SER et signature polarimétrique d'une cible

Dans le paragraphe précédent nous avons vu comment le champ diffracté est relié à l'obstacle diffractant (forme de la surface, matériau, dimensions) par le biais de relations d'intégrales de surface. Mais le champ diffracté seul, ne suffit pas à caractériser le pouvoir réflecteur de l'obstacle diffractant puisque la dépendance par rapport au champ incident est encore présente. En effet, les relations intégrales permettent de relier le champ diffracté au champ total sur l'objet ; le champ total étant la somme du champ diffracté et du champ incident.

#### 1.3.1 Puissances incidente, diffusée et transmise

Pour s'affranchir de cette dépendance il convient alors de connaître la puissance incidente sur la surface, ainsi que la puissance qui est diffusée par cette même surface et captée par le récepteur. Alors le rapport de ces deux densités de puissance ne dépend plus que de l'obstacle diffractant<sup>8</sup>.

La puissance reçue par une surface  $S$  est donnée par le flux du vecteur de Poynting moyen<sup>9</sup> à travers cette surface :

$$P_i = \iint_S \langle \mathbf{\Pi}_i \rangle \cdot \mathbf{ds} = \iint_S \langle \mathbf{\Pi}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds, \quad (1.30)$$

où  $\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle$  est la moyenne temporelle du vecteur de Poynting du champ incident  $\mathbf{\Pi}_i$  donné par :

$$\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i^*. \quad (1.31)$$

$\mathbf{H}_i^*$  étant le conjugué de  $\mathbf{H}_i$ . Le vecteur de Poynting d'une onde plane progressive est donc colinéaire à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{k}}_i$  et sa norme correspond à la densité de puissance véhiculée par l'onde. En régime harmonique, on peut montrer que la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est :

$$\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i^*). \quad (1.32)$$

Si l'obstacle est une surface rugueuse aléatoire, la puissance incidente sur la surface est prise comme la puissance reçue par le plan moyen correspondant à une surface plane [13]. La puissance diffusée  $P_s$  sur une surface (de réception) est obtenue par l'intégrale des puissances élémentaires  $dP_s$  sur cette surface. Or l'élément de puissance  $dP_s$  n'est autre que le flux du vecteur de Poynting moyen du champ diffusé à travers un élément de surface orienté. L'onde diffusée étant sphérique, dans le repère sphérique  $(r', \theta_s, \phi_s)$ , l'élément de surface (comme représenté sur la figure 1.5) est exprimé dans l'hypothèse où l'onde diffusée est en champ lointain de la surface par

$$\mathbf{ds} = r'^2 \sin(\theta_s) \, d\theta_s \, d\phi_s \, \hat{\mathbf{n}}', \quad (1.33)$$

où les angles  $\theta_s$  et  $\phi_s$  balayent tous les angles possibles pour la diffusion de l'onde.

A noter que cet élément de surface orienté est porté par  $\hat{\mathbf{n}}'$  colinéaire à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{k}}_s$ . Par conséquent, pour le cas d'une surface rugueuse infinie les angles ne balayent que le demi-espace supérieur. De manière générale, en prenant l'orientation des directions de

---

<sup>8</sup>Généralement on emploie le terme "diffraction" lorsqu'il s'agit de réflexion sur un obstacle de dimension finie et de "diffusion" pour la réflexion sur une surface rugueuse aléatoire. Dans cette thèse ces deux types d'obstacles sont employés, nous utiliserons donc parfois ces deux mots indépendamment de la différence sur leur sens.

<sup>9</sup>Les détecteurs mesurant en général des grandeurs moyennes, ce qui nous intéresse est plutôt la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

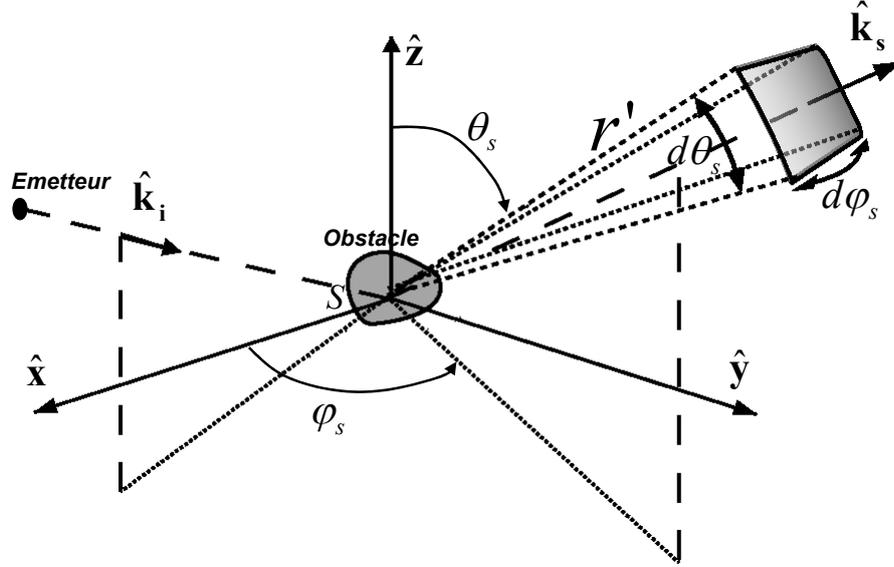


FIG. 1.5 – Illustration de l'angle solide pour le calcul de la puissance diffusée.

propagation comme définie sur la figure 1.5,  $\theta_s$  va de 0 à  $\pi$  et  $\phi_s$  de 0 à  $2\pi$ . En considérant que l'onde diffusée est en champ lointain de l'obstacle, la puissance diffusée s'écrit alors

$$P_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}') r'^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| r'^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s. \quad (1.34)$$

Si l'obstacle n'est pas parfaitement conducteur, une puissance sera transmise dans l'objet. Cette puissance transmise peut être exprimée de la même manière que la puissance diffusée. Connaissant ces puissances, la conservation d'énergie peut être étudiée. Il suffit pour cela de vérifier que la somme des puissances diffusée et transmise est égale à la puissance reçue par l'obstacle (la puissance incidente sur la surface réfléchissante) :

$$P_s + P_t = P_i. \quad (1.35)$$

Aucune énergie ne doit être perdue ou créée, et l'étude de cet axiome est un indicateur pour étudier la validité d'un modèle.

### 1.3.2 Coefficient de diffusion

Le *coefficient de diffusion* (que nous noterons  $\sigma_{cd}$ ) est défini, en champ lointain de l'obstacle, comme étant le rapport de la puissance diffusée par la surface (dans un angle solide défini par  $\sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s$  autour de la direction d'observation  $\hat{\mathbf{k}}_s$  donnée par  $(\theta_s, \phi_s)$ ) sur la puissance incidente reçue par la surface. Ce rapport sans dimension s'exprime donc par la relation

$$\frac{P_s}{P_i} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s, \quad (1.36)$$

et par identification avec (1.34) on obtient

$$\sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = \frac{\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| r'^2}{P_i}. \quad (1.37)$$

Si l'onde incidente et l'onde diffractée sont des ondes planes se propageant dans un milieu assimilé au vide, les densités de puissance moyennes (réelles) deviennent

$$\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\| = \frac{|E_i|^2}{2\eta_0}, \quad (1.38a)$$

$$\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| = \frac{|E_s|^2}{2\eta_0}, \quad (1.38b)$$

où  $|E_i|$  est l'amplitude du champ électrique incident au niveau de la surface et  $|E_s|$  est l'amplitude du champ électrique diffusé au niveau du récepteur. Ainsi, pour un obstacle situé en champ lointain de l'émetteur et du récepteur, le coefficient de diffusion s'exprime :

$$\sigma_{cd}(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r'^2 |E_s|^2}{2\eta_0 P_i}, \quad (1.39)$$

où la puissance incidente  $P_i$  est évaluée à l'aide de (1.30) et (1.38a).

Si l'obstacle est invariant selon une dimension (scène à deux dimensions) alors on montre avec la même démarche que

$$\sigma_{cd}(\theta_i, \theta_s) = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r' |\psi_s|^2}{2\eta_0 P_i}, \quad (1.40)$$

sans dimension également puisque  $\psi_s$  est homogène à des  $V/\sqrt{(m)}$ .

### 1.3.3 Surface Equivalente Radar (SER)

Une autre grandeur couramment employée pour caractériser la réflectivité électromagnétique d'un obstacle est la *Surface Equivalente Radar* (SER, parfois appelée aussi Section Efficace Radar) que nous noterons  $\sigma$ . La SER, tout comme le coefficient de diffusion, nécessite la connaissance de la densité de puissance au niveau du récepteur. Cependant, la SER est le rapport de cette densité de puissance diffusée sur la *densité de puissance incidente* au niveau de l'obstacle, contrairement au coefficient de diffusion qui nécessite le calcul de la *puissance incidente* sur l'obstacle. Le calcul de la SER est mené en s'affranchissant des pertes en espace libre (lors de la propagation de la cible vers le récepteur). De manière générale la SER est donc définie par :

$$\sigma(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = 4\pi r'^2 \frac{\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\|}{\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|}. \quad (1.41)$$

D'après cette définition nous pouvons noter que la SER est homogène à des  $m^2$  (contrairement au coefficient de diffusion qui est sans dimension).

Une autre manière d'obtenir une définition de la SER est d'appliquer la conservation d'énergie lors de la diffraction par une surface plane  $\sigma$  perpendiculaire à la direction de l'onde incidente. Cette surface est considérée parfaitement conductrice et la conservation d'énergie impose alors l'égalité entre puissances incidente et diffusée :

$$\iint_{\sigma} |\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}| d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}'| r'^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s. \quad (1.42)$$

Les normales  $\hat{\mathbf{n}}$  et  $\hat{\mathbf{n}}'$  sont respectivement colinéaires aux vecteurs  $\hat{\mathbf{k}}_i$  et  $\hat{\mathbf{k}}_s$ , on obtient

$$\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\| \iint_{\sigma} d\sigma = \|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r'^2 \sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s, \quad (1.43)$$

cette relation signifie que la densité de puissance incidente est supposée constante sur toute la surface “équivalente”  $\sigma$ . En supposant que cette surface diffuse l’onde incidence de manière isotrope : la densité de puissance diffusée est identique sur tout l’espace de mesure. La relation suivante est ainsi obtenue :

$$\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\| \sigma = \|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| 4\pi r'^2. \quad (1.44)$$

Et on note que l’équation (1.44) est équivalente à l’équation (1.41). En conclusion, la SER peut également être considérée comme la surface “équivalente” (parfaitement conductrice) interceptant la même densité de puissance incidente que la cible et qui en la diffusant de façon isotrope produirait un écho égal à celui diffracté par la cible dans la direction considérée [14].

En considérant les relations (1.38a) et (1.38b), nous pouvons exprimer la SER d’un obstacle situé en champ lointain de l’émetteur et du récepteur :

$$\sigma(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = \lim_{r' \rightarrow \infty} 4\pi r'^2 \frac{|E_s|^2}{|E_i|^2}. \quad (1.45)$$

Pour le cas des surfaces rugueuses, le coefficient de diffusion est plus généralement employé, puisque la puissance incidente moyenne sur la surface est facilement calculable. Mais lorsqu’il s’agit de caractériser la réflectivité d’un obstacle dont la forme est complexe, il n’est pas aisé d’évaluer la puissance incidente. En effet, le calcul de cette puissance nécessite le calcul de l’intégrale de la densité de puissance sur toute la surface du diffuseur (voir l’équation (1.30)). Si l’obstacle possède des formes complexes, ce calcul devient fastidieux. Le coefficient de diffusion est donc difficile à évaluer pour ces types d’obstacles. La SER, quant à elle, permet de s’affranchir du calcul de la puissance incidente puisqu’elle ne nécessite que l’évaluation de la densité de puissance incidente au niveau de l’obstacle (et pas de son intégrale sur la surface). Ainsi, pour des scènes faisant intervenir une surface rugueuse, nous utiliserons plutôt le coefficient de diffusion. Et si la scène étudiée fait intervenir des obstacles de dimensions finies et de formes plus complexes, la SER sera utilisée comme grandeur caractérisant la réflectivité de la scène.

### 1.3.4 Signature polarimétrique

Nous avons vu précédemment qu’une propriété de l’onde électromagnétique est son état de polarisation. Une cible illuminée par une onde électromagnétique incidente, produit un champ diffracté, dont la puissance, son état de polarisation et parfois même sa fréquence sont différents de ceux de l’onde incidente. En effet les conditions aux limites imposent une possible rotation du champ électromagnétique et de ce fait une possible dépolarisation de l’onde incidente. Ce comportement et ce changement d’état de polarisation dépendent de la géométrie et des propriétés physiques de la cible, mais également de l’onde incidente (position de la source, polarisation, fréquence) et de la position du récepteur [15].

Pourtant, les paramètres caractérisant la réflectivité d’une scène ont été définis indépendamment de l’orientation des champs électriques incident et diffracté, c’est à dire sans tenir compte de leur état de polarisation. Afin de parfaitement décrire la réponse d’un obstacle excité par une onde, il convient de caractériser également le changement d’état de polarisation de l’onde après réflexion sur l’objet.

### 1.3.4.1 Vecteur de Jones

Nous avons vu précédemment l'expression de l'onde plane progressive monochromatique avec l'équation (1.6a). Ainsi, le champ électrique peut être exprimé dans le repère cartésien par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} E_0^x \\ E_0^y \\ E_0^z \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} |E_0^x| e^{i\delta_x} \\ |E_0^y| e^{i\delta_y} \\ |E_0^z| e^{i\delta_z} \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.46)$$

Nous avons également vu que le champ électrique, dans le cas de l'onde plane, est orthogonal à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{k}}$ . Ainsi, si  $\hat{\mathbf{k}}$  est colinéaire à  $\hat{\mathbf{z}}$ , alors la composante suivant  $\hat{\mathbf{z}}$  du champ électrique est nulle ( $E_0^z = 0$ ). Le vecteur  $\mathbf{E}_0$ , qui est complexe, est appelé *vecteur de Jones* [15] et peut également être exprimé dans une base sphérique ( $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ). Le champ électrique incident est exprimé dans la base ( $\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i$ ) et le champ électrique diffracté est exprimé dans la base ( $\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\boldsymbol{\theta}}_s, \hat{\boldsymbol{\phi}}_s$ ). Puisque les champs électriques sont orthogonaux aux directions de propagation, nous obtenons

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0_i} e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0_i}^\theta \\ E_{0_i}^\phi \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = \mathbf{E}_{0_s} e^{i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0_s}^\theta \\ E_{0_s}^\phi \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}'}. \quad (1.47)$$

Les vecteurs des bases sphériques  $\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\boldsymbol{\theta}}_s$  et  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_s$ , représentés sur la figure 1.6, sont définis en convention FSA (Forward Scattering Alignment) par

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_i \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_i, \phi_i)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_i, \phi_i)^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

et

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_s \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_s \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_s \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_s, \phi_s)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_s, \phi_s)^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

où l'indice exposant  $T$  symbolise la transposée et  $\bar{\mathbf{R}}_s$  est la matrice de rotation sphérique définie par

$$\bar{\mathbf{R}}_s(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

### 1.3.4.2 Matrice de diffraction

G. Sinclair a proposé dans les années 50 une modélisation du changement d'état de polarisation d'une onde électromagnétique après réflexion sur une cible en démontrant que l'objet peut être assimilé à un "modificateur" de polarisation [16]. La modélisation de cette modification de polarisation est donnée par une matrice  $2 \times 2$  complexe notée  $\bar{\mathbf{S}}$  appelée *matrice de Sinclair* (terme plutôt employée pour des scènes en convention BSA : Back Scattering Alignment) ou encore *matrice de Jones* (plutôt employée pour des scènes en convention FSA : Forward Scattering Alignment) et plus généralement nommée *matrice de diffraction* (ou matrice de diffusion). Cette matrice relie le vecteur de Jones de l'onde diffusée au vecteur de Jones de l'onde incidente [17]. La matrice de diffraction est donc définie dans une base de polarisation

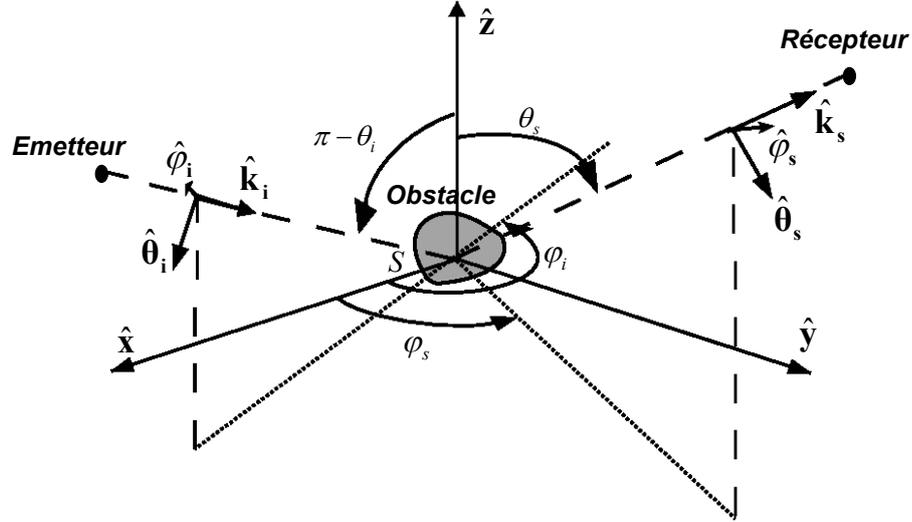


FIG. 1.6 – Illustration des vecteurs et des angles en convention FSA (Forward Scattering Alignment). Les angles  $\pi - \theta_i$ ,  $\theta_s$ ,  $\phi_i$  et  $\phi_s$  sont des angles orientés et sont illustrés ici dans leur sens positif.

suivant les bases dans lesquelles les vecteurs de Jones sont exprimés.

Si les vecteurs de Jones des ondes incidente  $E_i$  et diffractée  $E_s$  sont respectivement exprimés dans les bases sphériques comme vu précédemment, alors ces vecteurs sont liés par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} E_s^\theta \\ E_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta\phi} \\ S_{\phi\theta} & S_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}}^{FSA} \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Dans cette relation, la matrice de diffraction est exprimée en convention FSA car les vecteurs de Jones sont exprimés dans cette convention. Puisque la différence entre les conventions FSA et BSA (Back Scattering Alignment : le vecteur  $\hat{k}_s$  est tourné vers l'obstacle tout comme le vecteur  $\hat{k}_i$ ) ne relève que de l'interprétation géométrique, une relation simple permet d'écrire la matrice de diffraction exprimée en convention BSA en fonction de la matrice de diffraction définie en convention FSA. En effet, on a :  $\bar{\mathbf{S}}^{BSA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}^{FSA}$ . Précisons d'autres notations employées :

si le champ électrique est polarisé linéairement selon  $\hat{\phi}$ , on dit parfois que la polarisation est TE (Transverse Electric) ou H (Horizontale). Si le champ électrique est polarisé linéairement selon  $\hat{\theta}$ , on dit parfois que la polarisation est TM (Transverse Magnétique) ou V (Verticale). La matrice de diffraction permet de relier le champ diffracté exprimé au point d'observation localisé en  $\mathbf{r}'$  au champ incident exprimé au niveau de l'objet. Cette matrice contient alors toutes les propriétés de diffusion de la scène observée ; elle permet ainsi de caractériser la réflectivité et le comportement dépolarisant de la scène étudiée à la manière d'une fonction de transfert :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = \bar{\mathbf{S}} \mathbf{E}_i(\mathbf{0}). \quad (1.52)$$

Dans le paragraphe précédent nous avons défini la SER sans tenir compte de l'état de polarisation des ondes incidente et diffractée puisque nous ne considérons que le calcul direct de la densité de puissance. En tenant compte de la projection de l'état de polarisation de l'onde dans la base sphérique associée, la matrice de SER se déduit de la matrice de diffraction par la relation

suivante

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \lim_{r' \rightarrow \infty} 4\pi r'^2 \begin{bmatrix} |S_{\theta\theta}|^2 & |S_{\theta\phi}|^2 \\ |S_{\phi\theta}|^2 & |S_{\phi\phi}|^2 \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

La matrice de diffraction est souvent évoquée sous le nom de *signature polarimétrique*, nom que porte parfois également la matrice de SER. Ce nom rappelle que la connaissance des quatre termes de la matrice de diffraction suffit à définir la réponse (en terme de réflectivité et de dépolarisation) d'un objet soumis à une onde d'état de polarisation complètement arbitraire.

A présent, il convient d'évoquer les méthodes modélisant le coefficient de diffusion, la SER ou même la matrice de diffraction d'un obstacle ou d'une scène excitée par une onde incidente.

## 1.4 Méthodes de résolution des équations

Les précédents paragraphes ont défini les bases permettant de poser convenablement le problème de la diffraction. Mais une difficulté demeure : le champ diffracté ou total se trouve être relié à lui-même au travers des équations intégrales. Pour résoudre un tel problème, deux familles de modèles peuvent être utilisées : les modèles asymptotiques (approchés) ou les modèles rigoureux (exacts). Dans les modèles asymptotiques, nous pouvons séparer les méthodes approchées appliquées à des objets déterministes, qui se basent en général sur l'hypothèse que les dimensions de l'objet sont grandes devant la longueur d'onde<sup>10</sup>, et les méthodes approchées propres aux surfaces rugueuses.

### 1.4.1 Modèles rigoureux

Dans la famille des modèles rigoureux, nous trouvons des méthodes analytiques et des méthodes numériques (voir le tableau 1.1 ci-après). Tandis que les premières permettent d'obtenir une solution rigoureusement exacte du problème mais ne peuvent être appliquées qu'à des cas simples (sphère, cylindre infini...) [18], les méthodes numériques se basent sur une discrétisation du problème et permettent ainsi de résoudre tout problème de diffraction en théorie. Les quelques solutions exactes (on citera par exemple la diffusion de Mie pour le cas de la sphère et le cylindre infini parfaitement conducteur) reposent sur une méthode dite de séparation des variables [18]. De ce fait, dès que le problème fait intervenir des objets de forme ou de nature plus complexes que les quelques cas canoniques connus, les méthodes numériques sont les seules à conclure à une résolution "exacte" du problème ; la seule approximation venant de la discrétisation du problème. L'évolution rapide des calculateurs depuis une cinquantaine d'années a permis l'utilisation de telles méthodes et la résolution de problèmes complexes de la diffraction. L'inconvénient majeur de ces méthodes est que le nombre d'inconnues peut devenir très important lorsque les objets sont de grandes dimensions devant la longueur d'onde. Outre l'aspect problématique du stockage en mémoire des inconnues, le temps de calcul peut vite devenir prohibitif et rendre ces méthodes inutilisables. Ces méthodes sont donc généralement employées pour cerner le domaine de validité des méthodes approchées ou pour proposer une solution aux problèmes de diffraction où les théories approchées ne peuvent pas être développées.

Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories.

---

<sup>10</sup>Il existe également des méthodes asymptotiques dites "basses fréquences" (approximation de Born par exemple) qui ne seront pas présentées ici puisque notre problème ne fait intervenir aucune surface située dans ce domaine d'étude.

### 1.4.1.1 Méthodes différentielles

Également appelées méthodes volumiques, les méthodes différentielles se basent sur une représentation du problème sous forme d'équations aux dérivées partielles. Deux méthodes largement employées dans ce type de méthodes numériques sont la méthode des éléments finis [19] (**FEM** : Finite Element Method) et la méthode des différences finies [20, 21, 22] (**FDTD** : Finite-Difference Time-Domain) qui permettent de résoudre le problème dans le domaine fréquentiel ou temporel, respectivement.

- La méthode des éléments finis repose sur une discrétisation du domaine de calcul grâce à des éléments géométriques adaptés : les éléments finis. Ces éléments peuvent être de diverses formes mais doivent former un pavage de l'espace considéré. Usuellement les éléments finis sont des éléments triangulaires (en deux dimensions) ou des tétraèdres (en trois dimensions). À l'intérieur de chaque élément, la fonction cherchée subit une approximation polynomiale dont les coefficients sont inconnus. Par un choix judicieux des coefficients, la FEM impose automatiquement les conditions de continuité de la fonction d'un élément à l'autre. La méthode des éléments finis permet donc de résoudre de manière discrète une équation aux dérivées partielles dont on cherche une solution approchée "suffisamment" fiable.
- La méthode des différences finies repose sur une discrétisation des opérateurs de dérivation (directement dans les équations de Maxwell dans le domaine temporel) et fait également intervenir un maillage de l'espace. Il s'agit donc d'une double discrétisation spatiale et temporelle. Son avantage par rapport à la FEM est qu'elle peut traiter des problèmes non linéaires et/ou non stationnaires.

De manière générale, les méthodes différentielles sont capables de traiter des milieux hétérogènes. Cependant, elles nécessitent un maillage en volume de la scène. Pour éviter les problèmes de stockage de mémoire, le domaine d'étude doit être restreint mais la précision du modèle dépend alors de la gestion des conditions de rayonnement sur la frontière extérieure du maillage. Il est donc important de pouvoir s'affranchir convenablement des réflexions sur les parois du volume de calcul qui risquent de perturber la solution attendue. L'utilisation de conditions aux limites absorbantes [23, 24, 25] pour "fermer" le domaine de calcul maillé, gère cette difficulté. De plus une attention supplémentaire est requise pour des calculs en champ lointain, puisque la source excitatrice et/ou le point d'observation sont placés hors du volume de calcul.

### 1.4.1.2 Méthodes intégrales

Lorsque la scène est constituée de matériaux homogènes, le problème peut être ramené, à l'aide des équations intégrales, à une équation sur chaque interface séparant les milieux. Partant de la représentation intégrale des champs, ces méthodes tiennent compte intrinsèquement de la condition de rayonnement (voir Annexe A lors du passage de l'équation (A.17) à (A.18)) et sont ainsi bien adaptées pour résoudre les problèmes de diffraction. La plus célèbre de ces méthodes est sans conteste la Méthode des Moments (**MdM** ou encore **MoM** : Method of Moments) [26], qui repose sur le développement en série de fonctions de base, pondérées par des coefficients inconnus, des courants sur la surface de l'obstacle. Les équations intégrales sont exprimées à l'aide de ces séries et sont ensuite projetées sur une série de fonctions de test, choisies selon un critère de minimisation de l'erreur. Cette procédure permet de discrétiser les équations intégrales du domaine fréquentiel et de poser ensuite le problème sous la forme d'un système matriciel du type :

$$\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}. \tag{1.54}$$

Cela correspond à mailler la surface et résoudre les équations discrétisées sur chaque élément de surface (une valeur de discrétisation souvent adoptée est de 8 échantillons par longueur d'onde), et on parle alors parfois de Boundary Element Method (**BEM**) [5]. L'inversion de  $\bar{\mathbf{Z}}$  pour résoudre l'équation (1.54) peut être obtenue par une méthode directe (par exemple avec une décomposition LU, acronyme de Low-Up, puis inversion par substitution) ou par des méthodes itératives (on peut citer par exemple la **MLFMM** : Multi-Level Fast Multipole Method [27, 28, 29, 30]; la **FB** : Forward-Backward [31, 32]; la **BMIA/CAG** : Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid [33]). Notons que les matrices obtenues sont beaucoup plus petites que celles calculées avec les méthodes volumiques, mais cependant elles sont pleines. La taille des matrices augmente avec la fréquence (pour un pas de discrétisation fixe par rapport à la longueur d'onde) et les matrices peuvent alors devenir très difficiles à stocker où à inverser.

### 1.4.1.3 Conclusion

Contrairement aux méthodes basées sur les intégrales de frontière, les méthodes différentielles traitent tout type de problème, y compris des scènes comportant des milieux hétérogènes. Cependant, le maillage est volumique et de ce fait le temps de calcul et l'espace mémoire sont plus importants. Pour conclure, si la scène à étudier ne comporte pas de milieux hétérogènes, les méthodes intégrales de frontière sont intéressantes. Bien qu'elles soient moins "gourmandes" en espace mémoire et en temps de calcul que les méthodes différentielles, elles restent difficilement applicables pour des scènes comportant des objets de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde. Dans ce cas, des hypothèses simplificatrices doivent être posées afin de pouvoir résoudre le problème de la diffraction, et le modèle est qualifié d'*asymptotique*.

## 1.4.2 Modèles asymptotiques hautes fréquences

Dans la famille des modèles asymptotiques hautes fréquences, nous retrouvons également des méthodes analytiques et des méthodes numériques. Tandis que certaines établissent un développement asymptotique du champ rayonné à grande distance, d'autres se basent sur un développement asymptotique du courant induit sur la surface de la cible. Dans les deux cas ces méthodes ont un domaine de validité restreint au *domaine des hautes fréquences*. Ceci signifie que les dimensions de l'obstacle sont grandes devant la longueur d'onde, on parle aussi de zone *optique*.

### 1.4.2.1 Méthodes orientées "rayon"

Les méthodes orientées "rayon" sont des méthodes qui se basent sur un développement asymptotique du champ rayonné à grande distance sous l'hypothèse que l'obstacle est de très grande taille par rapport à la longueur d'onde. La méthode la plus connue est l'Optique Géométrique (**OG**). Les autres méthodes, telles la Théorie Géométrique de la Diffraction (**TGD** ou **GTD** en anglais) [34, 35, 36, 37] ou la Théorie Uniforme de la Diffraction (**TUD** ou **UTD** en anglais) [35, 38] par exemple, peuvent être vues comme des généralisations de l'OG et prennent en compte le rayonnement de discontinuités de surface (comme des arêtes par exemple). La formulation de l'OG a été établie au 19ème siècle par W. R. Hamilton [39] en utilisant les travaux de Huygens et de Newton. Kirchhoff montrera ensuite que le champ électromagnétique tend vers le résultat de l'OG lorsque la longueur d'onde tend vers 0. Cette limite définit la notion de rayon, utilisable pour décrire la propagation d'un champ électromagnétique lorsque la longueur d'onde devient

infinitésimale [2]. Cette notion de rayon est fondamentale puisqu'elle est la base de toutes les méthodes asymptotiques utilisées en diffraction. Ces rayons décrivent des trajectoires qui obéissent au *principe de Fermat* (1654) :

**Principe de Fermat.** *La longueur optique d'un rayon (produit de la longueur physique du rayon par l'indice de réfraction  $n$  du milieu de propagation) entre deux points d'une trajectoire correspond à un extremum. Lorsque le milieu de propagation est homogène, les trajectoires des rayons décrivent alors des lignes droites.*

Le calcul des interactions entre l'onde électromagnétique et un obstacle est basé sur les lois de réflexion et de réfraction de Snell et Descartes que l'on peut énoncer de la façon suivante : Sur une surface lisse  $S$ , séparant deux milieux homogènes 0 et 1 d'indices de réfraction  $n_0$  et  $n_1$ , une onde plane incidente venant du milieu 0 et frappant  $S$  se scinde en deux ondes dont l'une repart dans le milieu 0 (l'onde réfléchie) et l'autre pénètre dans le milieu 1 (l'onde réfractée ou transmise), en respectant certaines propriétés :

- les directions des ondes réfléchie et transmise sont contenues dans le plan d'incidence,
- les angles que font les rayons incident et réfléchi avec la normale à la surface  $S$  sont égaux,
- les angles  $\theta_0$  et  $\theta_1$  que font respectivement les rayons incident et transmis avec la normale à la surface  $S$  sont reliés par la loi de réfraction de Snell-Descartes :  $n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$ .

Cette méthode permet de traiter les surfaces régulières, sources de réflexion spéculaire, mais néglige totalement les effets de polarisation et de phase. Ces deux notions peuvent être ajoutées artificiellement à celle de rayons, en imposant au champ d'être identique au premier terme du développement asymptotique de la solution hautes fréquences des équations de Maxwell, introduit par Luneberg et Kline [40, 41].

#### 1.4.2.2 Méthodes orientées “courant”

Les méthodes orientées “courant” sont des méthodes qui se basent sur un développement asymptotique du courant induit sur la surface de la cible sous l'hypothèse que l'obstacle est de très grande taille par rapport à la longueur d'onde. La méthode la plus connue et la plus utilisée est la méthode de l'Optique Physique (**OP** qui est le terme souvent employé pour les calculs de diffraction par des obstacles déterministes). D'autres méthodes asymptotiques orientées “courant” permettent de corriger l'OP en tenant compte des diffractions par des discontinuités de surface, telles la Méthode des Courants Equivalents (**MCE** ou MEC en anglais) ou la Théorie Physique de la Diffraction (**TPD** ou PTD en anglais). De fait, ces méthodes sont à l'OP ce que les méthodes telles la TUD ou la TGD sont à l'OG : une correction, voir une généralisation en vue d'améliorer le modèle asymptotique.

- L'optique physique [42] est basée sur la simplification des équations intégrales en approximant les courants surfaciques. La méthode spécifie que ces courants en un point de la surface sont les mêmes que ceux qui existeraient sur une surface plane tangente infinie de mêmes propriétés physiques. Ainsi les courants surfaciques, qui sont les inconnues du problème, peuvent être exprimés en fonction du champ incident et des coefficients de Fresnel. Cette méthode repose sur deux hypothèses :
  1. Les dimensions de la cible sont grandes devant la longueur d'onde. Cette condition implique que les courants décroissent alors très rapidement sur la partie de la surface non directement illuminée par le champ incident, et sont alors considérés comme nuls.
  2. Les rayons de courbure de la surface directement illuminée sont très supérieurs à la longueur d'onde. On peut alors considérer localement un phénomène de réflexion sur

un plan infini tangent à la surface. L'application des lois de la réflexion de Snell-Descartes permet ainsi d'exprimer les courants surfaciques équivalents en fonction du champ incident.

- La MCE est basée sur le calcul des intégrales linéiques de rayonnement. La source du champ diffracté par une discontinuité d'arête en un point quelconque de l'espace est attribuée à des courants équivalents "fictifs"<sup>11</sup> [43, 44]. Ces courants sont calculés en supposant l'arête localement rectiligne autour de chaque point du contour considéré. Il s'agit de l'analogie de l'approximation du plan tangent de l'Optique Physique. Le champ diffracté par une discontinuité d'arête de contour  $L$ , peut être calculé par une intégration linéique des courants filaires équivalents électrique  $I_e$  et magnétique  $I_m$  le long du contour  $L$  [45, 46, 47, 48, 49].

### 1.4.2.3 Conclusion

Le choix de la méthode pour un modèle asymptotique dépend en premier lieu de la scène étudiée puisque les postulats permettant l'approximation doivent être vérifiés. Les méthodes orientées "rayon" sont incapables d'évaluer la valeur du champ rayonné à proximité de l'obstacle (zone de champ proche) tandis que les méthodes orientées "courants" imposent l'utilisation du principe de Huygens, soit, un calcul rigoureux du rayonnement. L'intégrale surfacique des courants permet également de tenir compte de la "finitude" des surfaces dans le cas d'obstacles de dimensions limitées. De ce fait l'OP est souvent favorisée dans les calculs de diffraction par des objets puisque plus précise dans les résultats. Cependant, lorsque les scènes font intervenir de multiples réflexions entre des objets disposés arbitrairement, les méthodes de rayons sont les plus efficaces pour fournir numériquement un résultat (le calcul des intégrales de courant peut devenir très gourmand en temps de calcul). Cette technique est nommée le *lancer de rayons* [50].

### 1.4.3 Modèles asymptotiques propres aux surfaces rugueuses

Dans le cas d'une surface rugueuse, la surface est supposée infinie mais les irrégularités de la surface peuvent être considérées comme grandes ou petites devant la longueur d'onde. De ce fait nous retrouvons des méthodes asymptotiques hautes fréquences vues précédemment comme l'OG, la TUD ou encore l'OP plus souvent appelée "méthode du plan tangent" lorsqu'elle est appliquée à une surface rugueuse. Notons aussi que l'OP est parfois aussi nommée Approximation de Kirchhoff (**AK**) par abus de langage puisqu'il existe des différences d'après Voronovich [51]. En effet dans l'approximation de Kirchhoff, une procédure itérative est opérée pour corriger les courants surfaciques, ce qui revient à tenir compte des phénomènes d'ombrages et de multiples réflexions par le biais du calcul d'intégrales successives. Quand la surface est plane et parfaitement conductrice, le plan tangent et l'approximation de Kirchhoff sont alors la même méthode (pour plus de détails sur cette controverse voir [51, 52]). Le domaine de validité de ces méthodes hautes fréquences fait ici intervenir surtout le rayon de courbure de la surface qui doit être grand devant la longueur d'onde pour que des plans tangents soient localement retrouvés.

Une méthode proche de l'approximation de Kirchhoff est la Méthode de l'Equation Intégrale (**IEM**, Integral Equation Method) qui prend également en compte les interactions multiples entre l'onde et les rugosités environnantes [53, 54, 55, 56]. Des méthodes dites "basses fréquen-

---

<sup>11</sup>Ces courants n'ont pas de réels sens physiques, puisqu'ils sont décrits mathématiquement à partir de coefficients qui sont fonction de plusieurs paramètres dont l'angle d'observation, ce qui ne peut physiquement être valide.

Modèles Méthodes	asymptotiques	rigoureux
analytiques	<b>OG, TUD, TGD, SPM, Rayleigh, FWM, OP, MCE, SSA, ...</b>	<b>Séparation des variables (Mie, ...)</b>
numériques	<b>OP, MCE, SPM, Rayleigh, SSA, lancé de rayon, ...</b>	<b>FDTD, FEM MoM, BMIA/CAG MLFMM, FB</b>

TAB. 1.1 – Modèles et méthodes de résolution pour le problème de diffusion par un objet ou une surface rugueuse.

ces” sont aussi utilisées, lorsque les irrégularités (évaluées par l’écart-type des hauteurs) de la surface sont petites devant la longueur d’onde. La plus célèbre est la méthode des petites perturbations (**SPM**, Small Perturbation Method) [57, 58, 59, 60] qui peut être considérée comme un développement limité du champ diffusé en fonction des hauteurs de la surface. Une autre méthode répandue est la méthode des équations réduites de Rayleigh (**RRE**, Reduced Rayleigh Equations method) [61, 62]. Une méthode dite à la fois basses et hautes fréquences (rayon de courbure grand et écart-type des hauteurs petit devant la longueur d’onde) est le modèle de Ament [63] qui permet de prédire la puissance cohérente dans la direction spéculaire lorsque la surface est excitée à angle rasant [63, 64, 65, 66, 67].

En plus de ces types de méthodes on trouve également des méthodes dites “unifiées” qui ont été créées afin de s’appliquer à la fois en basses et en hautes fréquences, et ainsi posséder un domaine de validité indépendant de la longueur d’onde. Ceci ne peut être réalisé qu’au prix d’une complexité de la méthode plus importante et/ou d’hypothèses simplificatrices. On peut citer la Full Wave Method (**FWM**) [68, 69] ou encore la Small Slope Approximation (**SSA**) [70, 71, 72, 73]. D’autres méthodes existent, et la lecture de l’article [74] dresse un panel très complet des méthodes existantes.

Le choix de la méthode dépend pour beaucoup des caractéristiques de la surface, de la fréquence de l’onde incidente et du compromis précision/temps de calcul désiré. Il en est bien entendu de même pour un objet déterministe et une scène complète (faisant intervenir une surface et un objet par exemple). Le tableau 1.1 synthétise les méthodes que nous avons évoquées en les classant en fonction du modèle obtenu (asymptotique ou rigoureux) et de la démarche de calcul (analytique ou numérique). Des utilisations conjointes de ces méthodes sont également possibles, le modèle final est alors qualifié de modèle “hybride”.

Afin de pouvoir porter un choix sur les méthodes envisagées, il convient donc de réaliser une analyse de la scène étudiée plus fine.

## 1.5 Analyse de la scène étudiée

Le sujet de cette thèse concerne la modélisation de la diffusion d’une onde électromagnétique par un réflecteur polyédrique situé au-dessus de la mer. Avant de s’intéresser au calcul de la diffusion par une telle scène, il est important de bien connaître la nature des obstacles mis en jeu. Définir les réflecteurs polyédriques s’avère alors nécessaire tout comme être capable de générer un profil rugueux (modélisation d’un profil de mer) le plus réaliste possible. Intéressons

nous tout d’abord au réflecteur.

### 1.5.1 Réflecteurs polyédriques

Les réflecteurs polyédriques sont définis de manière générale à partir de polyèdres subissant le processus de facettage. Dans un premier temps, étudions plus en détail ce qui définit un polyèdre.

#### 1.5.1.1 Polyèdres

Un polyèdre est une forme géométrique à trois dimensions ayant des faces planes qui se rencontrent le long d’arêtes droites (le mot *polyèdre* provient du grec : *poly-* qui signifie “plusieurs” et *-edron* qui signifie “base”, “siège” ou encore “face”) [75]. Plus généralement en mathématiques et dans d’autres disciplines, le terme “polyèdre” est utilisé pour faire référence à une variété de constructions reliées, certaines géométriques et d’autres purement algébriques et abstraites. Les polyèdres les plus connus sont les polyèdres réguliers. Un polyèdre est dit régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers (un polygone est régulier s’il est équilatéral et équiangle : tous ses côtés et ses angles sont égaux entre eux) identiques, et si tous ses sommets sont identiques. Dans cette catégorie de polyèdres, on retrouve les cinq solides de Platon (le tétraèdre régulier, le cube, l’octaèdre régulier représenté à la figure 1.7(a), le dodécaèdre et l’icosaèdre représenté à la figure 1.7(b)) qui sont des polyèdres réguliers convexes. On peut également citer les deux solides de Kepler (le petit dodécaèdre étoilé et le grand dodécaèdre étoilé) et les deux solides de Poincaré (le grand dodécaèdre et le grand icosaèdre), ces quatre derniers n’étant pas convexes [76].

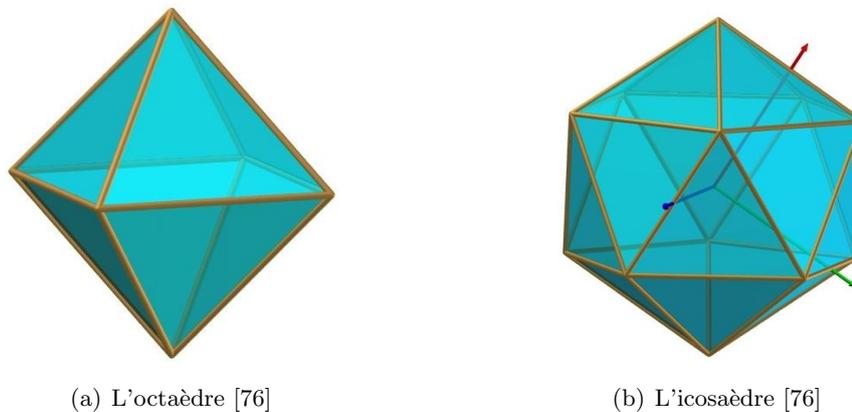


FIG. 1.7 – Deux des cinq solides de Platon.

#### 1.5.1.2 Facettage des polyèdres : les réflecteurs polyédriques

Un procédé de construction de polyèdres largement répandu est la *stellation* qui consiste à étendre des éléments tels que les arêtes ou les faces planes, généralement de manière symétrique, jusqu’à ce que chacun d’entre eux se rejoignent de nouveau. La nouvelle figure est alors une stellation de l’original. Le processus dual de la stellation est le *facettage* qui consiste à enlever des parties d’un polyèdre sans créer de nouveaux sommets [77]. La théorie sur la stellation

et le facettage est compliquée et ne fera pas l'objet d'investigation dans ce manuscrit. Nous admettrons qu'un type de facettage revient à supprimer la première face visible du polyèdre laissant apparaître un "coin trièdre" que nous nommerons simplement *trièdre* par la suite (par abus de langage puisque le trièdre n'est en fait que le qualificatif d'un angle). Il est représenté sur la figure 1.8 où ses trois faces internes sont visibles.

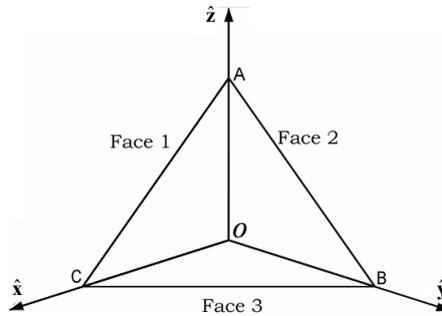


FIG. 1.8 – Le trièdre (tétraèdre non régulier facetté).

Notons que le trièdre tel que nous le définissons est rigoureusement un tétraèdre non régulier (ses faces ne sont pas toutes identiques) comportant trois faces identiques de type triangle isocèle rectangle et une face de type triangle équilatéral. Cette dernière face est supprimée par facettage. Le solide obtenu ne comporte donc que 3 faces internes identiques formant un coin. Par la suite, cet objet sera associé au nom de "trièdre". Ces réflecteurs polyédriques, composés de trièdres, sont donc obtenus par facettage de polyèdres possédant des faces triangulaires équilatérales. C'est le cas de l'octaèdre (8 faces) et de l'icosaèdre (20 faces). Après facettage on obtient ainsi le réflecteur octaédrique (composé de 8 trièdres) et le réflecteur icosaédrique (composé de 20 trièdres), respectivement représentés sur les figures 1.9 et 1.10.

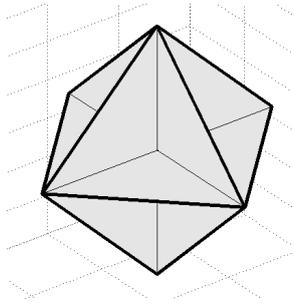


FIG. 1.9 – Le réflecteur octaédrique (obtenu par facettage de l'octaèdre).

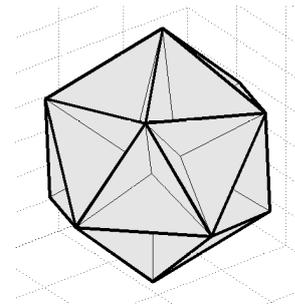


FIG. 1.10 – Le réflecteur icosaédrique (obtenu par facettage de l'icosaèdre).

### 1.5.1.3 Définitions de la classe et de l'ordre d'un réflecteur polyédrique

Nous définissons par le terme de *classe* le nombre de faces du polyèdre qui est à la base du réflecteur polyédrique. Ainsi, suivant cette dénomination, le réflecteur octaédrique est de classe 8 (l'octaèdre possède 8 faces, le réflecteur octaédrique possède 8 trièdres) et le réflecteur icosaédrique est de classe 20.

Chaque trièdre d'un réflecteur polyédrique peut être remplacé par un réseau de trièdres. Sur

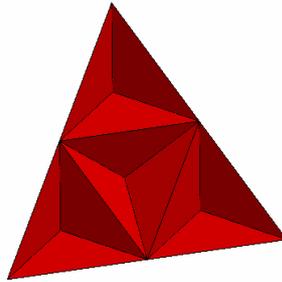


FIG. 1.11 – Réseau de trièdres d'ordre 2.

la figure 1.11 est présenté un réseau de trièdres d'ordre 2. Nous définissons par le terme d'*ordre*, le rapport d'homothétie entre le trièdre original (qui est ensuite remplacé par le réseau) et les trièdres constituant le réseau. Pour un réseau d'ordre 2, le trièdre original a été remplacé par un réseau constitué de 4 trièdres de dimensions 2 fois plus petites. Le réseau ainsi formé sera contenu dans le même volume que le trièdre initial. A partir de ces remplacements de trièdres en réseaux de trièdres nous pouvons donc créer des réflecteurs polyédriques d'ordre supérieur. Un réflecteur octaédrique d'ordre 2 est donc un octaèdre qui a subi tout d'abord un procédé de facettage (on obtient le réflecteur octaédrique vu à la figure 1.9) puis chacun de ses trièdres a été remplacé par un réseau de trièdre d'ordre 2 (vu à la figure 1.11).

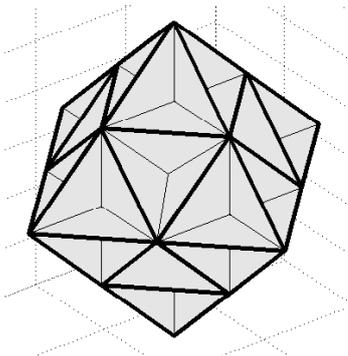


FIG. 1.12 – Le réflecteur octaédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres =  $8 \times 2^2 = 32$ ).

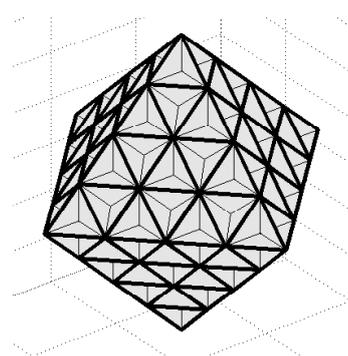


FIG. 1.13 – Le réflecteur octaédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres =  $8 \times 4^2 = 128$ ).

Le réflecteur octaédrique d'ordre 2 ainsi obtenu est représenté à la figure 1.12 ; il comporte donc  $8 \times 4 = 32$  trièdres. Avec le même procédé on obtient le réflecteur octaédrique d'ordre 4 et les réflecteurs icosaédriques d'ordre 2 et 4, respectivement représentés sur les figures 1.13, 1.14 et 1.15.

Notons qu'en conséquence de notre définition, le réflecteur polyédrique qui n'a subi aucun changement de trièdres et qui est donc obtenu directement par facettage du polyèdre est considéré comme étant un réflecteur polyédrique d'ordre 1.

#### 1.5.1.4 De l'intérêt de l'utilisation de ces réflecteurs

Le trièdre est un réflecteur intéressant car il va favoriser le retour de l'onde incidente [78, 79, 80]. En effet l'onde excitatrice va venir éclairer les trois faces créant alors de multiples

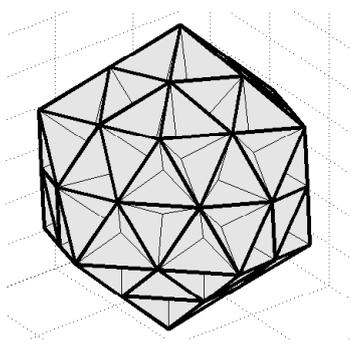


FIG. 1.14 – Le réflecteur icosaédrique d’ordre 2 (nombre de trièdres =  $20 \times 2^2 = 80$ ).

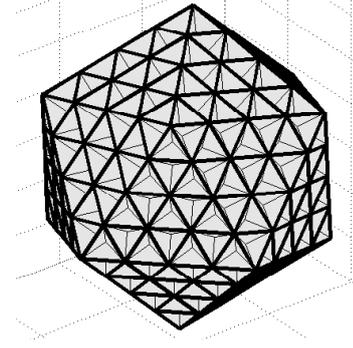


FIG. 1.15 – Le réflecteur icosaédrique d’ordre 4 (nombre de trièdres =  $20 \times 4^2 = 320$ ).

réflexions. Cet effet “trièdre” ne peut être obtenu que si le trièdre est excité vers l’intérieur du coin. De ce fait il paraît très intéressant de réunir plusieurs trièdres ensemble afin d’obtenir un réflecteur présentant toujours un coin faisant face au champ incident. Les réflecteurs polyédriques sont donc des cibles radar très intéressantes. De nombreux brevets [81, 82, 83, 84] et articles [85, 86, 87, 88, 89, 90, 91] évoquent l’utilité de ces réflecteurs (utilisables comme marqueurs de récifs, comme réflecteurs pour bateau, ...). Afin de favoriser une SER élevée, et en raison des contraintes mécaniques, ces réflecteurs sont généralement considérés comme grands par rapport à la longueur d’onde. Comme nous l’avons évoqué précédemment, pour ce type d’étude les méthodes asymptotiques “hautes fréquences” sont les plus indiquées pour développer un modèle de la signature de ces réflecteurs.

### 1.5.1.5 Problème scalaire - Scène 2D

Dans notre étude nous commencerons par aborder le cas d’une scène dans laquelle les surfaces des obstacles en présence sont invariantes suivant une dimension (suivant  $\hat{y}$  par exemple). Ceci correspond au cas plan  $(\hat{x}, 0, \hat{z})$ , le problème est dit “scalaire” et a déjà été évoqué. Dans cette configuration, “l’effet trièdre” ne peut pas exister, seul l’effet dièdre peut être obtenu. De ce fait, le trièdre sera assimilé à un dièdre dans le cas plan, et le réflecteur octaédrique sera assimilé à une croix.

### 1.5.2 Surface rugueuse aléatoire

Dans notre étude, les réflecteurs sont situés au-dessus de la mer. La diffraction par ces réflecteurs doit être évaluée en tenant compte de son environnement qui va jouer un rôle “perturbateur” sur l’écho par rapport à celui obtenu en espace-libre (absence de surface inférieure). Les surfaces de mer sont très complexes à caractériser puisque de très nombreux paramètres entrent en jeu dans la description de leur profil. La difficulté de connaître précisément et correctement l’évolution d’une surface de mer amène à supposer cette surface comme une surface rugueuse aléatoire. Par définition, une surface rugueuse aléatoire ne peut être connue avec exactitude. Il convient donc d’en connaître certaines caractéristiques statistiques permettant de décrire le comportement aléatoire de la surface rugueuse. Une surface de mer est à la fois aléatoire spatialement et temporellement : c’est une surface rugueuse stochastique (“rugueuse” car c’est un processus aléatoire ; “stochastique” car ce processus aléatoire dépend du temps).

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement aux surfaces rugueuses qui sont toujours supposées suivre un processus *aléatoire*, *stationnaire* et *ergodique* [92]. *Aléatoire* car la surface ne peut être connue avec exactitude mais elle peut être caractérisée par certains paramètres statistiques déterministes (appelés moyennes ou moments statistiques) pour décrire son comportement. *Stationnaire* car les grandeurs statistiques sont supposées invariantes dans le temps. Et enfin *ergodique* car les moyennes effectuées dans le domaine temporel (mesure à un lieu précis mais en fonction du temps) sont supposées égales à celles obtenues dans le domaine spatial (mesure à un instant précis mais à différents lieux). Notons que l'ergodicité implique la stationnarité. Pour plus de détail sur l'équivalence statistique des surfaces rugueuses dépendantes et indépendantes du temps, la lecture de [13] s'avère enrichissante. Sous ces conditions, une surface rugueuse est alors caractérisée par la densité de probabilité de ses hauteurs notée  $p_z$ , et par la corrélation de ses hauteurs notée  $C_z$  (ces deux quantités suffisent pour décrire complètement la surface si la densité de probabilité des hauteurs est gaussienne).

### 1.5.2.1 Description statistique d'une surface rugueuse

A condition de considérer des vents faibles à modérés (cela permet d'exclure les phénomènes non linéaires tel que le déferlement) et que la scène se situe en "pleine mer" (suffisamment loin des côtes pour négliger ces mêmes non-linéarités de déferlement), les surfaces de mer font partie des surfaces rugueuses possédant une distribution gaussienne des hauteurs [1]. Le profil est alors défini de façon univoque; il peut donc être décrit à l'aide d'une fonction  $(x, y) \rightarrow z(x, y)$  (le temps étant supprimé de la fonction puisque le processus est ergodique). Une surface rugueuse monodimensionnelle (invariante suivant  $\hat{y}$ ) est représentée sur la figure 1.16 à titre d'exemple et d'illustration. Sa distribution des hauteurs est également tracée à droite de l'image.

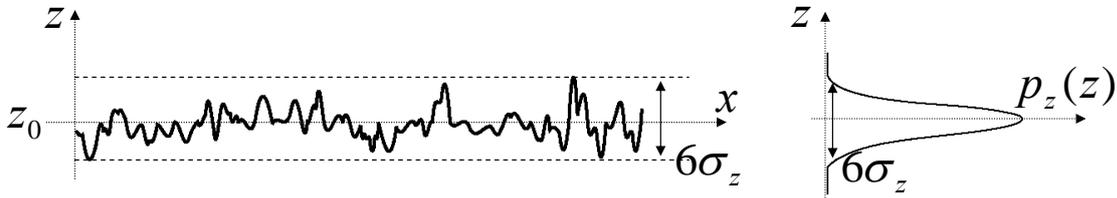


FIG. 1.16 – Surface rugueuse 1D de statistique gaussienne (à gauche) et sa distribution des hauteurs (à droite).

La densité de probabilité du profil (également nommée distribution des hauteurs) est donc choisie gaussienne, de valeur moyenne nulle (centrée) et d'écart type  $\sigma_z$  [13] :

$$p_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}, \quad (1.55)$$

où la moyenne (moment statistique d'ordre un) est évaluée par

$$\langle p_z(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z p_z(z) dz = 0. \quad (1.56)$$

Le moment statistique d'ordre deux est la variance qui correspond ici au moyennage sur le carré des hauteurs (puisque  $\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ ) :

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 p_z(z) dz = \sigma_z^2. \quad (1.57)$$

La fonction d'autocorrélation (spatiale) entre deux points de la surface représente la corrélation entre ces points en fonction de leur distance horizontale  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Maximale pour  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , elle est définie par

$$C_z(\mathbf{r}) = \langle z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = \lim_{X,Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{+X/2} \int_{-Y/2}^{+Y/2} z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) dx dy. \quad (1.58)$$

Deux informations importantes sont contenues dans cette fonction : ses longueurs de corrélation (selon  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$ )<sup>12</sup> ainsi que le type de cette fonction (gaussienne, lorentzienne, exponentielle, ...). Cette corrélation statistique caractérise la “ressemblance” entre deux points de la surface séparés de la distance horizontale  $\|\mathbf{r}\|$ . Si cette distance est grande devant la longueur de corrélation alors ces deux points sont faiblement corrélés, et si cette distance est faible devant la longueur de corrélation alors ils sont fortement corrélés.

En calculant la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'autocorrélation on obtient la densité spectrale de puissance de la surface, également appelée spectre des hauteurs de la surface

$$S_z(\mathbf{k}) = \text{TF}[C_z(\mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_z(\mathbf{r}) e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (1.59)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur fréquence spatiale par cycle (homogène à des  $\text{rad.m}^{-1}$ )<sup>13</sup>.

En connaissant la distribution des hauteurs ainsi que la fonction d'autocorrélation des hauteurs (ou le spectre des hauteurs), le profil de la surface est complètement défini [92].

Pour un problème à deux dimensions (la surface étant invariante selon  $\hat{\mathbf{y}}$  par exemple), le problème devient *scalair* : le vecteur de fréquence spatiale devient la fréquence spatiale par cycle  $k$  et le vecteur position  $\mathbf{r}$  devient la grandeur scalaire  $x$ . La figure 1.16 représente une telle surface dans un problème 2D. La surface est donc 1D et le problème est 2D.

On utilise généralement une fonction d'autocorrélation des hauteurs de la surface gaussienne (on trouve parfois l'utilisation de fonctions lorentzienne et exponentielle) qui s'exprime pour une surface 1D

$$C_z(x) = \sigma_z^2 e^{-\frac{x^2}{L_c^2}}, \quad (1.60)$$

et le spectre correspondant, obtenu après transformée de Fourier, est lui aussi gaussien

$$S_z(k) = \sqrt{\pi} \sigma_z^2 L_c e^{-\frac{L_c^2 k^2}{4}}. \quad (1.61)$$

Nous avons vu que le profil de la surface peut être défini par la distribution des hauteurs et la fonction d'autocorrélation des hauteurs. D'autres paramètres peuvent également servir à définir le profil de la surface, tels l'écart-type des pentes de la surface  $\sigma_s$ , le rayon de courbure moyen de la surface  $R_c$  et la distance moyenne  $D_m$  entre deux pics consécutifs de la surface [13, 52, 93, 94].

### 1.5.2.2 Génération du profil par une méthode spectrale

Une résolution analytique du problème de la diffusion par une surface rugueuse utilise les variables aléatoires qui définissent le profil de la surface [13] ; le champ diffusé est alors évalué

<sup>12</sup>La longueur de corrélation étant une valeur caractéristique qui détermine l'échelle de rugosité horizontale de la surface. Elle correspond classiquement à la distance entre deux points telle que le coefficient d'auto-corrélation (défini par  $\frac{C_z(\mathbf{r})}{\sigma_z^2}$ ) vaut  $\frac{1}{e}$  [13].

<sup>13</sup>Ici  $\mathbf{k}$  ne doit pas être confondu avec le vecteur d'onde. Ce vecteur représente ici le dual du vecteur position  $\mathbf{r}$ , il s'agit donc bien d'un vecteur de fréquence spatiale.

en fonction des paramètres de la surface que nous avons vus au paragraphe précédent. Pour l'utilisation de méthodes numériques (telles que la Méthode des Moments) il en est tout autre : la surface doit être échantillonnée et donc parfaitement déterminée, il s'agit ainsi d'une surface déterministe. Or nous savons que la surface rugueuse possède un caractère aléatoire, il convient donc de générer "aléatoirement" des profils indépendants de surface possédant une distribution des hauteurs et une autocorrélation des hauteurs déterminées et identiques. La solution du problème est alors obtenu par un moyennage des champs calculés pour chacune des surfaces générées : ce procédé est la *méthode de Monte-Carlo*.

La génération de chaque profil peut être réalisée par une méthode spectrale. Cette méthode consiste à appliquer un filtre de réponse impulsionnelle  $g(i)$  et de densité spectrale de puissance  $S_g(k)$ , sur un bruit blanc (qui contient par définition toutes les fréquences) gaussien  $e(i)$  centré de variance unitaire de densité spectrale de puissance  $S_e(k)$ . La réponse impulsionnelle résultant de cette action de filtrage s'écrit

$$z(i) = g(i) * e(i), \quad (1.62)$$

où  $*$  symbolise le produit de convolution. En notant  $S_z(k)$  la densité spectrale de puissance du signal de sortie  $z(i)$ , et puisque tous les signaux considérés ici sont réels et que le système est linéaire nous avons

$$g(i) = \text{TF}^{-1} [S_g(k)] = \text{TF}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{S_z(k)}{S_e(k)}} \right]. \quad (1.63)$$

Connaissant le signal de sortie  $z(i)$  et le signal d'entrée  $e(i)$ , tout le problème consiste à calculer  $g(i)$ . Or nous savons que la densité spectrale de puissance d'un bruit blanc gaussien est unitaire :  $S_e(k) = 1$ , nous obtenons

$$g(i) = \text{TF}^{-1} \left[ \sqrt{S_z(k)} \right] = \text{TF}^{-1} \left[ \sqrt{\text{TF}[C_z(i)]} \right]. \quad (1.64)$$

Ainsi en connaissant la fonction d'autocorrélation des hauteurs attendue pour le profil à générer, la densité spectrale de puissance des hauteurs associée peut être calculée, et finalement les coefficients du filtre sont déterminés. En appliquant ce filtrage (équation (1.62)) sur un bruit blanc gaussien centré de variance unitaire (1.64), et (équation (1.62)), on obtient un profil de surface rugueuse  $z(i)$  de distribution des hauteurs gaussienne et possédant un spectre désiré, donc de fonction d'autocorrélation des hauteurs voulue :

$$z(i) = \text{TF}^{-1} \left[ \sqrt{S_z(k)} \text{TF} [e(i)] \right]. \quad (1.65)$$

En pratique, les transformées de Fourier et les transformées de Fourier inverses sont réalisées par calcul numérique et sont tronquées. De ce fait, la surface générée est une surface discrète de longueur finie  $L$  décrite par  $N$  échantillons. Cette surface possède donc une distribution des hauteurs gaussienne et un spectre des hauteurs égal à un spectre donné  $S_z$ . Le pas en abscisse est constant :  $\delta x = \frac{L}{N}$ . Ainsi, le profil  $(x_n, z_n)$ , où  $x_n = -\frac{L}{2} + (n - \frac{1}{2})\delta x$ ,  $n = 1..N$ , est généré à partir de l'équation (1.65) modifiée de la manière suivante [1, 95, 96] :

$$z_n = \frac{1}{L} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} F(k_m) e^{ik_m x_n}, \quad (1.66)$$

avec pour  $m \geq 0$

$$F(k_m) = \sqrt{L S_z(k_m)} \times \begin{cases} (u + iu)/\sqrt{2} & m \neq 0, N/2 \\ u & m = 0, N/2 \end{cases}, \quad (1.67)$$

et pour  $m \leq 0$

$$F(k_m) = F(k_{-m}), \quad (1.68)$$

où  $u$  est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et  $k_m = 2\pi m/L$ .

### 1.5.2.3 Cas particulier de la mer

Le cas de la surface de mer est particulier puisqu'elle possède deux régimes principaux : les régimes de capillarité et de gravité [97]. Tandis que le premier correspond aux vagues de capillarité qui sont des vaguelettes (rugosité à courte échelle), le second correspond aux vagues de gravité également nommées vagues de houle (rugosité à longue échelle). De nombreux modèles de spectres pour des surfaces de mer ont été développés, mais ce ne sont que les travaux récents des années 90 qui ont permis d'obtenir des spectres tenant compte à la fois des deux régimes. En effet, de manière générale, ces deux régimes coexistent pour une surface de mer. Le spectre de Elfouhaily établi en 1997 [98] est certainement un des plus utilisés actuellement compte tenu de sa simplicité et de sa pertinence. Ce spectre, construit à la fois théoriquement et empiriquement, a été validé par des mesures expérimentales. Le paramètre clé permettant d'obtenir le spectre de mer de Elfouhaily est la vitesse  $U_z$  (en  $m.s^{-1}$ ) du vent mesurée à  $z$  mètres au-dessus du niveau moyen de la mer. Ce spectre permet de simuler une surface de mer bidimensionnelle (cas d'une scène 3D) et monodimensionnelle.

## 1.6 Vers une résolution du problème : le choix des méthodes

L'étude de la diffusion par un objet situé près d'une interface est un sujet de grand intérêt. L'origine de cette question vient du problème initialement étudié par Sommerfeld [99] concernant un dipôle situé en face d'un demi-espace parfaitement conducteur. Cette étude qui était à l'origine plus un problème théorique, n'a cessé de motiver de nombreux travaux. On peut citer les récentes études concernant la diffusion par un cylindre ou une sphère situés près d'une surface plane [100, 101, 102, 103, 104]. Ces travaux sont d'un grand intérêt pour modéliser et comprendre le comportement des surfaces "contaminées" par des particules par exemple. Dans le cas plus général de la diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse, les applications en télédétection et surveillance radar maritime ont encouragé des recherches très récentes sur ce sujet. Ainsi, des méthodes asymptotiques et des modèles numériques "exacts" ont été proposés durant ces huit dernières années [105, 106, 107, 108, 109, 110, 111].

Pourtant, les scènes constituées d'un objet 3D au-dessus d'une surface rugueuse 2D ne constituent qu'un nombre très restreint d'études [106, 112, 113, 114]. Pour ces problèmes, le nombre d'inconnues devient trop important pour que l'étude soit menée avec une méthode rigoureuse classique de type Méthode des Moments. Ainsi Johnson et al. utilisent la Coupled Canonical Grid/Discrete Dipole Approach (CCAG/DDA) [113] permettant de calculer les interactions sur la surface inférieure avec une complexité  $\mathcal{O}(N_- \log(N_-))$  et sur l'objet  $\mathcal{O}(N_+ \log(N_+))$  (où  $N_-$  est le nombre d'inconnues sur la surface inférieure et  $N_+$  le nombre d'inconnues sur l'objet). Les couplages entre l'objet et la surface sont par contre calculés sans aucune accélération. Ils ont réussi à évaluer la diffusion par un objet décrit par 13824 inconnues au-dessus d'une surface plane de  $256 \times 256$  inconnues (65536 inconnues) à l'aide du cluster de PC du Maui High Performance Computing Center [115] avec un temps de calcul de 1 à 8 heures selon la configuration des tests. Dans [106], la même méthode est appliquée sur des scènes comportant plus d'inconnues (276 000 inconnues) et où l'objet est placé au-dessus d'une surface rugueuse. Le même cluster de PC est utilisé afin d'appliquer ces méthodes avec un temps de calcul de 6 à 14 heures selon la

configuration des tests (avec un total de 20 réalisations de profils rugueux pour la méthode de Monte-Carlo). Il est important de noter, que les surfaces mises en jeu dans ces simulations, sont de très petites tailles :  $1,28 \times 1,28$  m soit  $8,5\lambda \times 8,5\lambda$  à  $21,35\lambda \times 21,35\lambda$  avec les fréquences utilisées (de 2 à 5 GHz).

Çolak et al. utilisent quant à eux la Multiple Sweep Method of Moments (MSMM) pour une scène où l'objet est localisé sur la surface [112]. La surface de l'objet et la surface rugueuse ne forment qu'une seule surface continue. Les temps de calcul et les machines informatiques utilisées pour réaliser ce calcul ne sont pas mentionnés dans l'article mais la complexité de la méthode est de  $\mathcal{O}(N^2)$  (où  $N$  est le nombre d'inconnues total de la scène). Çolak et al. évoquent également dans ce papier les problèmes de convergence que peuvent rencontrer les méthodes numériques dans une scène 3D. Ce problème intervient pour les méthodes de type Method of Ordered Multiple Interactions (MOMI) et la méthode Generalized Forward Backward (GFB) [116].

Le nombre restreint de résultats obtenus pour des scènes 3D montre toute la difficulté d'appliquer des méthodes rigoureuses. Le nombre d'inconnues peut très rapidement atteindre des valeurs qui rendent le problème insoluble par une méthode rigoureuse. Notamment si la scène est excitée à angle rasant<sup>14</sup> et comporte un, voir plusieurs, obstacles de très grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde au-dessus d'une surface rugueuse bidimensionnelle. L'utilisation des méthodes asymptotiques est alors une parade à ces difficultés. Cependant il est très important de noter que toute méthode asymptotique possède un domaine de validité restreint. Il est toujours nécessaire de valider les modèles asymptotiques par des modèles de référence. Mais pour des scènes 3D, cette validation est très difficilement réalisable, à moins de se positionner dans des configurations favorisant la diminution du nombre d'inconnues et en utilisant des clusters de PC.

Il est de ce fait nécessaire de s'intéresser dans un premier temps au cas plan (une scène 2D) afin de pouvoir développer des modèles de référence plus facilement applicables puisque le nombre d'inconnues est considérablement réduit. La validité des modèles asymptotiques pourra donc être testée en 2D, et ces modèles pourront ensuite être étendus au cas 3D.

Quant au choix des méthodes asymptotiques à utiliser, il faut dissocier l'étude de la surface rugueuse et de l'objet. Pour la surface de mer, de nombreux modèles existent et permettent une résolution rapide du problème de la diffusion. Les méthodes les plus intéressantes sont les méthodes "unifiées" (voir 1.4.3) comme la SSA par exemple. D'autres modèles permettent quant à eux une résolution plus simple du problème, mais avec un domaine de validité très restreint. C'est le cas de l'approximation du plan tangent (l'Optique Physique), de la Small Perturbation Method ou encore du modèle de Ament. Leurs utilisations dépendent surtout du domaine d'étude qui devra être inclus dans le domaine de validité de la méthode choisie. Pour l'objet, aucun modèle asymptotique n'avait été proposé pour le calcul de la diffraction par des réflecteurs polyédriques. Cependant, et nous le verrons plus en détail plus loin dans ce manuscrit, la diffraction du réflecteur peut être ramenée à la somme de la diffraction par chacun des trièdres composant le réflecteur. Or deux équipes [78, 79, 80] ont proposé un modèle similaire pour la diffraction par un trièdre grand devant la longueur d'onde. Ce modèle est basé sur les méthodes de l'OP pour tenir compte des Simples Réflexions (SR), de l'OG combinée à l'OP pour tenir compte des Doubles et Triples Réflexions (DR et TR) ainsi que la Méthode des Courants Equivalents pour les Simples Diffractions d'arêtes (SD). Ce modèle asymptotique est analytique, permettant de ce fait une évaluation rapide de la signature électromagnétique polarimétrique bistatique du

---

<sup>14</sup>Nous verrons dans le chapitre 2 pourquoi un angle rasant d'excitation implique une augmentation du nombre d'inconnues.

trièdre avec une bonne précision. Ce modèle sera donc généralisé et appliqué pour l'évaluation de la signature de réflecteur polyédrique.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons brièvement rappelé quelques éléments d'électromagnétisme nécessaires à la résolution de notre problème. Des notions et des définitions permettant de caractériser le pouvoir réflecteur d'obstacles et de surfaces ont été évoquées, telles celles du coefficient de diffusion, de la SER et de la signature polarimétrique. Les méthodes les plus populaires pour résoudre les problèmes de diffusion d'onde ont été succinctement présentées et classifiées. Afin de pouvoir préciser le choix dans les méthodes à utiliser, la scène étudiée pour le cas 2D et 3D a finalement été décrite en définissant les réflecteurs ainsi que la caractérisation et la génération d'une surface rugueuse. Avant de s'attaquer au problème plus réaliste d'une scène 3D, il convient de parfaitement maîtriser le cas 2D. Cela permettra notamment de bien comprendre les phénomènes physiques mis en jeu en co-polarisations, ainsi que de réduire significativement le nombre d'inconnues. Avec moins d'inconnues dans le problème, nous verrons notamment que des méthodes numériques rigoureuses seront développées et valideront ainsi les modèles asymptotiques mis en œuvre.



## Chapitre 2

# Diffusion par un diffuseur placé en espace libre - cas scalaire

---



*Le premier chapitre a présenté les principaux outils nécessaires pour modéliser la diffraction par un objet de forme quelconque. Dans ce chapitre, ces outils seront appliqués, dans un premier temps, pour caractériser la diffusion par une surface rugueuse seule. La diffraction par un obstacle en espace libre sera ensuite exposée en commençant par le cas canonique du cylindre infini ; ceci validant la méthode rigoureuse entreprise. Cette méthode de référence servira finalement à valider le modèle asymptotique analytique proposé pour la diffraction par une croix en espace libre. Mener l'étude sur des problèmes 2D, permettra de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu et d'acquérir une maîtrise des méthodes de modélisation afin d'envisager par la suite la diffusion par des scènes plus complexes.*

---

### 2.1 Diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle

Commençons tout d'abord par étudier la diffusion par une surface rugueuse. Ce problème n'est pas simple, et de nombreuses études ont été réalisées. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, des méthodes permettent d'évaluer la diffusion par une surface rugueuse. Nous disposons notamment des méthodes rigoureuses (voir paragraphe 1.4.1) mais également de méthodes asymptotiques spécifiques à ces surfaces (voir paragraphe 1.4.3). Afin de disposer d'une méthode de référence pour valider des modèles asymptotiques il est primordial de résoudre dans un premier temps le problème de la diffusion par une méthode rigoureuse. Dans le chapitre 1 nous avons eu l'occasion de voir rapidement un panel de méthodes dites "exactes". Puisque dans notre étude les milieux sont considérés comme étant homogènes, une méthode par formulation intégrale semble appropriée (voir paragraphe 1.4.1.2). Un moyen de résoudre ces équations intégrales est la MdM. C'est l'objet de la section suivante.

### 2.1.1 Diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle par la Méthode des Moments

Comme nous l'avions évoqué au paragraphe 1.4.1.2, la méthode des moments est basée sur une discrétisation des équations intégrales. Celles-ci s'obtiennent à partir de la représentation intégrale des champs sur la surface, abordée au paragraphe 1.2.2.

#### 2.1.1.1 Équations intégrales - cas d'une surface parfaitement conductrice

Considérons l'équation (1.26) où l'objet de surface  $S$  est un conducteur parfait. Alors dans le cas Transverse Electrique (TE), le champ total  $\psi$  vérifie la *condition aux limites de Dirichlet* (obtenue à partir des équations (1.13c) et (1.22)) :

$$\psi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = 0, \quad (2.1)$$

et, dans le cas Transverse Magnétique (TM), la *condition aux limites de Neumann* (obtenue à partir des équations (1.13c), (1.1b) et (1.23)) :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r} \in S} = 0, \quad (2.2)$$

où  $\frac{\partial \bullet}{\partial n}$  est la dérivée normale d'une grandeur scalaire qui délivre comme résultat une grandeur scalaire. La dérivée normale du champ est définie par :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \psi, \quad (2.3)$$

où  $\nabla_{\mathbf{r}} \psi$  est le gradient par rapport à  $\mathbf{r}$  de  $\psi$ . Ainsi, à partir des équations (1.26) et (2.1) on obtient l'équation intégrale du champ électrique généralement nommée EFIE (pour Electric Field Integral Equation) pour le cas TE :

$$\text{(EFIE TE)} \quad \psi_i(\mathbf{r}') = + \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S. \quad (2.4)$$

En évaluant la dérivée normale de cette équation on obtient alors l'équation intégrale du champ magnétique généralement nommée MFIE (pour Magnetic Field Integral Equation) toujours pour le cas TE :

$$\text{(MFIE TE)} \quad \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S. \quad (2.5)$$

La dérivée normale de la fonction de Green en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  présente une singularité. Pour pallier ce problème, l'intégrale est décomposée en deux : le terme  $(\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'})$  et une intégrale prise au sens de la *valeur principale de Cauchy* [95] définie ainsi :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (2.6)$$

Pour le cas TM, toujours en utilisant l'équation (1.26) mais en utilisant la condition aux limites de Neumann (2.2) on obtient la MFIE en TM :

$$\text{(MFIE TM)} \quad \psi_i(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}') - \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) ds \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S, \quad (2.7)$$

et si l'on applique l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n'}$ , on obtient la EFIE TM :

$$(EFIE \text{ TM}) \quad \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r}')}{\partial n'} = - \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \psi(\mathbf{r}) \, ds \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S. \quad (2.8)$$

Ces équations intégrales font clairement apparaître que l'inconnue recherchée est à la fois dans l'intégrande et résultat de l'intégrale. Pour résoudre un tel système, il convient d'utiliser la Méthode des Moments.

### 2.1.1.2 Discrétisation par la Méthode des Moments et résolution

La Méthode des Moments (Mdm) permet de résoudre un problème linéaire de la forme  $\mathcal{L}f = g$  où  $\mathcal{L}$  est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire,  $f$  est l'inconnue et  $g$  une fonction donnée. Dans notre cas l'inconnue est le champ  $\psi$  en TM (voir (2.7) et (2.8)) et la dérivée normale du champ en TE (voir (2.4) et (2.5)). Et  $g$  est le champ incident  $\psi_i$  pour les équations (2.4) et (2.7). La fonction recherchée  $f$  est projetée sur une base de fonctions  $\{f_n\}$  (les fonctions de projection ou fonctions de base).  $f$  est donc approchée par une somme de fonctions de base pondérées par des coefficients  $a_n$  à déterminer :

$$f \simeq \tilde{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n. \quad (2.9)$$

Une nouvelle équation est obtenue en remplaçant cette approximation dans  $\mathcal{L}f = g$  où une erreur de troncature sur la somme  $\epsilon_N$  est introduite, supposée nulle dans la suite. Cette nouvelle équation est ensuite projetée sur une base de fonctions  $\{w_m\}_{m=1..M}$  (fonctions test) qui permettent de minimiser l'influence de l'erreur  $\epsilon_N$ . On obtient finalement une équation matricielle  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  où  $\bar{\mathbf{Z}}$  est la *matrice impédance*. Cette équation peut également s'écrire sous la forme :

$$\sum_{n=1}^N Z_{m,n} X_n = b_m \quad \forall m = 1..N, \quad (2.10)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons de la surface,  $X_n$  représente les inconnues sur la surface et  $b_m$  la donnée du problème, à savoir le champ incident exprimé sur la surface :

$$\begin{cases} \text{CAS TE : } & X_n = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \\ \text{CAS TM : } & X_n = \psi(\mathbf{r}_n) \end{cases}, \quad (2.11)$$

$$b_m = \psi_i(\mathbf{r}_m), \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{r}_n$  (point source sur la surface) et  $\mathbf{r}_m$  (point d'observation sur la surface) sont des vecteurs exprimant, respectivement, la position des points d'indices  $n$  et  $m$  de la surface :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_n = x_n \hat{\mathbf{x}} + z_n \hat{\mathbf{z}} \\ x_n = -\frac{L}{2} + (n - \frac{1}{2})\Delta x, \quad n = 1..N \end{cases}, \quad (2.13a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_m = x_m \hat{\mathbf{x}} + z_m \hat{\mathbf{z}} \\ x_m = -\frac{L}{2} + (m - \frac{1}{2})\Delta x, \quad m = 1..N \end{cases}. \quad (2.13b)$$

$L$  est la longueur de la surface,  $\Delta x$  est le pas d'échantillonnage égal à  $L/N$ , et les hauteurs de la surface rugueuse  $z_n$  et  $z_m$  sont générées par la méthode spectrale vue au paragraphe 1.5.2.2 par l'équation (1.66). Dans l'équation (2.10),  $Z_{m,n}$  est l'élément de la ligne  $m$  et colonne  $n$  de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  de dimension  $N \times N$ . Cette matrice dépend de l'équation intégrale qui a été choisie pour aboutir à l'équation (2.10) ainsi que du choix des fonctions de base et des fonctions test. En effet plusieurs options sont possibles [5], le choix optimal résulte d'un compromis entre un gain de temps (le nombre d'inconnues peut augmenter si les fonctions de projection ne sont pas bien adaptées au problème), une précision suffisante et une simplicité de mise en œuvre. C'est pourquoi nous retenons dans ce manuscrit la méthode des moments par *collocation* où les fonctions test  $w_m$  sont des fonctions de Dirac et les fonctions de base  $f_n$  sont des fonctions rectangles (aussi nommées *pulse basis functions* en anglais). Considérant que pour le cas d'une surface rugueuse, la normale est orientée vers le milieu incident donc vers les  $z$  positifs (la normale s'exprime donc  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\gamma\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\gamma^2}}$  où  $\gamma = z'(x) = \frac{dz}{dx}$  est la pente au point d'abscisse  $x$ ); la matrice impédance pour la EFIE TE est nommée  $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Dirichlet}}$  et l'expression de ses coefficients est donnée par

$$\text{EFIE TE : } Z_{m,n}^{\text{Dirichlet}} = \frac{i\Delta x\alpha_n}{4} \begin{cases} 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(0.164k_0\alpha_m\Delta x) & \text{pour } m = n \\ H_0^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } m \neq n \end{cases}, \quad (2.14)$$

où

$$\alpha_n = \sqrt{1 + (\gamma_n)^2}, \quad \gamma_n = \frac{\partial z_n}{\partial x_n}. \quad (2.15)$$

Et pour la MFIE TM, la matrice impédance est nommée  $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Neumann}}$  et l'expression de ses coefficients est donnée par

$$\text{MFIE TM : } Z_{m,n}^{\text{Neumann}} = \begin{cases} +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{(\gamma_m)'}{1+(\gamma_m)^2} & \text{pour } m = n \\ -\frac{ik_0\Delta x}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \end{cases}, \quad (2.16)$$

où  $(\gamma)' = \frac{\partial \gamma}{\partial x}$ . En résumé, pour une surface parfaitement conductrice, pour une onde incidente polarisée en TE le champ total sur la surface s'annule (condition de Dirichlet vue à l'équation (2.1)) et  $\mathbf{X}$  représente alors la dérivée normale du champ total (voir (2.11)). La matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  est définie par la discrétisation par la MdM de l'EFIE TE et donnée par (2.14). Connaissant le champ incident sur la surface  $\mathbf{b}$  et la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$ , on peut déterminer l'inconnue par inversion de la matrice impédance :

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{b}. \quad (2.17)$$

On aboutit exactement au même système pour une onde incidente polarisée en TM, mis à part que la matrice impédance est cette fois définie par la discrétisation par la MdM de la MFIE TM et donnée par (2.16).  $\mathbf{X}$  représente le champ total sur la surface (voir (2.11)), la dérivée normale du champ total s'annulant avec la condition aux limites de Neumann vue à l'équation (2.2).

La méthode classique pour réaliser l'inversion de l'équation (2.17) est de décomposer la matrice impédance en deux matrices  $\bar{\mathbf{L}}$  (pour "Low") et  $\bar{\mathbf{U}}$  (pour "Up"), respectivement triangulaires inférieure et supérieure :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{U}}. \quad (2.18)$$

Cette "décomposition LU" permet ensuite de pouvoir inverser par substitution les deux matrices  $\bar{\mathbf{L}}$  et  $\bar{\mathbf{U}}$  pour finalement obtenir  $\mathbf{X}$  avec (2.17). En ne comptant que les multiplications, plus

coûteuses en temps de calcul que les additions, le nombre d'opérations de cette méthode est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^3)$ . A noter que dans ce manuscrit, par abus de langage, nous parlerons de MDM en sous-entendant que le système obtenu est résolu par une décomposition LU.

Les matrices impédances ont été précédemment données, il reste à définir l'expression de l'onde incidente afin de connaître le champ incident exprimé sur la surface (sur chaque échantillon).

### 2.1.1.3 Onde de Thorsos

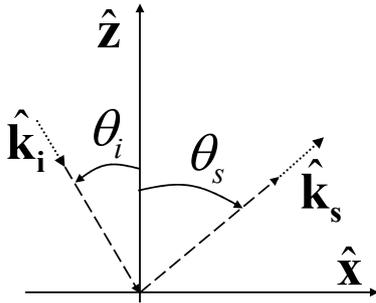


FIG. 2.1 – Définition de  $\theta_i$  et  $\theta_s$  pour une scène 2D. Ces angles orientés sont illustrés ici dans leur sens positif.

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1.5.2.2, la surface générée (sur laquelle les équations intégrales discrétisées sont appliquées) est d'étendue finie. Si cette surface est excitée par une onde plane, les extrémités de la surface seront également éclairées ce qui induira un "effet de bord". C'est en fait le phénomène de diffraction que l'on rencontre quand on étudie la diffraction par une plaque. Mais contrairement au cas de la plaque, ici, ce phénomène n'a pas lieu d'être puisque la surface de mer est supposée être de longueur infinie. Pour s'affranchir de ce problème, une solution est de faire en sorte que le faisceau incident éclaire principalement la région centrale de la surface et que les champs surfaciques aux extrémités soient nuls. Or, l'onde plane (renvoyant à l'équation 1.6a) est bien solution de l'équation de propagation mais elle est d'étendue infinie et ne répond donc pas à cette contrainte. L'onde incidente  $\psi_i$  doit donc être définie d'une autre manière. Pour cela, Thorsos [117] a proposé l'expression suivante :

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \underbrace{e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}_{\text{Onde plane}} \underbrace{e^{-\frac{(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2}}}_{\text{Terme d'atténuation}} \underbrace{e^{iw(\mathbf{r})\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}_{\text{Terme correctif}}, \quad (2.19)$$

avec  $w(\mathbf{r}) = \left[ \frac{2(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2} - 1 \right] / (kg \cos \theta_i)^2$  et l'angle  $\theta_i$  est défini sur la figure 2.1. L'atténuation est de forme gaussienne et s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation portée par le vecteur  $\mathbf{k}_i$ . Le terme correctif contenant  $w(\mathbf{r})$  permet à l'onde incidente de "mieux" vérifier l'équation de Helmholtz. On peut d'ailleurs montrer que l'onde incidente proposée par Thorsos vérifie l'équation de Helmholtz si  $kg \cos \theta_i \gg 1$  [1, 95]. Un critère est alors imposé  $\frac{1}{kg \cos \theta_i} \leq C$ , avec  $C$  une constante petite par rapport à 1. Dans la littérature on trouve la valeur  $C = 0.037$  [33, 118]. Cette condition n'est pas vérifiée :

- Pour des incidences rasantes ( $k$  et  $g$  sont fixes donc si  $\theta_i \rightarrow \pi/2$  alors  $kg \cos \theta_i \rightarrow 0$ )
- Si le paramètre  $g$  est trop petit par rapport à la longueur d'onde du milieu incident  $\lambda$  (cela correspond à un faisceau trop étroit).

Finalement, à partir des équations (2.12) et (2.19), on peut connaître le champ incident sur chaque échantillon de la surface afin de résoudre le système (2.17). Pour les calculs du coefficient de diffusion, il est important de savoir évaluer la puissance de l'onde incidente sur la surface rugueuse (voir équation (1.40)). L'obtention de son expression est donnée dans [95] (une étude pour le cas des incidences rasantes est également exposée dans cet ouvrage) :

$$P_i = \frac{\cos \theta_i}{2\eta_0} g \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{1 + 2 \tan^2 \theta_i}{2k^2 g^2 \cos^2 \theta_i} \right], \quad (2.20)$$

où  $\eta_0$  est l'impédance d'onde dans le milieu incident.

Une autre manière de s'affranchir de ces effets de bord est de considérer un plan localement perturbé, pouvant être excité par une onde plane, et sur lequel les équations intégrales sont modifiées. Dans ces nouvelles équations intégrales, les inconnues sont les écarts des composantes tangentielles des champs sur la surface par rapport à celles de la solution du plan [119]. Cette méthode prometteuse est encore en cours d'élaboration et pourra être une solution envisageable pour s'affranchir de l'utilisation de l'onde de Thorsos. Cette méthode serait particulièrement intéressante pour le cas des incidences rasantes. En effet, avec l'onde de Thorsos, on choisit classiquement  $g = L/6$  pour obtenir l'atténuation sur les bords de la surface rugueuse de longueur  $L$ , tandis que le critère  $g = 1/(0.037k \cos(\theta_i))$  est également à respecter pour que l'onde vérifie au mieux l'équation de Helmholtz. Ainsi pour  $\theta_i = 20^\circ$ , on obtient une longueur de surface de  $L \approx 28\lambda$  pour respecter les deux critères énoncés, soit  $N = 280$  avec un échantillonnage de la surface de  $\Delta x = \lambda/10$ . Alors que pour  $\theta_i = 89^\circ$ , la longueur de surface est de  $L \approx 1479\lambda$  pour respecter les deux critères soit  $N = 14790$  avec  $\Delta x = \lambda/10$ . Ainsi, en incidence rasante, l'utilisation de l'onde de Thorsos implique un très grand nombre d'inconnues. L'utilisation de méthodes accélérées est alors primordiale. Dans cette thèse nous n'aborderons pas la problématique des incidences rasantes même si les méthodes envisagées par la suite pourraient être utilisées pour ces configurations extrêmes.

#### 2.1.1.4 Coefficient de diffusion

Connaissant les expressions du champ incident et l'inverse de la matrice impédance, les inconnues du problème, à savoir le champ total sur la surface (nul en TE) et sa dérivée normale (nulle en TM), sont déterminées. L'utilisation du principe de Huygens (1.28) permet alors de connaître le champ rayonné n'importe où dans l'espace d'étude. On rappelle ici l'expression du coefficient de diffusion (voir paragraphe 1.3.2) :

$$\sigma_{cd}(\theta_i, \theta_s) = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r' |\psi_s|^2}{2\eta_0 P_i}, \quad (2.21)$$

où les angles  $\theta_i$  et  $\theta_s$  sont définis sur la figure 2.1. Dans la suite de ce manuscrit, les angles  $\theta_i$  et  $\theta_s$ , pour des scènes 2D, seront toujours définis ainsi. Or lorsque  $r' \rightarrow \infty$  nous pouvons utiliser l'approximation de champ lointain (voir 1.2.2). Nous rappelons que sous cette hypothèse, la fonction de Green peut être approximée en

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{ie^{ik_0 r' - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_0 r'}} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.22)$$

et la dérivée normale de la fonction de Green en

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -i\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_s g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.23)$$

Ainsi le champ diffusé obtenu par le principe de Huygens devient

$$\psi_s(\mathbf{r}') = \frac{ie^{jk_0 r' - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_0 r'}} \psi_s^\infty(\theta_s), \quad (2.24)$$

avec

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = \int_S \left[ -i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(\mathbf{r}) - \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} dS, \quad (2.25)$$

et

$$-i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} = ik_0 \frac{\gamma \sin \theta_s - \cos \theta_s}{\sqrt{1 + \gamma^2}}. \quad (2.26)$$

Puisque la normale est dirigée dans le milieu incident (et donc dans les  $z$  positifs pour une surface rugueuse)

$$\mathbf{k}_s = k_0 \begin{bmatrix} \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \begin{bmatrix} -\gamma \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Comme

$$ds = \left| \sqrt{1 + \gamma^2} dx \right| = \sqrt{1 + \gamma^2} dx, \quad (2.28)$$

on obtient finalement

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = \int_S \left\{ ik_0 [\gamma \sin \theta_s - \cos \theta_s] \psi(\mathbf{r}) - \sqrt{1 + \gamma^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right\} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} dx. \quad (2.29)$$

Le coefficient de diffusion est alors donné par [95, 120]

$$\sigma_{cd}(\theta_i, \theta_s) = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \frac{|\psi_s^\infty(\theta_s)|^2}{P_i}, \quad (2.30)$$

où  $\eta_0$  et  $k_0$  sont l'impédance d'onde et le nombre d'onde dans le milieu incident,  $P_i$  est la puissance incidente donnée par (2.20) dans le cas d'une onde de Thorsos.

### 2.1.1.5 Cas d'un milieu inférieur diélectrique

Étudions à présent le cas où le milieu inférieur est diélectrique (nous parlerons alors de "surface diélectrique" par abus de langage). Le milieu  $\Omega_0$  est le milieu incident (contenant l'onde incidente) de permittivité  $\epsilon_{r0}\epsilon_0$  (où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide). Dans ce manuscrit, le milieu  $\Omega_0$  sera toujours considéré comme assimilable au vide soit  $\epsilon_{r0} = 1$ . On définit dans le milieu  $\Omega_1$ , de permittivité  $\epsilon_{r1}\epsilon_0$ , le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  de module  $k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}$ . Nous supposons par la suite que le milieu inférieur est non magnétique et donc  $\mu_{r1} = 1$ . Contrairement au cas où le milieu inférieur est parfaitement conducteur, le champ n'est pas nul sous la surface rugueuse, et le champ transmis est alors également une inconnue du problème. Le terme de champ transmis représente le champ diffusé dans le milieu inférieur tandis que le champ diffusé représente le champ diffusé dans le milieu supérieur :

$$\begin{cases} \psi_0 = \psi_i + \psi_s \\ \psi_1 = \psi_{tr} \end{cases}, \quad (2.31)$$

où  $\psi_0$  et  $\psi_1$  représentent respectivement les champs totaux dans le milieu supérieur  $\Omega_0$  et dans le milieu inférieur  $\Omega_1$ . Ces champs sont reliés par les conditions aux limites (vues dans le cas tridimensionnel au paragraphe 1.1.3) [92]. Ainsi à partir de (1.12c), (1.12d), (1.1b) :

$$\begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{1}{\rho_{10}} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S, \quad (2.32)$$

où  $\rho_{10} = 1$  dans le cas TE et  $\rho_{10} = \epsilon_{r1}/\epsilon_{r0}$  dans le cas TM. A partir de l'équation (1.26) et de l'équation intégrale exprimée dans le milieu  $\Omega_1$  (l'analogue en 2D de l'équation (A.20) de l'annexe A), il est possible de montrer qu'on obtient de nouvelles expressions liant le champ total

sur la surface [95], noté  $\psi(\mathbf{r}')$  ( $= \psi_0(\mathbf{r}') = \psi_1(\mathbf{r}')$  d'après (2.32)), au champ incident exprimé sur la surface  $\psi_i(\mathbf{r}')$ . Elles s'expriment  $\forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S$  :

$$\begin{cases} \psi_i(\mathbf{r}') = +\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) ds + \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds \\ 0 = -\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) ds + \rho_{10} \int_S g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds \end{cases} \quad (2.33)$$

Chaque équation de ce système peut être décomposée en deux composantes : une concernant le champ total sur la surface  $\psi$  et une pour la dérivée normale du champ total sur la surface  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ . Cette décomposition montre que pour une surface diélectrique, les équations intégrales s'écrivent comme une combinaison linéaire des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, c'est pourquoi nous retrouvons les termes de la EFIE TE (2.14) et la MFIE TM (2.16) :

$$\begin{cases} \psi_i(\mathbf{r}') = +\underbrace{\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) ds}_{\text{Neumann dans le milieu } 0 \rightarrow \bar{\mathbf{A}}} + \underbrace{\int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds}_{\text{Dirichlet dans le milieu } 0 \rightarrow \bar{\mathbf{B}}} \\ 0 = -\underbrace{\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) ds}_{\text{Neumann dans le milieu } 1 \rightarrow \bar{\mathbf{C}}} + \underbrace{\rho_{10} \int_S g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds}_{\text{Dirichlet dans le milieu } 1 \rightarrow \bar{\mathbf{D}}} \end{cases} \quad (2.34)$$

En appliquant la méthode des moments comme pour la surface parfaitement conductrice, on aboutit au système discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \left( A_{m,n} \psi(\mathbf{r}_n) + B_{m,n} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \right) = \psi_i(\mathbf{r}_m) \quad \forall m = 1..N \\ \sum_{n=1}^N \left( C_{m,n} \psi(\mathbf{r}_n) + \rho_{10} D_{m,n} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \right) = 0 \quad \forall m = 1..N \end{cases}, \quad (2.35)$$

où  $A_{m,n}$ ,  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$  et  $D_{m,n}$  sont les coefficients des quatre sous-matrices  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{D}}$  toutes de taille  $N \times N$ . En comparant les équations (2.34) et (2.7), il est aisé de voir que la sous-matrice  $\bar{\mathbf{A}}$  est en fait la matrice impédance obtenue dans le cas TM avec la MFIE pour une surface PC, on a donc :

$$A_{m,n} = \begin{cases} +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{(\gamma_m)'}{1 + (\gamma_m)^2} & \text{pour } m = n \\ -\frac{ik_0 \Delta x}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.36)$$

La sous-matrice  $\bar{\mathbf{B}}$ , quant à elle, est en fait la matrice impédance obtenue dans le cas TE avec la EFIE pour une surface PC, on a donc :

$$B_{m,n} = \frac{i\Delta x \alpha_n}{4} \begin{cases} 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(0.164k_0 \alpha_m \Delta x) & \text{pour } m = n \\ H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.37)$$

En tenant compte du changement de signe dans le terme dénommé "Neumann dans le milieu 1" de l'équation (2.34), et que le milieu considéré est cette fois le milieu 1 ( $k_0$  est changé en  $k_1$ ), on

obtient de même les coefficients des sous-matrices  $\bar{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{D}}$

$$C_{m,n} = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{(\gamma_m)'}{1 + (\gamma_m)^2} & \text{pour } m = n \\ -\frac{ik_1 \Delta x}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \end{cases}, \quad (2.38)$$

et

$$D_{m,n} = \frac{i\Delta x \alpha_n}{4} \begin{cases} 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(0.164k_1 \alpha_m \Delta x) & \text{pour } m = n \\ H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } m \neq n \end{cases}. \quad (2.39)$$

Le système discrétisé (2.35) peut également s'écrire sous la forme matricielle  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  où la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$  est de taille  $2N \times 2N$  :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{C}} & \rho_{10}\bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Le vecteur  $\mathbf{X}$  de taille  $2N \times 1$  représente les inconnues sur la surface à savoir le champ total sur la surface ainsi que sa dérivée normale et le vecteur  $\mathbf{b}$  de taille  $2N \times 1$  contient le champ incident :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{r}_N) \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \psi_i(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Comme pour le cas d'une surface PC, l'inversion directe par décomposition LU permet d'évaluer les valeurs de  $\mathbf{X}$ . La complexité de la méthode est ici de  $\mathcal{O}((2N)^3)$ . Connaissant le champ total sur la surface ainsi que sa dérivée normale, l'utilisation du principe de Huygens (1.28) permet de connaître le champ rayonné n'importe où dans l'espace d'étude. En champ lointain il est préférable d'utiliser (2.29).

### 2.1.1.6 Approximation haute impédance

Si le milieu inférieur présente un module de permittivité très fort devant celui du milieu incident, alors le nombre d'inconnues du système à résoudre peut devenir trop important. En effet, dans le cas d'une surface diélectrique il convient de suréchantillonner la surface en choisissant un pas  $\Delta x$  plus petit<sup>1</sup>. Dans ce cas il convient d'approcher le système (2.33) par une seule équation intégrale dont l'inconnue est soit  $\psi(\mathbf{r})$  ou  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ . L'hypothèse utilisée est la condition d'impédance sur la surface (également appelée IBC pour *Impedance Boundary Condition*) et permet de lier le champ total surfacique à sa dérivée normale par une loi de proportionnalité

<sup>1</sup>On pose généralement  $\Delta x = \lambda_1/10$  où  $\lambda_1$  est la longueur d'onde dans le milieu diélectrique. En effet, dans le milieu de l'objet, la fonction de Green a des variations spatiales beaucoup plus rapides que dans le milieu supérieur du à la présence du terme  $k_1$  dans l'argument de la fonction de Hankel. Il convient alors de suréchantillonner la surface. Or  $k_1 = k_0 |\sqrt{\epsilon_{r1}}|$ , soit  $\lambda_1 = \lambda_0 / |\sqrt{\epsilon_{r1}}|$ , alors  $\Delta x = \lambda_1/10 = \lambda_0 / (10 |\sqrt{\epsilon_{r1}}|)$ .

[1, 95, 121] en fonction de la polarisation de l'onde :

$$\text{Polarisation TE} \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r} \in S, \quad (2.42)$$

$$\text{Polarisation TM} \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}} \psi(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in S, \quad (2.43)$$

avec  $\left| \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} \right| \ll 1$ . Dans le cas TE, le système (2.33) se simplifie alors en

$$\psi_i(\mathbf{r}') = \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds \right\} + \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} ds, \quad (2.44)$$

et dans le cas TM :

$$\psi_i(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}') - \int_S \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) ds + \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}} \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) ds. \quad (2.45)$$

Ces deux équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle  $\bar{\mathbf{Z}} \mathbf{X} = \mathbf{b}$ . La matrice impédance de taille  $N \times N$  étant une combinaison linéaire des matrices  $\bar{\mathbf{A}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}$  :

$$\text{Polarisation TE} \quad \bar{\mathbf{Z}} = \alpha \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}}, \quad (2.46)$$

$$\text{Polarisation TM} \quad \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{A}} + \beta \bar{\mathbf{B}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}}. \quad (2.47)$$

Le vecteur  $\mathbf{b}$  de taille  $N \times 1$  contient le champ incident  $\psi_i(\mathbf{r}_n)$  et le vecteur  $\mathbf{X}$  de taille  $N \times 1$  contient les inconnues :

$$\text{Polarisation TE :} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix}, \quad \text{Polarisation TM :} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \psi_i(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

La complexité de la méthode des moments avec inversion directe par décomposition LU sous l'approximation IBC est identique au cas parfaitement conducteur, à savoir  $\mathcal{O}(N^3)$ . Cette approximation est très utile pour modéliser une mer réaliste puisqu'elle est considérée comme Très Conductrice (TC) [122].

### 2.1.1.7 Vers une méthode dite exacte et rapide

Si l'angle d'incidence est rasant, le nombre d'inconnues peut rapidement augmenter. Lorsque la matrice impédance est inversée par décomposition LU, le nombre d'inconnues ne peut excéder 2500 avec le logiciel Matlab sur un PC standard de bureau (processeur 3 GHz et 2 Go de mémoire vive). Il est donc nécessaire d'accélérer le calcul par l'utilisation de méthodes numériques exactes et rapides afin de diminuer la complexité de l'inversion matricielle et le stockage mémoire. L'idée

est de s'affranchir de la décomposition LU en résolvant le système matriciel  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  par une procédure itérative. Pour ce faire, plusieurs méthodes sont envisageables : La MOMI (Method of Ordered Multiple Interactions) [123, 124] et la FB (Forward-Backward) [32, 125, 126] qui distinguent, pour un point de la surface, les contributions des éléments situés à gauche et à droite de ce point. La méthode BMIA (Banded Matrix Iterative Approach) [127, 128], et la version améliorée, la BMIA/CAG (BMIA/CAnonical Grid)[33, 129] décomposent la matrice impédance en une matrice bande représentant les interactions fortes et une matrice restante pour les interactions faibles. On peut également citer la FMM (Fast Multipole Method), la MLFMM (Multi Level FMM), [27, 28, 29, 30] et la SDFMM (Steepest Descent FMM), qui sont basées sur le même principe. Cette décomposition en interactions fortes et faibles est aussi utilisée dans la FB-SA (Forward-Backward + Spectral Acceleration) [31, 130, 131, 132, 133] qui est basée sur la FB. La complexité de ces méthodes est comparée dans le tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Comparaison de la complexité des méthodes de résolution du système matriciel obtenu par la MdM.

Méthode	Complexité
Décomposition LU, pivot de Gauss	$\mathcal{O}(N^3)$
MOMI	$\mathcal{O}(N^2)$
Forward-Backward	$\mathcal{O}(N^2)$
FMM	$\mathcal{O}(N^{3/2})$
BMIA/CAG	$\mathcal{O}(N \log(N))$
MLFMM	$\mathcal{O}(N \log(N))$
SDFMM	$\mathcal{O}(N)$
<u>FB-SA</u>	$\mathcal{O}(N)$

De par sa complexité réduite très intéressante, notre choix s'est porté vers la FB-SA. Cependant, avant de comprendre l'utilisation de l'accélération spectrale, il est nécessaire de bien comprendre la méthode Forward-Backward.

## 2.1.2 Forward-Backward - Spectral Acceleration (FB-SA)

### 2.1.2.1 Principe de la méthode Forward-Backward (FB)

La méthode Forward-Backward accélère le calcul de l'inversion matricielle  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  et le produit matrice-vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{b}$  qui s'ensuit. Cette méthode développée par Holliday et al. [32] pour une surface PC a été étendue plus récemment au cas d'une surface diélectrique par Iodice [126]. La démarche de la méthode FB est de décomposer le vecteur "inconnues"  $\mathbf{X}$  en contributions nommées *forward* et *backward*. En supposant que l'onde incidente se propage de la gauche vers la droite, pour tout point de la surface, les contributions *forward*  $\mathbf{X}^f$  sont dues à la diffraction de l'onde incidente par les points de la surface situés à gauche du point d'observation (le point "observateur" sur la surface d'abscisse  $x_m$  est à droite du point source d'abscisse  $x_n : x_m > x_n$ ). Et les contributions *backward*  $\mathbf{X}^b$  sont uniquement dues au rayonnement des points de la surface situés à droite du point considéré (le point "observateur" sur la surface d'abscisse  $x_m$  est à gauche du point source d'abscisse  $x_n : x_m < x_n$ ).

La matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  est décomposée comme  $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^f + \bar{\mathbf{Z}}^d + \bar{\mathbf{Z}}^b$ .  $\bar{\mathbf{Z}}^f$  est une matrice triangulaire inférieure de diagonale nulle sensible aux contributions provenant de la gauche,  $\bar{\mathbf{Z}}^d$  est une matrice diagonale et  $\bar{\mathbf{Z}}^b$  est une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle

sensible aux contributions venant de la droite. Le système  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  peut alors s'écrire  $(\bar{\mathbf{Z}}^f + \bar{\mathbf{Z}}^d + \bar{\mathbf{Z}}^b)(\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) = \mathbf{b}$  ou encore [32] :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b} - \bar{\mathbf{Z}}^f (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) \\ \bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^b = -\bar{\mathbf{Z}}^b (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) \end{cases} \quad (2.50)$$

Ce système d'équations est ensuite résolu par substitution itérative des contributions venant de la gauche : le calcul de  $\mathbf{X}^f$  est effectué en posant  $\mathbf{X}^b = \mathbf{0}$  dans la première équation du système (2.50). Puis on calcule les contributions venant de la droite  $\mathbf{X}^b$ , en connaissant  $\mathbf{X}^f$  calculé précédemment, avec la deuxième équation du système (2.50). On réitère ensuite le calcul de  $\mathbf{X}^f$  avec la première équation du système (2.50) en connaissant  $\mathbf{X}^b$  calculé précédemment et ainsi de suite. Pour plus de détails sur cette procédure itérative, la lecture de [32, 120, 134] est conseillée. Précisons tout de même que la complexité de la méthode pour chaque itération et pour les calculs de  $\mathbf{X}^f$  et  $\mathbf{X}^b$  est  $2 \sum_{n=1}^{N-1} n = N(N-1)$  soit  $\mathcal{O}(N^2)$  pour  $N$  grand.

Pour le cas d'un milieu inférieur diélectrique, nous rappelons que la matrice impédance s'écrit

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}^A & \bar{\mathbf{Z}}^B \\ \bar{\mathbf{Z}}^C & \rho_{10} \bar{\mathbf{Z}}^D \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Ainsi, la première ligne de l'équation (2.50) est représentée schématiquement sur la figure 2.2 conduisant à un système de deux équations dont les inconnues sont  $\{X_i^{1f}, X_i^{2f}\}$  ( $i \in [2; N]$ ) [126, 120, 134].  $\{\mathbf{X}^{1bf}, \mathbf{X}^{2bf}\}$  sont des vecteurs de longueur  $N$  et  $\mathbf{X}^{bf} = \mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{1bf} & \mathbf{X}^{2bf} \end{bmatrix}^t$  est un vecteur de longueur  $2N$  (l'exposant  $t$  désigne la transposée).  $\{\bar{\mathbf{Z}}^{d,A}, \bar{\mathbf{Z}}^{d,B}, \bar{\mathbf{Z}}^{d,C}, \bar{\mathbf{Z}}^{d,D}\}$  sont des matrices *diagonales* obtenues à partir des matrices  $\{\bar{\mathbf{Z}}^A, \bar{\mathbf{Z}}^B, \bar{\mathbf{Z}}^C, \bar{\mathbf{Z}}^D\}$ .  $\{\bar{\mathbf{Z}}^{f,A}, \bar{\mathbf{Z}}^{f,B}, \bar{\mathbf{Z}}^{f,C}, \bar{\mathbf{Z}}^{f,D}\}$  sont des matrices *triangulaires inférieures* obtenues à partir des matrices  $\{\bar{\mathbf{Z}}^A, \bar{\mathbf{Z}}^B, \bar{\mathbf{Z}}^C, \bar{\mathbf{Z}}^D\}$ .

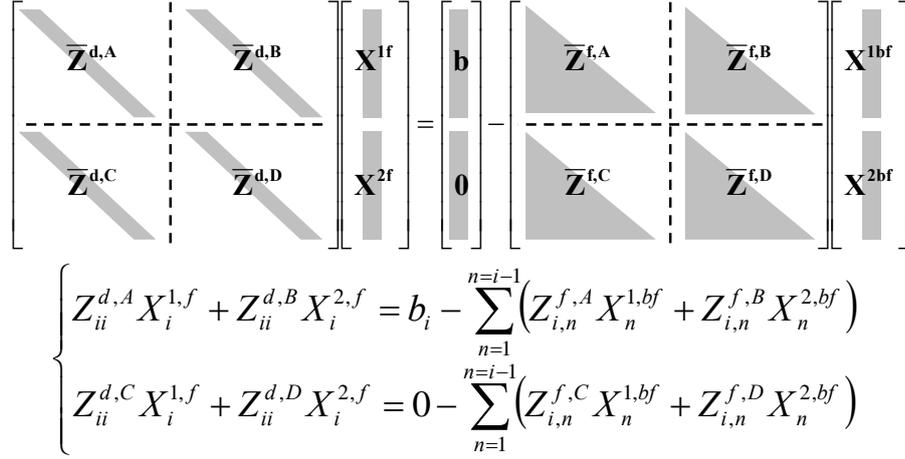
Le système d'équations de la figure 2.2 est résolu suivant la même procédure itérative que dans le cas PC, expliquée précédemment. La substitution itérative des contributions fait intervenir le calcul de la contribution "backward" (très similaire à celui établi sur la figure 2.2 pour le cas "forward"), dans lequel des matrices *triangulaires supérieures*,  $\{\bar{\mathbf{Z}}^{b,A}, \bar{\mathbf{Z}}^{b,B}, \bar{\mathbf{Z}}^{b,C}, \bar{\mathbf{Z}}^{b,D}\}$ , sont considérées.

Notons que la convergence est donnée par l'ordre de la méthode FB :  $P_{\text{FB}}$ , qui est le nombre d'itérations réalisées pour obtenir les valeurs du vecteur contenant les inconnues  $\mathbf{X}$ .

### 2.1.2.2 Principe de la Spectral Acceleration (SA)

Afin d'accélérer le produit matrice-vecteur, la procédure NSA (Novel Spectral Acceleration)<sup>2</sup> combinée à la méthode FB a été proposée par Chou, Johnson et Torrungrueng [31, 130, 131, 132, 133]. Son principe repose sur la décomposition spectrale de la fonction de Green scalaire pour calculer les interactions lointaines entre deux points de la surface. Dans un premier temps, les interactions entre les points de la surface sont séparées en interactions fortes et interactions faibles. Cela revient à décomposer la matrice impédance en deux sous matrices, dont l'une correspond aux interactions fortes (éléments de la matrice près de la diagonale) et l'autre aux interactions faibles. Le paramètre  $x_{d0}$  est alors introduit et est défini comme la distance horizontale séparant ces deux types d'interactions. Considérons le cas TE. D'après l'équation

<sup>2</sup>La méthode porte originalement ce nom, cependant nous avons choisi ici de supprimer le qualificatif "novel" bien qu'il s'agisse de la même méthode, nous parlons alors de *Spectral Acceleration* dont l'acronyme est alors SA.



$$\begin{cases} Z_{ii}^{d,A} X_i^{1,f} + Z_{ii}^{d,B} X_i^{2,f} = b_i - \sum_{n=1}^{n=i-1} (Z_{i,n}^{f,A} X_n^{1,bf} + Z_{i,n}^{f,B} X_n^{2,bf}) \\ Z_{ii}^{d,C} X_i^{1,f} + Z_{ii}^{d,D} X_i^{2,f} = 0 - \sum_{n=1}^{n=i-1} (Z_{i,n}^{f,C} X_n^{1,bf} + Z_{i,n}^{f,D} X_n^{2,bf}) \end{cases}$$

FIG. 2.2 – Illustration du calcul du produit matriciel  $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b}' - \bar{\mathbf{Z}}^f \mathbf{X}^{bf}$  ( $\mathbf{b}' = [\mathbf{b} \ \mathbf{0}]$ ,  $\mathbf{X}^{bf} = \mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f$  et  $\mathbf{X}^{bf} = [\mathbf{X}^{1bf^t} \ \mathbf{X}^{2bf^t}]^t$  qui est un vecteur de longueur  $2N$ ) de la méthode Forward-Backward pour un milieu inférieur diélectrique. Les inconnues sont  $\{X_i^{1f}, X_i^{2f}\}$  avec  $i \in [2; N]$ . Pour le premier ordre,  $\mathbf{X}^b = \mathbf{0}$ .

(2.14) et la procédure de la FB évoquée ci-dessus, la contribution des sources localisées en  $\mathbf{r}_n$  situées à gauche d'un point de réception situé en  $\mathbf{r}_m$  ( $x_m > x_n$ , cela correspond aux contributions Forward) s'écrit

$$X_m^f = \sum_{n=1}^{m-1} X_n A_n H_0^{(1)}(k \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|), \quad (2.52)$$

où  $A_n = \frac{i\Delta x \sqrt{1+\gamma_n^2}}{4}$ . Seuls les indices de la somme changent pour l'expression des contributions Backward  $X_m^b$  sur un point en  $\mathbf{r}_m$  ( $x_m < x_n$ ). Ces contributions, exprimées à l'équation (2.52), peuvent se décomposer en interactions fortes et faibles :

$$X_m^f = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-N_s-1} X_n A_n H_0^{(1)}(k \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}_{\text{Interactions faibles} \Rightarrow \text{SA}} + \underbrace{\sum_{n=m-N_s}^{m-1} X_n A_n H_0^{(1)}(k \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}_{\text{Interactions fortes} \Rightarrow \text{FB}}, \quad (2.53)$$

où  $N_s$  est la partie entière de  $x_{d0}/\Delta x$ , dénotant le nombre d'éléments qui interagissent *fortement* avec le  $m$ -ième élément (considéré comme point observateur). Dans la procédure itérative de la méthode FB-SA, pour les contributions Forward et Backward, les interactions fortes sont calculées de manière exacte, c'est à dire en appliquant la méthode FB classique présentée précédemment. Alors que la contribution des interactions faibles est évaluée de manière approchée en appliquant la SA. Cette accélération spectrale fait intervenir la décomposition spectrale suivante de la fonction de Green :

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) &= \frac{1}{\pi} \int_{C_\phi} e^{ik[(x_n - x_m) \cos \phi + (z_n - z_m) \sin \phi]} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{C_\phi} e^{ik\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| \cos(\phi - \phi_s)} d\phi, \end{aligned} \quad (2.54)$$

où le contour d'intégration  $C_\phi = [-\frac{\pi}{2} + i\infty; -\frac{\pi}{2}[\cup[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]\cup] + \frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} - i\infty]$  est présenté sur la figure 2.3.

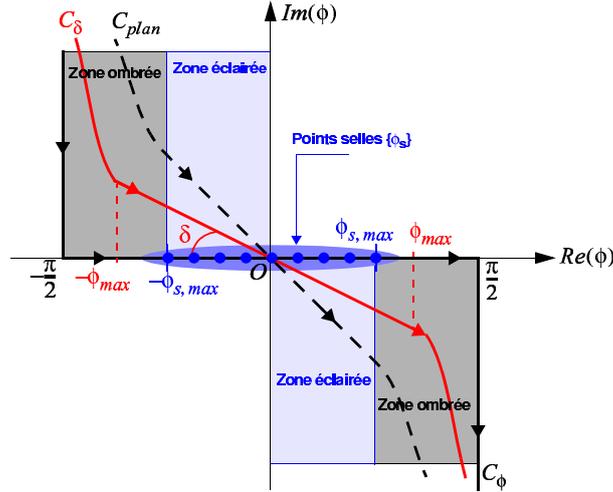


FIG. 2.3 – Contour d’intégration de la fonction de Green scalaire  $H_0^{(1)}$  dans le plan complexe  $\phi$ .  $C_\phi$  est le contour d’origine et  $C_\delta$  le contour déformé. Pour le cas plan,  $\delta = \pi/4$ .

Pour obtenir une convergence de la méthode, une déformation du contour d’intégration  $C_\phi$  est ensuite réalisée en utilisant le chemin  $C_\delta$  de plus grande pente [31] (“steepest descent path”). Par exemple pour une surface plane,  $z_m - z_n = 0$ , le chemin correspondant est illustré sur la figure 2.3, pour lequel l’angle  $\delta = \pi/4$ . La contribution de l’intégrande de (2.54) est alors significative au voisinage du point selle  $\phi_s$  défini par  $\phi_s = \arctan\left(\frac{z_n - z_m}{x_n - x_m}\right) \in \mathbb{R}$  le long du chemin  $C_\delta$ . Physiquement, l’angle  $\phi_s$  donne la direction du rayon connectant deux points d’abscisses  $x_n$  et  $x_m$ . En s’écartant du point selle, l’angle devient complexe produisant alors une décroissance exponentielle de l’intégrande. Numériquement, ce chemin est très intéressant car la région pour laquelle l’intégrande contribue est plus petite que celle définie par  $C_\phi$ . De plus, pour cette région l’intégrande oscille peu, facilitant l’intégration numérique. Le contour déformé  $C_\delta$  passant par  $\phi_s$  est alors caractérisé par l’angle  $\delta$  (au voisinage de  $\phi_s$ , le contour étant approximé par un segment de droite de pente  $\tan \delta$ ),  $\phi_{\max}$  et le pas d’intégration  $\Delta\phi$  sur l’intervalle  $[-\phi_{\max}; \phi_{\max}]$  (figure 2.3).

Puisque  $z_n - z_m$  est une variable aléatoire, il existe un ensemble de points selles  $\{\phi_s\}$  associés à plusieurs contours  $\{C_\phi\}$ . On a donc  $\phi_s \in [-\phi_{s,\max}; \phi_{s,\max}]$ , où l’angle  $\phi_{s,\max}$  (figure 2.3) est défini par

$$\phi_{s,\max} = \arctan\left[\frac{z_{\max} - z_{\min}}{x_{d0}}\right]. \quad (2.55)$$

Le secteur angulaire  $[0; \phi_{s,\max}]$  (sur la distance horizontale  $x_{d0}$ ) correspond physiquement à la région éclairée (“lit” en anglais, figure 2.4) qui est analogue à la région pour laquelle l’approximation de l’optique géométrique est valide (l’angle  $\phi$  peut être considéré comme réel).

Les paramètres  $\{\phi_{\max}, \tan \delta\}$  qui définissent le nouveau contour d’intégration  $C_\delta$ , sont donnés par [120, 132, 133]

$$\phi_{\max} = \min\left(\frac{\phi_{s,\max}}{2} + \sqrt{\frac{\phi_{s,\max}^2}{4} + \frac{b_{\text{seuil}}}{kR_{d0} \tan \delta}}; \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.56)$$

$$\tan \delta = \min\left(\frac{4a_{\text{seuil}}}{kR_{d0}\phi_{s,\max}^2}; 1\right), \quad (2.57)$$

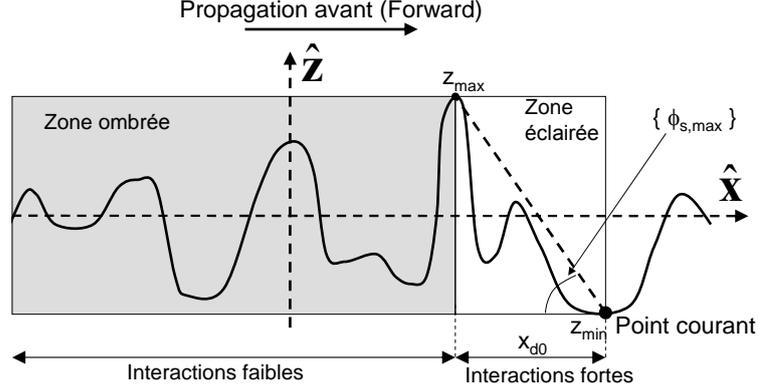


FIG. 2.4 – Interprétation géométrique des zones éclairée et ombrée dans l’approche SA. Le point courant est le point de réception (indice  $m$ ) excité par un ensemble de points sources (indice  $n$ ).

$$R_{d0} = \sqrt{x_{d0}^2 + (z_{\max} - z_{\min})^2}. \quad (2.58)$$

Avec typiquement<sup>3</sup>  $b_{\text{seuil}} = 6$ ,  $a_{\text{seuil}} = 5$  et  $x_{d0} = 3L_c$  (car la distance au delà de laquelle les interactions peuvent être considérées comme faibles est de l’ordre de la longueur de corrélation des hauteurs de la surface  $L_c$  [120]). Finalement, l’intégrale suivant  $\phi$  peut être approximée par une somme sur un nombre limité d’angles complexes  $\{\phi_p, p = -Q..Q\}$ . Ainsi, la fonction de Hankel peut être approximée comme une superposition d’ondes planes au nombre de  $2Q+1 = 33$  (car typiquement la valeur  $Q = 16$  est posée) le long du chemin  $C_\delta$ , dont les paramètres sont donnés par les équations (2.55), (2.56), (2.57) et (2.58). La conséquence sur le produit matrice-vecteur est que les interactions faibles vont s’exprimer comme une somme uniquement sur  $Q$  car une relation de récurrence apparait. Le même raisonnement, et finalement la même déformation de contour, peuvent être appliqués pour le cas TM, et pour les contributions Backward.

Il est possible de montrer que pour chaque itération de la méthode FB, le calcul des interactions fortes requiert  $NN_s$  opérations. Les interactions faibles demandent quant à elles,  $5(2Q+1)(N-N_s)$  multiplications. Pour  $N$  grand, la complexité de la FB-SA est de  $\mathcal{O}(N)$  au lieu de  $\mathcal{O}(N^2)$  pour la FB. Il est conseillé de lire [31, 120, 130, 133] pour plus de détails sur la méthode.

Pour un milieu inférieur diélectrique, la FB fait intervenir 4 sous-matrices dans le calcul des contributions Forward et Backward. Ces sous-matrices sont identiques aux matrices impédances d’une surface parfaitement conductrice dans les cas TE et TM dans les milieux 0 et 1. Par conséquent, l’extension de l’approche FB-SA au cas diélectrique ne semble pas poser de problème théorique particulier. En revanche, sa programmation en demeure plus difficile. Iodice [126] dans son article étend la méthode FB au cas diélectrique mais ne présente pas la FB-SA. Ce n’est que très récemment, que l’utilisation de la FB-SA sur une surface diélectrique a été publiée [134, 135, 136, 137].

Il convient maintenant d’étudier la convergence des méthodes FB et FB-SA, en considérant dans un premier temps une surface gaussienne. Dans ce manuscrit, et par abus de langage, une surface rugueuse dite “gaussienne” correspond à une surface obéissant à un processus gaussien (distribution des hauteurs gaussienne) centré de corrélation des hauteurs gaussienne.

<sup>3</sup>Ces valeurs résultent d’un compromis entre atténuer fortement le module de l’intégrande de (2.54) (quand  $a_{\text{seuil}}$  et  $b_{\text{seuil}}$  sont grands) et forcer sa phase à osciller lentement (quand  $a_{\text{seuil}}$  et  $b_{\text{seuil}}$  sont petits) [120].

### 2.1.2.3 Convergence des méthodes FB et FB-SA pour une surface gaussienne

Afin de tester la convergence des méthodes, l'erreur relative sur les inconnues sur la surface notée  $\epsilon^X$  est introduite :

$$\epsilon_{\text{FB}}^X = \frac{\|\mathbf{X}_{\text{FB}}^{(P_{\text{FB}})} - \mathbf{X}_{\text{LU}}\|}{\|\mathbf{X}_{\text{LU}}\|}, \quad (2.59)$$

où  $\mathbf{X}_{\text{FB}}^{(P_{\text{FB}})}$  est le vecteur contenant les inconnues sur la surface obtenu par la méthode FB à l'ordre  $P_{\text{FB}}$  (nombre d'itérations dans la procédure de la FB).  $\mathbf{X}_{\text{LU}}$  est le vecteur contenant les inconnues sur la surface obtenu par la MdM avec inversion directe par décomposition LU qui est la méthode de référence. Pour une surface PC ou TC,  $\mathbf{X}$  représente soit le champ total sur la surface  $\psi$  (cas TM) soit la dérivée normale du champ total sur la surface  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  (cas TE) (équations (2.11) et (2.48)). Pour une surface diélectrique,  $\mathbf{X}$  est une concaténation de ces inconnues surfaciques (équation (2.41)). Ainsi, l'erreur relative est calculée pour  $\mathbf{X} = [\psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N)]^t$  puis pour  $\mathbf{X} = \left[ \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \dots \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \right]^t$  (l'exposant  $t$  désigne la transposée) et l'erreur relative la plus grande est retenue. La norme d'un vecteur  $\mathbf{U}$ , nécessaire pour le calcul de l'équation (2.59), est définie comme  $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |U_i|^2}$ . De même il est possible de calculer l'erreur relative sur le coefficient de diffusion :

$$\epsilon_{\text{FB}}^\sigma = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{FB}}^{(P_{\text{FB}})} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{LU}}\|}{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{LU}}\|}, \quad (2.60)$$

$$\epsilon_{\text{FB-SA}}^\sigma = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{FB-SA}}^{(P_{\text{FB}})} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{LU}}\|}{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{LU}}\|}, \quad (2.61)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le vecteur contenant les coefficients de diffusion calculés en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$ . L'ordre  $P_{\text{FB}}$  est choisi selon un critère indiquant l'obtention de la convergence de la méthode FB. Ce critère est d'avoir une erreur relative, sur le champ total sur la surface et sur sa dérivée normale, inférieure à 1% :  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-2}$ . Le tableau 2.2 présente l'ordre  $P_{\text{FB}}$  obtenu avec ce critère de convergence, pour une réalisation (un seul profil généré) de surface rugueuse "gaussienne". La longueur de corrélation de la surface est  $L_c = 2\lambda_0$ , sa longueur est  $L = 120\lambda$  ( $N = 1200$ ), et le pas d'échantillonnage vaut  $\Delta x = \lambda/10$  (avec  $\lambda = \lambda_0$  pour une surface PC et  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_0 / |\sqrt{\epsilon_{r1}}|$  pour une surface diélectrique), et enfin  $g = L/6$  pour l'onde de Thorsos. Les valeurs sont données pour les deux polarisations (TE et TM) en fonction de l'écart-type des hauteurs normalisé  $\sigma_z/\lambda_0$  et pour cinq scènes différentes (surface PC ou diélectrique, permittivités relatives  $\epsilon_{r1}$  différentes, angles d'incidence différents).

Le tableau 2.3 présente l'ordre  $P_{\text{FB}}$  obtenu sous le critère de convergence  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-3}$ .

Suivant les différents paramètres de la scène, à partir des tableaux 2.2 et 2.3, il est possible de dégager quelques caractéristiques de la convergence de la méthode FB :

- la méthode FB converge très rapidement pour une surface PC en polarisation TM,
- l'ordre  $P_{\text{FB}}$  est très peu sensible à l'écart-type des hauteurs et à l'angle d'incidence,
- pour une surface diélectrique, lorsque  $|\epsilon_{r1}|$  augmente, l'ordre augmente en polarisation TE alors qu'il reste quasiment constant en TM.

Afin d'illustrer cette convergence, le coefficient de diffusion est tracé sur les figures 2.5 et 2.6 en considérant les cas (a) (angle d'incidence  $\theta_i = 0^\circ$  et surface PC) et (c) (angle d'incidence  $\theta_i = 0^\circ$  et surface diélectrique avec  $\epsilon_{r1} = 2 + 0.01i$ ) du tableau 2.2 et un écart-type des hauteurs

TAB. 2.2 – Ordre  $P_{\text{FB}}$  pour  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-2}$  pour les polarisations TE et TM, pour cinq cas considérés et en fonction de  $\sigma_z/\lambda_0$ . Longueur de corrélation  $L_c = 2\lambda_0$ , pas d'échantillonnage  $\Delta x = \lambda/10$ , longueur de la surface  $L = 120\lambda$  ( $N = 1200$ ) (avec  $\lambda = \lambda_0$  pour une surface PC et  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_{r1}}$  pour une surface diélectrique) et  $g = L/6$  pour l'onde de Thorsos.

$\sigma_z/\lambda_0$	0.1	0.5	1	1.5	2
$\theta_i$ en $^\circ$ , $\epsilon_{r1}$	TE-TM	TE-TM	TE-TM	TE-TM	TE-TM
(a) : 0, $i\infty$ (PC)	5-1	5-1	6-2	6-2	7-3
(b) : 60, $i\infty$ (PC)	6-1	6-1	6-2	6-2	6-2
(c) : 0, $2 + 0.01i$	5-4	5-4	5-5	5-5	6-6
(d) : 60, $2 + 0.01i$	5-5	5-5	5-5	5-5	6-6
(e) : 0, $10 + i$	8-5	8-5	8-5	10-5	10-5

 TAB. 2.3 – Mêmes variations que le tableau 2.2 mais avec le critère  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-3}$ .

$\sigma_z/\lambda_0$	0.1	0.5	1	1.5	2
$\theta_i$ en $^\circ$ , $\epsilon_{r1}$	TE-TM	TE-TM	TE-TM	TE-TM	TE-TM
(a) : 0, $i\infty$ (PC) -	7-1	7-2	8-2	9-3	10-4
(b) : 60, $i\infty$ (PC) -	9-1	9-2	9-2	9-3	13-3
(c) : 0, $2 + 0.01i$	7-6	7-6	7-7	8-7	10-9
(d) : 60, $2 + 0.01i$	8-7	8-7	8-7	8-7	9-9
(e) : 0, $10 + i$	12-8	12-7	13-7	15-8	14-8

$\sigma_z = 2\lambda_0$  et  $x_{d0} = 3L_c$  pour la FB-SA. Les autres paramètres de la scène sont les mêmes que ceux du tableau 2.2.

Sur la figure 2.5, la comparaison est réalisée entre la méthode FB et la MdM (sous-entendu avec inversion directe par décomposition LU) tandis que sur la figure 2.6 la comparaison est effectuée entre la méthode FB-SA et la MdM.

Sur la figure 2.5, on remarque que lorsque l'ordre  $P_{\text{FB}}$  augmente l'erreur relative diminue et le coefficient de diffusion calculé par la FB converge vers celui de la MdM. Le dernier ordre tracé sur chaque sous-figure assure la convergence du champ total sur la surface et de sa dérivée normale avec une erreur relative inférieure à 1%, il est donné par le tableau 2.2. Déchamps et al. [136] ont récemment montré que la méthode FB converge si la *norme* (égal au maximum du module de ses valeurs propres), également nommé le *rayon spectral*, de la matrice caractéristique suivante

$$\bar{M}_{\text{FB}} = \left( \bar{Z}^d + \bar{Z}^f \right)^{-1} \bar{Z}^f \left( \bar{Z}^d + \bar{Z}^b \right)^{-1} \bar{Z}^b, \quad (2.62)$$

est strictement inférieure à un.  $\bar{Z}^d$  est une matrice de taille  $2N \times 2N$  (ou  $N \times N$  pour une surface PC) construite à partir de la diagonale des matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  et  $\bar{D}$ , toutes de taille  $N \times N$ . De la même manière,  $\{\bar{Z}^f, \bar{Z}^b\}$  sont des matrices de taille  $2N \times 2N$  (ou  $N \times N$  pour une surface PC) construite à partir des parties triangulaires inférieures et supérieures, avec des diagonales à valeurs nulles, des matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  et  $\bar{D}$ , respectivement ( $\bar{Z} = \bar{Z}^f + \bar{Z}^d + \bar{Z}^b$ ). La norme de  $\bar{M}_{\text{FB}}$  ( $\|\bar{M}_{\text{FB}}\|$ ) est un critère pertinent pour étudier la validité de la méthode FB puisqu'elle est indépendante des angles d'incidence et de diffusion. Elle ne dépend que du profil de la surface et de la permittivité relative  $\epsilon_{r1}$ . Pour une surface diélectrique, Iodice [126] a étudié en détail la convergence de la FB suivant le choix de la Fonction d'Autocorrélation des Hauteurs (FAH). Pour une FAH gaussienne, la FB converge toujours, alors que pour une FAH exponentielle avec

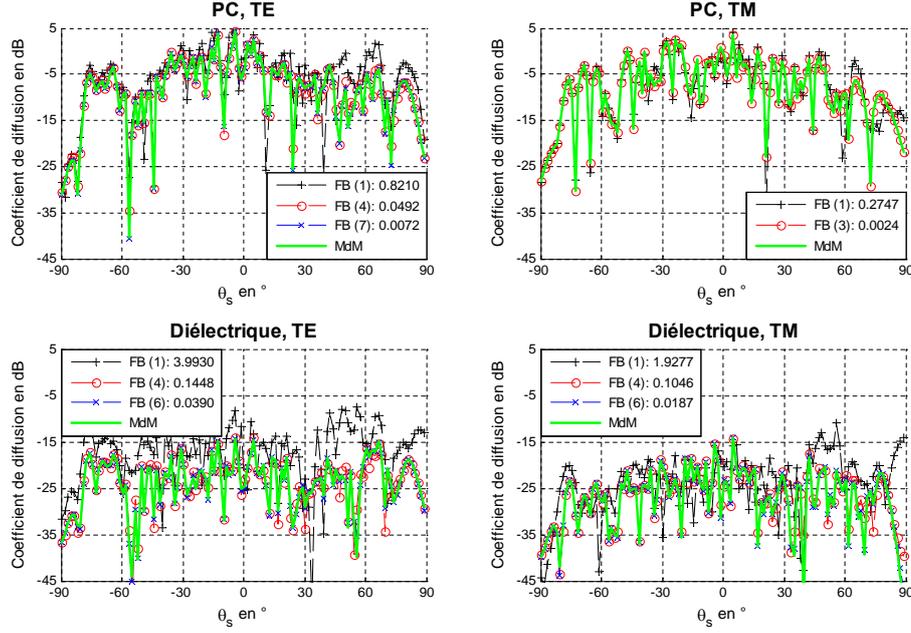


FIG. 2.5 – Comparaison du coefficient de diffusion en dB calculé avec la méthode FB avec celui calculé par la MdM. Dans la légende entre parenthèses figurent l'ordre de l'itération ( $P_{FB}$ ) suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion  $\epsilon_{FB}^\sigma$ . Les paramètres de la scène sont les mêmes que le tableau 2.2 avec  $\sigma_z/\lambda_0 = 2$ , les résultats pour le cas (a) sont représentés sur les figures du haut (TE et TM) et ceux pour le cas (c) sont représentés sur les figures du bas (TE et TM).

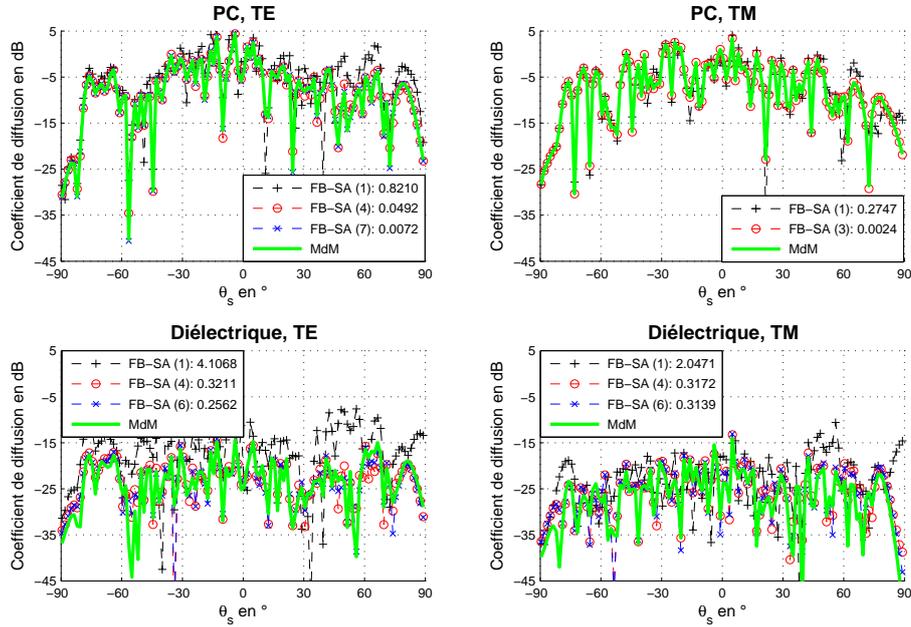


FIG. 2.6 – Mêmes variations que la figure 2.5 mais la comparaison est effectuée entre la méthode FB-SA (avec  $x_{d0} = 3L_c$ ) et la MdM. Dans la légende entre parenthèses figurent l'ordre de l'itération ( $P_{FB}$ ) suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion  $\epsilon_{FB-SA}^\sigma$ .

la même longueur de corrélation et le même écart-type des hauteurs que le cas gaussien, la FB peut ne pas converger pour des surfaces très rugueuses.

Sur la figure 2.6, on remarque que dans le cas PC, la FB-SA donne des résultats identiques à la FB. Des simulations avec d'autres angles d'incidence et écarts-type des hauteurs ont été réalisées et confirment que la contribution des interactions faibles dans le cas de la FB-SA est évaluée correctement pour une surface PC (et donc par extension, également pour une surface très conductrice sous l'approximation IBC). La valeur de  $x_{d0} = 3L_c$  et les paramètres du nouveau contour d'intégration sont donc bien choisis. Pour une surface diélectrique, le résultat de la FB-SA tend vers le résultat de la FB mais ne l'égalise pas. En faisant tendre  $x_{d0} \rightarrow L/2$ , la FB-SA tend vers la FB, mais ce résultat est parfaitement prévisible puisque cela revient à ne considérer aucune interaction faible et donc de n'utiliser que la FB pour le calcul des interactions sur la surface. Ceci signifie que les interactions faibles ne sont pas correctement quantifiées pour une surface diélectrique. Pour remédier à cela, il faudrait calculer un nouveau contour d'intégration bien adapté à ce problème. Cependant ce n'est pas ici l'objet de cette étude et nous nous contenterons d'utiliser la même déformation du contour d'intégration qu'utilisée pour le cas PC à la manière de Moss et al. dans leurs travaux concernant une couche rugueuse [135].

#### 2.1.2.4 Convergence des méthodes FB et FB-SA pour une surface de mer

Les méthodes FB et FB-SA sont appliquées au cas d'une surface de mer monodimensionnelle. Dans ce manuscrit, une surface de mer est une surface, supposée très conductrice (l'approximation IBC est donc utilisée), obéissant à un processus gaussien (distribution des hauteurs gaussienne) centré et pour laquelle le spectre de Elfouhaily est utilisé (voir paragraphe 1.5.2.3). Pour étudier la convergence de l'algorithme itératif de la FB, l'ordre  $P_{\text{FB}}$ , obtenu avec un critère de convergence fixé, est calculé pour une réalisation de surface de mer (un seul profil généré). Le tableau 2.4 présente l'ordre  $P_{\text{FB}}$  obtenu avec le critère de convergence  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-2}$  en fonction de la fréquence, de la vitesse du vent à 10 m au-dessus de la mer et de l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Deux fréquences sont considérées :  $f = 3$  GHz et  $f = 5$  GHz. La permittivité relative de la mer, fonction de la fréquence, vaut alors  $\epsilon_{r1} = 70.4 + 40.6i$  pour  $f = 3$  GHz et  $\epsilon_{r1} = 69.2 + 35.7i$  pour  $f = 5$  GHz [122]. Deux vitesses de vent sont considérées :  $u_{10} = 5$  m/s et  $u_{10} = 10$  m/s. Une vitesse  $u_{10} = 5$  m/s correspond à une force de vent 3 sur l'échelle de Beaufort (petite brise), et  $u_{10} = 10$  m/s correspond à une force de vent 5 sur l'échelle de Beaufort (bonne brise) [97]. Trois angles d'incidence sont considérés :  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\theta_i = 30^\circ$  et  $\theta_i = 60^\circ$ . Le pas d'échantillonnage de la surface est  $\Delta x = \lambda_0/10$  avec  $N = 3000$  échantillons sur la surface et  $g = L/6$  pour l'onde de Thorsos. La longueur de la surface est  $L = 30$  m pour  $f = 3$  GHz et  $L = 18$  m pour  $f = 5$  GHz. Les valeurs sont données pour les deux polarisations (TE et TM). L'écart-type des hauteurs de la surface générée est forcé à la valeur théorique obtenue à partir du spectre de mer de Elfouhaily qui vaut  $\sigma_z^{\text{the}} = 0.1138$  m pour  $u_{10} = 5$  m/s et  $\sigma_z^{\text{the}} = 0.4603$  m pour  $u_{10} = 10$  m/s [97].

D'après le tableau 2.4, on observe un comportement similaire à celui vu avec le tableau 2.2 pour la convergence de la méthode FB : une faible sensibilité à l'angle d'incidence et à l'écart type des hauteurs (qui augmente quand  $u_{10}$  augmente) et une convergence plus rapide en TM qu'en TE. On remarque également que la fréquence n'influe pas sur la convergence de la méthode FB. Ces résultats sont très intéressants puisqu'il suffira de choisir  $P_{\text{FB}} = 5$  en TE et  $P_{\text{FB}} = 2$  en TM pour s'assurer de la convergence de la FB et ceci même avec des paramètres ( $\theta_i$ ,  $f$ ,  $u_{10}$ ) différents.

Afin d'illustrer cette convergence, le coefficient de diffusion est tracé sur la figure 2.7. Sur les deux figures de gauche, le coefficient de diffusion (en dB) calculé avec la méthode FB est comparé à celui obtenu par la MdM. Sur les deux figures de droite, la comparaison est effectuée entre le coefficient de diffusion évalué par la FB-SA avec celui obtenu par la MdM. Les polarisations TE (figures du haut) et TM (figures du bas) sont considérées. Dans la légende entre parenthèses

TAB. 2.4 – Ordre  $P_{\text{FB}}$  pour  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-2}$  pour les polarisations TE et TM, pour  $f = \{3, 5\}$  GHz, pour  $u_{10} = \{5, 10\}$  m/s et en fonction de 3 valeurs de  $\theta_i$ . Pas d'échantillonnage  $\Delta x = \lambda_0/10$ ,  $N = 3000$  échantillons sur la surface et  $g = L/6$  pour l'onde de Thorsos. Pour  $\epsilon_{\text{FB}}^X < 10^{-3}$ ,  $P_{\text{FB}} = \{6; 6; 7\}$  en TE et  $P_{\text{FB}} = \{2; 2; 2\}$  en TM pour  $\theta_i = \{0^\circ; 30^\circ; 60^\circ\}$  sauf pour  $f = 5$  GHz et  $u_{10} = 10$  m/s où  $P_{\text{FB}} = \{2; 3; 3\}$  en TM.

$\theta_i$ en $^\circ$	$f$ & $u_{10}$	3 GHz	3 GHz	5 GHz	5 GHz
		& 5 m/s TE-TM	& 10 m/s TE-TM	& 5 m/s TE-TM	& 10 m/s TE-TM
0		4-1	4-1	4-1	4-2
30		4-1	4-1	4-1	4-2
60		5-1	5-2	5-1	5-2

figurent l'ordre de l'itération ( $P_{\text{FB}}$ ) suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion :  $\epsilon_{\text{FB}}^\sigma$  pour la FB et  $\epsilon_{\text{FB-SA}}^\sigma$  pour la FB-SA. Les paramètres de la scène sont les mêmes que ceux du tableau 2.4 avec  $f = 3$  GHz ( $\epsilon_{r1} = 70.4 + 40.6i$ ),  $u_{10} = 5$  m/s et  $\theta_i = 0^\circ$ . Le pas d'échantillonnage de la surface est  $\Delta x = \lambda_0/10$  avec  $N = 3000$  échantillons sur la surface, soit  $L = 30$  m, et  $g = L/6$  pour l'onde de Thorsos. Dans le cas d'une surface gaussienne, la distance des interactions fortes était proportionnelle à la longueur de corrélation :  $x_{d0} = \alpha L_c$  avec  $\alpha \simeq 3$ . Cependant, il est difficile de parler de longueur de corrélation avec une surface de mer, puisque deux types de rugosité co-existent (la grande échelle et la petite échelle). Dans [97], la longueur de corrélation pour une surface de mer (obéissant au spectre de Elfouhaily) est définie par  $L_c = (0.154u_{10}^{2.04})$  et correspond en quelque sorte à la périodicité spatiale de la rugosité de grande échelle. Ainsi, la distance des interactions fortes pour le calcul de la FB-SA dans le cas de la surface de mer serait  $x_{d0} = \alpha(0.154u_{10}^{2.04})$  et nous avons choisi  $\alpha = 0.5$  pour la figure 2.7 (soit  $x_{d0} = 2.053$  m).

On remarque sur cette figure que la FB-SA donne des résultats identiques à ceux de la FB. En effet, l'approximation IBC décrit le problème comme une combinaison linéaire du cas PC en polarisations TE et TM. Or, il a été montré au paragraphe 2.1.2.3, que la FB-SA converge vers la FB avec  $x_{d0} = \alpha L_c$  pour  $\alpha = 3$  (et avec les paramètres, choisis antérieurement, pour le contour d'intégration) pour le cas PC que ce soit en polarisation TE ou TM (voir figures 2.5 et 2.6). Il en est donc de même pour le cas TC avec l'approximation IBC. L'erreur relative sur le coefficient de diffusion démontre également la convergence des méthodes pour l'ordre  $P_{\text{FB}}$  défini au tableau 2.4. Cependant, il est important de noter qu'ici, la convergence de la FB-SA vers la FB est obtenue pour  $\alpha = 0.5$  alors qu'avec cette valeur la FB-SA ne convergeait pas pour une surface gaussienne PC. Pour étudier cela, l'erreur relative sur le coefficient de diffusion  $\epsilon^\sigma$  est tracée, sur les figures 2.8(a) et 2.8(b), pour les méthodes FB et FB-SA en fonction du paramètre  $\alpha$  (déterminant la longueur des interactions fortes) pour les polarisations TE et TM et deux vitesses de vent :  $u_{10} = \{5, 10\}$  m/s. L'ordre  $P_{\text{FB}}$  est choisi à l'aide du tableau 2.4, soit  $P_{\text{FB}} = 4$  en TE et  $P_{\text{FB}} = 1$  en TM. La surface a un pas d'échantillonnage  $\Delta x = \lambda_0/10$ , et  $N = 3000$  échantillons.  $g = L/6$  pour l'onde de Thorsos,  $f = 3$  GHz et l'angle d'incidence vaut  $\theta_i = 0^\circ$ .

A partir de  $\alpha = 0.02$ , la FB-SA converge. Des simulations faites pour  $\theta_i = 60^\circ$  aboutissent au même résultat. La distance des interactions fortes définie par  $x_{d0} = \alpha L_c$  est de ce fait très petite devant la longueur de corrélation. Alors que dans le cas d'une surface gaussienne, cette distance est de l'ordre de la longueur de corrélation, et il fut montré que  $\alpha$  doit être de l'ordre de 3 pour obtenir la convergence de la FB-SA (voir paragraphe 2.1.2.2 et [120, 134, 137]). Mais la distance des interactions fortes peut être redéfinie comme  $x_{d0} = \alpha' L'_c$  où  $\alpha'$  est de l'ordre de 3 et  $L'_c < L_c$  correspondrait à la longueur de corrélation de la petite échelle. Ainsi ces résultats,

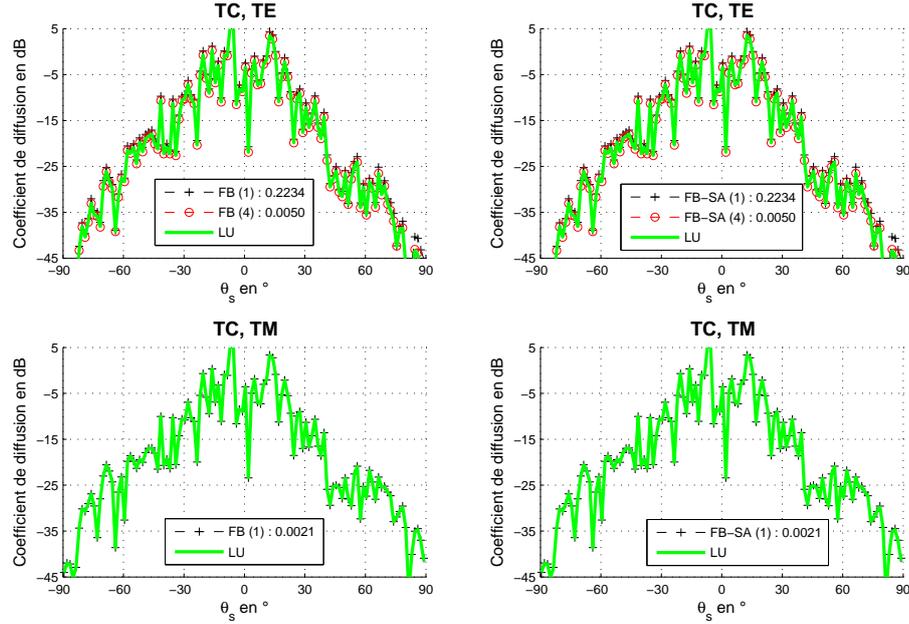


FIG. 2.7 – Comparaison du coefficient de diffusion en dB calculé avec les méthodes FB et FB-SA avec celui calculé par la MDM. Dans la légende entre parenthèses figurent l’ordre de l’itération ( $P_{\text{FB}}$ ) suivi de l’erreur relative sur le coefficient de diffusion.  $x_{d0} = 0.5L_c$  pour la FB-SA. Les paramètres de la scène sont les mêmes que ceux du tableau 2.4 avec  $f = 3$  GHz,  $u_{10} = 5$  m/s et  $\theta_i = 0^\circ$ . Cas TE sur les figures du haut, cas TM sur celles du bas. Méthode FB sur les figures de gauche, et méthode FB-SA sur celles de droite.

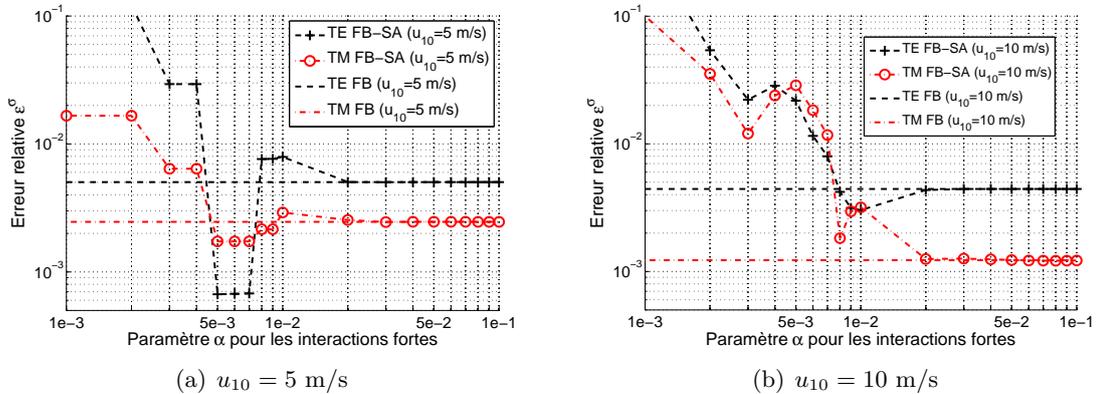


FIG. 2.8 – Erreur relative  $\epsilon^\sigma$  des méthodes FB et FB-SA en fonction du paramètre  $\alpha$  pour deux vitesses de vent  $u_{10}$  pour les polarisations TE et TM.  $\Delta x = \lambda_0/10$ ,  $N = 3000$  échantillons,  $g = L/6$  pour l’onde de Thorsos,  $f = 3$  GHz,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $P_{\text{FB}} = 4$  en TE et  $P_{\text{FB}} = 1$  en TM.

tendrait à montrer que les interactions fortes de la FB-SA ne concernent que la petite échelle. La conclusion importante est qu’une très faible distance d’interactions fortes peut être utilisée pour le cas d’une surface de mer réaliste. La FB-SA est donc une méthode particulièrement bien adaptée pour des applications maritimes.

A noter que les longueurs des surfaces considérées ici ne permettent pas de couvrir “convenablement” tout le spectre de mer. En effet, la contrainte d’une longueur finie agit comme un filtrage passe-haut sur le spectre des hauteurs, tandis que l’échantillonnage agit comme un fil-

trage passe-bas. Le spectre de la surface générée est alors tronqué dans les basses-fréquences (vagues de gravité) à la valeur de  $k = 2\pi/L$ , et dans les hautes fréquences (vagues de capillarité) par  $k = 2\pi/\Delta x$ . Dans [97], un critère est donné pour que le spectre de la surface générée couvre “convenablement” le spectre de mer théorique. Il convient de couvrir le spectre jusqu’à  $k_{\min} = 0.25k_{\text{pic}}$  où  $k_{\text{pic}} = \Omega^2 g/u_{10}^2$  est le nombre d’onde de la vague de plus grande énergie<sup>4</sup>.  $\Omega = 0.84$  pour une mer complètement développée et  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Ainsi pour  $u_{10} = 10$  m/s, on pose  $k_{\min} = 2\pi/L = 0.25k_{\text{pic}}$  et  $k_{\text{pic}} \approx 0.07$  rad/m et finalement, pour couvrir le spectre sous le critère énoncé on devrait prendre une longueur  $L \approx 363$  m soit  $N = 36300$  inconnues (pour  $f = 3$  GHz et  $\Delta x = \lambda_0/10$ ). La MdM n’est pas applicable pour un si grand nombre d’inconnues, et afin de valider l’approche FB et FB-SA pour une surface de mer il est alors nécessaire de prendre une plus petite surface rugueuse.

Ce paragraphe a permis d’exposer le calcul de la diffusion par une surface rugueuse avec une méthode dite exacte et rapide. Les calculs et les codes ayant permis ces simulations et résultats ont été développés au sein de l’équipe Radar du laboratoire IREENA, en partie par N. Déchamps et C. Bourlier. Mon travail a été de reprendre et d’assimiler ces codes existants et de les appliquer au cas d’une surface de mer TC pour des applications micro-ondes. J’ai ainsi montré que la FB-SA était particulièrement intéressante pour ce type de surface. Ces codes vont être utilisés pour les calculs de diffusion par un objet au-dessus d’une surface rugueuse. Mais avant de positionner un objet au-dessus d’une surface, il convient de bien maîtriser également le calcul de la diffraction par un objet en espace libre. Ainsi nous commencerons par voir le cas du cylindre dont la solution analytique exacte existe.

## 2.2 Diffraction par un objet en espace libre

Contrairement aux surfaces rugueuses que nous avons décrites précédemment, un objet quelconque ne possède pas forcément une surface univoque (il n’existe pas nécessairement de fonction bijective dans le cas 2D telle que  $(x) \rightarrow z(x)$ ). De plus la normale à la surface de l’objet (qui doit rester orientée vers le milieu incident pour que les équations intégrales restent valides) ne sera pas obligatoirement orientée vers les  $z$  positifs comme pour la surface rugueuse. De ce fait les matrices impédances doivent être modifiées. Afin de valider ces nouvelles matrices impédances, il convient de comparer les résultats obtenus par la MdM sur l’objet avec une méthode de référence. Puisqu’il n’existe pas de solution analytique exacte du problème de la diffraction par une croix en espace libre, la comparaison est effectuée avec un cas canonique. C’est le cas par exemple du cylindre infini selon son axe de révolution parfaitement conducteur dont la solution analytique exacte existe.

### 2.2.1 Diffraction par un cylindre elliptique infini PC par la MdM

L’univocité de la surface d’un cylindre elliptique, de demi-grand axe  $a$  et demi-petit axe  $b$ , peut être obtenue en utilisant les coordonnées cylindriques  $(a, b, \phi \in [0; 2\pi])$  pour exprimer un point de la surface. A partir des coordonnées cylindriques il est possible de calculer les coordonnées cartésiennes définissant l’ellipse

$$\begin{cases} x = x_c + a \cos \phi \\ z = z_c + b \sin \phi \end{cases}, \quad (2.63)$$

---

<sup>4</sup>Sous ce critère, la vague dont le nombre d’onde est  $k_{\min}$  a une énergie  $10^5$  fois plus petite que l’énergie de la vague de nombre d’onde  $k_{\text{pic}}$ .

où  $(x_c, z_c)$  définit la position du centre de l'ellipse. L'élément infinitésimal en abscisse est évalué à partir de  $\phi$  et  $d\phi$

$$\frac{dx}{d\phi} = -a \sin \phi, \quad (2.64)$$

$$dx = -a \sin \phi d\phi, \quad (2.65)$$

ainsi que la pente de la surface

$$\gamma = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = -\frac{b}{a} \cot \phi, \quad (2.66)$$

et

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dx}. \quad (2.67)$$

L'élément de surface  $ds$  est forcément positif, or,  $dx$  peut être négatif suivant les valeurs de  $\phi$  (voir équation (2.65)) comme illustré sur la figure 2.9. Ainsi  $ds$  s'écrit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = |dx| \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = |dx| \sqrt{1 + \gamma^2} = |dx| \alpha, \quad (2.68)$$

et en utilisant les équations (2.65) et (2.66), on obtient

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2(\phi)} d\phi. \quad (2.69)$$

La normale à la surface s'écrit

$$\hat{\mathbf{n}} = v \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \begin{bmatrix} -\gamma \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

où  $v$  permet d'orienter la normale vers l'extérieur de l'ellipse (vers le milieu incident) :

$$v = \begin{cases} +1 & \forall \phi \in [0; \pi[ \\ -1 & \forall \phi \in [\pi; 2\pi[ \end{cases}. \quad (2.71)$$

Afin d'utiliser la MdM, l'ellipse doit être échantillonnée et l'équation (2.63) est discrétisée en

$$\begin{cases} x_n = x_c + a \cos \phi_n \\ z_n = z_c + b \sin \phi_n \end{cases}, \quad (2.72)$$

où  $\phi_n$  est obtenu par une discrétisation angulaire de l'ellipse (l'échantillonnage en abscisse est différent de celui réalisé pour une surface rugueuse) :

$$\phi_n = (n - 1)\Delta\phi \quad \text{avec} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad n = 1..N, \quad (2.73)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons permettant de décrire l'ellipse :

$$N = N_\lambda \frac{p}{\lambda}. \quad (2.74)$$

$N_\lambda$  est le nombre d'échantillons par longueur d'onde et  $p$  le périmètre de l'ellipse défini par l'intégrale elliptique suivante :

$$p = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)} d\phi, \quad (2.75)$$

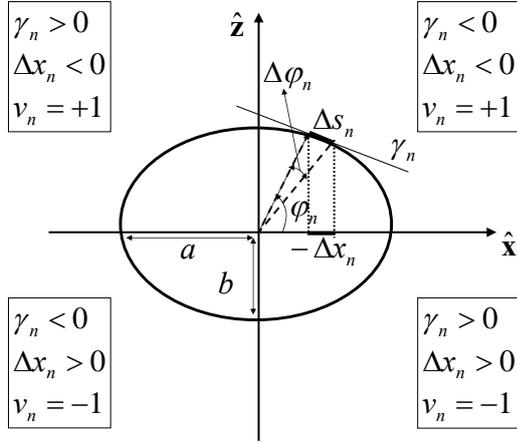
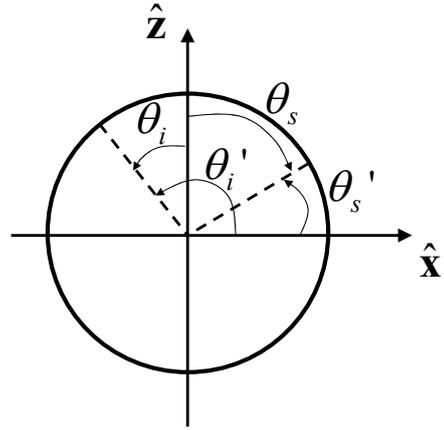


FIG. 2.9 – Illustration des paramètres de l'échantillonnage de l'ellipse.


 FIG. 2.10 – Représentation graphique des angles  $\theta_i$  et  $\theta_s$  (utilisés dans la MdM) et des angles locaux  $\theta'_i$  et  $\theta'_s$  utilisés dans la solution analytique.

avec  $e$  l'excentricité de l'ellipse qui correspond au rapport de la demi-distance focale sur le demi-grand axe :  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ . L'intégrale elliptique est évaluée numériquement à l'aide de la fonction "ellipke" de Matlab. Ainsi l'ellipse discrétisée est définie par l'équation (2.72), où les éléments  $\phi_n$  et le pas angulaire  $\Delta\phi$  sont évalués par l'équation (2.73) en fixant soit le nombre d'échantillons total soit le nombre d'échantillons par longueur d'onde (en utilisant (2.75) et (2.74)). Les matrices impédances font intervenir le pas de discrétisation de la surface qui devient dans le cas de l'ellipse

$$\Delta s_n = |\Delta x_n| \alpha_n = |\Delta x_n| \sqrt{1 + \gamma_n^2} = \sqrt{a^2 \sin(\phi_n)^2 + b^2 \cos(\phi_n)^2} \Delta\phi, \quad (2.76)$$

où la valeur absolue sur le pas en abscisse permet de forcer la valeur positive de l'élément de surface. Le sens de la normale est décrit par

$$v_n = \begin{cases} +1 & \forall \phi_n \in [0; \pi[ \\ -1 & \forall \phi_n \in [\pi; 2\pi[ \end{cases}. \quad (2.77)$$

Les matrices impédances pour une surface PC, vues aux équations (2.14) et (2.16) peuvent alors être adaptées au cas de l'ellipse. Les éléments de la matrice impédance  $\bar{Z}^{\text{Dirichlet}}$  font intervenir l'élément de surface  $\Delta s_n$ , alors les éléments s'écrivent :

$$\mathbf{EFIE TE} : Z_{m,n}^{\text{Dirichlet}} = \frac{i\Delta s_n}{4} \begin{cases} 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(0.164k_0\Delta s_n) & \text{pour } m = n \\ H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } m \neq n \end{cases}, \quad (2.78)$$

où  $\Delta s_n$  est obtenu à l'aide de la relation (2.76). Les éléments de la matrice impédance  $\bar{Z}^{\text{Neumann}}$  font intervenir le calcul de  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m) \Delta s_n$ . En utilisant les relations (2.76) et (2.71), ce terme devient  $-v |\Delta x_n| \gamma_n (x_n - x_m) + v |\Delta x_n| (z_n - z_m)$ . Ainsi, les éléments de la matrice  $\bar{Z}^{\text{Neumann}}$

sont donnés par

**MFIE TM :**

$$Z_{m,n}^{\text{Neumann}} = \begin{cases} +\frac{1}{2} - v_n \frac{|\Delta x_n|}{4\pi} \frac{(\gamma_m)'}{1 + (\gamma_m)^2} & \text{pour } m = n \\ -v_n \frac{ik_0 |\Delta x_n|}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.79)$$

Comme illustré sur la figure 2.9,  $\Delta x_n$  est négatif quand  $v_n$  est positif et  $\Delta x_n$  est positif quand  $v_n$  est négatif. Alors  $|\Delta x_n| = -v\Delta x_n$ , d'où

$$v |\Delta x_n| = -v^2 \Delta x_n = -\Delta x_n, \quad (2.80)$$

et les éléments de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Neumann}}$  s'écrivent finalement

**MFIE TM :**

$$Z_{m,n}^{\text{Neumann}} = \begin{cases} +\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_n}{4\pi} \frac{(\gamma_m)'}{1 + (\gamma_m)^2} & \text{pour } m = n \\ +\frac{ik_0 \Delta x_n}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.81)$$

Connaissant les matrices impédances, le système  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  peut être résolu par inversion matricielle à l'aide d'une décomposition LU. Ainsi, le champ total sur la surface  $\psi$  (pour le cas TM) et sa dérivée normale  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  (pour le cas TE) sont obtenus, et le champ diffracté  $\psi_s$  est évalué à l'aide du principe de Huygens (voir l'équation (1.28)). Sous l'hypothèse de champ lointain, le champ diffracté s'exprime à l'aide des équations (2.24) et (2.25) où cette fois-ci :

$$-i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} = ik_0 v \frac{\gamma \sin \theta_s - \cos \theta_s}{\sqrt{1 + \gamma^2}}. \quad (2.82)$$

L'élément de surface  $ds$  est donné par les équations (2.68), d'où

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = \int_S \left\{ ik_0 v [\gamma \sin \theta_s - \cos \theta_s] \psi(\mathbf{r}) - \sqrt{1 + \gamma^2} \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right\} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} |dx|, \quad (2.83)$$

et finalement

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = \int_S \left\{ -ik_0 [\gamma \sin \theta_s - \cos \theta_s] \psi(\mathbf{r}) + v \sqrt{1 + \gamma^2} \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right\} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} dx. \quad (2.84)$$

## 2.2.2 Validation de la MdM à l'aide de la solution analytique exacte du cylindre circulaire PC

La modification des matrices impédances et le calcul du champ diffracté sont validés par comparaison avec une solution analytique exacte. Bien que pour le cas de l'ellipse, cette solution existe, elle nécessite l'emploi de fonctions de Mathieu qui sont difficiles à calculer numériquement. Cependant, la solution analytique exacte du cylindre infini PC utilise les fonctions de Bessel,

plus simples à manipuler [92]. C'est donc en étudiant le cas particulier du cylindre, en posant  $a = b$  et  $\mathbf{r}_c = \mathbf{0}$  (cylindre centré sur l'origine du repère) pour la MdM, que la comparaison est effectuée. Cette solution repose sur la méthode de séparation des variables [92, 138] :  $\psi_s(r', \theta'_s) = \psi_1(r')\psi_2(\theta'_s)$ , en utilisant l'équation de propagation dans le système de coordonnées cylindriques, on aboutit finalement à

$$\psi_s(r', \theta'_s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(k_0 r') e^{in\theta'_s}, \quad (2.85)$$

où la constante  $C_n$  est à déterminer à l'aide des conditions aux limites. En polarisation TE, le champ total surfacique est nul (condition de Dirichlet) et donc pour  $r = a$  et  $\theta'_s = \phi$  :

$$\psi(a, \phi) = \psi_s(a, \phi) + \psi_i(a, \phi) = 0 \quad \forall \phi, \quad (2.86)$$

avec une onde plane pour champ incident :

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_{i0} e^{+i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = \psi_i(a, \phi) = \psi_{i0} e^{-ik_0 a \cos(\phi - \theta'_i)}. \quad (2.87)$$

Or de [139] on a la fonction génératrice  $e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z)$ . En posant  $z = k_0 a$  et  $t = -ie^{i(\phi - \theta'_i)}$ , le champ incident (2.87) s'écrit

$$\psi_i(a, \phi) = \psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{in(\phi - \theta'_i)} J_n(k_0 a). \quad (2.88)$$

Le calcul de (2.86) avec (2.85) et (2.88) aboutit à une équation qui doit être vérifiée  $\forall(\phi, n)$ , et on obtient finalement pour le cas TE en posant  $\psi_{i0} = 1$  :

$$C_n = -\frac{J_n(k_0 a) e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{-in\theta'_i}}{H_n^{(1)}(k_0 a)}. \quad (2.89)$$

A partir de (2.85), (2.88) et (2.89), la dérivée normale du champ total sur la surface peut être calculée :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{-in(\theta'_i + \frac{\pi}{2} - \phi)}, \quad (2.90)$$

avec

$$C'_n = \dot{J}_n(k_0 a) - \frac{J_n(k_0 a)}{H_n^{(1)}(k_0 a)} \dot{H}_n^{(1)}(k_0 a), \quad (2.91)$$

où  $\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ . De même en polarisation TM, en utilisant la condition de Neumann et en menant les calculs comme dans le cas TE, on obtient les coefficients  $C_n$  :

$$C_n = -\frac{\dot{J}_n(k_0 a) e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{-in\theta'_i}}{\dot{H}_n^{(1)}(k_0 a)}, \quad (2.92)$$

ainsi que le champ total sur la surface

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{-in(\theta'_i + \frac{\pi}{2} - \phi)}, \quad (2.93)$$

avec cette fois-ci

$$C'_n = J_n(k_0 a) - \frac{\dot{J}_n(k_0 a)}{\dot{H}_n^{(1)}(k_0 a)} H_n^{(1)}(k_0 a). \quad (2.94)$$

Que ce soit dans le cas TE ou TM, des relations de récurrence sur les fonctions de Bessel et fonctions de Hankel peuvent être utilisées pour calculer les dérivées. Ces relations sont données dans [139]. Connaissant le champ total sur la surface (cas TM) ou sa dérivée normale (cas TE), le principe de Huygens permet d'obtenir le champ diffracté. Une autre manière d'évaluer le champ diffracté en champ lointain est d'utiliser l'équation (2.85) en utilisant les coefficients  $C_n$  évalués dans le cas TE (2.89) et le cas TM (2.92). Les angles  $\theta'_s$  et  $\theta'_i$  sont représentés sur la figure 2.10. Les relations de passage vers les angles  $\theta_s$  et  $\theta_i$  définis pour l'application de la MdM sont les suivantes

$$\begin{cases} \theta'_i = \theta_i + \frac{\pi}{2} \\ \theta'_s = \frac{\pi}{2} - \theta_s \end{cases}. \quad (2.95)$$

Ainsi, le champ diffracté est obtenu en fonction de  $\theta_i$  et  $\theta_s$  avec les relations (2.95) et (2.85). La somme est tronquée à l'ordre  $N_c$  et la représentation de  $|C_n|$  permet d'étudier la convergence de la solution analytique. Lorsque  $|C_n|$  devient nul, la contribution de la  $n^{\text{ième}}$  itération est nulle et la série a convergé.

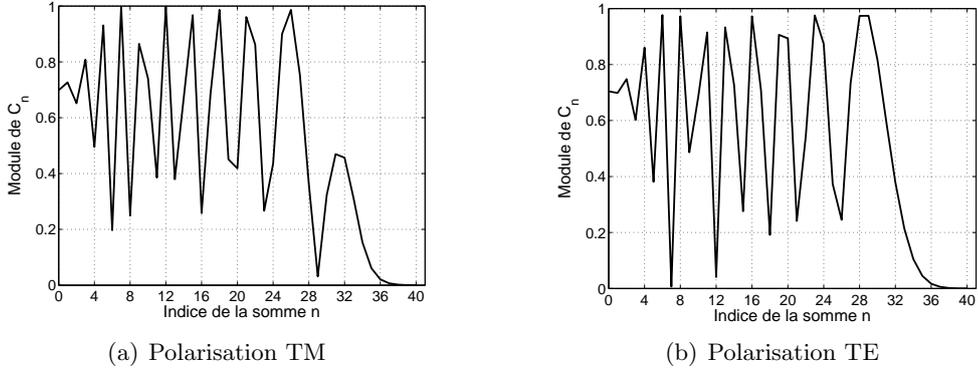


FIG. 2.11 – Module des coefficients  $C_n$  en fonction de l'indice de la somme  $n$  : illustration de la convergence de la solution analytique. Cas d'un cylindre PC infini suivant son axe de révolution et de rayon  $b = a = 5\lambda$ . Paramètres de calcul :  $N_c = 40$  et  $\theta_i = 0^\circ$ .

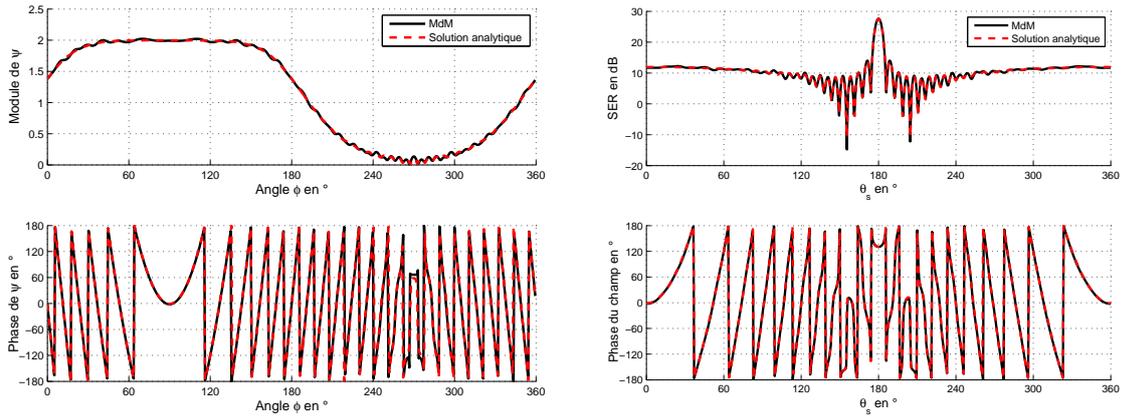
Afin de valider le code de la MdM appliquée au cylindre, la comparaison avec la solution analytique est effectuée pour un cylindre PC infini suivant son axe de révolution de rayon  $b = a = 5\lambda$ . Les paramètres du calcul sont  $N_c = 40$ ,  $N_\lambda = 20$  soit  $N = 629$  inconnues,  $\theta_i = 0^\circ$ . Le cylindre est centré à l'origine du repère et le calcul en champ lointain est réalisé à une distance  $r' = 2000a$ . Les modules des coefficients  $C_n$  en fonction de l'indice  $n$  de la somme pour les polarisations TE et TM sont tracés, respectivement, sur les figures 2.11(a) et 2.11(b). Limiter la somme à l'indice  $N_c = 40$  est un choix judicieux puisque  $|C_n|$  s'annulent à partir de  $n = 38$ .

Les comparaisons des résultats obtenus en polarisation TM par la MdM et la solution analytique sont représentées sur la figure 2.12. Le champ total sur la surface ainsi que sa phase sont comparés sur la sous-figure 2.12(a), tandis que la SER et la phase du champ diffracté sont comparées sur la sous-figure 2.12(b).

Rappelons que la SER<sup>5</sup> est évaluée à l'aide de l'équation (1.45) appliquée ici pour un objet à deux dimensions :

$$\sigma(r', \theta_s) = \lim_{r' \rightarrow \infty} 2\pi r' \frac{|\psi_s(r', \theta_s)|^2}{|\psi_i(a, \theta_i)|^2}, \quad (2.96)$$

<sup>5</sup>Dans le cas 2D, la SER est parfois nommée LER pour Longueur Equivalente Radar puisqu'elle est homogène à des mètres. Cependant, pour des facilités de compréhension (et par abus de langage) nous la nommerons SER.



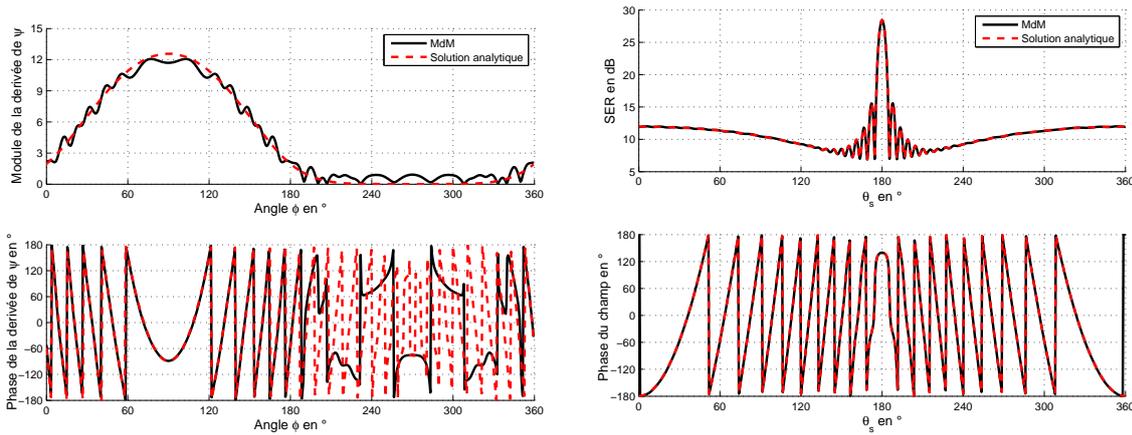
(a) Comparaison sur le champ total sur la surface en module et sur sa phase

(b) Comparaison sur la SER et sur la phase du champ diffracté

FIG. 2.12 – Comparaisons du champ total sur la surface en module et phase, de la SER et de la phase du champ diffracté entre la MmM et la solution analytique en polarisation TM. Cas d'un cylindre PC infini suivant son axe de révolution et de rayon  $b = a = 5\lambda$ . Paramètres de calcul :  $N_c = 40$ ,  $N_\lambda = 20$  soit  $N = 629$  inconnues,  $\theta_i = 0^\circ$ , calcul en champ lointain à une distance  $r' = 2000a$ .

avec  $|\psi_i(a, \theta_i)| = 1$  puisque le champ incident est une onde plane définie par (2.87) et  $\psi_{i0} = 1$ . Finalement la SER est donnée par  $\sigma(r', \theta_s) = 2\pi r' |\psi_s(r', \theta_s)|^2$  où  $\psi_s(r', \theta_s)$  est donné par (2.85) pour la solution analytique et par les équations (2.24) et (2.84) pour la MmM.

Les comparaisons des résultats obtenus en polarisation TE par la MmM et la solution analytique sont représentés sur la figure 2.13. La dérivée normale du champ sur la surface ainsi que sa phase sont comparées sur la sous-figure 2.13(a), tandis que la SER et la phase du champ diffracté sont comparées sur la sous-figure 2.13(b).



(a) Comparaison sur la dérivée normale du champ total sur la surface en module et phase.

(b) Comparaison sur la SER et sur la phase du champ diffracté.

FIG. 2.13 – Comparaisons de la dérivée normale du champ total sur la surface en module et phase, de la SER et de la phase du champ diffracté entre la MmM et la solution analytique en polarisation TE. Même paramètres que la figure 2.12.

Les résultats présentés sur les figures 2.12(a) et 2.12(b) démontrent un parfait accord entre la MdM et la solution analytique en polarisation TM. Des différences entre les deux méthodes sont observées sur la figure 2.13(a) pour la comparaison en polarisation TE, mais il est possible de montrer qu'en augmentant le nombre d'échantillons sur le cylindre les résultats issus de la MdM convergent vers ceux issus de la solution analytique exacte.

La raison pourrait être la suivante : dans le cas d'objets bornés, les équations EFIE et MFIE n'assurent pas l'unicité de la solution pour un jeu de fréquence correspondant aux fréquences de résonance de la cavité de même forme que la cible. Ces fréquences sont nommées dans la littérature "fréquences irrégulières" ("irregular frequencies") et plusieurs méthodes permettent d'obtenir une solution unique [140]. Pour y remédier, une possibilité serait d'utiliser l'équation CFIE (Combined Field Integral Equation) [141] ou l'équation AFIE (Augmented Field Integral Equation) [142] qui assurent l'unicité de la solution. Cependant, elles requièrent des équations supplémentaires ce qui se traduit par une augmentation du nombre d'inconnues avec la CFIE et à un système surdéterminé (résolu par une méthode des moindres carrés qui induit une augmentation du temps de calcul) avec la AFIE. Ngakosso et al. ont montré dans [143], que les fréquences irrégulières sont associées à une paire pôle-zéro de la matrice de diffraction dans le plan des fréquences complexes. Théoriquement, l'influence du pôle s'oppose à l'influence du zéro (ils se compensent car ils interviennent à la même fréquence réelle) mais, dans la pratique, l'échantillonnage introduit une dissociation du pôle et du zéro. Cet effet est notamment obtenu en polarisation TE pour le cas d'un cylindre circulaire [143]. Ngakosso et al. ont également montré que la largeur de la bande de fréquence concernée par cette anomalie peut être réduite en affinant l'échantillonnage. Ainsi l'effet de la résonance de la cavité de même forme que l'objet (résonance non physique car l'objet est PC) n'est alors présent que pour un jeu de fréquence réduit. Une autre solution est d'utiliser la méthode "Extended-Boundary Conditions" [143, 144] qui revient à appliquer le théorème d'extinction à quelques points placés dans le volume de l'objet, forçant alors le champ à s'annuler dans cette zone et empêchant alors la résonance interne (non physique) d'exister numériquement. Ce procédé aboutit à un système surdéterminé, résolu par une méthode des moindres carrés mais qui induit une augmentation du temps de calcul, néanmoins plus faible qu'avec la AFIE (le nombre d'équations ajoutées au système est réduit). Dans notre étude nous avons choisi d'appliquer la MdM aux équations EFIE et MFIE et d'affiner, si besoin, l'échantillonnage lorsque ce problème peut survenir (objets bornés avec une forme permettant de créer une cavité<sup>6</sup>).

Malgré ces différences sur la dérivée normale du champ surfacique, les comparaisons sur la SER et sur la phase du champ diffracté, sur la figure 2.13(b), démontrent un parfait accord entre les deux méthodes. En conclusion, l'application proposée de la MdM sur un objet quelconque est valide à condition que l'objet soit suffisamment échantillonné (notamment pour la polarisation TE). Sur les figures 2.12(b) et 2.13(b), les SER sont tracées en fonction de l'angle  $\theta_s$ . La configuration monostatique est de ce fait obtenue pour  $\theta_s = 0^\circ$  et  $\theta_s = 360^\circ$ . Que ce soit en polarisation TE ou TM, la SER est maximale pour  $\theta_s = 180^\circ$ , ce qui correspond à une configuration de fort bistatisme. En effet ces angles correspondent au cas où l'émetteur et le récepteur sont diamétralement opposés. Le récepteur est ainsi situé dans ce qui est appelée, pour un objet grand devant la longueur d'onde, *zone d'ombre*<sup>7</sup> : les courants sont quasiment nuls sur le côté du cylindre "observé" par le récepteur (le champ total surfacique et sa dérivée normale sont quasiment nulles pour  $\phi = 270^\circ$  sur les figures 2.12(a) et 2.13(a)). Sous cette configuration de fort bistatisme, le champ diffracté a tendance à augmenter significativement, et par conséquent

---

<sup>6</sup>Par conséquent, ce problème n'existe pas pour une plaque d'épaisseur très faible devant la longueur d'onde puisqu'elle est incapable de jouer le rôle de cavité.

<sup>7</sup>Ce terme fait référence à l'optique et plus particulièrement à l'Optique Géométrique sous la notion de rayon.

la SER également. Ce phénomène, mis en évidence la première fois par Mie en 1908 porte le nom de “forward scattering” [145, 146, 147, 148, 149]. Le champ diffracté tend à contrer le champ incident (présent dans tout l’espace par définition car le champ incident est une donnée du problème et non une inconnue) pour tenir compte de l’effet perturbateur de l’obstacle dans le champ total capté derrière l’objet. Il est possible de montrer que l’effet du forward scattering est d’autant plus présent que la taille de l’obstacle augmente par rapport à la longueur d’onde [2].

### 2.2.3 Diffraction par une croix par la méthode des moments

Fort de la validation de la MdM appliquée au cylindre elliptique, la diffraction par un objet quelconque peut être étudiée, et donc plus particulièrement la diffraction par un obstacle cruciforme. Un réflecteur polyédrique dans une scène 2D est représenté par une croix (voir paragraphe 1.5.1.5) composée de 4 dièdres. Chaque dièdre est formé de deux plaques (linéiques en 2D) de longueur égales et formant un angle droit.

Pour chaque plaque, le concept d’écran infiniment mince parfaitement conducteur pourrait être utilisé [150]. Supposons que nous ayons une plaque, la face supérieure de celle-ci a une surface nommée  $S_f$  (f pour “front”) et la face inférieure a une surface nommée  $S_b$  (b pour “back”). Dans le cas TM, si la plaque est parfaitement conductrice, les inconnues sont les champs surfaciques sur les deux faces ( $\psi_f$  sur la face “front” et  $\psi_b$  sur la face “back”) de la plaque. Le principe de Huygens permet de calculer le champ diffusé par cette distribution de courant sur la surface totale de la plaque  $S_t = S_f + S_b$  :

$$\psi_s(\mathbf{r}') = + \int_{S_t} \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} ds = + \int_{S_f} \psi_f(\mathbf{r}_f) \frac{\partial g(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} ds + \int_{S_b} \psi_b(\mathbf{r}_b) \frac{\partial g(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} ds. \quad (2.97)$$

Si l’épaisseur de la plaque tend vers 0, alors les vecteurs  $\mathbf{r}_f$  et  $\mathbf{r}_b$  pointent sur le même élément ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_b$ ). Les dérivées normales de Green sont alors identiques, et puisque les deux faces ont la même surface (même longueur en 2D),  $S = S_f = S_b$ , on a

$$\psi_s(\mathbf{r}') = + \int_S \left[ \psi_f(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + \psi_b(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right] ds, \quad (2.98)$$

et finalement

$$\psi_s(\mathbf{r}') = + \int_S \underbrace{[\psi_f(\mathbf{r}) + \psi_b(\mathbf{r})]}_{=\psi_s(\mathbf{r})} \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} ds. \quad (2.99)$$

Cela revient à considérer une plaque avec une seule face (de surface  $S$ ) sur laquelle les inconnues sont la somme des inconnues obtenues en considérant deux faces dissociées ( $\psi_s = \psi_f + \psi_b$ ). L’avantage est que le nombre d’inconnues est divisé par deux (puisque une seule face n’est à considérer dans la MdM). L’inconvénient est qu’il n’est pas possible de remonter à l’information des courants sur chaque côté de la plaque car nous n’avons la connaissance que de leur somme. Si dans la suite de notre étude nous voulons comparer les courants sur les plaques en considérant physiquement les phénomènes (ombrages, doubles réflexions ...) il est alors nécessaire de pouvoir différencier les côtés “front” et “back” des plaques, au prix d’un doublement du nombre d’inconnues.

Dans notre étude les méthodes rigoureuses entreprises sont appliquées pour valider les modèles asymptotiques développés par la suite. Nous avons donc choisi de doubler le nombre d’inconnues afin d’exhiber au mieux les phénomènes physiques. Cependant, l’épaisseur doit être

suffisamment faible pour que les phénomènes de diffraction soient ceux d'une plaque et non d'un rectangle. Mais l'épaisseur doit être suffisamment grande pour éviter les singularités dans les fonctions de Green. L'échantillonnage de la croix pour la MdM s'obtient par concaténation de l'échantillonnage de quatre plaques. L'échantillonnage de la plaque est illustré sur la figure 2.14 où les losanges indiquent l'emplacement des échantillons.

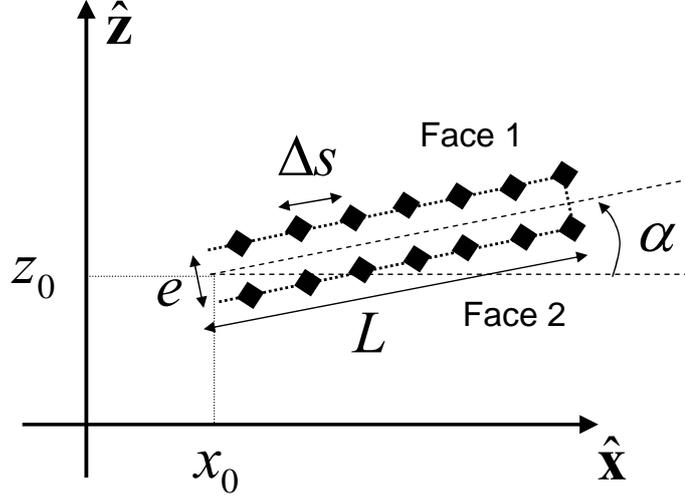


FIG. 2.14 – Illustration de l'échantillonnage de la plaque.

La plaque est paramétrée par sa longueur  $L$ , par son inclinaison d'angle  $\alpha$  par rapport à  $\hat{x}$ , par son épaisseur  $e$  et par le pas d'échantillonnage  $\Delta s$ . La plaque est décomposée en une face supérieure (face 1) et inférieure (face 2) toutes deux parallèles, de longueur  $L$  et possédant  $N_f$  échantillons. En définissant un pas  $\Delta s$  constant pour échantillonner les faces, la longueur  $r_{n_f}$  séparant l'échantillon  $n_f$  du début de la face considérée s'écrit

$$r_{n_f} = n_f \Delta s \quad \text{avec} \quad n_f = 1..N_f \quad \text{et} \quad N_f \Delta s = L, \quad (2.100)$$

et la plaque possède ainsi  $N = 2N_f$  éléments (deux faces avec  $N_f$  échantillons) de coordonnées :

$$\begin{cases} x_{n_f}^1 = r_{n_f} \cos(\alpha) + x_0 - \frac{e \sin(\alpha)}{2} \\ z_{n_f}^1 = r_{n_f} \sin(\alpha) + z_0 + \frac{e \cos(\alpha)}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n_f}^2 = r_{N_f - n_f + 1} \cos(\alpha) + x_0 + \frac{e \sin(\alpha)}{2} \\ z_{n_f}^2 = r_{N_f - n_f + 1} \sin(\alpha) + z_0 - \frac{e \cos(\alpha)}{2} \end{cases}, \quad (2.101)$$

où la différence entre la face 1 et 2 introduit l'épaisseur de la plaque et un arrangement différent avec l'indice  $N_f - n_f + 1$ . Cet indice permet de retourner la face inférieure afin que le dernier échantillon de la face 1 soit voisin du premier échantillon de la face 2. Ces coordonnées sont concaténées dans deux vecteur  $\mathbf{x} = [x_1^1 \dots x_{N_f}^1 \ x_1^2 \dots x_{N_f}^2]$  et  $\mathbf{z} = [z_1^1 \dots z_{N_f}^1 \ z_1^2 \dots z_{N_f}^2]$ . Ainsi, à partir de ces vecteurs, les coordonnées des éléments de la plaque sont obtenues :  $x_n = \mathbf{x}(n)$  et  $z_n = \mathbf{z}(n)$  avec  $n = 1..N$ . L'échantillonnage selon  $\hat{x}$  et  $\hat{z}$ , qui diffère selon la face considérée, est défini par

$$\begin{cases} \Delta x_{n_f}^1 = \Delta s \cos(\alpha) \\ \Delta z_{n_f}^1 = \Delta s \sin(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x_{n_f}^2 = -\Delta s \cos(\alpha) \\ \Delta z_{n_f}^2 = -\Delta s \sin(\alpha) \end{cases}, \quad (2.102)$$

où le signe  $-$  pour la face 2 provient du retournement de la face, précédemment évoqué. De même, suite à une concaténation,  $\Delta x_n$  et  $\Delta z_n$  sont obtenus. L'orientation des normales est exprimée par

$$\begin{cases} v_{n_f}^1 = +\text{sign}(\cos(\alpha)) \\ v_{n_f}^2 = -\text{sign}(\cos(\alpha)) \end{cases}, \quad (2.103)$$

où la fonction  $\text{sign}(x)$  est définie par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.104)$$

Comme précédemment, par concaténation  $v_n$  est obtenu. Finalement,  $\gamma_n$  peut être calculé à l'aide de l'équation suivante :

$$\gamma_n = \frac{\Delta z_n}{\Delta x_n}, \quad (2.105)$$

ainsi que  $(\gamma_n)'$  défini par (2.67). Les matrices impédances exprimées aux équations (2.78) et (2.79), et qui ont été validées précédemment, sont utilisées pour calculer le champ total sur la surface  $\psi$  de la plaque ainsi que sa dérivée normale  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  (suivant que l'étude est menée en TE ou TM). Le champ diffusé en champ lointain est évalué à l'aide du principe de Huygens avec l'équation (2.84). De cette manière, à partir de l'échantillonnage de la plaque et des matrices impédances, il est possible de modéliser la diffraction par, entre autres, une plaque, un dièdre et une croix. Il suffit pour cela de remarquer que le dièdre et la croix sont un assemblage de plaques d'angles  $\alpha$  différents. Les paramètres nécessaires au calcul des matrices impédances sont obtenus par concaténation des éléments de toutes les plaques de l'objet.

#### 2.2.4 Modèle asymptotique analytique de la diffraction par une croix en hautes fréquences

Comme nous l'avons précédemment évoqué, deux équipes [78, 79, 80] ont proposé un modèle asymptotique rapide pour la diffraction par un trièdre grand devant la longueur d'onde. Ce modèle à l'avantage de proposer une solution analytique du problème. Le temps de calcul est, de ce fait, très court. Puisque nous envisageons d'utiliser ce modèle et de l'étendre aux réflecteurs polyédriques, la même approche est appliquée en 2D pour la diffraction par la croix. Le modèle proposé pour le trièdre [78, 79, 80] est basé sur les méthodes de l'OP pour tenir compte des Simples Réflexions (SR), de l'OG combinée à l'OP pour tenir compte des Doubles et Triples Réflexions (DR et TR) ainsi que la Méthode des Courants Equivalents pour les Simples Diffractions d'arêtes (SD). Pour le cas de la croix, objet invariant suivant une dimension, il ne peut y avoir de phénomène de triple réflexion. Les arêtes deviennent dans le cas 2D des points, l'approche de la MEC (basée sur une intégrale linéique des courants d'arête) ne peut être appliquée. Ces phénomènes ne sont donc pas pris en compte dans le modèle asymptotique de la diffraction par la croix. Seules les simples et les doubles réflexions sont considérées.

La croix, composée de quatre dièdres, possède des faces planes. Si la taille des faces est grande devant la longueur d'onde ( $L \geq 10\lambda$  classiquement), alors les courants décroissent très rapidement sur la partie de la surface non directement illuminée par le champ incident. Les courants sont ainsi considérés comme nuls sur cette surface de l'obstacle (voir 1.4.2.2) et les conditions permettant l'utilisation de l'OP sont vérifiées. Cette méthode introduit la notion d'interaction locale : on applique localement les coefficients de Fresnel pour en déduire les courants surfaciques. Ces courants ne sont donc pas fonctions de l'intensité du courant d'autres points de l'objet. Autrement dit, les ondes rampantes sont négligées. Sous cette approximation, les quatre dièdres de la croix sont découplés : le courant sur les plaques d'un dièdre ne modifiera pas le courant sur les plaques d'un autre dièdre. Alors, sous l'hypothèse hautes fréquences, le champ diffracté en champ lointain par la croix est la somme (cohérente) des champs diffractés, en champ lointain, par chacun des dièdres.

Le champ diffracté par un dièdre en hautes fréquences peut être décomposé en deux contributions : les Simples Réflexions (SR) et les Doubles Réflexions (DR). On dénombre une SR

par face et deux DR (de la face 1 vers la face 2 et de la face 2 vers la face 1). Le calcul des contributions des SR et DR repose sur le calcul du problème élémentaire de la diffraction par une plaque linéique à l'aide de l'OP.

#### 2.2.4.1 Diffraction par une plaque linéique par l'OP

Dans le cas général, une plaque peut être centrée en un point  $O'$  de coordonnées  $(x_0, z_0)$ , et inclinée d'un angle  $\alpha$ . Ainsi nous pouvons définir un repère local  $(O', \mathbf{x}', \mathbf{z}')$  dans lequel la plaque est centrée à l'origine et orientée selon un seul axe (parallèle à la direction de  $\mathbf{x}'$ ). Les vecteurs d'onde incidente et de diffraction sont définis dans le repère global  $(O, \mathbf{x}, \mathbf{z})$  à partir des angles d'incidence  $\theta_i$  et de diffraction  $\theta_s$ . Dans le repère local, les vecteurs d'onde s'expriment à partir d'angles locaux, comme illustré sur la figure 2.15.

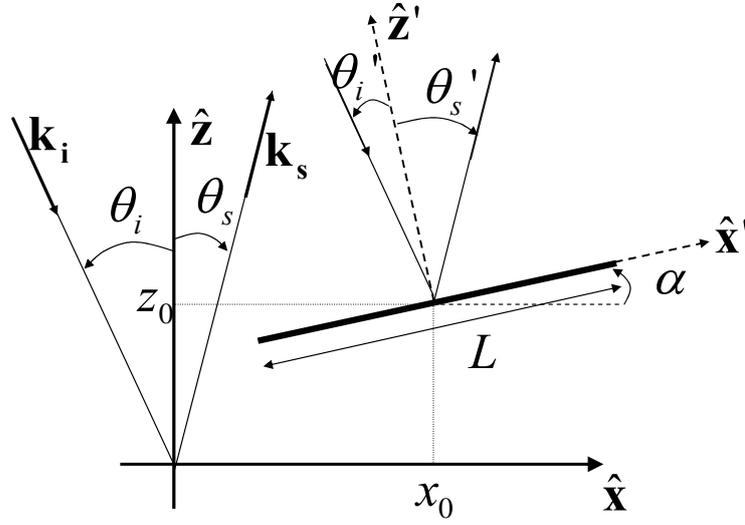


FIG. 2.15 – Illustration des angles locaux et du repère local associés à la plaque.

Ceux-ci sont liés aux angles du repère global par

$$\begin{cases} \theta'_i = \theta_i - \alpha \\ \theta'_s = \theta_s + \alpha \end{cases} \quad (2.106)$$

La transformation du repère global vers le repère local est composée d'une rotation d'angle  $\alpha$  et d'une translation de vecteur  $\mathbf{OO}'$ . Les calculs peuvent donc être réalisés dans le repère local en utilisant les angles locaux avec les relations (2.106), et en tenant compte de la position de l'origine du repère local en introduisant un déphasage. En appliquant localement les coefficients de Fresnel, l'approximation de l'OP relie le champ total sur la surface  $\psi$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  avec le champ incident  $\psi_i$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial \psi_i}{\partial n}$  (voir paragraphe 1.4.2.2). Pour une surface PC, la condition aux limites de Neumann (cas TM) impose  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  et on a avec l'OP en TM :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = 2\psi_i(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_i, \quad (2.107)$$

où  $S_i$  est la surface de la plaque excitée par l'onde incidente, soit tout le côté de la plaque orientée vers l'émetteur. La surface totale de la plaque (les deux côtés) est :  $S = S_i \cup S_{\text{ombre}}$ , où  $S_{\text{ombre}}$

est la surface de la plaque qui n'est pas excitée par l'onde incidente. La condition aux limites de Dirichlet impose  $\psi = 0$ , et l'OP permet d'écrire en TE :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = 0 \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 2\frac{\partial\psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} = 2i(\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\psi_i(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_i, \quad (2.108)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale à la plaque. Et sur la surface  $S_{\text{ombre}}$ , l'OP impose quelle que soit la polarisation de l'onde incidente :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = 0 \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_{\text{ombre}}. \quad (2.109)$$

On rappelle que le champ diffusé obtenu par le principe de Huygens s'écrit en champ lointain

$$\psi_s(\mathbf{r}') = \frac{ie^{ikr' - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi kr'}} \psi_s^\infty(\theta_s), \quad (2.110)$$

avec

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = \int_S \left[ -i(\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})\psi(\mathbf{r}) - \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} ds, \quad (2.111)$$

où le vecteur position sur l'obstacle peut s'écrire à partir d'un vecteur position dans le repère local  $\mathbf{r}''$  auquel on ajoute la translation de l'origine :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'' + \mathbf{OO}'$ . En utilisant les relations de l'OP (2.107), (2.111) devient dans le cas TM :

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = -2i(\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \int_{S_i} \psi_i(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}''} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{OO}'} ds \quad \forall \mathbf{r} \in S_i, \quad (2.112)$$

et avec (2.108), (2.111) devient dans le cas TE :

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = -2 \int_{S_i} \frac{\partial\psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}''} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{OO}'} ds \quad \forall \mathbf{r} \in S_i. \quad (2.113)$$

En considérant que le champ incident est une onde plane (voir (2.87)), le champ incident et sa dérivée normale s'écrivent :

$$\begin{cases} \psi_i(\mathbf{r}) = \psi_{i0} e^{+i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}''} e^{+i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{OO}'} \\ \frac{\partial\psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} = i(\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) \psi_{i0} e^{+i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}''} e^{+i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{OO}'} \end{cases}, \quad (2.114)$$

et les équations (2.112) et (2.113) s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{Cas TM :} & \psi_s^\infty(\theta_s) = -2i\psi_{i0}(\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) I_s e^{-ik\delta} \\ \text{Cas TE :} & \psi_s^\infty(\theta_s) = -2i\psi_{i0}(\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) I_s e^{-ik\delta} \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S. \quad (2.115)$$

avec

$$I_s = \int_{S_i} e^{-i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}''} ds \quad \forall \mathbf{r} \in S_i, \quad (2.116)$$

et

$$\delta = (\hat{\mathbf{k}}_s - \hat{\mathbf{k}}_i) \cdot \mathbf{OO}', \quad (2.117)$$

soit

$$\delta = (\sin\theta_s - \sin\theta_i)x_0 + (\cos\theta_s + \cos\theta_i)z_0. \quad (2.118)$$

Dans le repère local, les vecteurs s'expriment :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = k \sin(\theta'_i) \hat{\mathbf{x}}' - k \cos(\theta'_i) \hat{\mathbf{z}}' \\ \mathbf{k}_s = k \sin(\theta'_s) \hat{\mathbf{x}}' + k \cos(\theta'_s) \hat{\mathbf{z}}' \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}' \\ \mathbf{r}'' = x \hat{\mathbf{x}}' \quad \text{avec} \quad x \in \left[-\frac{L}{2}; +\frac{L}{2}\right] \end{cases} . \quad (2.119)$$

et (2.116) se simplifie en

$$I_s = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-ik(\sin \theta'_s - \sin \theta'_i)x} dx, \quad (2.120)$$

et est finalement calculée analytiquement :

$$I_s = L \operatorname{sinc} \left( k \frac{L}{2} [\sin(\theta_s + \alpha) - \sin(\theta_i - \alpha)] \right). \quad (2.121)$$

Le champ diffracté est donc obtenu analytiquement en fonction des angles  $\theta_i$  et  $\theta_s$  et des paramètres de la plaque (longueur  $L$ , inclinaison  $\alpha$ , coordonnées du centre de la plaque  $(x_0, z_0)$ ). En TM :

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = -2ik\psi_{i_0} \cos(\theta_s + \alpha) L \operatorname{sinc} \left( k \frac{L}{2} [\sin(\theta_s + \alpha) - \sin(\theta_i - \alpha)] \right) e^{-ik\delta}, \quad (2.122)$$

et en TE :

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = +2ik\psi_{i_0} \cos(\theta_i - \alpha) L \operatorname{sinc} \left( k \frac{L}{2} [\sin(\theta_s + \alpha) - \sin(\theta_i - \alpha)] \right) e^{-ik\delta}. \quad (2.123)$$

Le champ sur la surface (cas TM) et sa dérivée normale (cas TE) obtenus par la MdM et l'OP (à l'aide des équations (2.107), (2.108) et (2.109)) sont comparés en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$ , respectivement sur les figures 2.16(a) et 2.16(b). La plaque est de longueur  $L = 10\lambda$ , centrée à l'origine du repère global avec une inclinaison nulle ( $\alpha = 0^\circ$ ), le pas d'échantillonnage de la surface est  $\lambda/20$ , l'épaisseur (utilisée pour le calcul par la MdM) est  $e = \lambda/20$  et l'angle d'incidence est  $\theta_i = 0^\circ$  (incidence normale).

On observe de très bons accords entre les deux méthodes, notamment dans le cas TE. L'OP est assez précise pour évaluer le champ et sa dérivée normale au centre des faces (autour de  $n = 100$  et  $n = 300$ ) mais n'est pas capable de considérer la concentration des courants sur les bords de la plaque (autour de  $n = 0$ ,  $n = 200$  et  $n = 400$ ). Dans le cas TM, le champ total surfacique varie plus fortement le long de la plaque alors que l'OP considère un champ total constant. D'autres comparaisons permettent de montrer que l'OP est plus précise lorsque la longueur de la plaque augmente mais moins précise lorsque l'angle d'incidence augmente (incidence rasante). Dans ce cas, les courants varient fortement le long de la plaque et l'onde rampante est non négligeable.

Comme évoqué dans le cadre de la diffraction par le cylindre, le phénomène de "forward scattering" doit être pris en compte dans le modèle asymptotique. Ce phénomène intervient lorsque le récepteur est situé en face du côté non excité de l'objet, soit pour le cas de la plaque :  $\theta_s \in [-180^\circ; -90^\circ] \cup [+90^\circ; +180^\circ]$  si  $\theta_i \in [-90^\circ; +90^\circ]$ . Plusieurs solutions ont été proposées pour tenir compte de ce phénomène dans les modèles asymptotiques [147, 148, 151]. Avec la méthode asymptotique proposée ci-dessus, une approximation des courants sur la surface de la plaque est obtenue. Ces courants sont très proches de ceux calculés avec la MdM, et le principe de Huygens peut être appliqué également sans aucunes considérations sur l'emplacement du récepteur (voir

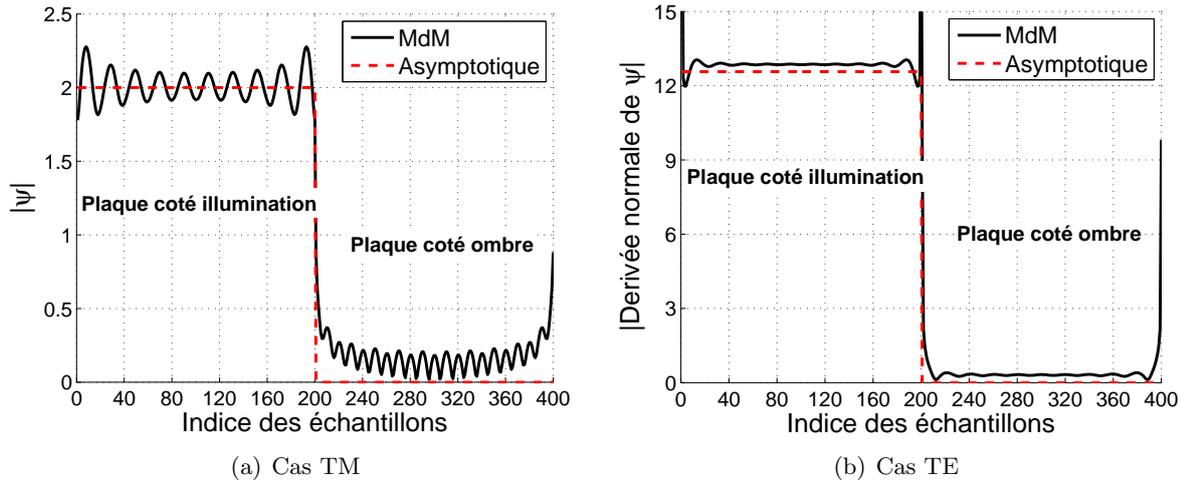


FIG. 2.16 – Comparaison du champ total surfacique et de sa dérivée normale obtenus avec la Mdm et l’OP.  $L = 10\lambda$ ,  $\mathbf{OO}' = \mathbf{0}$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\Delta s = \lambda/20$ ,  $e = \lambda/20$  et  $\theta_i = 0^\circ$ .

paragraphe 1.2.2). Cette méthode consiste à utiliser les équations (2.122) et (2.123) ce qui revient à calculer la diffraction par une plaque à l’aide de l’OP quel que soit l’angle d’observation [147]. Une autre méthode permettant une résolution analytique est d’utiliser l’OP, comme expliqué ci-avant, sauf dans la zone de forward scattering. Le champ diffracté dans cette zone est alors obtenu en utilisant le principe de Babinet avec les conditions aux limites de Kirchhoff [2]. Le calcul de la diffusion dans la zone d’ombre (pour des angles d’incidence et de diffraction correspondant au forward scattering) revient à intégrer les courants induits (obtenus de manière approchée) dans une ouverture équivalente à la silhouette de l’obstacle et découpée dans un plan opaque infini [146, 151]. D’après les conditions aux limites de Kirchhoff, les courants sur l’ouverture équivalente de surface  $S$  sont :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r} \in S. \end{cases} \quad (2.124)$$

Finalement, à partir de (2.110) et (2.111), le rayonnement de ces courants donne le champ diffracté dans la zone d’ombre, et ce quelle que soit la polarisation de l’onde incidente :

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = ik\psi_{i_0} [-\cos(\theta_s + \alpha) + \cos(\theta_i + \alpha)] L \operatorname{sinc} \left( k \frac{L}{2} [\sin(\theta_s + \alpha) - \sin(\theta_i - \alpha)] \right) e^{-ik\delta}. \quad (2.125)$$

On nomme la méthode asymptotique uniquement basée sur le principe de Huygens : “OP+Huygens” et celle utilisant le principe de Babinet : “OP+Babinet”. Ces deux méthodes sont comparées à la méthode de référence (Mdm) sur les figures 2.17(a) et 2.17(b), sur lesquelles la SER (évaluée à l’aide de l’équation (2.96)) et la phase du champ diffracté en champ lointain sont tracées en fonction de l’angle d’observation  $\theta_s$ . La plaque est de longueur  $L = 10\lambda$ , centrée à l’origine du repère global avec une inclinaison nulle ( $\alpha = 0^\circ$ ), le pas d’échantillonnage de la surface est  $\lambda/20$  et  $\theta_i = 0^\circ$ . L’épaisseur, utilisée pour le calcul par la Mdm, est  $e = \lambda/20$ .

Les deux méthodes asymptotiques sont en bon accord avec la Mdm, notamment autour de la direction de fort bistatisme  $\theta_s = 180^\circ$  et de la direction spéculaire  $\theta_s = 0^\circ$ . Ceci provient du fait que les courants sur la plaque sont obtenus analytiquement en appliquant les lois de Snell-Descartes qui supposent que l’énergie est concentrée dans la direction spéculaire. Cette hypothèse

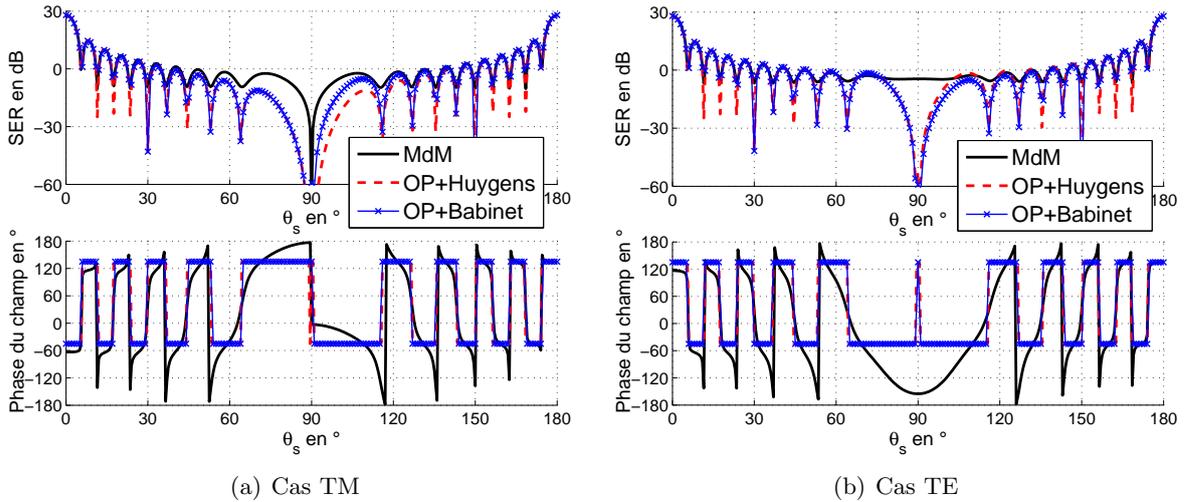
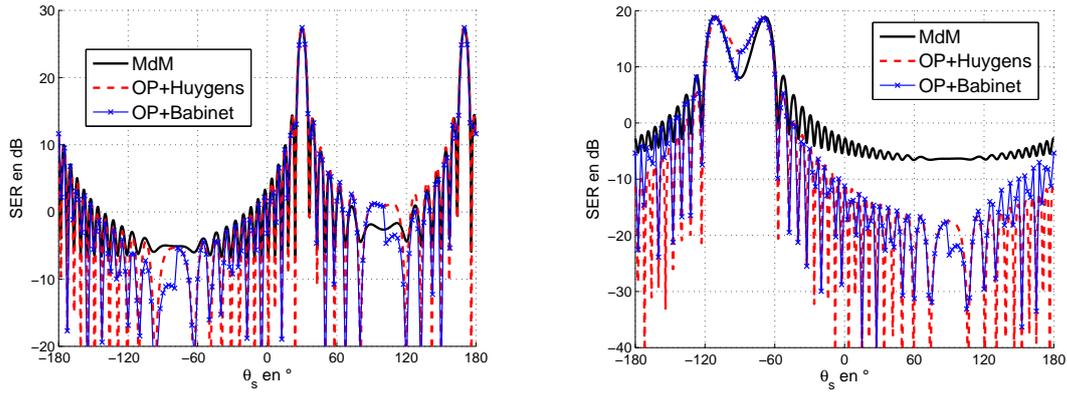


FIG. 2.17 – Comparaison de la SER et de la phase du champ diffracté obtenus avec la MdM, la méthode asymptotique “OP+Huygens” et la méthode asymptotique “OP+Babinet”.  $L = 10\lambda$ ,  $\mathbf{OO}' = \mathbf{0}$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\Delta s = \lambda/20$ ,  $e = \lambda/20$  et  $\theta_i = 0^\circ$ .

est d’autant plus vérifiée que la plaque est grande, et les courants évalués par l’OP rayonne un champ diffracté dans la direction spéculaire, très proche de celui obtenu par la MdM. Les deux méthodes asymptotiques ne diffèrent, d’un point de vue mathématique, que dans la zone de forward scattering ( $\theta_s \in [90^\circ; 180^\circ]$ ), et on note que les deux méthodes délivrent des résultats quasiment identiques sauf pour des angles rasants dans la zone d’ombre :  $\theta_s \in [90^\circ; 120^\circ]$ . Tandis que la méthode “OP+Babinet” est plus précise en polarisation TM, la méthode “OP+Huygens” est plus précise en TE. Les deux méthodes sont néanmoins incapables d’évaluer correctement la SER pour des angles d’observation rasants, ceci étant principalement dû à la concentration des courants sur les bords qui n’est pas prise en compte dans ces méthodes asymptotiques.

Les deux méthodes sont comparées à la méthode de référence (MdM) sur la figure 2.18 sur laquelle est tracée la SER en fonction de l’angle d’observation  $\theta_s$  pour la polarisation TE. La plaque est de longueur  $L = 10\lambda$ , centrée à l’origine du repère global, le pas d’échantillonnage de la surface est  $\lambda/20$ , et l’épaisseur utilisée pour le calcul par la MdM est  $e = \lambda/20$ . L’inclinaison est de  $\alpha = -10^\circ$  et  $\theta_i = +10^\circ$  pour la comparaison effectuée sur la figure 2.18(a), et  $\alpha = 0^\circ$  et  $\theta_i = -70^\circ$  pour la figure 2.18(b).

Pour la figure 2.18(a), la zone de forward scattering correspond à  $\theta_s \in [-180^\circ; -80^\circ] \cup [100^\circ; 180^\circ]$ , du fait de l’inclinaison de la plaque, et correspond à  $\theta_s \in [-180^\circ; -90^\circ] \cup [90^\circ; 180^\circ]$  pour la figure 2.18(b). Les méthodes asymptotiques sont toujours en bon accord avec la méthode de référence autour de la direction spéculaire ( $\theta_s = 30^\circ$  pour la figure 2.18(a) et  $\theta_s = -70^\circ$  pour la figure 2.18(b)), mais de fortes différences sont observées lorsque la plaque est excitée à angle rasant et observée hors de la direction spéculaire (voir la figure 2.18(b)). Ceci étant dû, comme cela fut évoqué précédemment, aux fortes variations du courant sur la plaque lorsqu’elle est excitée à angle rasant. La transition vers la zone de forward scattering (par exemple à  $\theta_s = -80^\circ$  pour la figure 2.18(a) et  $\theta_s = -90^\circ$  pour la figure 2.18(b)) s’effectue avec une discontinuité pour la méthode “OP+Babinet”, et même si les comportements entre les deux méthodes asymptotiques sont légèrement différents, la précision de leurs résultats par rapport à la MdM est similaire. Par la suite, la méthode asymptotique “OP+Huygens” est retenue pour sa simplicité de mise en œuvre (les mêmes équations sont utilisées quelle que soit la position du récepteur).

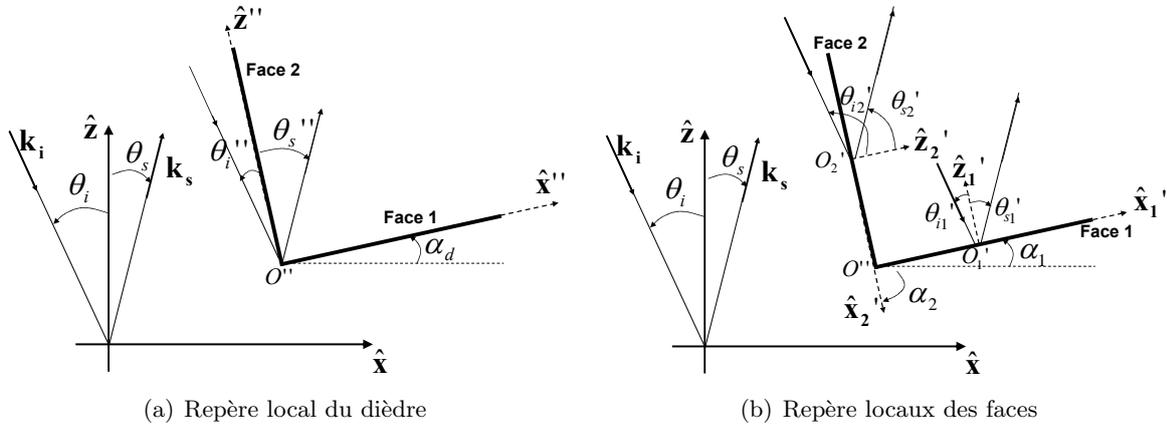

 (a) Avec une inclinaison de la plaque ( $\alpha = -10^\circ$  et  $\theta_i = +10^\circ$ )

 (b) Avec un angle d'incidence rasant ( $\alpha = 0^\circ$  et  $\theta_i = -70^\circ$ )

 FIG. 2.18 – Comparaison de la SER obtenue avec la MdM, la méthode asymptotique “OP+Huygens” et la méthode asymptotique “OP+Babinet” en polarisation TE.  $L = 10\lambda$ ,  $\mathbf{OO}' = \mathbf{0}$ ,  $\Delta s = \lambda/20$  et  $e = \lambda/20$ .

### 2.2.4.2 Diffraction par un dièdre par l'OP combinée à l'OG

Le dièdre est composé de deux faces de longueur  $L$  formant un angle droit. Dans le repère local du dièdre ( $O''$ ,  $\hat{x}''$ ,  $\hat{z}''$ ) (illustré sur la figure 2.19(a)), la face 1 est parallèle à la direction de  $\hat{x}''$  et la face 2 est parallèle à la direction de  $\hat{z}''$ . L'origine du dièdre est située au point  $O''$ . Comme illustré sur la figure 2.19(b), un repère local est associé à chaque face.



(a) Repère local du dièdre

(b) Repère locaux des faces

FIG. 2.19 – Illustration des repères locaux du dièdre et des faces 1 et 2. La face 2 est excitée sur son côté externe, une partie de la face 1 n'est pas excitée.

Les angles définissant la rotation des repères locaux sont définis à partir de l'angle de rotation du repère local du dièdre  $\alpha_d$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_d \\ \alpha_2 = \alpha_d - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.126)$$

et les angles d'incidence et d'observation dans les repères locaux des faces ( $\theta'_{i_1}$ ,  $\theta'_{s_1}$ ,  $\theta'_{i_2}$  et  $\theta'_{s_2}$ ) sont obtenus à l'aide des équations (2.126) et (2.106).

**Phénomènes d'ombrage** Comme illustré sur la figure 2.19(b), un phénomène d'ombrage peut exister. Sur cet exemple, la face 2 crée une ombre sur une partie du côté interne de la face 1. Ce phénomène peut également être vu comme une conséquence du forward scattering : l'onde incidente est présente sur toute la face 1 mais le champ diffracté par le côté externe de la face 2 en "forward scattering" vient annuler le champ incident de sorte qu'une ombre se crée et une partie du côté interne de la face 1 n'est pas excitée. Le même phénomène intervient pour la réception et un exemple est illustré sur la figure 2.20(b). La face 2 masque une partie de la face 1. Cette zone, bien qu'excitée par l'onde incidente, rayonne un champ qui est intercepté par la face 2 et par conséquent ne contribuera pas au niveau du récepteur. Une autre manière de voir ce phénomène serait de considérer que toute la surface de la face 1 rayonne sans phénomène de masquage (le terme de blocage est parfois aussi employé). Mais il faudrait alors considérer que le courant induit sur le côté interne de la face 2 par le champ provenant de la face 1 rayonne en direction du récepteur en "forward scattering". Cette contribution "forward" annule le champ rayonné par la partie de la face 1 non observée. Ces deux considérations (ombrage et "forward scattering") sont deux façons équivalentes de voir les mêmes phénomènes. Par soucis de compréhension, ces phénomènes seront vus comme des masquages/ombrages des faces (plus intuitif de par l'analogie avec l'optique).

On ne s'intéresse ici qu'à la diffraction par les faces internes du dièdre puisque dans la croix, les faces externes d'un dièdre sont des faces internes pour les dièdres voisins. Les Simples Réflexions (SR) sont étudiées dans un premier temps.

**Contribution des SR du dièdre** Les simples réflexions sont calculées en utilisant les équations de la diffraction par une plaque tout en considérant les ombrages. Les tests permettant de savoir si la face est à la fois excitée et observée au moins en partie sont

$$\begin{cases} \mathbf{k}'_{i_j} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j < 0 \\ \mathbf{k}'_{s_j} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j > 0 \end{cases} \quad \text{avec } j = 1..2, \quad (2.127)$$

où les vecteurs sont définis dans les repères locaux associés aux faces (à l'aide de l'équation (2.119) et des angles  $\theta'_{i_1}$ ,  $\theta'_{s_1}$ ,  $\theta'_{i_2}$  et  $\theta'_{s_2}$ ) et  $\hat{\mathbf{n}}_j = \hat{\mathbf{z}}_j'$ .

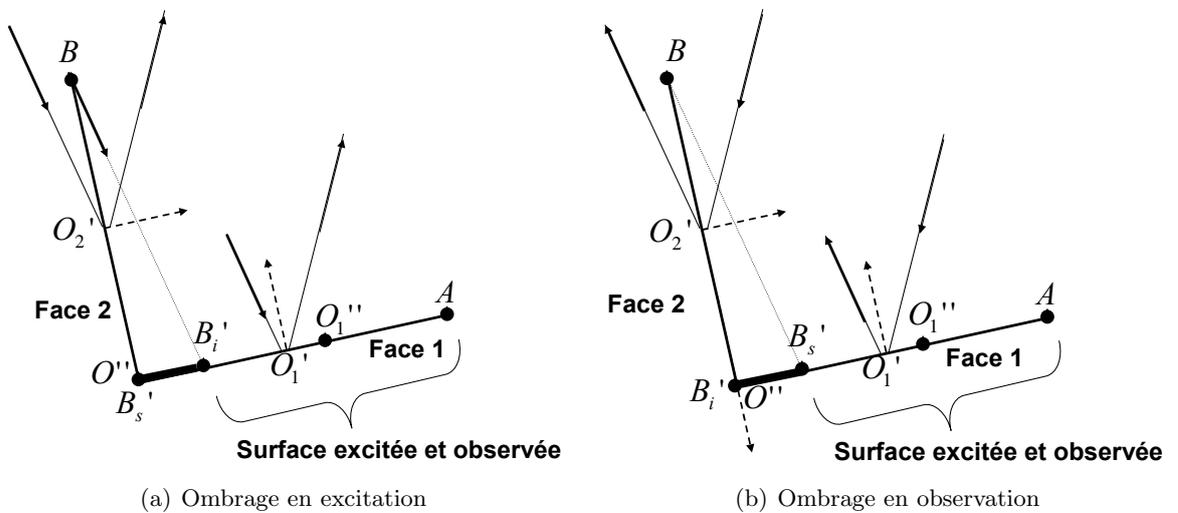


FIG. 2.20 – Illustration de la SR de la face 1 avec ombrage en excitation et ombrage en observation.

On définit le point  $B'_i$  comme le projeté du point  $B$  sur la face 1 par le vecteur  $\hat{\mathbf{k}}'_{i_1}$  comme illustré sur la figure 2.20(b). Comme  $B'_i$  est situé sur la face 1, le vecteur  $\mathbf{O}''\mathbf{B}'_i$  est porté par  $\hat{\mathbf{x}}'_1$ . Puisque l'angle  $(\mathbf{B}\mathbf{O}'', \mathbf{B}\mathbf{B}'_i) = \theta'_{i_1}$  (car les deux faces sont perpendiculaires), alors  $\|\mathbf{O}''\mathbf{B}'_i\| = L \tan(\theta'_{i_1})$  et on a finalement

$$\mathbf{O}''\mathbf{B}'_i = L \tan(\theta'_{i_1}) \hat{\mathbf{x}}'_1 + 0 \hat{\mathbf{z}}'_1, \quad (2.128)$$

et si  $\tan(\theta'_{i_1}) > 1$  il y a ombrage total de la face et donc aucune partie de la face 1 ne contribue. Si  $\tan(\theta'_{i_1}) < 0$ , il n'y a pas d'ombrage en excitation, la surface entière de la face 1 contribue (on positionne alors le point  $B'_i$  en  $\mathbf{O}''$ ). Ainsi les coordonnées de  $B'_i$  sont connues et la partie illuminée de la face 1, qui se situe entre les points  $B'_i$  et  $A$ , est obtenue. De même, on définit le point  $B'_s$ , projeté du point  $B$  sur la face 1 par le vecteur  $\hat{\mathbf{k}}'_{s_1}$ . Les coordonnées de ce point sont calculées avec la même démarche que pour  $B'_i$ . La partie observée de la face 1 se situe entre les points  $B'_s$  et  $A$ . Et la partie à la fois excitée et observée est  $[B'_i A] \cap [B'_s A]$ . Connaissant les coordonnées des points, le centre de cette zone noté  $\mathbf{O}'_1$  est facilement évalué. Ce point sert de nouvelle origine pour le repère local de la face 1, et le calcul de la diffraction par une plaque PC vu au paragraphe précédent est appliqué. En effet, sont connus : l'angle  $\alpha$ , la longueur de la surface qui contribue (il s'agit de la longueur de  $[B'_i A] \cap [B'_s A]$ ), les coordonnées de l'origine du repère local (il s'agit du point  $\mathbf{O}'_1$ ) et enfin, les angles d'incidence et de diffusion, dans le repère local (avec l'équation (2.126)).

De même pour la face 2, le point  $A'_i$ , projeté du point  $A$  sur la face 2 par le vecteur  $\hat{\mathbf{k}}'_{i_2}$ , et le point  $A'_s$ , projeté du point  $A$  sur la face 2 par le vecteur  $\hat{\mathbf{k}}'_{s_2}$ , sont calculés dans le repère local de la face 2. La partie de la face 2 qui contribue dans la diffraction en SR est  $[A'_i B] \cap [A'_s B]$ . Et les calculs sont menés à partir du cas élémentaire de la plaque vu précédemment.

**Contribution des DR du dièdre** Une méthode pour calculer la contribution des doubles réflexions serait d'itérer l'OP. Connaissant les courants induits par le champ incident sur la face 1 (à l'aide de l'OP), le principe de Huygens serait utilisé pour connaître le champ diffusé au niveau de la face 2, et les courants induits par ce champ diffracté pourraient être obtenus à l'aide de l'OP. Finalement, le principe de Huygens serait de nouveau appliqué pour évaluer le rayonnement en champ lointain de cette contribution. Mais cette méthode nécessite le calcul d'une double intégrale (quadruple intégrale pour le cas 3D) qui ne peut être réalisé analytiquement à cause du rayonnement en champ proche entre la face 1 et 2. Pour obtenir un calcul asymptotique rapide (sans intégrale numérique), il convient de coupler les faces en champ lointain. Ceci est réalisé à l'aide de l'Optique Géométrique, et la démarche ainsi que la validité de cette approche sont discutées pour le cas 3D dans [78, 80, 152].

L'OG est utilisée de la manière la plus simple : le développement asymptotique de Luneberg et Kline [40, 41] n'est pas utilisé, seuls le principe de Fermat et les lois de Snell-Descartes sont considérés (voir paragraphe 1.4.2.1). L'OG est utilisée sur la première réflexion de la DR considérée, et l'OP est appliquée sur la deuxième face de la DR. La réflexion sur la première face de la DR est réalisée dans la direction spéculaire, et une simple considération géométrique permet de voir que les DR ne sont possibles que si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \mathbf{k}'_{i_1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 < 0 \\ \mathbf{k}'_{i_2} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 < 0 \end{cases} \quad (2.129)$$

En effet, si l'une des faces, par exemple la face 1, est excitée sur son côté externe alors l'onde réfléchiée sur l'autre face (la face 2), qui est orientée par la direction spéculaire, s'éloigne de la

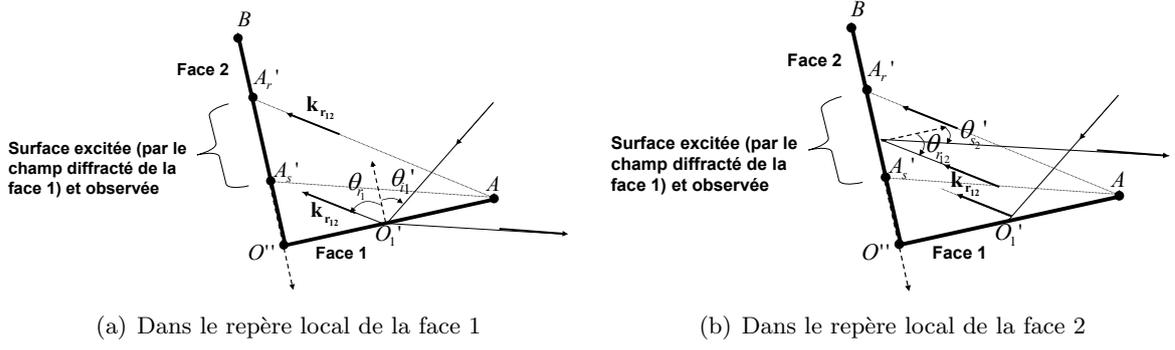


FIG. 2.21 – Illustration, dans les repères locaux des faces, de la DR (face 1  $\rightarrow$  face 2) avec ombrage en observation.

face 1. Si les deux conditions de (2.129) sont vérifiées alors les DR sont possibles, et l'ombrage en excitation ne peut pas intervenir sous ces conditions.

D'après les lois de Snell-Descartes, comme illustré sur la figure 2.21(a), la direction de l'onde réfléchiée par la face 1 (direction spéculaire) forme avec la normale  $\hat{n}_1$  un angle  $\theta_{r1} = -\theta'_{i1}$  exprimé dans le repère local de la face 1. L'onde réfléchiée est une onde incidente pour la face 2 et il est possible de montrer, comme illustré sur la figure 2.21(b), que la direction de cette onde forme avec la normale  $\hat{n}_2$  l'angle :

$$\theta_{r12} = -\theta'_{i2}, \quad (2.130)$$

exprimé dans le repère local de la face 2. Le vecteur d'onde de l'onde réfléchiée  $\mathbf{k}_{r12}$ , exprimé dans le repère de la face 2 est

$$\mathbf{k}_{r12} = k \sin(\theta_{r12}) \hat{x}'_2 - k \cos(\theta_{r12}) \hat{z}'_2. \quad (2.131)$$

La surface de la face 2 ne sera pas nécessairement excitée totalement par l'onde réfléchiée par la face 1. Afin de déterminer cette zone excitée, le point  $A'_r$  est évalué en projetant le point  $A$  sur la face 2 par le vecteur  $\mathbf{k}_{r12}$ , de la même manière que sont obtenus les points  $A'_s$  et  $A'_i$  pour les SR de la face 2.  $A'_r$  est positionné au point  $B$  si la totalité de la face 2 est excitée par l'onde réfléchiée par la face 1. La surface excitée est alors  $[O''A'_r]$ .

Comme illustré sur les figures 2.21(a) et 2.21(b), un ombrage en observation est possible. Comme dans le calcul des SR, on détermine la surface observée en calculant les coordonnées du point  $A'_s$ , obtenu par projection du point  $A$  par le vecteur  $\mathbf{k}_{s2}$ . Finalement l'OP est appliquée sur la zone de la face 2, à la fois illuminée (par l'onde réfléchiée par la face 1) et observée :  $[A'_sA'_r]$ . Pour ce faire, le calcul du problème élémentaire de la diffraction par une plaque PC (vu au paragraphe précédent) est appliqué sur le segment  $[A'_sA'_r]$ . Les paramètres nécessaires pour ce calcul sont la longueur du segment et les coordonnées de son centre (connus car les coordonnées de  $A'_s$  et  $A'_r$  ont été calculés) ainsi que l'angle d'incidence dans le repère local (évalué par  $\theta_{r12}$ ), l'angle d'observation dans le repère local ( $\theta'_{s2}$ ), et enfin, la rotation du repère local ( $\alpha_2$ ). La même démarche est conduite pour la DR de la face 2 vers la face 1 où, cette fois, l'angle d'incidence (de l'onde réfléchiée par la face 2) dans le repère local de la face 1 est :

$$\theta_{r21} = -\theta'_{i1}. \quad (2.132)$$

La contribution en forward scattering est évaluée, comme pour le cas de la plaque, en appliquant le principe de Huygens sur les courants de l'OP en SR en ne considérant que l'ombrage en

excitation. La croix étant constituée de 4 dièdres, et connaissant les angles locaux dans chaque dièdre (puisque la rotation d'angle  $\alpha$  est connue pour chaque dièdre), on applique le calcul proposé précédemment. Finalement le champ diffracté en champ lointain de la croix est obtenu par sommation cohérente du champ diffracté de tous les dièdres.

### 2.2.4.3 Résultats

La méthode asymptotique (OP+OG/OP) appliquée sur la croix est comparée à la MdM, utilisée comme méthode de référence. La géométrie de l'obstacle est illustré sur la figure 2.22 et les numérotations des faces et des dièdres sont définies. Une comparaison sur la dérivée normale du champ total surfacique (cas TE) est tracée sur la figure 2.23. La croix a une inclinaison  $\alpha = 0^\circ$ , la longueur des plaques est  $L = 5\lambda$ , et leur épaisseur est  $e = \lambda/15$ , le pas d'échantillonnage vaut  $\Delta s = \lambda/20$ . La croix est illuminée par une onde plane d'angle d'incidence  $\theta_i = 45^\circ$ .

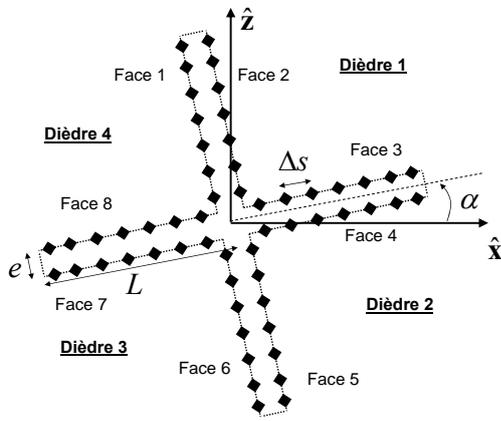


FIG. 2.22 – Numérotation des faces et des dièdres dans la croix.

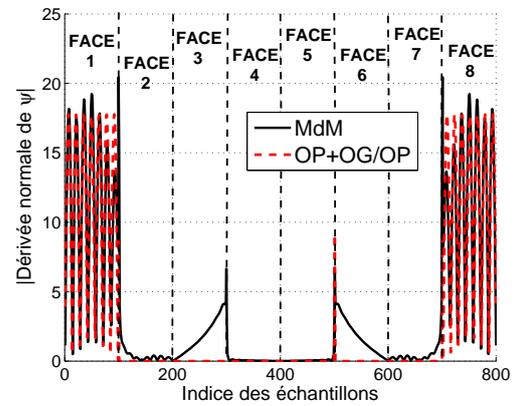


FIG. 2.23 – Comparaison de la dérivée normale du champ surfacique (cas TE) sur la croix.  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $L = 5\lambda$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $e = \lambda/15$ ,  $\Delta s = \lambda/20$ .

Sous cette configuration et d'après la figure 2.22, on remarque que les faces 1 et 8 sont directement illuminées par l'onde incidente. De ce fait, les courants sur les faces se couplent. Du point de vue de la méthode asymptotique, les DR (1  $\rightarrow$  8) et (8  $\rightarrow$  1) tiennent compte de ce couplage en s'ajoutant aux contributions des SR. Ainsi la dérivée normale du champ surfacique est bien évaluée par la méthode OP+OG/OP sur les faces 1 et 8. La MdM prédit un courant non négligeable, sur les terminaisons des faces 3 et 6, qui décroît vers la base des faces. La méthode asymptotique est incapable de prédire ces courants puisque ces faces ne sont pas directement excitées par l'onde incidente. Physiquement ces courants peuvent être dus à la diffraction de l'arête des faces 1 et 2 et de l'arête des faces 7 et 8. Ces arêtes rayonnent vers les faces 3 et 6, excitant alors une onde de surface qui décroît peu à peu le long des faces : le courant se concentrant sur le bord des faces. Dans le cas TM (comparaison non illustrée dans ce manuscrit), les résultats sont similaires. A savoir un très bon accord sur les faces directement illuminées, et des ondes rampantes sur les autres faces qui semblent légèrement plus présentes que dans le cas TE. De plus, le champ surfacique décroît moins vite et l'onde de surface contribue davantage.

Les résultats en SER issus de la méthode OP+OG/OP sont comparés à ceux issus de la MdM sur la figure 2.24 où le cas TE est considéré. La longueur des plaques de la croix est  $L = 10\lambda$ , et leur épaisseur est  $e = \lambda/15$ , le pas d'échantillonnage vaut  $\Delta s = \lambda/20$  et  $\theta_i = 0^\circ$ . La figure

2.24(a) correspond au cas où la croix a une inclinaison  $\alpha = 0^\circ$ , alors que  $\alpha = 45^\circ$  pour la figure 2.24(b).

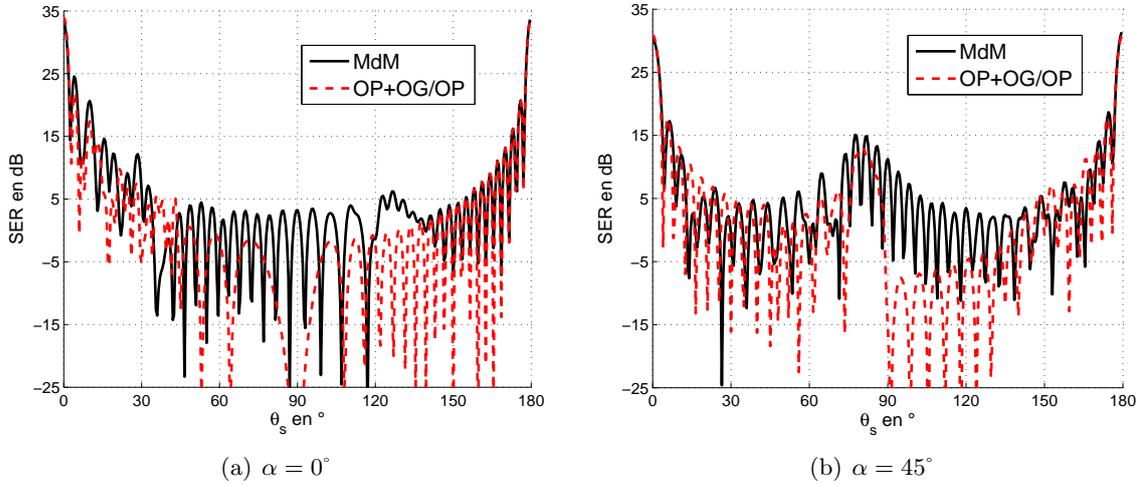


FIG. 2.24 – Comparaison de la SER (cas TE) d’une croix.  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $L = 10\lambda$ ,  $e = \lambda/15$ ,  $\Delta s = \lambda/20$ .

Les résultats montrent un très bon accord autour de la direction spéculaire (spéculaire des SR des faces 3 et 8 pour la figure 2.24(a) et spéculaire des DR entre les faces 2 et 3 pour la figure 2.24(b)). Pour un angle d’observation plus rasant ( $\theta_s \in [60^\circ; 140^\circ]$ ) les résultats diffèrent, loin de la direction spéculaire l’OP devient moins précise. De plus les diffractions d’arêtes sont négligées dans l’approche asymptotique et peuvent contribuer dans cette zone angulaire. En zone de forward scattering l’OP+OG/OP tend à nouveau vers la Mdm. Les SR et les DR sont donc bien prises en compte dans la méthode car de bons résultats sont obtenus dans le domaine de validité de l’OP (proche de la direction spéculaire)

Un des avantages de la méthode asymptotique est de proposer une résolution analytique du problème. Les résultats sont obtenus presque instantanément, et ceci, quelle que soit la taille du problème (taille de l’obstacle par rapport à la longueur d’onde). Alors que la Mdm peut être inutilisable si l’objet devient trop grand. En effet dans ce cas, le nombre d’inconnues est très important et la matrice impédance ne peut pas être inversée (par décomposition LU) sur un PC standard. Lorsque le calcul est réalisable, la Mdm peut nécessiter un temps de calcul de l’ordre de la minute en fonction de la taille de l’objet. Un autre avantage de la méthode OP+OG/OP est qu’il est possible de calculer les contributions séparément. Par exemple, les contributions (en SR, DR et forward scattering) ne provenant que du dièdre 1 peuvent être évaluées et comparées au champ diffracté obtenu en considérant tous les dièdres. De même il est possible de calculer le champ diffracté du uniquement aux SR des faces. En conclusion, la méthode permet une souplesse de calcul, très utile pour comprendre physiquement le rôle de chaque contribution.

Sur la figure 2.25, la SER de la croix est tracée. Une comparaison est effectuée entre la Mdm et les différentes contributions de la méthode asymptotique : une courbe où seules les SR de la croix sont considérées, une deuxième courbe où le forward scattering est ajouté aux SR, et enfin une courbe où toutes les contributions sont considérées (ajout des DR). L’inclinaison de la croix est de  $\alpha = 0^\circ$ , la longueur de ses plaques  $L = 10\lambda$ , et leur épaisseur est  $e = \lambda/15$ , le pas d’échantillonnage vaut  $\Delta s = \lambda/20$  et  $\theta_i = 55^\circ$ .

Avec cet angle d’incidence, les faces 1 et 8 sont directement illuminées par l’onde incidente et contribueront en SR et DR. Une partie de la face 6 est excitée et contribuera en SR. Sur la

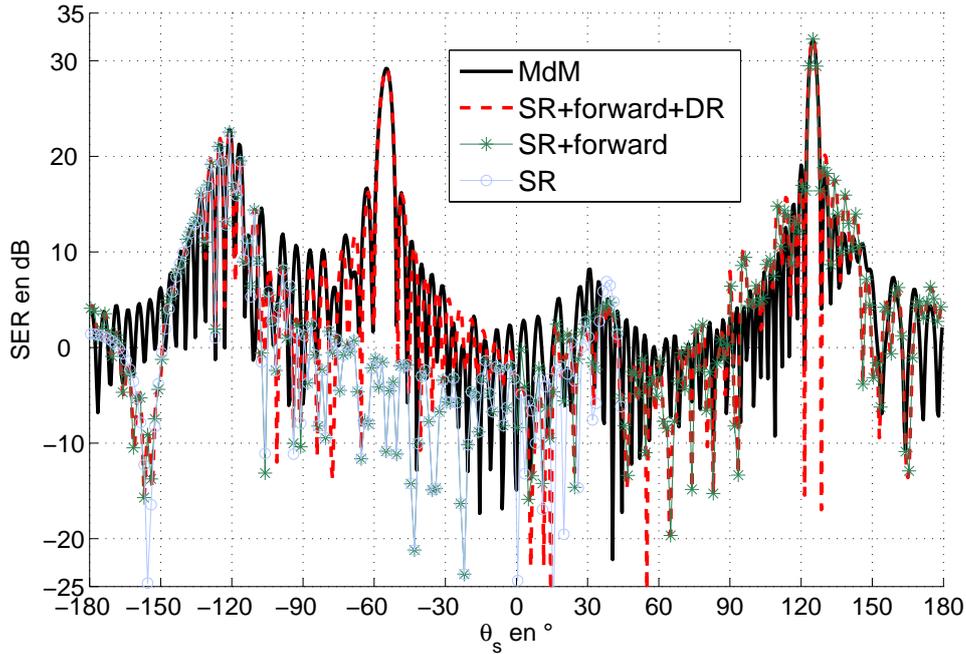


FIG. 2.25 – SER (cas TE) de la croix. Comparaison entre les résultats obtenus par la MdM et par les différentes contributions de la méthode asymptotique.  $\theta_i = 55^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $L = 10\lambda$ ,  $e = \lambda/15$ ,  $\Delta s = \lambda/20$ .

figure 2.25, on remarque que la méthode asymptotique est en bon accord avec la MdM autour de  $\theta_s = -125^\circ$ , ce qui correspond à la direction spéculaire des SR des faces 1 et 6. Mais les SR seules ne permettent pas de prédire le pic centré à  $\theta_s = -55^\circ$  ni le champ diffracté dans la zone d'ombre ( $\theta_s \in [0; 180^\circ]$ ), bien que la SR de la face 8 permet d'obtenir des valeurs pour  $\theta_s \in [0; 45^\circ]$ ; celle-ci étant encore visible par le récepteur dans cette zone angulaire. Dans la zone d'ombre, l'ajout de la contribution des forward scattering est essentiel, et on observe un bon accord autour de  $\theta_s = 125^\circ$ , angle correspondant au plus fort bistatisme. Enfin, l'ajout des DR permet de prédire très précisément le pic à  $\theta_s = -55^\circ$ , correspondant à la direction spéculaire des DR. Le champ diffracté obtenu par la méthode asymptotique (en considérant toutes les contributions) est finalement proche de celui calculé par la MdM.

Dans ce paragraphe, un modèle asymptotique (basé sur l'OP combinée à l'OG) et un modèle rigoureux (basé sur la MdM) ont été proposés. Les résultats ont montré à la fois l'exactitude de la MdM et une précision intéressante pour la méthode asymptotique. Il convient maintenant de coupler l'objet avec la surface rugueuse. C'est l'objet du troisième chapitre.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les travaux menés au laboratoire IREENA, concernant le calcul de la diffusion par une surface rugueuse par des méthodes "exactes" rapides, ont été rappelés. Puisque le cas plus complexe d'un objet situé au-dessus de la mer nécessite d'acquérir une maîtrise de ces outils, mon travail a consisté à assimiler le développement théorique des méthodes (MdM, FB et FB-SA) ainsi que les codes existants et à les appliquer au cas réaliste d'une surface de mer très conductrice.

Ainsi, une étude a été menée sur la convergence de la FB-SA pour ce type de surface. La conclusion importante de ce travail est que la distance des interactions fortes pour une surface de mer est très petite devant la taille de la surface contrairement au cas d'une surface gaussienne. Ainsi, la méthode FB-SA s'avère particulièrement intéressante pour des applications maritimes. La diffraction par une croix en espace libre a également été étudiée dans ce chapitre. La Méthode des Moments a d'abord été appliquée au cas du cylindre, et des comparaisons avec la solution analytique exacte a démontré la validité de l'application. Fort de ces résultats, la MdM a pu être appliquée au cas de la croix. Un modèle asymptotique analytique (basé sur l'OP et l'OG) a été proposé pour évaluer la SER d'une croix en espace libre et des comparaisons avec la méthode de référence (la MdM) ont montré des résultats encourageants. Il convient maintenant de continuer dans l'élaboration d'un modèle rigoureux pour une scène plus complexe où un objet est situé au-dessus d'une surface rugueuse.



## Chapitre 3

# Diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse - cas scalaire

---

*D*ans le chapitre précédent, l'étude a porté sur la diffusion par la surface rugueuse seule et sur la diffraction par un objet en espace libre. Dans ce chapitre nous allons présenter comment modéliser la diffraction par une scène 2D où un objet est situé au-dessus d'une surface rugueuse. Les phénomènes de couplage seront tout d'abord mis en exergue en étudiant les équations intégrales de la scène. En utilisant l'étude menée au chapitre 2, la Méthode des Moments sera appliquée et servira de méthode de référence. Après avoir proposé une méthode rigoureuse "exacte" facilitant le calcul de la diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse, sa validité et sa convergence seront étudiées. Cette méthode permettra notamment d'accélérer le calcul en utilisant les travaux vus au chapitre 2. Des modèles rigoureux et hybrides seront construits à partir de cette méthode.

---

### 3.1 Positionnement du problème

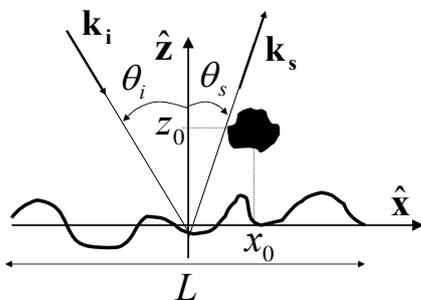


FIG. 3.1 – Illustration de la scène étudiée : un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse.

Lorsqu'un objet est situé à proximité d'une autre surface, et que cet ensemble de diffuseurs est excité par une onde électromagnétique, le champ diffusé par cette scène n'est pas égal à la somme des champs diffusés par chacun des diffuseurs considérés indépendamment (en espace libre). En effet, les deux surfaces vont se coupler, ou autrement dit : les courants sur la surface d'un objet dépendent des courants sur la surface de l'autre diffuseur. Comme nous l'avons déjà évoqué, ce sujet d'étude est de grand intérêt puisque dans la nature un diffuseur est rarement à la fois isolé de son environnement et isolé d'autres diffuseurs proches. Une modélisation réaliste de la diffusion par ces scènes complexes doit prendre en compte ces phénomènes de couplage.

Toujours dans le souci d'obtenir une méthode "exacte", la Méthode des Moments est utilisée. La scène considérée, illustrée sur la figure 3.1, est composée d'un obstacle placé au-dessus d'une surface rugueuse monodimensionnelle.

Contrairement au cas traité par Wang et al. [153] (qui appliquent la MdM sur un objet partiellement enfoui) et par Pino et al. [105] (qui proposent une méthode "exacte" rapide dans le cas 2D), l'objet n'est pas sur la surface mais au-dessus de la surface rugueuse. Les autres travaux sur ce sujet datent de cette dernière décennie; nous avons déjà cité [108, 109, 110, 111], qui proposent tous une méthode hybride ou asymptotique du problème dans le cas 2D. Cependant, l'élaboration d'une méthode dite "exacte" et rapide est nécessaire afin de traiter des problèmes de grande taille, et afin de valider par la suite les modèles asymptotiques envisagés. L'approche de Wang et al. [107] applique la Méthode des Moments avec une inversion directe de la matrice impédance de la scène globale. Cette scène est composée d'un objet PC placé au-dessus d'une surface rugueuse diélectrique; l'étude de Wang et al. est uniquement menée pour le cas TM. Une approche intéressante, déjà évoquée au paragraphe 1.6, est celle de Johnson [106], où un modèle est proposé pour le cas 3D. Cependant, il est utile de rappeler que ce modèle utilise la méthode dite "exacte" et rapide Coupled CAnonical Grid/Discrete Dipole Approach (CCAG/DDA) [113] qui implique une complexité de  $\mathcal{O}(N_- \log(N_-))$  sur la surface de mer (où  $N_-$  est le nombre d'inconnues sur la surface de mer). Or, la FB-SA propose, quant à elle, une complexité de  $\mathcal{O}(N_-)$ . Il serait donc intéressant de développer un modèle capable de coupler "rigoureusement" l'objet avec la surface de mer, et dans lequel la FB-SA est appliquée sur la surface de mer. Avant d'envisager ce modèle accéléré, considérons d'abord le calcul par la MdM.

## 3.2 Diffusion de la scène par la Méthode des Moments

Dans cette partie, le problème de deux diffuseurs quelconques est étudié. Ils sont considérés dans un premier temps, tous deux, diélectriques. Le cas où seulement un diffuseur est parfaitement conducteur est ensuite étudié pour finalement traiter le cas où les deux diffuseurs sont PC. Pour poser rigoureusement le problème de la diffusion électromagnétique par cette scène "complexe", il convient d'établir les équations intégrales de cette nouvelle scène.

### 3.2.1 Equations intégrales - cas de deux diffuseurs quelconques diélectriques placés dans le milieu incident

Le problème considéré est illustré sur la figure 3.2. Une source est placée dans un milieu  $\Omega_0$  de permittivité  $\epsilon_0$  et de volume  $V_0$ . Ce milieu incident contient deux diffuseurs : le diffuseur 1 de milieu  $\Omega_1$  de permittivité  $\epsilon_1$  et de volume  $V_1$  et le diffuseur 2 de milieu  $\Omega_2$  de permittivité  $\epsilon_2$  et de volume  $V_2$ .  $S_1$  est la surface délimitant le volume  $V_1$ ; sa normale,  $\hat{\mathbf{n}}_1$ , est dirigée vers l'extérieur de  $V_1$  (donc dirigée vers le milieu incident). De même,  $S_2$  est la surface délimitant le volume  $V_2$ ; sa normale,  $\hat{\mathbf{n}}_2$ , est dirigée vers l'extérieur de  $V_2$ .  $S_\infty$  est la surface délimitant le volume  $V_0$  à l'infini; sa normale pointe vers l'extérieur de  $V_0$ . En appliquant le théorème de Green dans le volume  $V_0$ , comme vu aux paragraphes 1.2.1.2 et 1.2.2 et dans l'annexe A (où seul le problème "simple diffuseur" est considéré) mais en menant le calcul avec deux diffuseurs, on

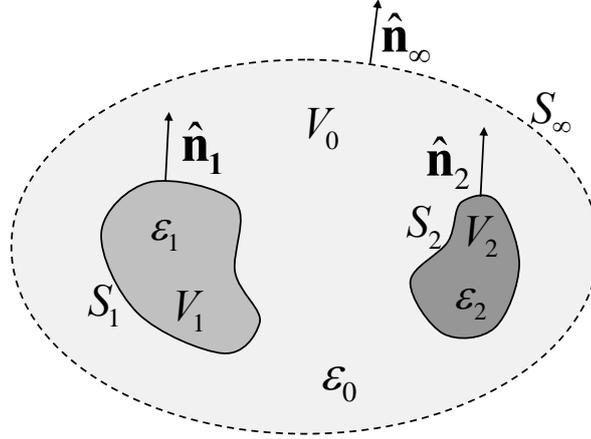


FIG. 3.2 – Le problème de la diffusion par deux diffuseurs placés dans le milieu incident.

obtient

$$\begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \psi_i(\mathbf{r}') + \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}_1) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} - g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} \right] ds \\ + \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}_2) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} - g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} \right] ds. \quad (3.1)$$

Dans le volume  $V_0$  on obtient le principe de Huygens,  $\forall \mathbf{r}' \in V_0$  :

$$\psi_{s_0}(\mathbf{r}') = \psi_{s_1}(\mathbf{r}') + \psi_{s_2}(\mathbf{r}'), \quad (3.2)$$

avec

$$\psi_{s_1}(\mathbf{r}') = + \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}_1) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} - g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} \right] ds \quad \forall \mathbf{r}_1 \in S_1, \quad (3.3)$$

$$\psi_{s_2}(\mathbf{r}') = + \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}_2) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} - g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} \right] ds \quad \forall \mathbf{r}_2 \in S_2. \quad (3.4)$$

En se positionnant sur la surface du diffuseur 1, les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{1}{\rho_{10}} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_1, \quad (3.5)$$

où  $\rho_{10} = 1$  dans le cas TE et  $\rho_{10} = \epsilon_1/\epsilon_0$  dans le cas TM. Alors si  $\mathbf{r}'$  tend vers  $S_1$ , à partir de l'équation (3.1) on obtient une première équation intégrale,  $\forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}' \in S_1$  et  $\forall \mathbf{r}_2 \in S_2$  :

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}') = & \underbrace{+\frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_1} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}_1) ds}_{\Rightarrow \bar{A}_1} + \underbrace{\int_{S_1} g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} ds}_{\Rightarrow \bar{B}_1} \\ & - \underbrace{\int_{S_2} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{A}_{21}} + \underbrace{\int_{S_2} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{B}_{21}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En se positionnant sur la surface du diffuseur 2, les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}) = \psi_2(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n} \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_2, \quad (3.7)$$

où  $\rho_{20} = 1$  dans le cas TE et  $\rho_{20} = \epsilon_2/\epsilon_0$  dans le cas TM. Si  $\mathbf{r}'$  tend vers  $S_2$ , à partir de l'équation (3.1) on obtient une deuxième équation intégrale,  $\forall \mathbf{r}_1 \in S_1$  et  $\forall \mathbf{r}_2, \mathbf{r}' \in S_2$  :

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}') = & \underbrace{- \int_{S_1} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}_1) ds}_{\Rightarrow \bar{A}_{12}} + \underbrace{\int_{S_1} g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} ds}_{\Rightarrow \bar{B}_{12}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \psi_2(\mathbf{r}') - \int_{S_2} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{A}_2} + \underbrace{\int_{S_2} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{B}_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Avec deux diffuseurs, le problème possède quatre inconnues : le champ total sur la surface du diffuseur 1 ( $\psi_1$ ), sa dérivée normale ( $\frac{\partial \psi_1}{\partial n_1}$ ), le champ total sur la surface du diffuseur 2 ( $\psi_2$ ) et sa dérivée normale ( $\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2}$ ). Il manque encore deux équations pour que le système soit bien conditionné. Celles-ci sont obtenues en appliquant le théorème de Green dans le volume  $V_1$  d'une part :

$$\begin{cases} \psi_1(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = - \int_{S_1} \left[ \psi_1(\mathbf{r}_1) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} - g_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} \right] ds, \quad (3.9)$$

et dans le volume  $V_2$  d'autre part :

$$\begin{cases} \psi_2(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = - \int_{S_2} \left[ \psi_2(\mathbf{r}_2) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} - g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} \right] ds, \quad (3.10)$$

où les signes  $-$  viennent du fait que la normale à la surface du diffuseur 1 ( $\hat{\mathbf{n}}_1$ ) et celle du diffuseur 2 ( $\hat{\mathbf{n}}_2$ ) sont dirigées vers l'intérieur de  $V_0$ . A partir de l'équation (3.9), quand  $\mathbf{r}'$  tend vers  $S_1$  on a

$$0 = \underbrace{-\frac{1}{2} \psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_1} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}_1) ds}_{\Rightarrow \bar{C}_1} + \underbrace{\rho_{10} \int_{S_1} g_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} ds}_{\Rightarrow \bar{D}_1} \quad \forall \mathbf{r}' \in S_1. \quad (3.11)$$

A partir de l'équation (3.10), quand  $\mathbf{r}'$  tend vers  $S_2$  on a

$$0 = \underbrace{-\frac{1}{2} \psi_2(\mathbf{r}') - \int_{S_2} \frac{\partial g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{C}_2} + \underbrace{\rho_{20} \int_{S_2} g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{D}_2} \quad \forall \mathbf{r}' \in S_2. \quad (3.12)$$

Comme pour le cas d'une seule surface diélectrique, les équations intégrales s'écrivent comme une combinaison linéaire des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, c'est pourquoi nous retrouvons les termes de la EFIE TE (2.4) et la MFIE TM (2.7) dans les équations (3.6) (3.8) (sans valeur principale de Cauchy pour les termes annotés  $\bar{A}_{21}$  et  $\bar{A}_{12}$  puisque les deux vecteurs de la fonction de green ne peuvent être égaux : pas de singularité). Dans les équations (3.11) et (3.12) nous retrouvons également le terme de la MFIE TM mais également un terme proche de celui de la EFIE TE avec, cependant, un signe  $-$  devant  $\frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}')$  comme vu pour le cas diélectrique "simple diffuseur" avec l'équation (2.33).

### 3.2.2 Discrétisation par la Méthode des Moments

Les équations (3.6), (3.8), (3.11) et (3.12) forment un système couplé. En appliquant la MdM comme vu au paragraphe 2.1.1.2, en utilisant les mêmes fonctions de base et de test, les équations sont discrétisées et le système couplé s'écrit sous la forme matricielle  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ . Le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  est égal à

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

où  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  contiennent les inconnues surfaciques des champs  $\psi$  et  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  sur les surfaces des diffuseurs 1 et 2, respectivement. Ils sont donnés par

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \psi_1(\mathbf{r}_{1_1}) \dots \psi_1(\mathbf{r}_{1_N}) \frac{\partial\psi_1(\mathbf{r}_{1_1})}{\partial n_1} \dots \frac{\partial\psi_1(\mathbf{r}_{1_N})}{\partial n_1} \right]^t, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{X}_2 = \left[ \psi_2(\mathbf{r}_{2_1}) \dots \psi_2(\mathbf{r}_{2_M}) \frac{\partial\psi_2(\mathbf{r}_{2_1})}{\partial n_2} \dots \frac{\partial\psi_2(\mathbf{r}_{2_M})}{\partial n_2} \right]^t, \quad (3.15)$$

où l'exposant  $t$  désigne la transposée et  $N$  et  $M$  sont les nombres d'échantillons des surfaces du diffuseur 1 et 2, respectivement. Ainsi,  $\mathbf{X}_1$  est de taille  $2N$  et  $\mathbf{X}_2$  est de taille  $2M$ . Le terme  $\mathbf{b}$ , de taille  $2(N + M)$ , contient l'information sur le champ incident

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{[\psi_i(\mathbf{r}_{1_1}) \dots \psi_i(\mathbf{r}_{1_N}) 0 \dots 0]}_{\mathbf{b}_1^t} \underbrace{[\psi_i(\mathbf{r}_{2_1}) \dots \psi_i(\mathbf{r}_{2_M}) 0 \dots 0]}_{\mathbf{b}_2^t}. \quad (3.16)$$

La matrice impédance (matrice carrée de taille  $2(N + M) \times 2(N + M)$ ) peut se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{B}}_{21} \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \rho_{10}\bar{\mathbf{D}}_1 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{A}}_{12} & \bar{\mathbf{B}}_{12} & \bar{\mathbf{A}}_2 & \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{C}}_2 & \rho_{20}\bar{\mathbf{D}}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

où les sous-matrices qui la composent sont obtenues à partir des opérateurs des équations (3.6) (3.8), (3.11) et (3.12).

Les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1$  et  $\bar{\mathbf{D}}_1$  peuvent se grouper sous forme d'une sous-matrice impédance notée  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  :

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \rho_{10}\bar{\mathbf{D}}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Elle correspond à la matrice impédance du problème "simple diffuseur" dans le cas diélectrique ; la surface considérée étant  $S_1$ , séparant un milieu de permittivité  $\epsilon_0$  d'un milieu de permittivité  $\epsilon_1$ . Ainsi, les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_1$  correspondent aux matrices  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$  données respectivement par (2.36), (2.37), (2.38) et (2.39) avec entre autre  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{1_n}$  et  $\gamma_n = \gamma_{1_n}$  : les échantillons de la surface du diffuseur 1 sont utilisés. Les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1$  sont calculées pour le milieu de propagation  $\epsilon = \epsilon_0$  et  $\bar{\mathbf{C}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_1$  sont calculées pour le milieu de propagation  $\epsilon = \epsilon_1$ . De même pour la sous-matrice impédance :

$$\bar{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_2 & \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \rho_{10}\bar{\mathbf{D}}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

où cette fois la surface considérée est  $S_2$ , séparant un milieu de permittivité  $\epsilon_0$  d'un milieu de permittivité  $\epsilon_2$ . Ainsi, les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_2$  correspondent aux matrices  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$

données respectivement par (2.36), (2.37), (2.38) et (2.39) avec entre autre  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{2n}$  et  $\gamma_n = \gamma_{2n}$  : les échantillons de la surface du diffuseur 2 sont utilisés. Les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_2$  sont calculées pour le milieu de propagation  $\epsilon = \epsilon_0$  et  $\bar{\mathbf{C}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_2$  sont calculées pour le milieu de propagation  $\epsilon = \epsilon_2$ .

A titre d'exemple, les éléments des matrices  $\bar{\mathbf{A}}_1$  et  $\bar{\mathbf{D}}_2$  sont données par :

$$A_{1m,n} = \begin{cases} +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x_1}{4\pi} \frac{(\gamma_{1m})'}{1+(\gamma_{1m})^2} & \text{pour } m = n \\ -\frac{ik_0\Delta x_1}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_{1n}-\mathbf{r}_{1m}\|)}{\|\mathbf{r}_{1n}-\mathbf{r}_{1m}\|} [\gamma_{1n}(x_{1n}-x_{1m}) - (z_{1n}-z_{1m})] & \text{pour } m \neq n \end{cases}, \quad (3.20)$$

$$D_{2m,n} = \frac{i\Delta x_2\alpha_{2n}}{4} \begin{cases} 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(0.164k_2\alpha_{2n}\Delta x_2) & \text{pour } m = n \\ H_0^{(1)}(k_2\|\mathbf{r}_{2n}-\mathbf{r}_{2m}\|) & \text{pour } m \neq n \end{cases}. \quad (3.21)$$

Les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  ainsi que les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$  peuvent être vues comme des matrices de couplage entre les deux surfaces. Plus précisément, d'après l'équation intégrale (3.8), les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$  multipliées à un vecteur contenant les inconnues (respectivement  $\psi_1$  et  $\frac{\partial\psi_1}{\partial n_1}$ ) donnent une grandeur homogène à un champ, ce champ étant situé sur le diffuseur 2. Autrement dit,  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$  font propager l'information du champ de la surface  $S_1$  vers la surface  $S_2$ . Ainsi la matrice impédance, dite de couplage ( $S_1 \rightsquigarrow S_2$ ), s'écrit

$$\bar{\mathbf{Z}}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} & \bar{\mathbf{B}}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

La même remarque peut être faite pour les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  :

$$\bar{\mathbf{Z}}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{B}}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

où  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  est la matrice de couplage de la surface du diffuseur 2 vers la surface surface du diffuseur 1 ( $S_2 \rightsquigarrow S_1$ ).

Les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  sont obtenues en discrétisant le terme correspondant (par la MdM) dans les équations (3.6) et (3.8). Ces termes sont très similaires à (2.7) qui aboutit à (2.14), mais il n'y a pas de singularité dans la fonction de Green puisque les vecteurs ne peuvent pointer sur le même élément. En effet, quand l'un pointe sur la surface du diffuseur 1, l'autre pointe sur celle du diffuseur 2. Le même raisonnement est fait pour obtenir les matrices  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  et finalement on peut écrire :

$$A_{12m,n} = -\frac{ik_0\Delta x_1}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_{1n}-\mathbf{r}_{2m}\|)}{\|\mathbf{r}_{1n}-\mathbf{r}_{2m}\|} [\gamma_{1n}(x_{1n}-x_{2m}) - (z_{1n}-z_{2m})] \quad \forall m, n, \quad (3.24)$$

$$B_{12m,n} = +\frac{i\Delta x_1\alpha_{1n}}{4} H_0^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_{1n}-\mathbf{r}_{2m}\|) \quad \forall m, n, \quad (3.25)$$

$$A_{21m,n} = -\frac{ik_0\Delta x_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_{2n}-\mathbf{r}_{1m}\|)}{\|\mathbf{r}_{2n}-\mathbf{r}_{1m}\|} [\gamma_{2n}(x_{2n}-x_{1m}) - (z_{2n}-z_{1m})] \quad \forall m, n, \quad (3.26)$$

$$B_{21m,n} = +\frac{i\Delta x_2\alpha_{2n}}{4} H_0^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}_{2n}-\mathbf{r}_{1m}\|) \quad \forall m, n, \quad (3.27)$$

En résumé, le système matriciel  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  peut être mis sous la forme

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_1 & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1 \\ \bar{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

où  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  est une matrice de taille  $2N \times 2N$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  est de taille  $2N \times 2M$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  est de taille  $2M \times 2N$  et enfin  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  est de taille  $2M \times 2M$ .

### 3.2.3 Cas d'un diffuseur quelconque PC proche d'un diffuseur quelconque diélectrique

Si le diffuseur 1 est PC et le diffuseur 2 est diélectrique, alors les équations intégrales à considérer sont obtenues en appliquant le théorème de Green dans le volume  $V_2$  ce qui amène à l'équation intégrale (3.12), ainsi que dans le milieu  $V_0$  qui aboutit à l'équation (3.1) où les conditions aux limites de Dirichlet (2.1) et de Neumann (2.2) sont appliquées sur la surface 1. Ainsi, en faisant tendre  $\mathbf{r}'$  vers  $S_1$ , on obtient une équation intégrale qui s'exprime dans le cas TE,  $\forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}' \in S_1$  et  $\forall \mathbf{r}_2 \in S_2$  :

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}') = & \\ & + \underbrace{\int_{S_1} g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{B}}_1} - \underbrace{\int_{S_2} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{21}} + \underbrace{\int_{S_2} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{B}}_{21}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

et s'exprime dans le cas TM,  $\forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}' \in S_1$  et  $\forall \mathbf{r}_2 \in S_2$  :

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}') = & \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_1} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}_1) ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_1} - \underbrace{\int_{S_2} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{21}} + \underbrace{\int_{S_2} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{B}}_{21}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En faisant tendre  $\mathbf{r}'$  vers  $S_2$  et en utilisant les conditions aux limites du cas diélectrique (3.7) sur la surface 2, on obtient une équation intégrale qui s'exprime dans le cas TE,  $\forall \mathbf{r}_2, \mathbf{r}' \in S_2$  et  $\forall \mathbf{r}_1 \in S_1$  :

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}') = & \\ & + \underbrace{\int_{S_1} g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n_1} ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{B}}_{12}} + \underbrace{\frac{1}{2} \psi_2(\mathbf{r}') - \int_{S_2} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_2} + \underbrace{\int_{S_2} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{B}}_2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

et s'exprime dans le cas TM,  $\forall \mathbf{r}_2, \mathbf{r}' \in S_2$  et  $\forall \mathbf{r}_1 \in S_1$

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}') = & \\ & - \underbrace{\int_{S_1} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')}{\partial n_1} \psi_1(\mathbf{r}_1) ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{12}} + \underbrace{\frac{1}{2} \psi_2(\mathbf{r}') - \int_{S_2} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')}{\partial n_2} \psi_2(\mathbf{r}_2) ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_2} + \underbrace{\int_{S_2} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n_2} ds}_{\Rightarrow \bar{\mathbf{B}}_2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le système couplé formé par les équations (3.29), (3.31) et (3.12) pour le cas TE et par les équations (3.30), (3.32) et (3.12) pour le cas TM, s'écrit sous la forme du système matriciel vu

à l'équation (3.28), où  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  est toujours définie par (3.19) mais la matrice impédance du diffuseur 1 (de taille  $N \times N$ ) est définie, suivant la polarisation TE ou TM, par :

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \bar{\mathbf{Z}}_1 &= \bar{\mathbf{B}}_1, \\ \text{cas TM : } \bar{\mathbf{Z}}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où les matrices  $\bar{\mathbf{B}}_1$  et  $\bar{\mathbf{A}}_1$  sont les mêmes que celles vues à l'équation (3.18). La matrice de couplage  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  (de taille  $2M \times N$ ) s'exprime, suivant la polarisation TE ou TM, par

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \bar{\mathbf{Z}}_{12} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{12} \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \\ \text{cas TM : } \bar{\mathbf{Z}}_{12} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

et la matrice de couplage  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  (de taille  $N \times 2M$ ) par

$$\bar{\mathbf{Z}}_{21} = [\bar{\mathbf{A}}_{21} \quad \bar{\mathbf{B}}_{21}], \quad (3.35)$$

où les matrices  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  et  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  sont définies par les équations (3.25), (3.24), (3.27), (3.26), respectivement. Le vecteur contenant l'information sur le champ incident s'écrit ici

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{[\psi_i(\mathbf{r}_{11}) \dots \psi_i(\mathbf{r}_{1N})]}_{\mathbf{b}_1^t} \underbrace{[\psi_i(\mathbf{r}_{21}) \dots \psi_i(\mathbf{r}_{2M}) 0 \dots 0]}_{\mathbf{b}_2^t}, \quad (3.36)$$

et enfin, le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  contient les inconnues surfaciques des champs  $\psi_2$  et  $\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2}$  sur la surface du diffuseur 2 et  $\psi_1$  (cas TM) ou  $\frac{\partial \psi_1}{\partial n_1}$  (cas TE) sur la surface du diffuseur 1. Il est défini par l'équation (3.13) avec cette fois

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \mathbf{X}_1 &= \left[ \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_{11})}{\partial n_1} \dots \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_{1N})}{\partial n_1} \right], \\ \text{cas TM : } \mathbf{X}_1 &= [\psi_1(\mathbf{r}_{11}) \dots \psi_1(\mathbf{r}_{1N})], \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.2.4 Cas de deux diffuseurs quelconques PC

Si les deux diffuseurs sont Parfaitement Conducteurs (PC), alors les équations intégrales à considérer sont obtenues en appliquant le théorème de Green seulement dans le volume  $V_0$  ce qui aboutit à l'équation (3.1) où les conditions de Dirichlet (2.1) et de Neumann (2.2) sont appliquées sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Dans ce cas on obtient un système couplé formé par deux équations intégrales (d'écriture différente suivant la polarisation de l'onde) et qui s'écrit sous la forme du système matriciel vu à l'équation (3.28), où la matrice impédance du diffuseur 1 (de taille  $N \times N$ ) est définie par (3.33). Il en est de même pour la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  qui devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \bar{\mathbf{Z}}_2 &= \bar{\mathbf{B}}_2, \\ \text{cas TM : } \bar{\mathbf{Z}}_2 &= \bar{\mathbf{A}}_2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

où les matrices  $\bar{\mathbf{B}}_2$  et  $\bar{\mathbf{A}}_2$  sont les mêmes que celles vues à l'équation (3.19). Les matrices de couplage  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  (de taille  $M \times N$ ) et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  (de taille  $N \times M$ ) deviennent, suivant la polarisation de l'onde :

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \bar{\mathbf{Z}}_{12} &= \bar{\mathbf{B}}_{12}, \\ \text{cas TM : } \bar{\mathbf{Z}}_{12} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

et

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \bar{\mathbf{Z}}_{21} &= \bar{\mathbf{B}}_{21}, \\ \text{cas TM : } \bar{\mathbf{Z}}_{21} &= \bar{\mathbf{A}}_{21}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Enfin, les vecteurs contenant l'information sur le champ incident et les inconnues surfaciques des champs sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont définis, respectivement, par

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{[\psi_i(\mathbf{r}_{1_1}) \dots \psi_i(\mathbf{r}_{1_N})]}_{\mathbf{b}_1^t} \underbrace{[\psi_i(\mathbf{r}_{2_1}) \dots \psi_i(\mathbf{r}_{2_M})]}_{\mathbf{b}_2^t}, \quad (3.41)$$

et

$$\begin{aligned} \text{cas TE : } \mathbf{X}_2 &= \left[ \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_{2_1})}{\partial n_2} \dots \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}_{2_M})}{\partial n_2} \right], \\ \text{cas TM : } \mathbf{X}_2 &= [\psi_2(\mathbf{r}_{2_1}) \dots \psi_2(\mathbf{r}_{2_M})]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.3 Méthode PILE étendue combinée à la FB-SA

#### 3.3.1 Intérêt de la méthode PILE classique

Nicolas Déchamps proposa durant sa thèse [1] un algorithme pour calculer la diffusion par deux interfaces rugueuses superposées. Dans ce problème de diffusion, deux surfaces sont considérées mais seule l'interface supérieure est illuminée par l'onde incidente. La démarche proposée par N. Déchamps s'appuie sur la décomposition par blocs de la matrice impédance [1, 154]. L'inverse par bloc de cette matrice fait apparaître une matrice caractéristique du système formé par les deux interfaces. Outre une complexité en stockage mémoire améliorée, un des avantages de cette méthode, nommée PILE (Propagation-Inside-Layer Expansion), est de pouvoir appliquer des méthodes "exactes" rapides qui existent déjà pour le cas d'une surface rugueuse seule. La complexité de la méthode (concernant le temps de calcul et l'espace mémoire) peut alors être nettement améliorée.

Ainsi, dans la thèse de N. Déchamps [1], la méthode BMIA/CAG (Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid) est intégrée dans la méthode PILE pour le calcul des interactions locales sur chaque surface rugueuse de la couche. Dans [155], l'étude a été étendue pour accélérer le calcul des produits matrice-vecteur dans l'étage de couplage entre les deux interfaces. Et enfin, l'approche FB-SA a été intégrée dans la méthode PILE [136] à la fois pour le calcul des interactions locales sur chacune des interfaces et pour les produits matrice-vecteur dans l'étage de couplage entre les deux interfaces. La méthode PILE a été comparée à des résultats de la littérature, ce qui a conduit à une très bonne concordance pour toutes les configurations rencontrées [154, 120]. Ces travaux réalisés au laboratoire IREENA concernent uniquement le calcul de la diffusion par une couche rugueuse homogène (deux surfaces rugueuses superposées).

Mais les équations intégrales de ce problème sont analogues à celles obtenues pour un diffuseur quelconque inclus dans un autre diffuseur (qui est de ce fait diélectrique). Ce problème est illustré sur la figure 3.3. De plus elles sont également similaires pour un objet placé au-dessous d'une surface rugueuse [156, 157, 158, 107, 159, 160, 161, 162]. A noter néanmoins que la matrice impédance d'une surface rugueuse et celle d'un objet (surface fermée) ne sont pas identiques (voir chapitre 2). Ainsi, le problème d'un objet au-dessous d'une surface rugueuse est légèrement différent de celui d'une couche rugueuse. Il nous a donc paru intéressant d'appliquer la méthode PILE pour ce scénario. Ceci a fait l'objet d'une publication en revue [134], dans laquelle les interactions sur la surface sont calculées à l'aide de la FB-SA. Quelques résultats sont présentés dans ce manuscrit.

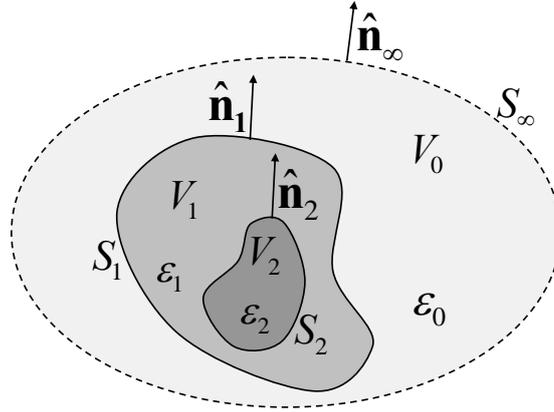


FIG. 3.3 – Le problème de la diffusion par deux diffuseurs. le diffuseur 2 est inclus dans le diffuseur 1.

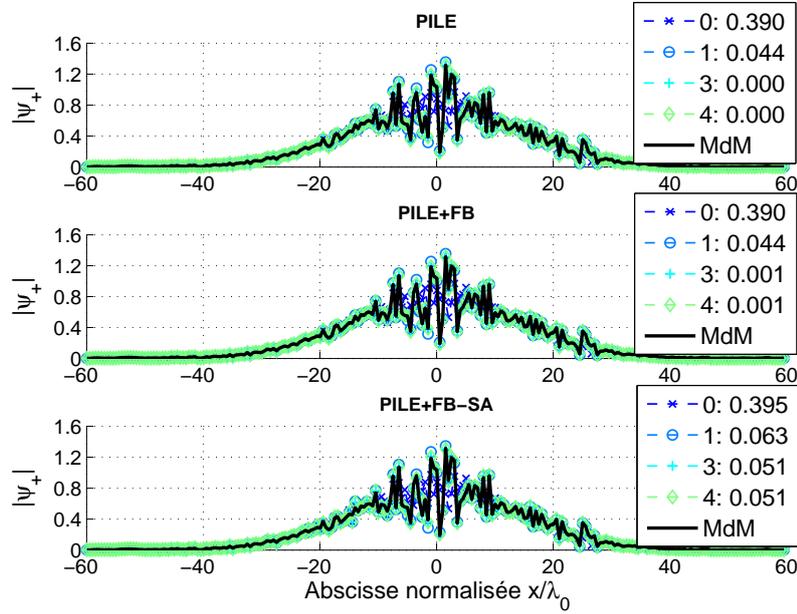


FIG. 3.4 – Module du champ total sur la surface rugueuse en fonction de l'abscisse normalisée. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique.  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $L_c = 2\lambda_0$ ,  $\epsilon_{r1} = 2 + 0.01i$ ,  $\sigma_z = \lambda_0$ ,  $L_{surf} = 120\lambda_0$ ,  $g = L_{surf}/6$ ,  $N_{cyl} = 126$ ,  $z_c = -4\lambda_0$ ,  $a = b = 2\lambda_0$ , polarisation TE. En haut PILE, au milieu PILE+FB (avec  $P_{FB} = 7$ ), en bas PILE+FB-SA ( $x_{d0} = 3L_c$ ). Les résultats issus de la MdM sont tracés sur chaque courbe.

Sur la figure 3.4 est représenté le module du champ total sur la surface rugueuse en fonction de l'abscisse normalisée  $x/\lambda_0$ . Un cylindre parfaitement conducteur de rayon  $a = b = 2\lambda_0$ , décrit par  $N_{cyl} = 126$  échantillons, est situé sous la surface et centré en  $(x_c = 0; z_c = -4\lambda_0)$ . La permittivité relative de la surface rugueuse est  $\epsilon_{r1} = 2 + 0.01i$ , l'écart-type de ses hauteurs est  $\sigma_z = \lambda_0$  et sa longueur est  $L_{surf} = 120\lambda_0$ . Le paramètre de l'onde de Thorsos est  $g = L_{surf}/6$ . Les résultats issus des méthodes PILE, PILE accélérée par la FB et PILE accélérée par la FB-SA sont représentés en fonction de l'ordre de la méthode PILE et comparés à la MdM (avec inversion par décomposition LU). L'ordre de la FB est  $P_{FB} = 7$  et  $x_{d0} = 3L_c$  pour la FB-SA. Les coefficients de diffusion calculés avec les méthodes PILE, PILE+FB, PILE+FB-SA et MdM

sont tracés en fonction de l'angle  $\theta_s$  sur la figure 3.5 pour la polarisation TE. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.4. L'ordre de la méthode PILE est  $P_{\text{PILE}} = 4$  pour chaque méthode.

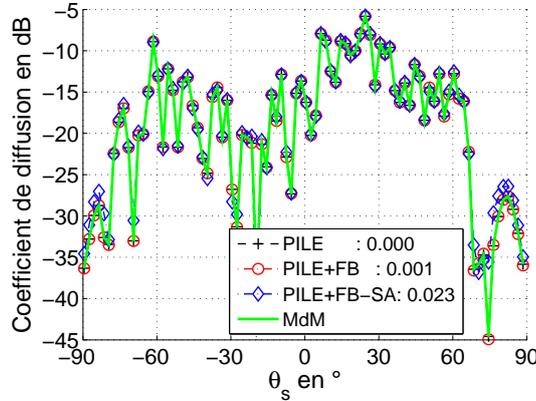


FIG. 3.5 – Comparaison du coefficient de diffusion obtenu avec les méthodes PILE, PILE+FB, PILE+FB-SA et la MdM pour la polarisation TE.  $P_{\text{PILE}} = 4$  pour chaque méthode. Dans la légende : l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.4.

Les figures 3.4 et 3.5 montrent que la méthode PILE converge et valide également l'intégration des méthodes FB et FB-SA dans l'algorithme de PILE. Les écarts observés sur l'erreur relative (mais qui sont difficilement identifiables sur les courbes) pour la méthode FB-SA sont dus à l'application de la méthode sur une surface diélectrique. En effet, comme nous l'avons expliqué pour le cas d'une surface seule, les interactions faibles dans la méthode FB-SA ne sont pas correctement quantifiées pour une surface diélectrique.

Sur la figure 3.6 est représenté le module du champ total en fonction de l'abscisse normalisée  $x/\lambda_0$  et de la hauteur normalisée  $h/\lambda_0$  pour la polarisation TE. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.4 sauf  $\sigma_z = 0.5\lambda_0$ ,  $L_{\text{surf}} = 80\lambda_0$ ,  $\theta_i = 30^\circ$  et  $g = L_{\text{surf}}/4$ .

La méthode PILE admet une interprétation physique simple : l'ordre de la méthode correspond au nombre d'interactions entre les deux surfaces [1]. Ainsi, on peut remarquer sur la figure 3.6 que pour  $P_{\text{PILE}} = 0$  seule la surface rugueuse contribue. Puis pour  $P_{\text{PILE}} = 1$ , le champ sur la surface a été propagé vers l'objet puis diffracté par celui-ci vers la surface rugueuse. Enfin, pour  $P_{\text{PILE}} = 2$ , un nouvel aller-retour entre les deux surfaces a été pris en compte et la surface rugueuse rayonne un champ tenant compte de ces interactions.

De par les résultats concluants obtenus, il semble donc très intéressant d'appliquer la méthode PILE à notre étude. Cependant, le cas d'un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse correspond au cas plus général où deux diffuseurs sont dans le milieu incident. Les équations intégrales (définies précédemment à la section 3.2.1) sont différentes de celles pour lesquelles l'objet est sous la surface (que l'on retrouve dans [1]), les matrices impédances ne s'écrivent donc pas sous la même forme. De plus, dans ce cas (illustré sur la figure 3.2) les deux surfaces sont excitées par l'onde incidente alors que si l'objet est sous la surface il n'est pas excité par l'onde incidente :  $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$  (cas illustré sur la figure 3.3) ; alors, l'algorithme proposé par Déchamps et al. n'est plus applicable. La méthode PILE "classique" doit donc être étendue au cas plus général où  $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$ . C'est l'objet du prochain paragraphe, où le cas général est considéré : un diffuseur 1 et un diffuseur 2 sont placés dans le milieu incident.

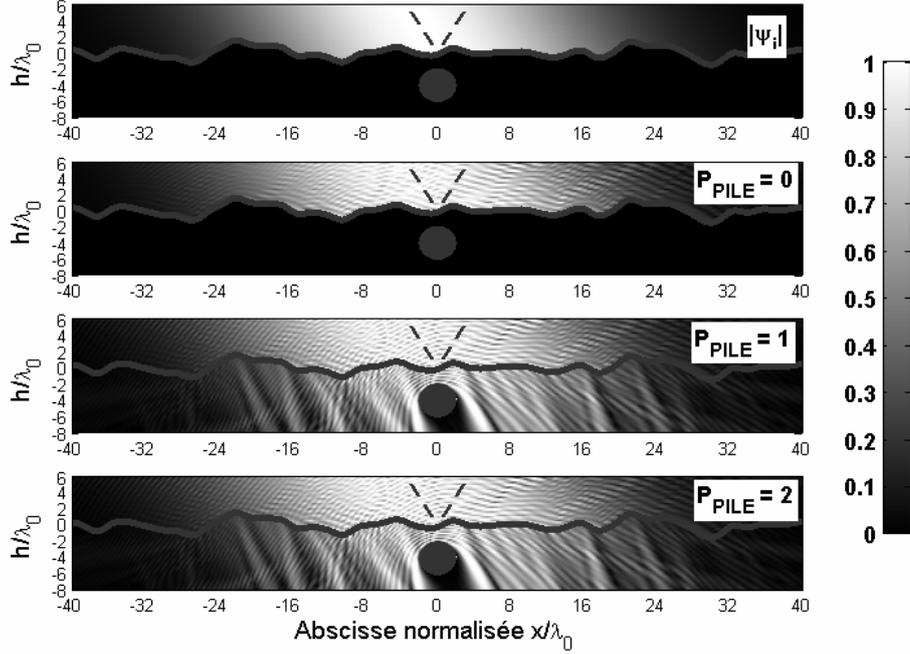


FIG. 3.6 – Module du champ total en fonction de l'abscisse normalisée  $x/\lambda_0$  et de la hauteur normalisée  $h/\lambda_0$  pour la polarisation TE et pour différents ordres de la méthode PILE. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.4 sauf  $\sigma_z = 0.5\lambda_0$ ,  $L_{surf} = 80\lambda_0$ ,  $\theta_i = 30^\circ$  et  $g = L_{surf}/4$ .

### 3.3.2 Généralisation de la méthode PILE : la méthode PILE étendue

#### 3.3.2.1 Formulation mathématique

En considérant des diffuseurs quelconques, qu'ils soient PC ou diélectriques, l'application de la MdM sur les équations intégrales aboutit à l'écriture matricielle de l'équation (3.28). On note  $N_1$  le nombre d'inconnues sur le diffuseur 1 ( $= N$  pour un objet PC et  $= 2N$  s'il est diélectrique) et  $N_2$  le nombre d'inconnues sur le diffuseur 2 ( $= M$  pour un objet PC et  $= 2M$  s'il est diélectrique). La résolution de (3.28) nécessite le calcul de l'inversion de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  de taille  $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ . Afin d'éviter l'inversion directe par décomposition LU (MdM classique) (de complexité  $\mathcal{O}((N_1 + N_2)^3)$ ), une décomposition par blocs de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  à déterminer, est proposée :

$$\bar{\mathbf{Z}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} & \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{V}} & \bar{\mathbf{W}} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

où les blocs  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{W}}$  de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  sont à déterminer séparément. Ceci s'avère possible à partir de relations matricielles données dans [163] qui expriment  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  à partir des quatre sous-matrices ( $\bar{\mathbf{Z}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_2$ ) composant  $\bar{\mathbf{Z}}$  par

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{T}} = \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1}, \\ \bar{\mathbf{U}} = - \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}, \\ \bar{\mathbf{V}} = - \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1}, \\ \bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} + \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}. \end{cases} \quad (3.44)$$

En procédant ainsi, il est possible d'obtenir la matrice impédance inverse en n'inversant que des matrices de plus petites dimensions. Si par exemple  $N_2 = N_1 = N$  toutes les matrices à inverser sont de tailles  $N \times N$  au lieu de  $2N \times 2N$  pour l'inversion directe de  $\bar{\mathbf{Z}}$ . Pour améliorer le temps de calcul, les propriétés du problème à résoudre sont utilisées. Supposons que l'inversion soit effectuée et que les matrices  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{W}}$  soient connues. Alors, le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  est obtenu par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{U}}\mathbf{b}_2 \\ \bar{\mathbf{V}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{W}}\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Développons le calcul de  $\mathbf{X}_1 = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{U}}\mathbf{b}_2$  en utilisant les relations de l'équation (3.44) :

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \mathbf{b}_1 - \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2, \quad (3.46)$$

qui peut également s'écrire :

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2 \right). \quad (3.47)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  peut être mise en facteur, on obtient

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_{c,1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2 \right), \quad (3.48)$$

où

$$\bar{\mathbf{M}}_{c,1} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}. \quad (3.49)$$

$\bar{\mathbf{I}}$  est la matrice identité et  $\bar{\mathbf{M}}_{c,1}$  est appelée "Matrice caractéristique" de la surface 1. Par analogie à la série de Taylor, la matrice  $(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_{c,1})^{-1}$  peut être développée comme

$$(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_{c,1})^{-1} = \left[ \sum_{p=0}^{p=\infty} \bar{\mathbf{M}}_{c,1}^p \right], \quad (3.50)$$

à condition que  $\|\bar{\mathbf{M}}_{c,1}\| < 1$ , où  $\|\bar{\mathbf{M}}_{c,1}\|$  est le rayon spectral (ou norme) de la matrice  $\bar{\mathbf{M}}_{c,1}$  (égal au maximum du module de ses valeurs propres). Pour calculer numériquement la somme définie en (3.50), une troncature à la valeur  $p = P_{\text{PILE}}$  est réalisée, et on obtient finalement

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \sum_{p=0}^{p=P_{\text{PILE}}} \bar{\mathbf{M}}_{c,1}^p \right] \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2 \right) = \sum_{p=0}^{p=P_{\text{PILE}}} \mathbf{Y}_1^{(p)}, \quad (3.51)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2 \right) & \text{pour } p = 0 \\ \mathbf{Y}_1^{(p)} = \bar{\mathbf{M}}_{c,1} \mathbf{Y}_1^{(p-1)} & \text{pour } p > 0 \end{cases}. \quad (3.52)$$

Les inconnues surfaciques sur la surface du diffuseur 2, contenues dans le vecteur  $\mathbf{X}_2$ , sont obtenues en substituant les indices  $\{1, 2, 12, 21\}$  par, respectivement,  $\{2, 1, 21, 12\}$  dans les équations (3.51), (3.52), (3.50) et (3.49). La substitution dans cette dernière équation fait apparaître la matrice caractéristique de la surface 2 :

$$\bar{\mathbf{M}}_{c,2} = \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21}. \quad (3.53)$$

Il s'agit bien d'une extension de la méthode PILE classique détaillée dans [1] car en posant  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$  dans les équations, les mêmes formulations sont retrouvées dans les deux méthodes : PILE étendue et PILE classique.

### 3.3.2.2 Interprétation physique

La méthode PILE étendue est appliquée au cas d'un objet (diffuseur 1) situé au-dessus d'une surface rugueuse (diffuseur 2). La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  est donc la matrice impédance de l'objet considéré en espace libre, définie par les équations (2.78) et (2.81) (voir paragraphe 2.2). La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  est la matrice impédance de la surface rugueuse considérée seule, définie au paragraphe 2.1.1 pour une surface PC, diélectrique ou très conductrice (approximation IBC). Enfin, les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  correspondent, respectivement aux matrices de couplage (objet  $\rightsquigarrow$  surface) et (surface  $\rightsquigarrow$  objet).

Le calcul des inconnues surfaciques par la méthode PILE admet une interprétation physique simple illustrée sur les figures 3.7(a) et 3.7(b).

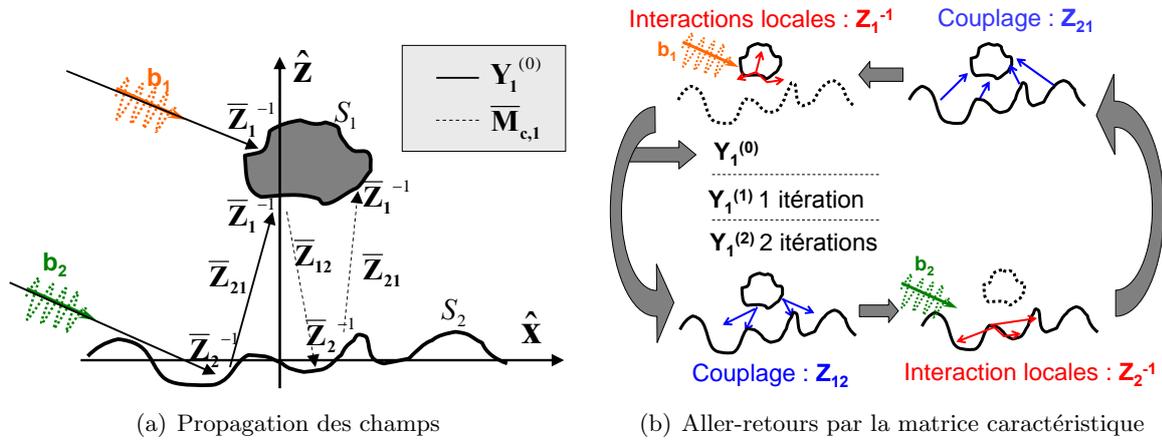


FIG. 3.7 – Interprétation physique du développement en série (3.51).

Pour  $p = 0$ , la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  multipliée par le vecteur  $(\mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2)$ , prend en compte les interactions locales sur la surface  $S_1$ .  $\mathbf{Y}_1^{(0)}$  correspond donc aux courants surfaciques (champ et dérivée normale du champ) sur l'objet quand il est excité par le champ direct incident  $\mathbf{b}_1$  et le champ diffusé par la surface de mer  $S_2$  :  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$ . En effet,  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  prend en compte les interactions locales sur la surface inférieure et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  propage les courants surfaciques sur  $S_2$  vers la surface de l'objet. A l'ordre 1 ( $p = 1$ ),  $\mathbf{Y}_1^{(1)} = \bar{\mathbf{M}}_{c,1}\mathbf{Y}_1^{(0)}$ , où  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  propage l'information des courants surfaciques sur  $S_1$ ,  $\mathbf{Y}_1^{(0)}$ , vers  $S_2$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  prend en compte les interactions locales sur  $S_2$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  propage les courants surfaciques résultants sur  $S_2$ , vers la surface de l'objet ; finalement  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  actualise les courants surfaciques sur la surface de l'objet. Ainsi, la matrice caractéristique  $\bar{\mathbf{M}}_{c,1}$  réalise un aller-retour entre la surface de l'objet et la surface rugueuse. En conclusion, l'ordre de la méthode PILE étendue  $P_{\text{PILE}}$ , correspond au nombre d'aller-retours entre l'objet et la surface de mer. De la même manière,  $\bar{\mathbf{M}}_{c,2}$  réalise un aller retour entre la surface rugueuse et l'objet.

Si la surface rugueuse est PC, les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  sont définies par les équations (3.39), (3.40) et sont définies par les équations (3.34) et (3.35) si la surface rugueuse est diélectrique. Pour le cas IBC les équations pour une surface PC sont utilisées en combinant linéairement les cas TE et TM (voir section 2.1.1.6). Ces matrices font intervenir le calcul des sous-matrices définies aux équations (3.24), (3.25), (3.26) et (3.27) dans lesquelles les grandeurs  $\gamma_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\Delta x_2$  sont données au paragraphe 2.1.1.2. Les éléments  $\gamma_1$ ,  $\Delta x_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\mathbf{r}_1$  sont donnés aux paragraphes 2.2.1 pour le cylindre et 2.2.3 pour la croix. A noter que  $\Delta x_{1_n}$  doit être remplacé par  $v_n |\Delta x_{1_n}|$

pour (3.24) et  $\Delta x_{1_n}$  par  $|\Delta x_{1_n}|$  pour (3.25) afin de tenir compte du sens de la normale et du signe de  $\Delta s_1$  pour l'objet.

Ainsi, à partir de l'étude réalisée en amont sur la surface rugueuse seule puis l'objet seul, le calcul de la diffusion par un cylindre elliptique ou une croix (obstacle cruciforme) au-dessus de la mer peut facilement être réalisé. En effet, dès les sous-matrices calculées, la matrice totale de la scène (définie à l'équation (3.28)) est connue. Cette matrice peut être inversée par la méthode PILE étendue vue précédemment. Les inconnues sur la surface de l'objet  $\mathbf{X}_1$  et celles sur la surface rugueuse  $\mathbf{X}_2$  sont ainsi calculées et le principe de Huygens est utilisé (équation (3.2) en tenant compte du sens de la normale et du signe de  $\Delta s_1$  pour l'objet comme expliqué à la section 2.2.1) pour évaluer le champ diffracté, par la scène, au point d'observation. En champ lointain, une expression simplifiée est obtenue (voir section 2.1.1.4) :

$$\psi_{s_0}(\mathbf{r}') = \frac{ie^{ik_0 r' - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_0 r'}} \psi_{s_0}^\infty(\theta_s), \quad (3.54)$$

avec

$$\psi_{s_0}^\infty(\theta_s) = \sum_{j=1}^{j=2} \int_{S_j} \left\{ ik_0 v_j [\gamma_j(x) \sin \theta_s - \cos \theta_s] \psi_j(\mathbf{r}_j) - \sqrt{1 + \gamma_j^2} \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}_j)}{\partial n_j} \right\} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_j} |dx_j|, \quad (3.55)$$

où  $v_j = \text{sign}(\hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{z}})$ . Le coefficient de diffusion de la scène est alors donné par :

$$\sigma_{cd}(\theta_i, \theta_s) = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \frac{|\psi_{s_0}^\infty(\theta_s)|}{P_i}, \quad (3.56)$$

### 3.3.2.3 Convergence de PILE étendue

Afin de tester la convergence de la méthode PILE étendue, l'erreur relative sur les inconnues sur les surfaces, notée  $\epsilon^X$  est calculée, comme pour l'étude de la convergence de la FB-SA pour le cas d'une surface seule (voir équation (2.59)). On rappelle ici son expression dans le cadre de la méthode PILE<sup>1</sup> :

$$\epsilon_{\text{PILE}}^X = \frac{\|\mathbf{X}_{\text{PILE}}^{(P_{\text{PILE}})} - \mathbf{X}_{\text{LU}}\|}{\|\mathbf{X}_{\text{LU}}\|}, \quad (3.57)$$

où  $\mathbf{X}_{\text{PILE}}^{(P_{\text{PILE}})}$  est le vecteur contenant les inconnues sur les surfaces obtenu par la méthode PILE étendue à l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  (nombre d'itérations dans la procédure de la méthode PILE).  $\mathbf{X}_{\text{LU}}$  est le vecteur contenant les inconnues sur les surfaces obtenu par la MDM avec inversion directe par décomposition LU qui est la méthode de référence. L'erreur relative est calculée lorsque le vecteur  $\mathbf{X}$  représente le champ total sur la surface rugueuse  $\psi_2$ , sa dérivée normale  $\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2}$ , le champ total sur la surface de l'objet  $\psi_1$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial \psi_1}{\partial n_1}$ . L'erreur relative la plus grande est retenue. L'ordre  $P_{\text{PILE}}$  est obtenu lorsque le critère  $\epsilon_{\text{PILE}}^X < 10^{-2}$  est satisfait.

Différents scénarios sont définis dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3. Dans la suite de ce chapitre, on se référera à ces tableaux pour indiquer les paramètres des scènes étudiées. Ainsi, lorsque l'étude concernera des surfaces gaussiennes, le tableau 3.1 sera employé, tandis que le tableau 3.2 sera utilisé pour les scènes maritimes. Les paramètres de l'objet sont donnés dans le tableau 3.3. A noter que le terme "var" indique que la grandeur est variable.

<sup>1</sup>Afin d'alléger les notations et explications on parlera parfois, avec un abus de langage, de méthode "PILE" bien qu'il s'agisse en réalité de la méthode "PILE étendue" puisque l'étude concerne un objet au-dessus d'une surface rugueuse.

TAB. 3.1 – Définitions de différents scénarios impliquant une surface gaussienne. Sont donnés : la permittivité relative de la surface, son écart-type des hauteurs normalisé, sa longueur de corrélation normalisée, sa longueur normalisée, son nombre d'échantillons, le paramètre de l'onde de Thorsos, la polarisation ainsi que l'angle d'incidence.

Scénario	$\epsilon_{r2}$	$\sigma_z/\lambda_0$	$L_c/\lambda_0$	$L_2/\lambda_0$	$N_2$	$g$	Polarisation	$\theta_i$
(a) :	var	var	2	120	1200	$L_2/6$	var	var
(b) :	$i\infty$	0.5	2	120	1200	$L_2/6$	var	$0^\circ$
(c) :	$2 + 0.01i$	1	2	120	1200	$L_2/6$	TE	$0^\circ$
(d) :	$i\infty$	1	2	120	1200	$L_2/6$	TM	$0^\circ$
(e) :	$2 + 0.01i$	0.5	2	80	800	$L_2/6$	TE	$20^\circ$

TAB. 3.2 – Définitions de différents scénarios impliquant une surface de mer. Sont donnés : la vitesse du vent à 10 mètres au-dessus de la mer, la fréquence, la longueur normalisée de la surface, son nombre d'échantillons, le paramètre de l'onde de Thorsos, la polarisation ainsi que l'angle d'incidence.

Scénario	$u_{10}$	$f$	$L_2/\lambda_0$	$N_2$	$g$	Polarisation	$\theta_i$
(a) :	5 m/s	3 GHz	200	2000	$L_2/6$	TM	$0^\circ$
(b) :	5 m/s	3 GHz	200	2000	$L_2/6$	TE	$20^\circ$
(c) :	5 m/s	3 GHz	var	var	$L_2/6$	TE	$0^\circ$
(d) :	5 m/s	3 GHz	var	var	$L_2/6$	TM	$60^\circ$

 TAB. 3.3 – Définitions de différents objets au-dessus de la surface rugueuse. Sont donnés : le type de l'objet, la position normalisée de son centre, le demi-grand axe normalisé du cylindre, le demi-petit axe normalisé du cylindre, le nombre d'échantillons, la longueur normalisée d'une plaque et son épaisseur normalisée pour la croix ainsi que son angle d'orientation  $\alpha$ .

Objet	Type	$z_o/\lambda_0$	$x_o$	$a/\lambda_0$	$b/\lambda_0$	$N_1$	$L/\lambda_0$	$e/\lambda_0$	$\alpha$
(a) :	cylindre	4	0	1	1	63	-	-	-
(b) :	cylindre	4	0	var	1	var	-	-	-
(c) :	croix	20	$-z_o \tan(\theta_i)$	-	-	800	10	1/15	$45^\circ$
(d) :	croix	20	$-z_o \tan(\theta_i)$	-	-	800	10	1/15	$0^\circ$

Le tableau 3.4 présente l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  obtenu avec ce critère de convergence en fonction de l'écart-type des hauteurs normalisé de la surface rugueuse  $\sigma_z/\lambda_0$ , pour une réalisation de surface gaussienne (un seul profil généré), pour les deux polarisations (TE et TM) et pour cinq scènes différentes (surface PC ou diélectrique, permittivités relatives différentes, angles d'incidence différents). Les paramètres de la surface sont donnés par le scénario (a) du tableau 3.1 et ceux de l'objet par le cas (a) du tableau 3.3.

A partir de ce tableau, plusieurs conclusions peuvent être tirées. L'ordre  $P_{\text{PILE}}$  augmente lorsque le module de la permittivité relative de la surface,  $|\epsilon_{r2}|$  augmente. Ce résultat est loin d'être étonnant puisque lorsque  $|\epsilon_{r2}|$  augmente, l'énergie réfléchiée par la surface rugueuse vers l'objet est plus élevée, ce qui implique que le nombre de réflexions, contribuant au phénomène de

TAB. 3.4 – Ordre  $P_{\text{PILE}}$  en fonction de  $\sigma_z/\lambda_0$  pour un cylindre circulaire au-dessus d'une surface rugueuse gaussienne. Polarisation TE et TM. Cinq cas sont considérés. Scénario (a) du tableau 3.1 cas (a) du tableau 3.3.

$\theta_i$ in $^\circ$ , $\epsilon_{r2}$	$\sigma_z/\lambda_0$	0.5	1	1.5	2
		TE-TM	TE-TM	TE-TM	TE-TM
(a) : 0, $i\infty$ (PC)		2-2	4-4	5-5	5-4
(b) : 60, $i\infty$ (PC)		2-2	3-3	5-3	4-3
(c) : 0, $2 + 0.01i$		1-1	1-1	1-1	1-1
(d) : 60, $2 + 0.01i$		1-1	1-1	1-1	1-2
(e) : 0, $10 + i$		2-2	2-2	3-2	2-2

couplage entre la surface rugueuse et l'objet, augmente. L'ordre  $P_{\text{PILE}}$  ne dépend quasiment pas de la polarisation et de l'angle d'incidence. Ces deux paramètres n'agissent que faiblement sur le nombre de réflexions significatives entre l'objet et la surface rugueuse. Le cas le plus défavorable dans la convergence de la méthode PILE est donc lorsque la surface rugueuse est PC.

Le tableau 3.5 présente l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  obtenu avec le même critère de convergence en fonction de la longueur du demi-grand axe du cylindre elliptique, pour un seul profil (de surface gaussienne) généré et pour les polarisations TE et TM. Les paramètres de la scène sont donnés en considérant le cas (b) du tableau 3.1 et le cas (b) du tableau 3.3.

 TAB. 3.5 – Ordre  $P_{\text{PILE}}$  en fonction de  $a/\lambda_0$  pour un cylindre elliptique au-dessus d'une surface gaussienne PC. Le nombre d'échantillons  $N_+$  du cylindre est également donné. Polarisation TE et TM. Cas (b) du tableau 3.1 et cas (b) du tableau 3.3.

$a/\lambda_0$	1	2	3	4	5
	$N_+ = 63$	$N_+ = 97$	$N_+ = 134$	$N_+ = 172$	$N_+ = 210$
TE	2	12	43	66	46
TM	2	12	39	56	40

A partir de ce tableau, on remarque que plus le demi-grand axe du cylindre elliptique augmente et plus l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  augmente. En effet, le cylindre elliptique étant plus allongé, telle une plaque horizontale, la zone située entre l'objet et la surface est assimilable à un guide d'onde ouvert. L'onde est alors guidée entre les deux surfaces ce qui favorise les multiples réflexions entre le cylindre elliptique et la surface inférieure. Encore une fois, l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  dépend très peu de la polarisation de l'onde.

Afin d'illustrer la convergence de la méthode PILE étendue, le coefficient de diffusion obtenu avec cette méthode est comparée avec la MdM, en fonction de l'angle de diffusion, pour différents ordre  $P_{\text{PILE}}$  et pour deux scènes différentes composées d'un cylindre circulaire au-dessus d'une surface gaussienne. Les paramètres de la première scène (figure 3.8(a)) sont donnés par le cas (c) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3. Ceux de la deuxième scène (figure 3.8(b)) sont définis par le cas (d) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3.

On remarque que plus l'ordre de la méthode PILE augmente, plus l'erreur relative sur le coefficient de diffusion  $\epsilon^\sigma$  décroît. En effet, lorsque l'ordre augmente, le nombre de réflexions prises en compte entre les deux surfaces augmente, et les phénomènes de couplage sont donc évalués de plus en plus finement. Pour illustrer ceci, il est également intéressant de comparer les

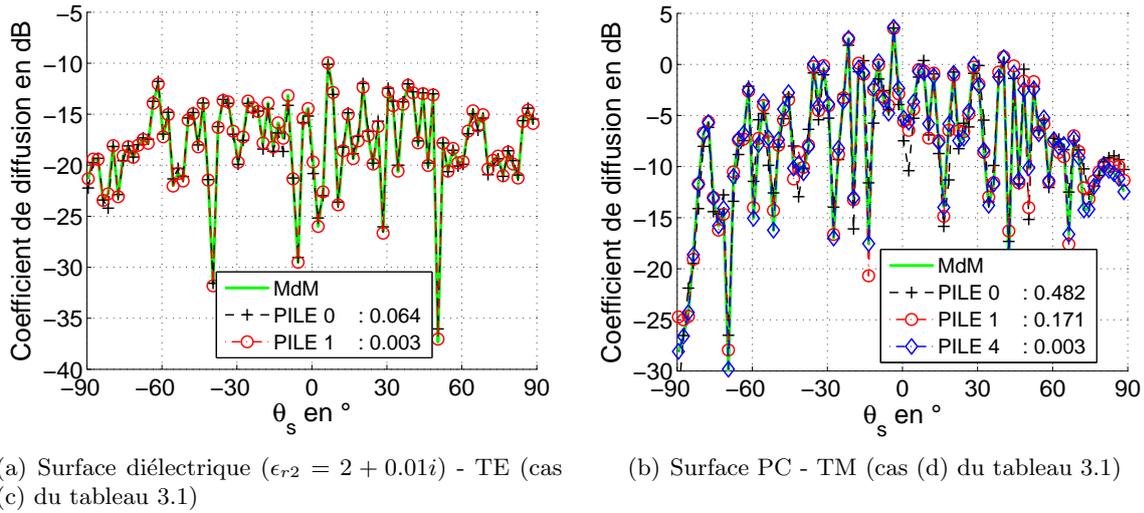


FIG. 3.8 – Comparaison des coefficients de diffusion obtenus avec la méthode PILE et la MdM avec différentes valeurs de  $P_{\text{PILE}}$ . Dans la légende : l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  suivi de l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont donnés par les cas (c) et (d) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3.

champs totaux sur la surface de l'objet et sur la surface rugueuse. Sur la figure 3.9(a), les champs totaux surfaciques sur le cylindre, obtenus avec la méthode PILE et la MdM avec différentes valeurs de  $P_{\text{PILE}}$  sont comparés, en polarisation TM, en fonction de l'angle  $\phi$  balayant le cylindre (voir figure 2.9 et équation (2.73)). Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.8(b) (Cas (d) du tableau 3.1 et cas (a) du tableau 3.3). Le champ total sur le cylindre lorsqu'il est considéré en espace-libre (sans la présence de la surface rugueuse) est également tracé. En considérant la même scène, sur la figure 3.9(b), les champs totaux surfaciques sur la surface inférieure, obtenus avec la méthode PILE (avec différentes valeurs de  $P_{\text{PILE}}$ ) et la MdM sont comparés. Le champ total sur la surface rugueuse lorsqu'elle est considérée en espace-libre (sans la présence du cylindre) est également tracé. Dans la légende sont inscrits l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  suivi de l'erreur relative sur le champ surfacique  $\epsilon^X$ .

On remarque sur la figure 3.9(a) que la présence de la surface inférieure modifie clairement les courants sur l'objet. Le maximum est alors obtenu pour  $\phi = 270^\circ$  ce qui correspond aux échantillons qui sont directement en face de la surface rugueuse (alors que pour le cylindre en espace libre ces échantillons sont dans la zone d'ombre et le courant est donc faible). Pour la surface rugueuse, les différences sont surtout notables vers les bords de la surface (à partir de  $x = 30\lambda_0$  surtout). Il est important de noter que plus  $P_{\text{PILE}}$  augmente et plus l'erreur relative sur les champs diminue et les résultats issus de la méthode PILE avec l'ordre le plus élevé se superposent à ceux issus de la MdM.

La figure 3.10 illustre également la convergence de la méthode PILE. Le module du champ total rayonné est tracé en fonction de l'abscisse normalisée et de la hauteur normalisée de la scène pour la polarisation TE et pour différents ordres de la méthode PILE. Un cylindre circulaire est situé au-dessus d'une surface rugueuse gaussienne et les paramètres de cette scène sont donnés en considérant le cas (e) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3.

On observe clairement que la présence de la surface inférieure perturbe le champ diffracté par le cylindre. Ainsi, il peut être noté que de l'énergie est présente dans la zone d'ombre derrière le cylindre, alors que ceci n'est pas le cas pour le cylindre considéré en espace libre. L'ordre 0 de la

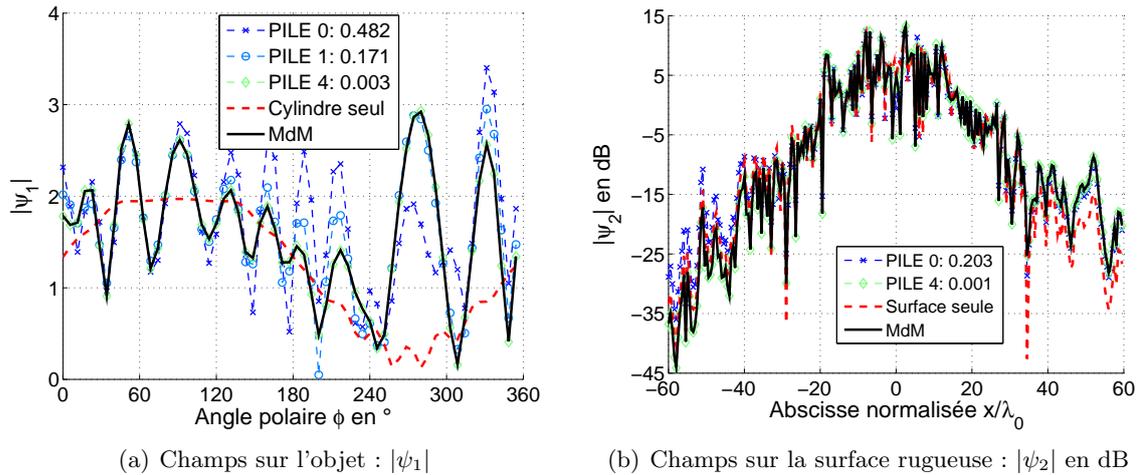


FIG. 3.9 – Comparaison des champs totaux surfaciques obtenus avec la méthode PILE et la MmM avec différentes valeurs de  $P_{PILE}$  en polarisation TM. Dans la légende : l'ordre  $P_{PILE}$  suivi de l'erreur relative sur le champ surfacique. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.8(b) (Cas (d) du tableau 3.1 et cas (a) du tableau 3.3). De plus, les champs surfaciques obtenus par la MmM lorsque l'objet (figure de gauche) et la surface (figure de droite) sont considérés en espace-libre, sont tracés.

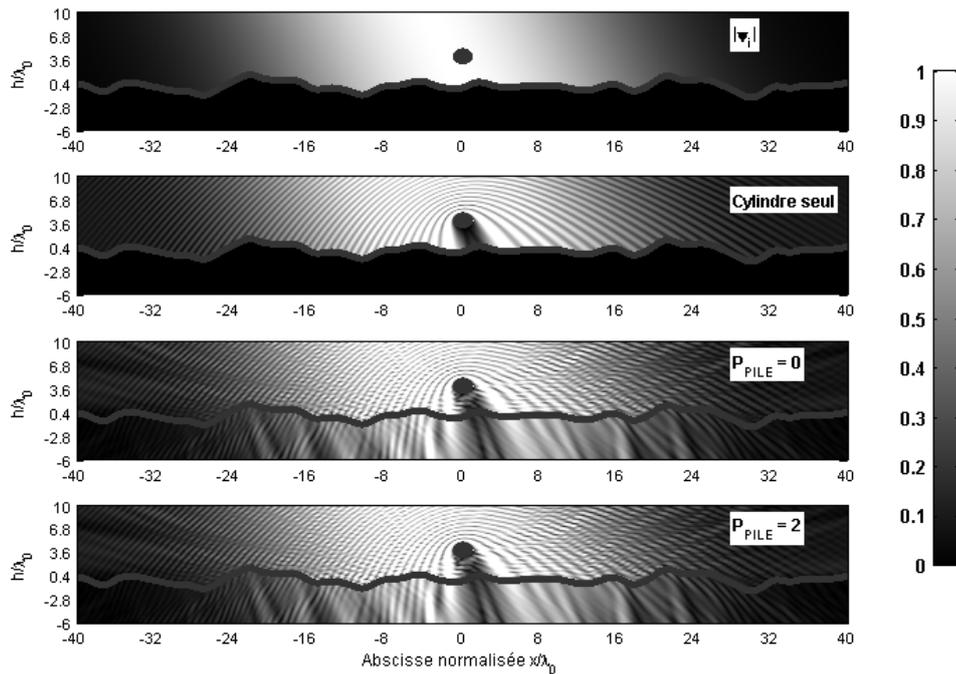


FIG. 3.10 – Module du champ total rayonné pour un cylindre au-dessus d'une surface rugueuse gaussienne diélectrique. Les paramètres sont donnés par le cas (e) du tableau 3.1 et le cas (a) du tableau 3.3.

méthode PILE produit un résultat visuellement très proche de celui où le critère de convergence est atteint ( $P_{PILE} = 2$ ) de sorte qu'il faut comparer attentivement les deux courbes pour observer de légères différences.

En considérant l'ordre obtenu avec le critère de convergence choisi ( $\epsilon_{\text{PILE}}^X < 10^{-2}$ ), il est intéressant d'étudier la conservation d'énergie comme évoquée au paragraphe 1.3.1. Dans le cas d'un objet PC au-dessus d'une surface rugueuse PC (pas de puissance transmise), la conservation d'énergie impose  $P_r/P_i = 1$  (voir équation (1.35)), où  $P_r$  est la puissance réfléchie par les deux surfaces et  $P_i$  la puissance incidente sur les deux surfaces. On appelle la valeur de la conservation d'énergie le rapport  $P_r/P_i$ , qui est proche de 1 si la méthode s'avère précise. Le tableau 3.6 présente la valeur de la conservation d'énergie obtenue avec l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  défini au tableau 3.4 (en considérant de ce fait les mêmes paramètres). Seuls les cas (a) et (b) du tableau 3.4 sont considérés.

TAB. 3.6 – Conservation d'énergie en fonction de  $\sigma_z/\lambda_0$  pour un cylindre circulaire au-dessus d'une surface rugueuse PC. Polarisation TE et TM. Les paramètres sont les mêmes que ceux du tableau 3.4 mais seuls les cas (a) et (b) sont considérés.

$\theta_i$ in $^\circ$ , $\epsilon_{r2}$	$\sigma_z/\lambda_0$	0.5	1	1.5	2
		TE-TM	TE-TM	TE-TM	TE-TM
(a) : 0, $i\infty$ (PC)		1.000-0.991	0.998-1.010	0.990-1.061	1.000-1.006
(b) : 60, $i\infty$ (PC)		0.990-0.994	0.996-1.007	0.997-1.026	0.997-1.032

Et sur le tableau 3.6 la valeur de la conservation d'énergie obtenue avec l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  défini au tableau 3.5 (en considérant de ce fait les mêmes paramètres) est présentée.

TAB. 3.7 – Conservation d'énergie en fonction de  $a/\lambda_0$  pour un cylindre elliptique au-dessus d'une surface gaussienne PC. Polarisation TE et TM. Les paramètres sont les mêmes que ceux du tableau 3.5.

$a/\lambda_0$	1	2	3	4	5
	$N_+ = 63$	$N_+ = 97$	$N_+ = 134$	$N_+ = 172$	$N_+ = 210$
TE	1.000	0.994	1.000	0.997	0.999
TM	0.991	0.994	1.040	0.993	1.001

A partir des tableaux 3.6 et 3.7, on remarque que la conservation d'énergie est égale à 1 à  $\pm 1\%$  excepté pour trois cas du tableau 3.6 : en polarisation TM, pour  $\sigma_z = 1.5\lambda_0$  avec  $\theta_i = 0^\circ$  et  $\theta_i = 60^\circ$  et pour  $\sigma_z = 2\lambda_0$  avec  $\theta_i = 60^\circ$ . La cause pourrait être que, lorsque  $\sigma_z$  est élevé, le champ sur la surface rugueuse ne s'annule pas suffisamment sur les bords. Or, nous avons vu au paragraphe 2.1.1.3 que le champ devait être nul sur les bords de la surface pour que les équations intégrales puissent être utilisées. Il est important de noter que ceci n'est en aucun cas dû à la méthode PILE. En effet, ces résultats sont également obtenus avec la MdM sur la même scène, mais aussi lorsque la surface rugueuse est considérée seule (sans la présence de l'objet). Afin de remédier à cela, il convient de considérer une surface rugueuse de plus grande étendue. Le principe de conservation d'énergie n'est pas non plus respecté pour un cas du tableau 3.7 : pour  $a = 3\lambda_0$  en polarisation TM. Ceci est également dû à la présence d'un champ non nul sur les bords de la surface rugueuse. La présence de l'objet en est la cause. En effet, celui-ci diffuse un champ en direction de la surface rugueuse, même sur les éléments de surface très éloignés de la position du cylindre elliptique. Cet effet est surtout observable en TM. Comme évoqué précédemment, une solution est de considérer une surface rugueuse de plus grande étendue. Ceci implique que le nombre d'inconnues sur la surface inférieure augmente et la méthode PILE seule utilisant des inversion directes par décomposition LU peut s'avérer inutilisable. Il convient alors

de pouvoir accélérer le calcul, particulièrement sur la surface rugueuse puisqu'elle possède le plus grand nombre d'inconnues.

### 3.3.3 Intégration de la FB-SA : Résultats et complexité de la méthode

Afin d'accélérer le calcul de la diffusion par un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse, les méthodes FB et FB-SA sont appliquées pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse. Sans l'utilisation de la méthode PILE étendue, cela ne peut être réalisé puisque ces méthodes seraient alors appliquées pour l'inversion de la matrice impédance totale de la scène. Or, les considérations physiques validant l'utilisation de l'algorithme FB et de l'accélération spectrale ne sont valables que pour la surface rugueuse. Il convient donc d'appliquer ces méthodes uniquement sur la surface rugueuse. Ceci est possible avec la méthode PILE grâce à la décomposition par bloc de la matrice impédance. Concrètement, lors du calcul des inconnues surfaciques (3.51), l'inversion de la matrice impédance de la surface rugueuse suivie du produit matrice vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{u}$  (où  $\mathbf{u}$  est homogène à un champ et correspond au champ incident ou au champ provenant de l'objet) est réalisée à l'aide de la méthode FB-SA (paragraphe 2.1.2). La complexité de la méthode PILE+FB-SA ainsi obtenue, est étudiée dans la section suivante.

#### 3.3.3.1 Complexité de la méthode PILE+FB-SA

Pour une itération  $P_{\text{FB}}$  de la méthode FB-SA, les étapes backward et forward appliquées à la sous-matrice de la surface aboutit à  $[5(2Q + 1)(N_2 - N_s) \times 2]$  multiplications pour les interactions faibles et  $2N_2N_s$  pour les interactions fortes. L'inversion directe (par décomposition LU) de la matrice impédance de l'objet  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  aboutit à  $N_1^3/3$  multiplications. Ainsi le calcul de la matrice caractéristique requiert  $2N_1N_2 + N_1^2$  pour les produits matrice-vecteur et  $N_1^3/3 + [10(2Q + 1)(N_2 - N_s) + 2N_2N_s]P_{\text{FB}}$  pour les inversions. Finalement, à partir de l'équation (3.51), le calcul de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  à l'ordre  $P_{\text{PILE}}$  avec la méthode PILE étendue combinée à la FB-SA, requiert

$$\begin{aligned}
 & 2\left\{2N_1N_2 + N_1^2 \text{ (produits matrice-vecteur)} + \right. \\
 & \left. [10(2Q + 1)(N_2 - N_s) + 2N_2N_s]P_{\text{FB}} \text{ (inversion de } \bar{\mathbf{Z}}_2)\right\}P_{\text{PILE}} + \\
 & 2\left\{[10(2Q + 1)(N_2 - N_s) + 2N_2N_s]P_{\text{FB}} + N_1N_2 + N_1^2\right\} \\
 & \text{(ordre 0, inversion de } \bar{\mathbf{Z}}_2 \text{ et produits matrice-vecteur)} + \\
 & N_1^3/3 \text{ (initialisation : inversion de } \bar{\mathbf{Z}}_1)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

opérations, au lieu de  $N_1^3/3 + N_2^3/3 + 2(N_1^2 + N_2^2 + N_1N_2) + 2(2N_1N_2 + N_1^2 + N_2^2)P_{\text{PILE}}$  pour la méthode PILE étendue seule. A l'ordre zéro, puisque  $N_2 \gg N_s$  et  $N_2 \gg 1$ , la méthode PILE+FB-SA est rapide par rapport à PILE si  $N_2^2/3 + 2N_2 \gg 2[10(2Q + 1) + 2N_s]P_{\text{FB}}$ . Classiquement,  $N_s = 100$ ,  $P_{\text{FB}} = 5$ ,  $Q = 16$ , alors  $N_2 \gg 124$ . A l'ordre  $P_{\text{PILE}}$ , on doit avoir  $N_2 \gg [10(2Q + 1) + 2N_s]P_{\text{FB}}$ , ce qui aboutit à  $N_2 \gg 2650$ . Mais, le stockage mémoire de l'inverse de  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  n'est pas nécessaire contrairement à PILE. En effet, avec la FB-SA, seuls les éléments des interactions fortes de la sous-matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  doivent être stockés. Pour la sous-matrice impédance liée à la surface rugueuse, le nombre d'éléments est  $(N_s(N_s + 1)/2) + (N_2 - N_s - 1)N_s$ , soit  $N_2N_s$  pour  $N_2 \gg N_s$  au lieu de  $N_2^2$ . Ainsi la méthode PILE+FB-SA devient intéressante pour des scènes pour lesquelles la surface rugueuse est décrite par un très grand nombre d'inconnues. Tant sur le point de vue du temps de calcul que sur la possibilité de réaliser le calcul,

l'inversion directe d'un trop grand nombre d'inconnues n'est généralement pas réalisable sur un PC de bureau. La convergence de la méthode PILE+FB-SA fait l'objet de la prochaine section.

### 3.3.3.2 Convergence de PILE+FB-SA

La surface est excitée par l'onde incidente, mais, contrairement à une surface rugueuse en espace libre, la surface est également excitée par un champ provenant de l'objet. Or, a priori, la FB-SA permet d'accélérer le calcul des interactions locales sur la surface quelle que soit la nature du champ incident. Il semble donc cohérent de garder les paramètres de la FB-SA déterminés dans le cas d'une surface seule (sans la présence de l'objet). Il suffit donc de reprendre les résultats de l'étude menée au paragraphe 2.1.2.

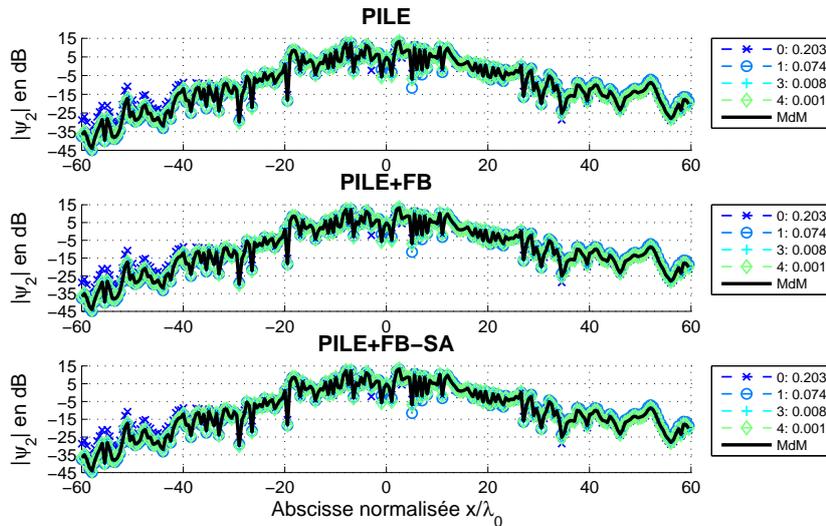


FIG. 3.11 – Module du champ total en dB sur la surface rugueuse gaussienne en fonction de l'abscisse normalisée. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. Mêmes paramètres que pour la figure 3.9(b) (cas (d) du tableau 3.1 et cas (a) du tableau 3.3). En haut PILE, au milieu PILE+FB (avec  $P_{FB} = 2$ ), en bas PILE+FB-SA ( $x_{d0} = 3L_c$ ). Les résultats issus de la MdM sont tracés sur chaque courbe.

Pour étudier la convergence des méthodes PILE+FB (la méthode FB est appliquée pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse) et PILE+FB-SA, un cylindre circulaire situé au-dessus d'une surface gaussienne est considéré. Sur la figure 3.11, le module du champ total en dB sur la surface rugueuse en fonction de l'abscisse normalisée est tracé pour les trois méthodes et pour différentes valeurs de  $P_{PILE}$ . Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.9(b) (cas (d) du tableau 3.1 et cas (a) du tableau 3.3). L'ordre  $P_{FB}$  est choisi à partir du tableau 2.2 (soit  $P_{FB} = 2$ ), et la distance des interactions fortes pour l'application de la FB-SA est choisie comme  $x_{d0} = 3L_c$ .

On observe que les méthodes PILE+FB et PILE+FB-SA convergent en fonction de l'ordre de la méthode PILE vers la MdM, exactement de la même manière que la méthode PILE. L'erreur relative entre PILE+FB et PILE est identique, signifiant que l'ordre  $P_{FB}$  est bien choisi. L'erreur relative entre PILE+FB-SA et PILE+FB est identique, impliquant que la distance des interactions fortes est bien dimensionnée. D'autres simulations, réalisées avec d'autres paramètres de surface et d'autres objets (plaque, dièdre et croix) aboutissent à la même conclusion : le paramétrage des méthodes FB et FB-SA intégrées dans la méthode PILE ne dépend que du problème

“surface seule”. Sur la figure 3.12, les coefficients de diffusion obtenus avec les méthodes PILE, PILE+FB, PILE+FB-SA et la MdM sont comparés pour la polarisation TE. Dans la légende figure l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.11.

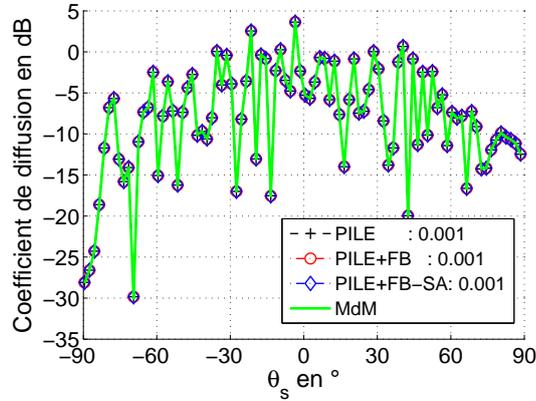


FIG. 3.12 – Comparaison du coefficient de diffusion obtenus avec les méthodes PILE, PILE+FB, PILE+FB-SA et la MdM pour la polarisation TE.  $P_{\text{PILE}} = 4$  pour chaque méthode. Dans la légende : l'erreur relative sur le coefficient de diffusion. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.11.

L'ordre de la méthode PILE vaut  $P_{\text{PILE}} = 4$  pour chaque méthode ; le critère de convergence est satisfait. Ceci est vérifié en observant l'erreur relative sur le coefficient de diffusion qui n'est que de 0.1% pour les trois méthodes.

Les méthodes PILE, PILE+FB et PILE+FB-SA sont appliquées sur une scène maritime, illustrée sur la figure 3.13, constituée d'une croix au-dessus d'une surface de mer (l'approximation IBC est utilisée).

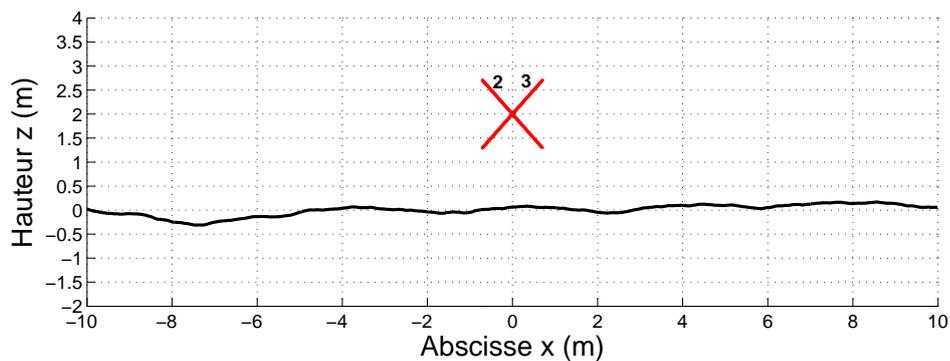


FIG. 3.13 – Illustration de la scène maritime. Cas (a) du tableau 3.2 et cas (c) du tableau 3.3.

Le module du champ total sur la surface de la croix est tracé sur la figure 3.14 en fonction des échantillons de la croix. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. Les paramètres de la scène sont donnés par le cas (a) du tableau 3.2 et cas (c) du tableau 3.3. A noter que pour la fréquence considérée ( $f = 3$  GHz), la permittivité relative pour la surface de mer est  $\epsilon_{r2} = 70.4 + 40.6i$ . L'ordre de la méthode FB est choisi en considérant l'étude sur la surface seule, soit  $P_{\text{FB}} = 2$  et  $x_{d0} = 0.05L_c$  pour la distance des interactions fortes (tous deux choisis volontairement un peu au-dessus de la limite

de convergence pour s'assurer d'une bonne convergence).

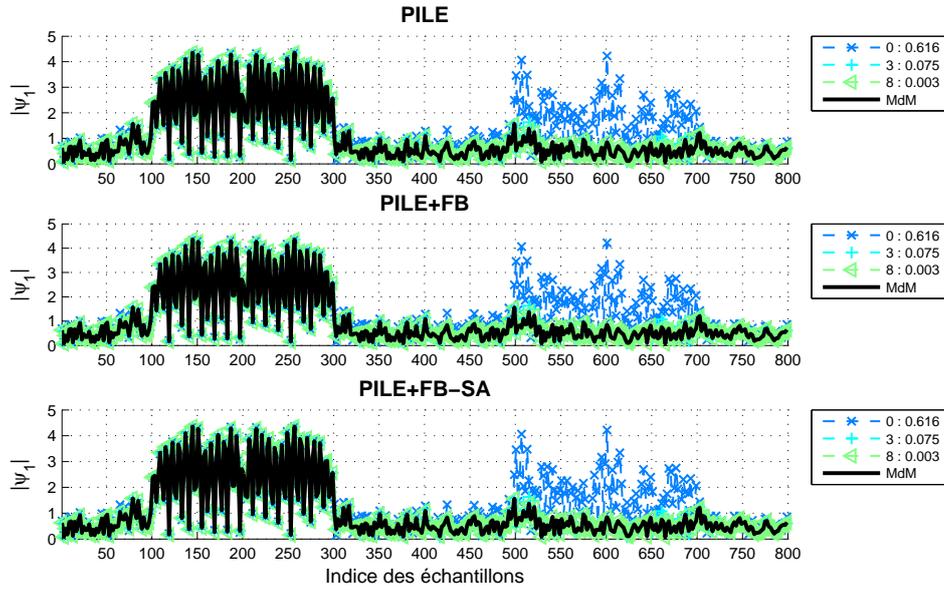
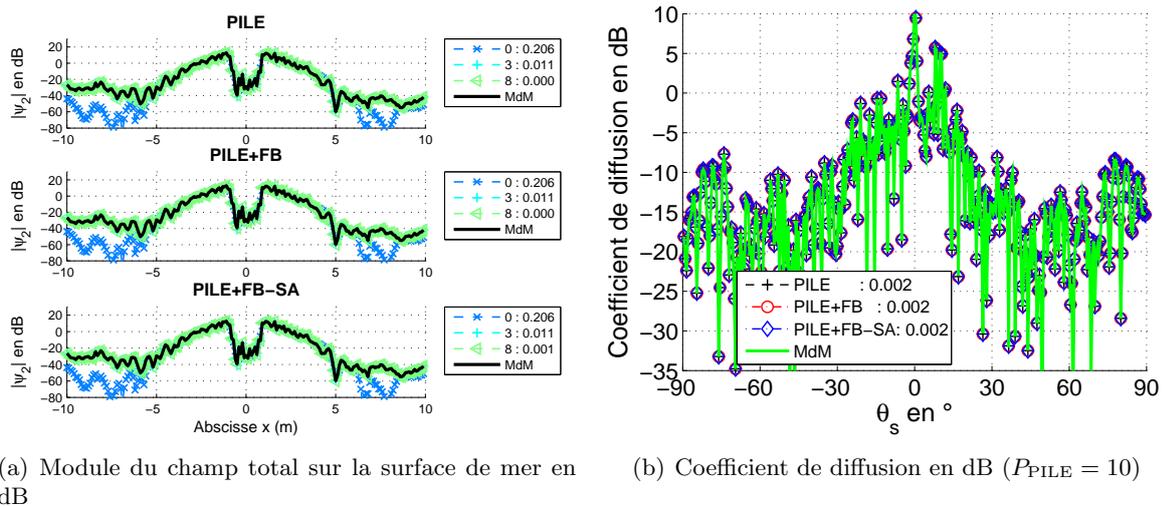


FIG. 3.14 – Module du champ total sur la surface de la croix. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. La scène est illustrée sur la figure 3.13. Cas (a) du tableau 3.2 et cas (c) du tableau 3.3. En haut PILE, au milieu PILE+FB (avec  $P_{FB} = 2$ ), en bas PILE+FB-SA ( $x_{d0} = 0.05L_c$ ). Les résultats issus de la MdM sont tracés sur chaque courbe.

Sur la figure 3.15(a), le module du champ total sur la surface de la mer est tracé en dB en fonction de l'abscisse normalisée. Sur la figure 3.15(b), le coefficient de diffusion de la scène est tracé en dB en fonction de l'angle de diffusion. Les paramètres sont les mêmes que pour ceux de la figure 3.14.



(a) Module du champ total sur la surface de mer en dB

(b) Coefficient de diffusion en dB ( $P_{PILE} = 10$ )

FIG. 3.15 – Module du champ total sur la surface de mer en dB et coefficient de diffusion en dB pour une croix au-dessus d'une surface de mer. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.14.

On observe sur la figure 3.14 un champ élevé et oscillant sur les échantillons  $n_1 = 100$  à 300 qui correspondent aux échantillons des faces 2 et 3 de la croix (voir figure 3.13). Physiquement, ceci correspond aux doubles réflexions entre les faces 2 et 3 de la croix, toutes deux directement illuminées par le champ incident. Un champ élevé sur les faces 6 et 7 de la croix (tournées vers la surface rugueuse) provenant de la surface de mer est surestimé par l'ordre 0 de la méthode PILE. Les ordres supérieurs de la méthode PILE corrigent ainsi ce champ pour converger vers la MdM. Hormis les faces 2 et 3 de la croix, les faces ne sont pas illuminées par l'onde incidente, mais un champ surfacique est présent dû aux contributions provenant de la surface de mer. Le couplage entre la surface et la croix est donc correctement réalisé, et l'erreur relative diminue lorsque l'ordre de la méthode augmente. Le même constat est observé sur la figure 3.15(a). Finalement, en considérant l'ordre  $P_{\text{PILE}} = 10$ , la figure 3.15(b) montre un très bon accord entre les méthodes avec une erreur relative très faible. Comme pour le cas d'un cylindre au-dessus d'une surface rugueuse obéissant à un processus gaussien centré de corrélation des hauteurs gaussienne, il suffit de paramétrer les méthodes FB et FB-SA à partir de l'étude d'une surface en espace libre. Toutefois, par sécurité, l'ordre de la FB et la distance des interactions fortes seront choisis un peu au-dessus des valeurs assurant la convergence pour une surface seule, de sorte que la méthode PILE+FB-SA peut être considérée comme une méthode de référence. L'ordre  $P_{\text{PILE}}$  est quant à lui obtenu par un critère de convergence.

### 3.3.3.3 Application à une croix au-dessus d'une surface de mer

Jusqu'à présent, les méthodes rigoureuses développées ont été appliquées sur une scène déterministe puisqu'un seul profil de surface a été généré. Pour modéliser plus fidèlement la réalité, il convient d'inclure le caractère aléatoire de la scène. Ceci est réalisé en générant des profils indépendants de surface qui possèdent néanmoins des statistiques identiques (même distribution des hauteurs et même spectre) au-dessus desquels la croix est figée. Il a été vu au paragraphe 1.3.2 que la grandeur caractérisant le pouvoir réflecteur de la scène est le coefficient de diffusion. Pour le calculer, différentes surfaces numérotées  $p$  (avec  $p \in [1; P]$ ) sont générées à l'aide de la méthode spectrale vue au paragraphe 1.5.2.2. La graine du bruit blanc gaussien à l'entrée du filtre est différente pour chaque réalisation. C'est la méthode de Monte-Carlo. Pour chaque scène  $p$ , le champ diffusé par la scène en champ lointain  $\Psi_p = \psi_{s_0,p}(\mathbf{r}')$  est calculé à l'aide la méthode PILE+FB-SA (à partir des équations (3.54) et (3.55) et de l'algorithme de la méthode PILE étendue avec intégration de la FB-SA). Il est alors possible de calculer différents moments statistiques du champ diffusé par la scène. Ainsi, le coefficient de diffusion total, proportionnel au moment statistique d'ordre 2 du champ diffusé, s'écrit

$$\sigma_{cd}^{tot}(\theta_i, \theta_s) = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \frac{\langle |\Psi|^2 \rangle}{P_i}. \quad (3.59)$$

Le coefficient de diffusion cohérent, proportionnel au module au carré du moment statistique d'ordre 1 (moyenne) du champ diffusé (la phase est prise en compte dans la moyenne), est donné par

$$\sigma_{cd}^{coh}(\theta_i, \theta_s) = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \frac{|\langle \Psi \rangle|^2}{P_i}. \quad (3.60)$$

Enfin, le coefficient de diffusion incohérent (proportionnel au moment centré d'ordre 2 (variance) du champ diffusé) s'écrit

$$\sigma_{cd}^{inc}(\theta_i, \theta_s) = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \frac{\langle |\Psi - \langle \Psi \rangle|^2 \rangle}{P_i} = \frac{1}{16\pi\eta_0 k_0} \frac{\langle |\Psi|^2 \rangle - |\langle \Psi \rangle|^2}{P_i} = \sigma_{cd}^{tot} - \sigma_{cd}^{coh}, \quad (3.61)$$

avec

$$\begin{cases} |\langle \Psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{p=P} \Psi_p \right|^2, \\ \langle |\Psi|^2 \rangle = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{p=P} |\Psi_p|^2, \\ \langle |\Psi - \langle \Psi \rangle|^2 \rangle = \langle |\Psi|^2 \rangle - |\langle \Psi \rangle|^2. \end{cases} \quad (3.62)$$

Si ces calculs sont appliqués à une scène déterministe (par exemple une croix au-dessus d'une surface plane) alors le coefficient de diffusion cohérent sera maximal et l'incohérent sera nul. En effet, dans le cas d'une scène déterministe, le champ diffusé n'est pas une variable aléatoire et de ce fait on a  $\langle |\Psi|^2 \rangle = |\langle \Psi \rangle|^2 = |\Psi_p|^2$  (à partir de l'équation (3.62)). Par contre dans le cas de la diffusion par une surface en espace libre qualifiée de très rugueuse (via le paramètre de Rayleigh, voir entre autres [13, 66] pour plus de détails), le coefficient de diffusion cohérent sera négligeable comparativement à l'incohérent. De ce fait, le coefficient de diffusion cohérent représente les contributions des éléments déterministes de la scène tandis que le coefficient de diffusion incohérent représente les contributions des éléments aléatoires de la scène. Le coefficient de diffusion total étant la somme de ces deux contributions (cohérent et incohérent).

Il convient dans un premier temps de définir une longueur pertinente pour la surface de mer. En effet, si celle-ci n'est pas très grande devant la taille de l'objet, alors le faisceau de l'onde de Thorsos sera en grande partie intercepté par la croix, et l'effet de la présence de la mer ne sera pas réaliste. Le coefficient de diffusion total ( $P = 50$  réalisations) est tracé en fonction de l'angle de diffusion sur les figures 3.16 et 3.17 pour cinq longueurs de surface  $L_2$  différentes. Les paramètres de la scène (constituée d'une croix au-dessus de la mer) sont donnés par le tableau 3.2 en considérant le scénario (c) ainsi que le cas (d) du tableau 3.3, de plus  $P_{FB} = 5$  et  $x_{d0} = 0.05L_c$  et  $P_{PILE} = 10$ . pour la scène considérée pour la figure 3.17, les paramètres sont donnés par le scénario (d) du tableau 3.2 et le cas (d) du tableau 3.3, de plus  $P_{FB} = 2$  et  $x_{d0} = 0.05L_c$  et  $P_{PILE} = 10$ .

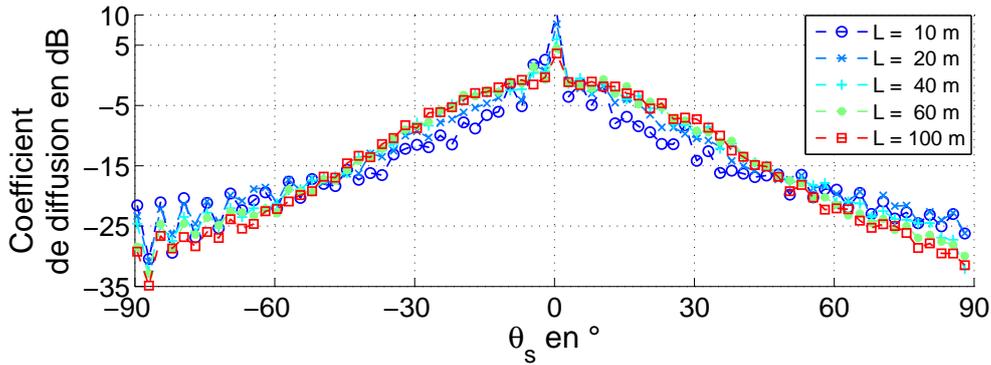


FIG. 3.16 – Coefficient de diffusion total ( $P = 50$  réalisations) pour une croix au-dessus de la mer. Cinq longueurs  $L_2$  différentes, cas (c) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3,  $P_{FB} = 5$ ,  $x_{d0} = 0.05L_c$  et  $P_{PILE} = 10$ .

A partir de ces deux figures, on remarque que les courbes pour  $L_2 = 60$  m et  $L_2 = 100$  m sont très proches. Ainsi, on choisira par la suite une longueur  $L_2 = 1000\lambda_0$  ( $= 100$  m pour  $f = 3$  GHz) puisque la surface semble suffisamment longue pour obtenir des résultats réalistes.

Une étude selon les différents paramètres de la scène est maintenant menée. Pour chaque

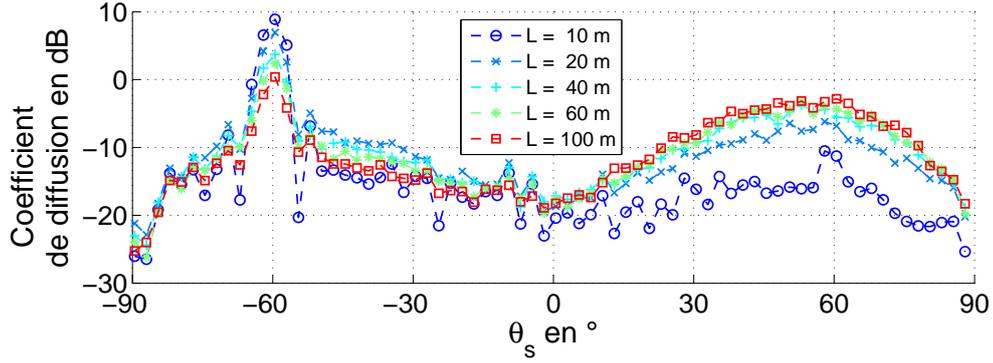


FIG. 3.17 – Coefficient de diffusion total ( $P = 50$  réalisations) pour une croix au-dessus de la mer. Cinq longueurs  $L_2$  différentes, cas (d) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3,  $P_{\text{FB}} = 2$ ,  $x_{d0} = 0.05L_c$  et  $P_{\text{PILE}} = 10$ .

scène, les coefficients de diffusion cohérent et incohérent sont tracés pour les paramètres suivants :  $P = 50$  réalisations,  $L_2 = 1000\lambda_0$ ,  $\Delta x_2 = \lambda_0/10$ ,  $g = L_2/6$  pour l'onde de Thorsos, ( $x_o = -z_o \tan(\theta_i)$ ,  $z_o = 20\lambda_0$ ),  $e = \lambda_0/15$ ,  $L_1 = 10\lambda_0$ ,  $\Delta s_1 = \lambda_0/10$  (soit  $N_1 = 800$ ),  $x_{d0} = 0.05L_c$ ,  $P_{\text{PILE}} = 7$  (la convergence est assurée pour la valeur de  $L_2$  choisie),  $P_{\text{FB}} = 2$  si la polarisation est TM et  $P_{\text{FB}} = 5$  si la polarisation est TE. Les autres paramètres de la scène sont différents et dépendent de la figure considérée. Le tableau 3.8 indique leur valeur pour chaque figure.

TAB. 3.8 – Paramètres des figures : croix au-dessus d'une surface de mer TC. 50 réalisations, pas d'échantillonnage  $\lambda/10$  pour la surface rugueuse de longueur  $L_2 = 1000\lambda_0$  ( $N_2 = 10000$ ), paramètre de l'onde de Thorsos  $g = L_2/6$ ,  $N_1 = 800$ ,  $z_0 = 20\lambda_0$ .

Nom de la figure	Paramètres				
	Polarisation	$f$ (en GHz)	$u_{10}$ (en m/s)	$\alpha$ (en $^\circ$ )	$\theta_i$ (en $^\circ$ )
Référence	TE	3	5	0	0
Cas TM	TM	3	5	0	0
Fréquence	TE	5	5	0	0
Vitesse $u_{10}$	TE	3	10	0	0
Angle $\alpha$	TE	3	5	45	0
Angle $\theta_i$	TE	3	5	0	60

Pour chaque figure, les résultats issus de la FB-SA lorsque la mer est considérée en espace libre (sans la présence de l'objet), sont tracés.

On remarque sur la figure 3.18(b) que la présence de la croix n'influe que pour les angles de diffusion rasants sur le coefficient de diffusion incohérent. Pour  $\theta_s \in [-60; 60^\circ]$ , c'est la surface de mer seule qui contribue. Il n'est pas surprenant que l'objet lui-même ne contribue pas dans le coefficient de diffusion incohérent puisque sa surface est par nature déterministe. Cependant, les effets de couplage induisent sur l'objet des courants différents suivant la réalisation  $p$  considérée, l'objet contribuant alors dans le coefficient de diffusion incohérent dû au couplage avec la surface de mer aléatoire. Ces effets ne sont visibles que pour des angles d'observation rasants puisque les courants induits par la surface de mer sur l'objet ne concernent en majeure partie que les

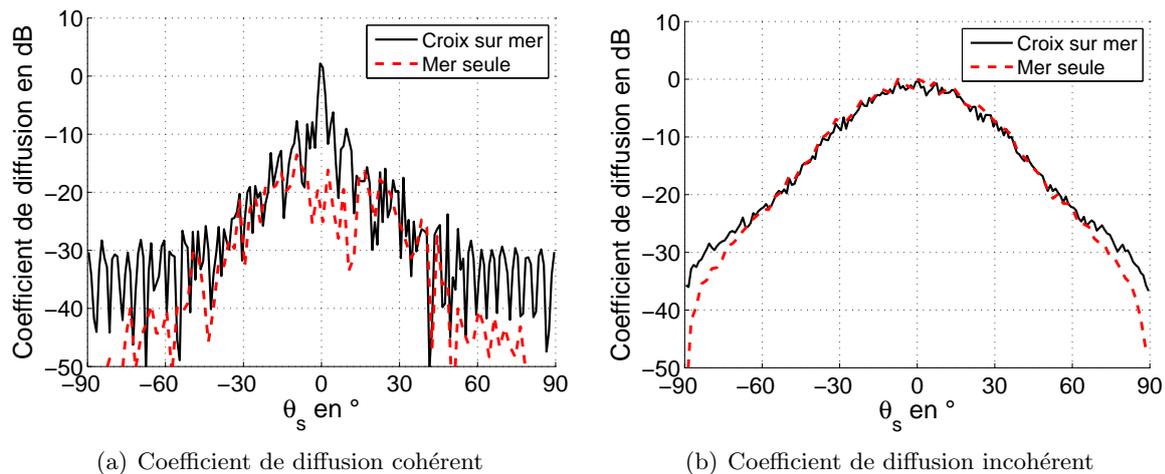


FIG. 3.18 – Référence.

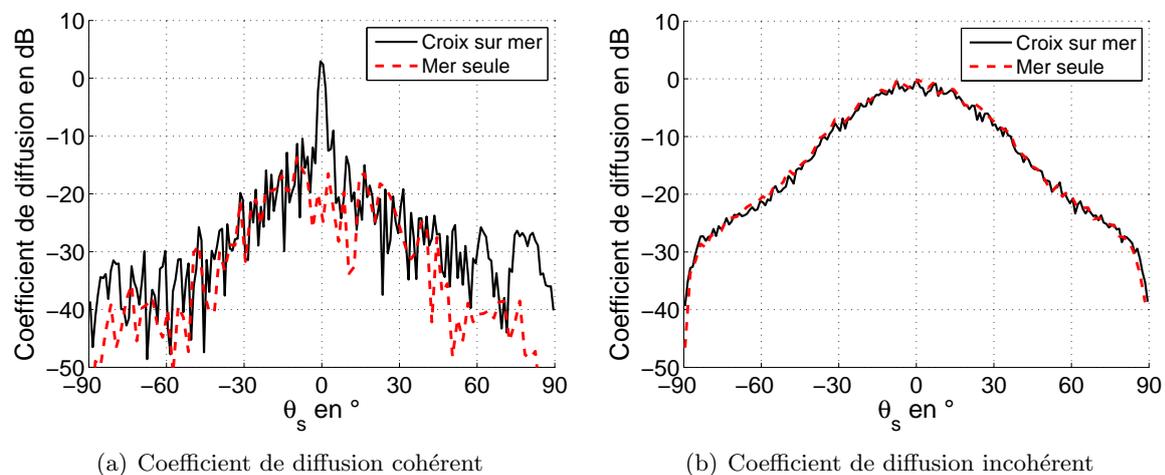


FIG. 3.19 – Cas TM.

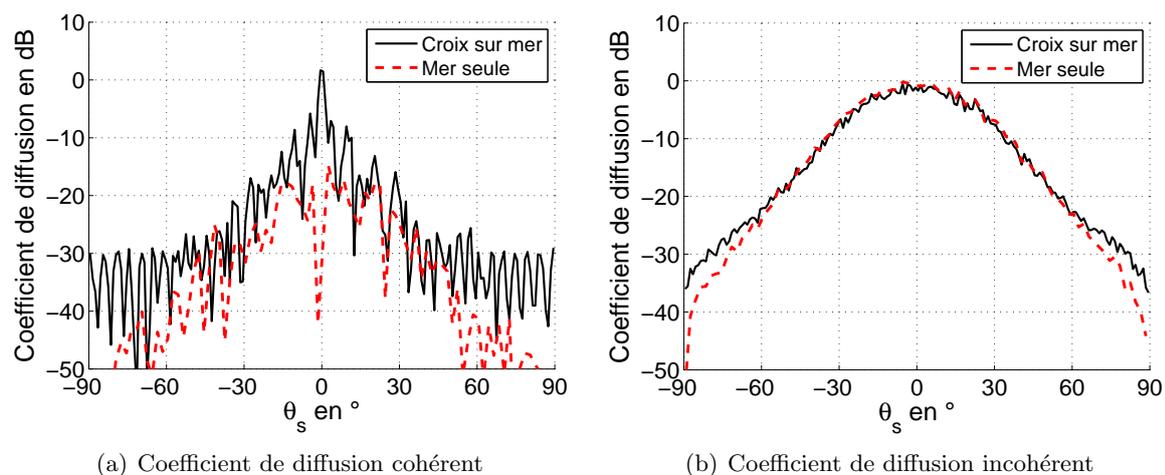
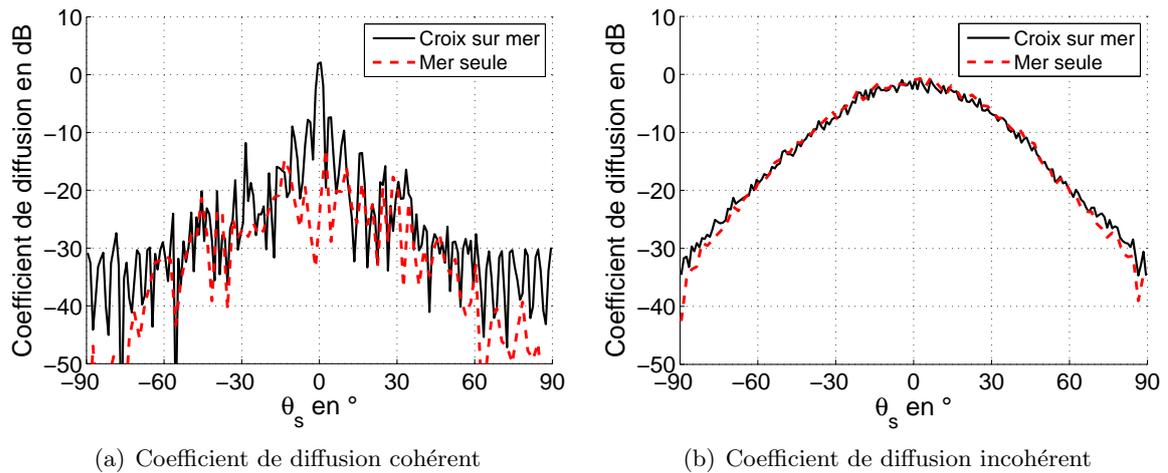
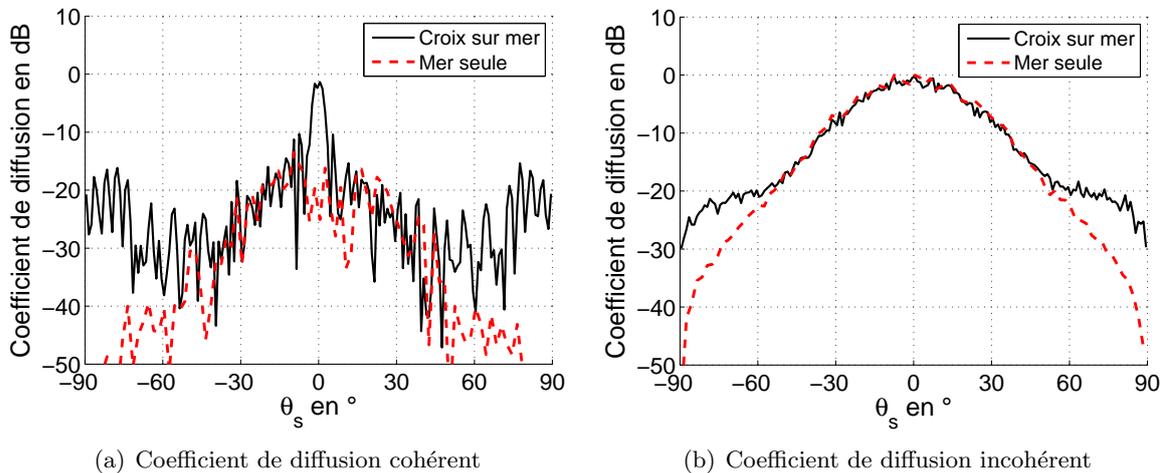


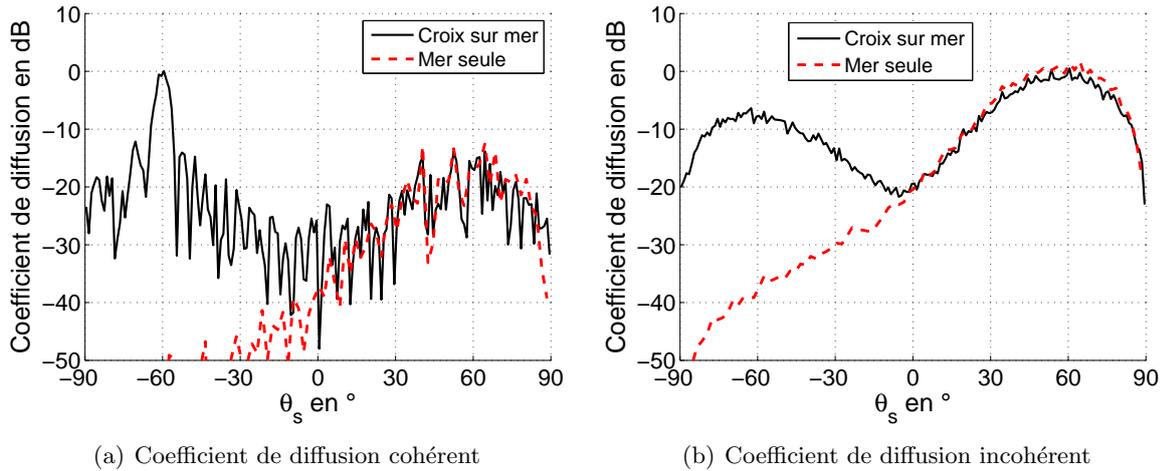
FIG. 3.20 – Fréquence.


 FIG. 3.21 – Vitesse  $u_{10}$ .

échantillons du dessous de la croix (en vision directe de la surface). Ces éléments de l'objet diffusent l'onde, généralement, vers des angles rasants. On remarque sur la figure 3.18(a), que la surface de mer seule produit un coefficient de diffusion cohérent très faible par rapport au cas où l'objet est présent. La présence de la croix produit un écart de 25 dB (par rapport au cas sans objet) sur le coefficient de diffusion cohérent dans la direction de rétro-diffusion ( $\theta_s = 0^\circ$ ). En comparant les résultats obtenus avec ceux pour lesquels la croix est située au-dessus d'une surface plane, il est possible de montrer que le coefficient de diffusion cohérent est similaire (valeurs similaires du coefficient) mais pas identique (allure de la courbe différente), ce qui montre que la présence de la mer sous la croix perturbe sa réponse puisque sa rugosité influe sur la réponse (même sur le coefficient de diffusion cohérent).


 FIG. 3.22 – Angle  $\alpha$ .

Pour le cas TM, sur les figures 3.19(b) et 3.19(a), des résultats similaires sont obtenus. Cependant, le coefficient de diffusion cohérent n'est pas symétrique autour de  $\theta_s = 0^\circ$  pour le cas de la croix sur la mer. Alors que cela devrait être le cas puisque  $\alpha = 0^\circ$ , la forme de la croix est donc symétrique autour de  $\theta_i = 0^\circ$ . De plus la surface de la mer possède une fonction d'autocorrélation paire. Ainsi pour un grand nombre de réalisations, la symétrie doit


 FIG. 3.23 – Angle  $\theta_i$ .

être observée sur le coefficient de diffusion, or ce n'est pas le cas. Ce phénomène, bien que moins prononcé, est également présent sur le coefficient de diffusion cohérent pour le cas d'une croix au-dessus d'une surface plane. Cela ne provient donc pas de la génération de la surface de mer, ce serait donc un effet inhérent au calcul. Cela pourrait être dû aux courants non nuls sur les bords de la surface rugueuse. Notons tout de même que cet effet devrait être estompé en considérant un plus grand nombre de réalisations. En effet, dans les études précédentes (voir section 3.3.2.3) il a été montré que cet effet est surtout observable en TM ; la MDM prédisant également ces champs sur les bords.

L'augmentation de la fréquence  $f$  (figures 3.20(a) et 3.20(b)) et de la vitesse du vent  $u_{10}$  (figures 3.21(a) et 3.21(b)) ont des influences similaires : l'influence de l'objet est moins notable sur le coefficient de diffusion incohérent, tandis que le coefficient de diffusion de la mer seule est légèrement plus faible. Ceci s'explique notamment par le fait que l'augmentation de ces deux paramètres accentue la rugosité (via le paramètre de Rayleigh) de la surface qui contribue alors principalement dans le coefficient de diffusion incohérent, les effets de couplages étant moindres.

Une orientation différente de la croix (figures 3.22(a) et 3.22(b)) influe fortement sur les couplages avec la surface, ce qui induit de ce fait un coefficient de diffusion élevé pour des angles de diffusion rasants. En effet, avec  $\alpha = 45^\circ$ , les dièdres 2 et 4 de la croix montrent une plaque qui est directement excitée par la mer et une autre plaque capable de réfléchir ce champ (après de multiples réflexions) pour des angles de diffusion  $\theta_s \in [-90; -60^\circ]$  (pour le dièdre 4) et  $\theta_s \in [60; 90^\circ]$  (pour le dièdre 2).

Avec un angle d'incidence plus rasant (figures 3.23(a) et 3.23(b)), les coefficients de diffusion cohérent et incohérent ont des valeurs très élevées autour de la direction de rétro-diffusion ( $\theta_s = -60^\circ$ ). Pour le coefficient de diffusion cohérent ce n'est pas surprenant puisque la croix va réfléchir l'onde incidente notamment dans cette direction privilégiée alors que la surface de mer seule contribue principalement dans la direction de réflexion spéculaire ( $\theta_s = 60^\circ$ ). Pour le coefficient de diffusion incohérent, un fort couplage entre la surface de mer et la croix induit une rétro-diffusion très importante, inexistante si chaque surface est considérée en espace libre.

Rappelons finalement que tous ces résultats ne peuvent pas être obtenus avec la MDM dû au nombre très important d'inconnues. A l'aide de la méthode PILE étendue, la FB-SA peut être appliquée à la surface de mer et des problèmes impliquant de très grandes surfaces de mer peuvent être alors résolus.

### 3.4 Hybridation de PILE étendue par intégration de l'Optique Physique

Si la croix au-dessus de la surface est de grande dimension par rapport à la longueur d'onde, l'étape la plus coûteuse dans le calcul par la méthode PILE+FB-SA reste l'inversion de la matrice impédance de l'objet  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  de complexité de  $\mathcal{O}((N_1)^3)$ . Une solution est alors d'utiliser une méthode asymptotique pour accélérer cette étape. Ceci est réalisable en appliquant l'approximation de l'OP.

#### 3.4.1 Formulation mathématique de l'intégration de l'OP

Une évaluation de l'inverse de la matrice impédance peut être obtenue à l'aide de cette méthode. On rappelle que pour une surface PC, on a avec l'OP en TM :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = 2\psi_i(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_i. \quad (3.63)$$

Une analogie peut directement être faite en considérant l'ordre 0 dans l'équation (3.51) qui peut s'écrire :

$$\mathbf{X}_1^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \mathbf{u} \quad (3.64)$$

où  $\mathbf{u}$  est un champ excitant l'objet correspondant à  $\psi_i(\mathbf{r})$  dans l'équation (3.63). Les inconnues surfaciques  $\mathbf{X}_1$  sont représentées dans l'équation (3.63) par le champ total  $\psi(\mathbf{r})$  sur la surface. Finalement, les éléments de l'inverse de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  valent  $2\delta_i^j$  ( $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker) sur la surface éclairée de l'objet et 0 sinon, par analogie avec l'équation (3.63). Le produit matrice-vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \mathbf{u}$  devient alors un produit scalaire-vecteur, le scalaire valant 2 ou 0 (éléments de surface éclairés ou non). L'inversion de la matrice impédance est ainsi évaluée analytiquement sans aucune multiplication. La difficulté ici est de déterminer quels échantillons sont excités par le champ  $\mathbf{u}$  illuminant l'objet. Dans la procédure de la méthode PILE étendue ce champ est la somme du champ incident  $\mathbf{b}_1$  et du champ provenant de la surface inférieure  $-\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$ . Or l'ombrage n'est pas le même en fonction du champ considéré. Cela revient à dire que les éléments de la matrice impédance (obtenus asymptotiquement) ne seraient pas égaux selon que l'on considère la réponse au champ incident ou la réponse au champ provenant de la surface rugueuse. En effet, le champ incident illumine le dessus de l'objet (et dépend de l'angle d'incidence) tandis que le champ provenant de la surface inférieure illumine le dessous de l'objet (et dépend de l'orientation de l'objet et du profil de la surface). Ainsi, il semble plus simple de considérer comme constante l'inverse de la matrice impédance (notée  $\bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1}$  puisqu'elle est évaluée asymptotiquement), et d'inclure les ombrages lors de la propagation. Cela revient à modifier  $\mathbf{b}_1$  (noté alors  $\mathbf{b}'_1$ ) et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  (notée alors  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}'$ ). Pour résumer, l'application numérique de l'OP sur l'objet concerne deux types d'excitation : celle provenant de l'émetteur ( $\mathbf{b}'_1$ ) et celle provenant de la surface inférieure ( $\bar{\mathbf{Z}}_{21}'\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$ ), et la procédure de la méthode PILE étendue s'écrit avec intégration de l'OP :

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \sum_{p=0}^{p=P_{\text{PILE}}} \bar{M}'_{c,1}{}^p \right] \bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1} \left( \mathbf{b}'_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}'\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2 \right), \quad (3.65)$$

$$\bar{M}'_{c,1} = \bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21}' \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}, \quad (3.66)$$

où  $\bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1}$  est obtenue par application de l'OP (sans tenir compte de l'ombrage qui est pris en compte lors de la propagation des champs excitant l'objet) et peut, de ce fait, être remplacée par le scalaire 2 : les éléments de  $\bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1}$  valent  $2\delta_i^j$  (le produit matrice-vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1}\mathbf{u}$  devient alors un produit scalaire-vecteur  $2\mathbf{u}$ ). Cependant,  $\mathbf{b}'_1$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_1'$  sont modifiés pour tenir compte des ombrages en excitation.

Pour illustrer la modification de  $\mathbf{b}'_1$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_1'$ , considérons le cas d'une plaque d'angle  $\alpha = 0^\circ$  (plaque horizontale) au-dessus d'une surface rugueuse. La plaque est constituée de  $N_1$  échantillons. Le champ incident n'illumine que les échantillons  $1..N_1/2$ , tandis que le champ provenant de la surface n'illumine que les échantillons  $N_1/2+1..N_1$ . On force donc à 0 les valeurs du champs incident sur les échantillons non excités par celui-ci :

$$\mathbf{b}'_1 = \left[ \begin{array}{c} \psi_i(\mathbf{r}_{11}) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_{1N_1/2}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \right\} \text{Champ incident sur les échantillons } n = 1..N_1/2 \\ \\ \left. \right\} \text{Champ incident sur les échantillons } n = N_1/2 + 1..N_1 \end{array} \quad . \quad (3.67)$$

Pour le champ provenant de la surface inférieure, on "interdit" la propagation des éléments de la surface rugueuse vers les échantillons non excités, cela revient à modifier la matrice de couplage en forçant à 0 les éléments de la matrice concernés par ces chemins de propagation. Selon que la surface inférieure est diélectrique ou PC (ou IBC),  $\bar{\mathbf{Z}}_1'$  est définie par les équations (3.35) ou (3.40), respectivement. Dans les deux cas la matrice  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  modifiée (notée  $\bar{\mathbf{A}}_{21}'$ ) a des valeurs forcées à 0 tout comme la matrice  $\bar{\mathbf{B}}_{21}'$  (modification de  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$ ) :

$$\bar{\mathbf{A}}_{21}' = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ A_{21N_1/2+1,1} & \dots & A_{21N_1/2+1,N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{21N_1,1} & \dots & A_{21N_1,N_2} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \right\} \text{Champ provenant de} \\ \text{la surface inférieure sur les échantillons} \\ n = 1..N_1/2 \\ \\ \left. \right\} \text{Champ provenant de} \\ \text{la surface inférieure sur les échantillons} \\ n = N_1/2 + 1..N_1 \end{array} \quad . \quad (3.68)$$

Pour le cas de la croix, la procédure est plus compliquée. Premièrement l'évaluation de l'ombrage en excitation est plus complexe puisqu'une plaque peut créer un ombrage en excitation sur une autre plaque. Deuxièmement, le phénomène de DR entre deux faces internes d'un dièdre est à prendre en compte dans l'inverse de la matrice impédance de l'objet. Pour s'affranchir de la première difficulté, l'évaluation des zones excitées est réalisée en utilisant le calcul de l'ombrage vu au paragraphe 2.2.4.2 au travers de la figure 2.20(a) et de l'équation (2.128). Il est alors possible de connaître analytiquement les échantillons excités par le champ incident et ceux excités par un élément de surface rugueuse considéré, et les valeurs des champs sur les échantillons non excités sont forcées à 0 tout comme dans les équations (3.67) et (3.68). Pour surmonter la seconde difficulté, les inconnues surfaciques sont décomposées en deux vecteurs : les contributions en SR et les contributions en DR

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1^{SR} + \mathbf{X}_1^{DR}. \quad (3.69)$$

Tandis que  $\mathbf{X}_1^{SR}$  est calculé à l'aide de l'équation (3.65),  $\mathbf{X}_1^{DR}$  est calculé en faisant propager les inconnues surfaciques d'une face vers la face en vis à vis :

$$\mathbf{X}_1^{DR} = \bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{DR} \mathbf{X}_1^{SR}, \quad (3.70)$$

où  $\bar{C}_{DR}$  est la matrice de couplage entre les faces internes des dièdres de la croix et prend en compte rigoureusement la propagation des champs d'une face des dièdres vers l'autre face des dièdres. L'ombrage en observation n'est pas à prendre en compte ici puisqu'aucune approximation n'est faite lors de la propagation des champs surfaciques. Ainsi lors du rayonnement des champs totaux surfaciques (contributions SR et DR) par le principe de Huygens qui est ici réalisé sans ombrage en observation, le forward scattering d'une face s'opposera au champ provenant d'une face non observée. Le champ diffusé sera alors rigoureusement calculé à partir de champs surfaciques approchés. Alors que dans le paragraphe 2.2.4.2 il a été vu que la propagation entre les faces est réalisée à l'aide de l'OG qui ne propage pas rigoureusement les champs. Dans ce cas, il était nécessaire d'inclure artificiellement l'ombrage en observation pour évaluer de manière approchée le champ diffusé à partir de champs surfaciques approchés. Les DR n'existant qu'entre deux faces internes d'un dièdre de la croix, seules 8 DR sont possibles :  $(f_2 \rightsquigarrow f_3)$  et  $(f_3 \rightsquigarrow f_2)$ ,  $(f_4 \rightsquigarrow f_5)$  et  $(f_5 \rightsquigarrow f_4)$ ,  $(f_6 \rightsquigarrow f_7)$  et  $(f_7 \rightsquigarrow f_6)$ ,  $(f_8 \rightsquigarrow f_1)$  et  $(f_1 \rightsquigarrow f_8)$  ( $f_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  face). La numérotation des faces dans la croix est définie à la figure 2.22.  $\bar{C}_{DR}$  est donc définie par

$$\bar{C}_{DR} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{C}_{f_8 \rightsquigarrow f_1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{C}_{f_3 \rightsquigarrow f_2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{C}_{f_2 \rightsquigarrow f_3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{C}_{f_5 \rightsquigarrow f_4} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{C}_{f_4 \rightsquigarrow f_5} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{C}_{f_7 \rightsquigarrow f_6} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{C}_{f_6 \rightsquigarrow f_7} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{C}_{f_1 \rightsquigarrow f_8} & \bar{0} \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

où les éléments des sous-matrices  $\bar{C}_{f_i \rightsquigarrow f_j}$  sont définis en TM par :

$$C_{m,n} = + \frac{ik_0 v_n |\Delta x_n| H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] \quad \forall m, n, \quad (3.72)$$

où  $n$  est l'indice d'un élément de la face  $f_i$  et  $m$  l'indice d'un élément de la face  $f_j$  de la croix ( $f_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  face et  $f_j$  la  $j^{\text{ème}}$  face de la croix).

Finalement, les inconnues surfaciques sont obtenues par

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{I} + \bar{Z}'_1^{-1} \bar{C}_{DR} \right) \mathbf{X}_1^{SR}, \quad (3.73)$$

et à partir des équations (3.73), (3.69) et (3.65) :

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \sum_{p=0}^{p=P_{\text{PILE}}} \bar{M}'_{c,1}{}^p \right] \left( \bar{I} + \bar{Z}'_1^{-1} \bar{C}_{DR} \right) \bar{Z}'_1^{-1} \left( \mathbf{b}'_1 - \bar{Z}'_{21} \bar{Z}'_2^{-1} \mathbf{b}_2 \right), \quad (3.74)$$

et comme les éléments de  $\bar{Z}'_1^{-1}$  sont  $2\delta_i^j$ , on obtient finalement

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \sum_{p=0}^{p=P_{\text{PILE}}} \bar{M}'_{c,1}{}^p \right] \left( \bar{I} + 2\bar{C}_{DR} \right) 2 \left( \mathbf{b}'_1 - \bar{Z}'_{21} \bar{Z}'_2^{-1} \mathbf{b}_2 \right). \quad (3.75)$$

Les inconnues surfaciques  $\mathbf{X}_1$  sont donc obtenues à l'aide de la méthode PILE étendue dans laquelle l'OP est intégrée. Néanmoins, ce calcul n'est valable qu'en TM, puisque l'évaluation

analytique de l'inverse de la matrice impédance est obtenue en considérant les conditions aux limites de l'OP en TM (équation (3.63)).

Pour le calcul en polarisation TE, on a avec l'OP :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = 0 \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 2 \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in S_i, \quad (3.76)$$

et l'analogie avec l'équation (3.64) indique que l'inverse de la matrice impédance vaut ici  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} = 2 \frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  où  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  est l'opérateur de la dérivée normale sur l'objet. L'inverse de la matrice impédance n'est alors pas calculable analytiquement puisque l'opérateur agit sur le champ  $\mathbf{u}$  illuminant l'objet. Il convient donc d'inclure cet opérateur lors de la propagation du champ  $\mathbf{u}$  de sorte que les éléments de l'inverse de la matrice impédance valent  $2\delta_i^j$  comme dans le cas TM. Finalement, en utilisant les mêmes calculs pour les ombrages en excitation on a en TE :

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \sum_{p=0}^{p=P_{\text{PILE}}} \bar{\mathbf{M}}''_{c,1}{}^p \right] (\bar{\mathbf{I}} + 2\bar{\mathbf{C}}''_{DR}) 2 \left( \mathbf{b}_1'' - \bar{\mathbf{Z}}''_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2 \right), \quad (3.77)$$

$$\bar{\mathbf{M}}''_{c,1} = \bar{\mathbf{Z}}_1''^{-1} \bar{\mathbf{Z}}''_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}, \quad (3.78)$$

où les éléments de  $\mathbf{b}_1''$  sont obtenus à partir de ceux de  $\mathbf{b}_1'$  en appliquant une dérivée normale. Pour ce faire, nous utilisons les fonctions directement obtenues avant échantillonnage :

$$b_1''(x_1, z_1) = \frac{\partial b_1'(x_1, z_1)}{\partial n_1}, \quad (3.79)$$

de même pour le couplage de la surface vers l'objet, les éléments  $Z''_{21m,n}$  sont obtenus par échantillonnage de la dérivée normale de la fonction permettant d'obtenir  $Z'_{21m,n}$  :

$$Z''_{21}(x_1, z_1) = \frac{\partial Z'_{21}(x_1, z_1)}{\partial n_1}, \quad (3.80)$$

et enfin, pour les éléments  $C''_{m,n}$  de la matrice  $\bar{\mathbf{C}}''_{DR}$

$$C''(x_1, z_1) = \frac{\partial C(x_1, z_1)}{\partial n_1}, \quad (3.81)$$

et on a

$$\bar{\mathbf{Z}}_1''^{-1} = \bar{\mathbf{Z}}_1'^{-1} = 2. \quad (3.82)$$

Les calculs et les expressions des éléments  $b_1''$ ,  $Z''_{21m,n}$  et  $C''_{m,n}$  sont détaillés dans l'annexe B.

Ainsi, la méthode PILE étendue peut être accélérée en utilisant la FB-SA pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse et en appliquant l'OP sur la croix. La méthode hybride résultante est alors nommée "PILE+FB-SA+OP".

### 3.4.2 Résultats de la méthode hybride PILE+FB-SA+OP

Pour étudier la validité de la méthode hybride PILE+FB-SA+OP des comparaisons sont effectuées avec des résultats issus de la MdM pour une croix située au-dessus d'une surface de mer. Les paramètres sont les mêmes que ceux des figures 3.13 et 3.14 (cas (a) du tableau 3.2 et cas (c) du tableau 3.3). L'ordre de la méthode FB est choisi en considérant l'étude sur la surface

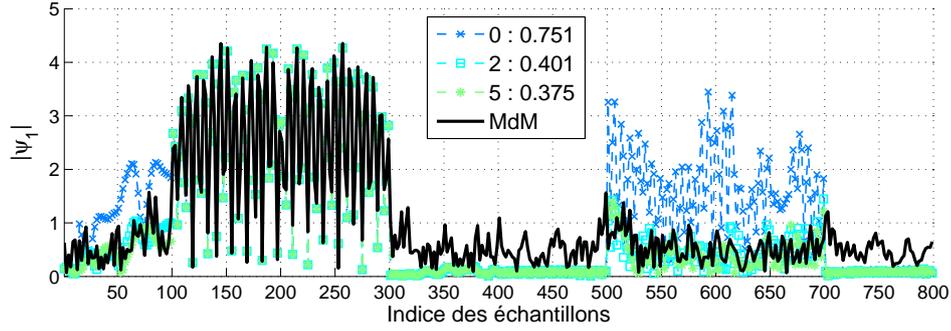
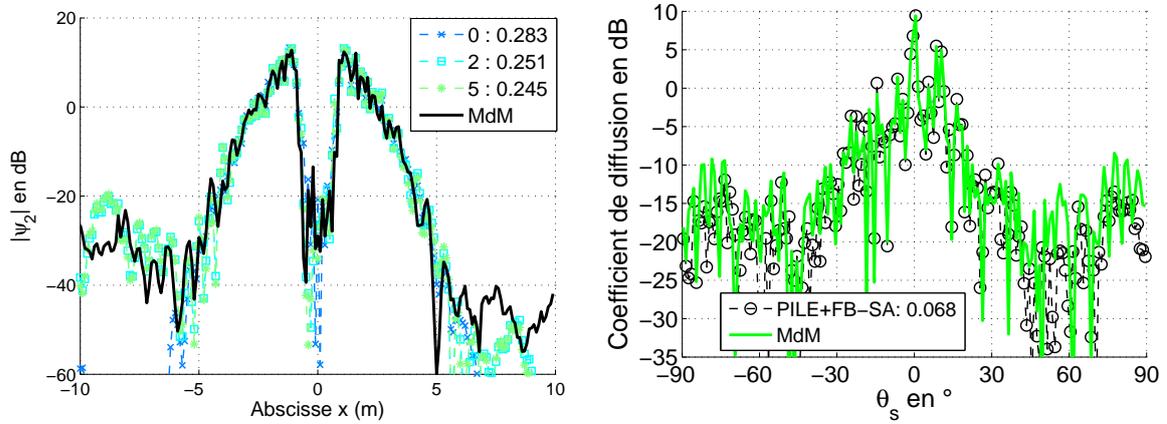


FIG. 3.24 – Module du champ total sur la surface de la croix. Dans la légende : l'ordre de la méthode PILE suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique. La scène est illustrée sur la figure 3.13 et les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 3.14.

seule, soit  $P_{FB} = 2$  et  $x_{d0} = 0.05L_c$  pour la distance des interactions fortes. Le module du champ total sur la surface de la croix est tracé sur la figure 3.24 en fonction des échantillons de la croix. Dans la légende l'ordre  $P_{PILE}$  de la méthode PILE+FB-SA+OP est suivi de l'erreur relative sur le champ total surfacique.

Sur la figure 3.25(a), le module du champ total sur la surface de la mer est tracé en dB en fonction de l'abscisse normalisée. Sur la figure 3.25(b), le coefficient de diffusion de la scène est tracé en dB en fonction de l'angle de diffusion avec  $P_{PILE} = 5$  pour la méthode PILE+FB-SA+OP.



(a) Module du champ total sur la surface de mer en dB

(b) Coefficient de diffusion en dB ( $P_{PILE} = 5$ )

FIG. 3.25 – Module du champ total sur la surface de mer en dB et coefficient de diffusion en dB pour une croix au-dessus d'une surface de mer. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.24.

On remarque sur la figure 3.24 que les phénomènes physiques observés sur la figure 3.14 sont en majeure partie pris en compte, notamment les fortes oscillations du champ surfacique sur les échantillons  $n_1 = 100$  à  $300$  (qui sont les DR entre les faces 2 et 3 de la croix comme expliqué au paragraphe 3.3.3.2) sont bien prises en compte avec la méthode hybride. De même que la méthode PILE+FB-SA, la méthode hybride PILE+FB-SA+OP prédit, à l'ordre 0 de la méthode PILE, un champ élevé sur les faces 6 et 7 de la croix (tournées vers la surface rugueuse)

provenant de la surface. Les ordres supérieurs de la méthode PILE corrigent ces phénomènes. Il est possible de montrer qu'à partir de l'ordre  $P_{\text{PILE}} = 5$  l'erreur sur les inconnues surfaciques ne changent plus. La méthode PILE+FB-SA+OP converge pour  $P_{\text{PILE}} = 5$  pour la scène considérée ici. Bien que visuellement les résultats issus de la méthode PILE+FB-SA+OP sont très proches de ceux de la MdM, l'erreur relative est importante comparativement à celle obtenue avec la méthode PILE+FB-SA sur la figure 3.14. Il est utile de rappeler ici que la méthode PILE+FB-SA+OP est une méthode hybride, l'intégration de l'OP ne pouvant être réalisée sans apporter une erreur systématique sur l'évaluation des courants surfaciques. En effet, les hypothèses pour l'utilisation de l'OP sont fortes, et les conséquences ne le sont pas moins. Ainsi, la méthode PILE+FB-SA+OP est incapable de prédire les courants non négligeables sur les échantillons  $n_1 = 400$  à  $500$  et  $n_1 = 700$  à  $800$  : les faces 5 et 8 de la croix. De même, le champ sur la surface de mer, figure 3.25(a), est très bien évalué au centre de la surface mais des différences sont notables sur les bords de la surface, néanmoins le coefficient de diffusion résultant, présenté sur la figure 3.25(b), montre de très bons résultats de la méthode hybride PILE+FB-SA+OP autour de  $\theta_s = 0^\circ$  correspondant à la direction de la réflexion spéculaire dans le cas d'une surface plane parfaitement conductrice. Des différences apparaissent pour des angles d'observation plus rasants : à partir de  $|\theta_s| > 50^\circ$ .

Des résultats similaires sont obtenus sur la figure 3.26 où le coefficient de diffusion de la scène est tracé en dB en fonction de l'angle de diffusion avec  $P_{\text{PILE}} = 5$  pour la méthode PILE+FB-SA+OP en polarisation TE. La scène considérée est la même que celle illustrée sur la figure 3.13 sauf  $\theta_i = 20^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$  pour l'angle de rotation de la croix qui est cette fois-ci centrée en  $(x_o = -z_0 \tan(\theta_i), z_o = 20\lambda_0)$  (cas (b) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3). Ainsi la croix est positionnée au centre du faisceau incident de l'onde de Thorsos de sorte qu'elle soit fortement excitée.

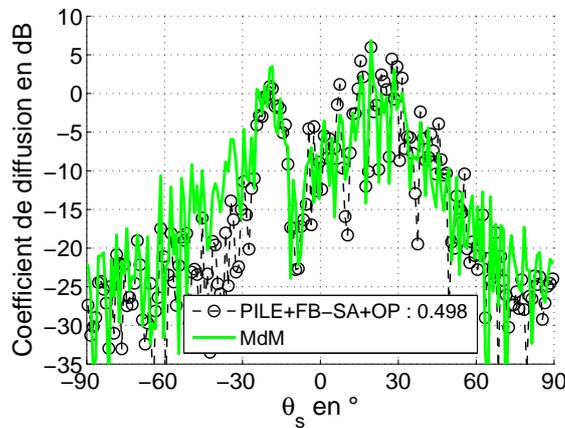


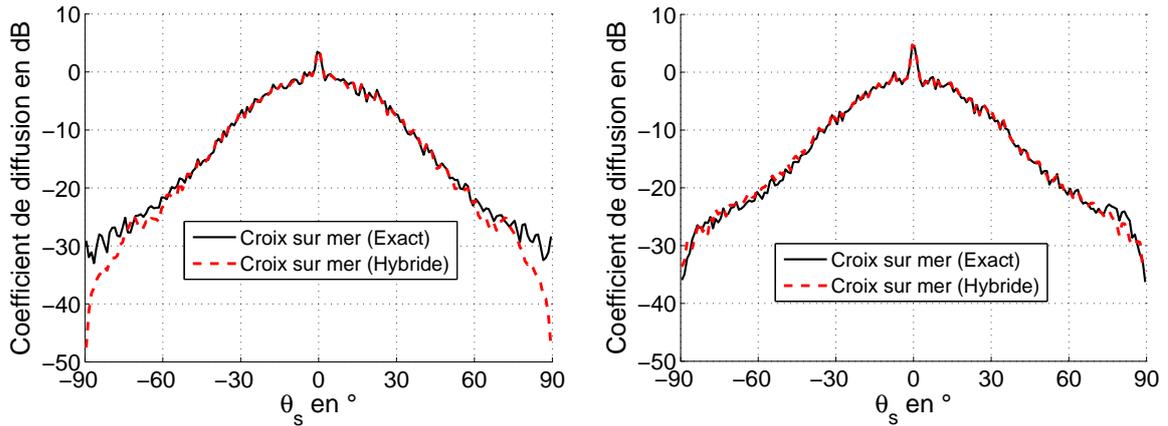
FIG. 3.26 – Coefficient de diffusion en dB pour une croix au-dessus d'une surface de mer. Cas (b) du tableau 3.2 et cas (d) du tableau 3.3.

Ici encore, de très bons résultats sont obtenus autour de  $\theta_s = 20^\circ$  correspondant à la direction de la réflexion spéculaire dans le cas d'une surface plane parfaitement conductrice, et des différences apparaissent à partir de  $\theta_s > 70^\circ$  et  $\theta_s < -30^\circ$ .

Afin de tester cette méthode hybride pour des applications plus réalistes, il convient d'utiliser la méthode de Monte-Carlo.

### 3.4.3 Application à une croix au-dessus d'une surface de mer

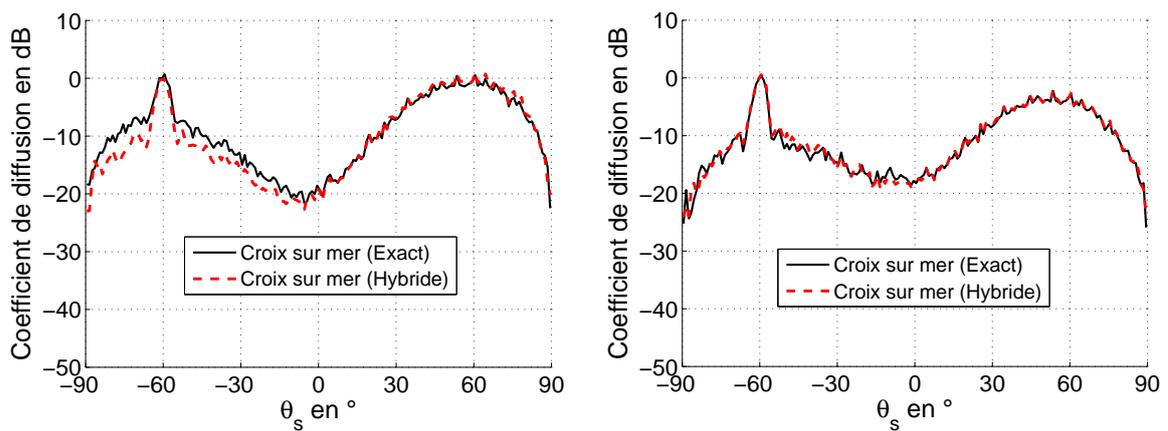
Les calculs présentés à la section 3.3.3.3 sont appliqués aux résultats obtenus à partir de la méthode hybride. Les coefficients de diffusion total issus de PILE+FB-SA+OP sont comparés, en fonction de l'angle  $\theta_s$ , à ceux obtenus avec la méthode exacte PILE+FB-SA, sur les figures 3.27(a) 3.27(b), 3.28(a) et 3.28(b). Les paramètres sont les mêmes que ceux donnés au tableau 3.8, où le cas nommé "fréquence" (figures 3.20(a) et 3.20(b)) est considéré pour la comparaison effectuée sur la figure 3.27(a), et le cas nommé "Cas TM" (figures 3.19(a) et 3.19(b)) est considéré pour la comparaison de la figure 3.27(b). De même, on considère le cas nommé "Angle  $\theta_i$ " du



(a) Mêmes paramètres que "Fréquence" du tableau 3.8 (b) Mêmes paramètres que "Cas TM" du tableau 3.8

FIG. 3.27 – Comparaison du coefficient de diffusion total issu de la méthode PILE+FB-SA+OP avec celui issu de la méthode PILE+FB-SA. Les paramètres communs aux deux figures sont donnés au tableau 3.8.

tableau 3.8 pour la comparaison effectuée sur la figure 3.28(a), et pour la figure 3.28(b) la même scène est considérée mais en TM.



(a) Mêmes paramètres "Angle  $\theta_i$ " du tableau 3.8 (b) Mêmes paramètres que "Angle  $\theta_i$ " du tableau 3.8 mais en TM

FIG. 3.28 – Comparaison du coefficient de diffusion total issu de la méthode PILE+FB-SA+OP avec celui issu de la méthode PILE+FB-SA. Les paramètres communs aux deux figures sont donnés au tableau 3.8.

Pour les quatre comparaisons un très bon accord est observé entre la méthode exacte et la méthode hybride notamment au voisinage de la direction de rétro-diffusion ( $\theta_s = 0^\circ$  pour les figures 3.27(a) et 3.27(b) qui est également la direction spéculaire d'une surface plane et  $\theta_s = -60^\circ$  pour les figures 3.28(a) et 3.28(b)). Pour les deux premières figures, des différences sont néanmoins notables pour des angles de diffusion rasants (pour  $\theta_s < -60^\circ$  et  $\theta_s > 60^\circ$ ), tandis que pour les deux dernières figures les différences sont surtout notables pour  $\theta_s \in [-90^\circ; -70]$  et  $\theta_s \in [-50^\circ; 0^\circ]$  (surtout pour le cas TE sur la figure 3.28(a)) mais une très bonne précision est obtenue dans la direction spéculaire d'une surface plane ( $\theta_s = 60^\circ$ ). Ainsi, la méthode hybride semble très appropriée pour obtenir des résultats précis dans (et au voisinage) de la direction de rétro-diffusion ( $\theta_s = -\theta_i$ ) et de la direction de réflexion spéculaire ( $\theta_s = \theta_i$ ).

Les résultats présentés dans cette section et dans ceux du paragraphe 3.3.3.3 ont été obtenus à partir de codes Matlab convertis en exécutable (fichiers .exe). Le PC utilisé pour ces calculs possède un processeur Dual Intel Xeon E5440 (2×4 cœurs à 2.83GHz) et 16Go de mémoire vive (de type DDR2). Précisons que les fichiers .exe correspondant aux 5 configurations présentées au tableau 3.8 ont été exécutés simultanément sur le même PC, d'abord avec la PILE+FB-SA puis avec la PILE+FB-SA+OP. À noter également que durant ces simulations, seulement 2Go de RAM environ ont été utilisés par le PC. Ces calculs sont donc réalisables sur un PC standard de bureau. Le temps de calcul nécessaire aux deux méthodes pour les résultats présentés aux figures 3.27(a), 3.27(b), 3.28(a) et 3.28(b), sont indiqués dans le tableau 3.9.

TAB. 3.9 – Comparaison des temps de calculs entre la méthode exacte et la méthode hybride pour les résultats présentés dans cette section.

Méthode \ Configuration	Figure 3.27(a)	Figure 3.27(b)	Figure 3.28(a)	Figure 3.28(b)
PILE+FB-SA (exact)	35h 44min	11h 5min	34h 42min	10h 38min
PILE+FB-SA+OP (hybride)	20h 28min	9h 26min	19h 8min	9h 31min

Comme attendu, la méthode hybride est plus rapide en temps de calcul car la complexité de la méthode hybride est plus faible que celle de la méthode exacte. De plus, la méthode hybride est d'autant plus avantageuse que le nombre d'inconnues sur la croix est important. En effet, il est utile de noter que plus la croix est grande, plus l'écart en temps de calcul entre PILE+FB-SA et PILE+FB-SA+OP est important. De plus, si le nombre d'inconnues sur la croix devient trop important (environ 2500 inconnues sur un PC standard de bureau possédant 2Go de RAM par exemple) alors l'inversion directe par décomposition LU (pour les interactions locales sur l'objet) ne peut être réalisée alors que la méthode PILE+FB-SA+OP peut être utilisée.

### 3.5 Vers une résolution asymptotique du problème

Pour obtenir une résolution encore plus rapide du problème de la diffusion par une croix située au-dessus de la mer, un modèle asymptotique est nécessaire. La figure 3.29 rappelle la géométrie du problème ainsi que les divers calculs nécessaires à la méthode PILE : les interactions locales sur chaque surface et les couplages. Dans la méthode hybride proposée dans ce chapitre, seules les interactions locales sur l'objet ont été évaluées asymptotiquement. Il conviendrait donc de faire de même pour les interactions locales sur la surface rugueuse. Pour cela, l'Optique Physique peut être utilisée, mais il faut tenir compte des ombrages ainsi que des multiples réflexions [164, 93, 165, 166].

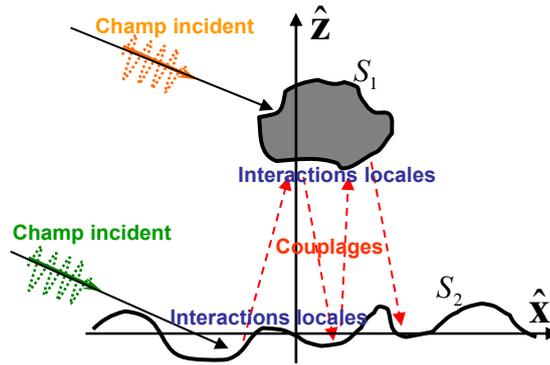


FIG. 3.29 – Géométrie du problème et illustration des différentes étapes de calcul de la méthode PILE.

Pour les interactions locales sur l'objet, la méthode proposée dans le modèle hybride (OP pour les SR et OP/OP pour les DR) est très difficilement applicable au cas 3D. En effet, dans le cas d'un réflecteur polyédrique, les couplages rigoureux lors des doubles réflexions nécessitent le calcul numérique de quatre intégrales imbriquées. Et six intégrales imbriquées seraient nécessaires pour le calcul des triples réflexions. Il est donc indispensable d'ajouter des hypothèses simplificatrices pour les interactions locales sur l'objet. La résolution asymptotique analytique de la diffraction par une croix en espace libre proposée au paragraphe 2.2.4 semble la plus pertinente pour cela et produit des résultats encourageants. Cette méthode applique l'OP pour les SR et l'OG combinée à l'OP pour les DR. L'utilisation de l'OG lors de la première réflexion des DR permet de s'affranchir de la complexité du couplage en champ proche des faces du dièdre mais le calcul de la direction de la réflexion spéculaire est nécessaire. Ce calcul n'a de sens que si l'onde excitatrice est considérée plane. Or le champ provenant de la surface inférieure ne peut pas être considéré comme une onde plane au niveau de la croix car cela reviendrait à considérer l'objet et la surface en champ lointain l'un de l'autre (alors que la surface rugueuse est supposée infinie). Il conviendrait alors de décomposer ce champ en une somme d'onde plane (en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green), d'utiliser ensuite le modèle analytique sur la croix pour chaque onde plane et d'évaluer ainsi la réponse de la croix par sommation des champs diffractés.

Le modèle asymptotique basé sur l'OP combinée à l'OG/OP (paragraphe 2.2.4) est évalué analytiquement en considérant le récepteur placé en champ lointain. Mais le champ diffracté par la croix ne peut pas être considéré comme une onde plane au niveau de la surface rugueuse. Le rayonnement par l'OP (pour les SR et pour la deuxième réflexion des DR) vers la surface rugueuse doit être évalué rigoureusement (c'est à dire en utilisant le principe de Huygens en zone de champ proche) comme cela est réalisé dans le modèle hybride proposé dans ce chapitre. Dans le cas 3D cela revient à calculer numériquement une intégrale surfacique (deux intégrales imbriquées) par plaque du réflecteur participant à la diffraction (non ombrée). Bien que le calcul ne puisse pas être temps-réel, il n'en demeurerait pas moins réalisable et calculable sur un PC standard de bureau. En effet, utiliser l'OG lors des couplages entre les plaques de l'objet permet de s'affranchir du calculs d'intégrales surfaciques supplémentaires. Le modèle asymptotique basé sur l'OG et l'OP, développé pour le dièdre pour le cas 2D, semble donc très intéressant.

Quant à la surface rugueuse, d'autres modèles asymptotiques analytiques existants s'avèrent très intéressants (voir paragraphe 1.4.3). On peut citer par exemple la SSA (Small Slope Approximation) [70, 71, 72, 73] ou bien la WCA (Weighted Curvature Approximation) [167, 73, 168], valides pour des angles d'incidence modérés.

Ainsi, la principale difficulté dans un modèle asymptotique global, conjuguant d'une part un modèle de résolution sur la croix et un modèle de résolution sur la surface rugueuse d'autre part, serait de tenir compte des couplages entre les deux surfaces. La principale question qui devra être approfondie avant d'étudier plus en détail un tel modèle, est de savoir si la prise en compte des couplages produirait un gain de précision notable en comparaison aux pertes induites par l'utilisation d'hypothèses simplificatrices des méthodes asymptotiques. Il n'en demeure pas moins qu'un tel modèle mérite une étude plus détaillée.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations intégrales pour le cas de deux diffuseurs quelconques placés dans le milieu incident ont été établies. Afin d'accélérer le calcul et améliorer le stockage mémoire, mon travail a consisté à étendre la méthode PILE développée au laboratoire IREENA au cas plus général où les deux diffuseurs sont excités par l'onde incidente. Cette méthode numérique rigoureuse, qui exploite la décomposition par bloc de la matrice impédance, admet une interprétation physique simple.

LA FB-SA a ensuite été appliquée pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse à l'aide de la décomposition par bloc de la méthode PILE étendue. Des comparaisons avec la MdM ont démontré la convergence et la validité de la méthode PILE+FB-SA qui peut maintenant servir de méthode de référence. Cette méthode a été notamment appliquée pour un grand nombre de réalisations afin de dégager des comportements physiques de la scène. Ce travail a fait l'objet de deux publications en revue [134, 137] et de deux publications en conférence internationale [169, 170].

Toujours dans le souci d'accélérer le calcul et de diminuer la complexité de la méthode, une hybridation de la PILE+FB-SA avec l'OP a été proposée. Des comparaisons avec la MdM ont montré la pertinence d'une telle méthode vu les résultats satisfaisants obtenus. En appliquant cette méthode hybride à un grand nombre de réalisations, de très bons résultats ont été constatés, notamment dans la direction de rétro-diffusion.

Afin de parfaire l'étude de la diffusion par la scène 2D, il conviendrait d'étudier et de développer un modèle asymptotique global. Des pistes ont été données, et le modèle analytique proposé au paragraphe 2.2.4 pour la diffraction par la croix en espace libre semble être une voie très intéressante (même si pour rendre analytique le calcul, le rayonnement est évalué en champ lointain). La question qui se pose maintenant est de savoir si un modèle similaire (basé également sur l'OG et l'OP) serait tout aussi intéressant pour un réflecteur polyédrique en espace libre (cas 3D). En effet, de nouveaux phénomènes interviennent dans le cas vectoriel. On peut citer entre autres les effets de dépolarisation avec l'apparition dans le cas 3D de polarisations croisées et les contributions des triples réflexions. C'est l'objet du prochain chapitre, dédié à répondre à cette question.

## Chapitre 4

# Diffusion par un réflecteur polyédrique en espace libre - cas vectoriel

---



*Dans le chapitre précédent, l'étude a porté sur la diffusion par une croix au-dessus d'une surface rugueuse pour une scène bi-dimensionnelle. Dans ce chapitre, la diffraction par un réflecteur polyédrique (scène 3D) à l'aide de méthodes asymptotiques est entreprise. Le modèle analytique proposé, est basé sur le problème élémentaire de la diffraction par un trièdre avec prise en compte des ombrages. Les phénomènes de simple, double et triple réflexion et de simple diffraction d'arêtes seront modélisés à l'aide de l'OP, de l'OG et de la MCE; des comparaisons avec une méthode de référence testeront la pertinence de la méthode. Le modèle sera appliqué à différents réflecteurs polyédriques, une étude sera menée pour dégager des propriétés intrinsèques de ces obstacles particuliers. On montrera notamment que la classe et l'ordre du réflecteur polyédrique ont une influence directe sur la signature de l'obstacle.*

---

### 4.1 Etat de l'art et positionnement du problème

Comme présenté à la section 1.5.1 de ce manuscrit, les réflecteurs polyédriques, constitués de plusieurs trièdres, sont considérés de grande taille devant la longueur d'onde. L'étude est donc menée en hautes fréquences. Dans ce domaine d'étude, les méthodes rigoureuses sont quasiment inapplicables dû au nombre très élevé d'inconnues. Afin d'obtenir une évaluation rapide de la signature de l'obstacle, un modèle basé sur des méthodes asymptotiques est nécessaire. Le modèle analytique proposé à la section 2.2.4 pour la diffraction par une croix semble le plus adapté pour répondre à ce besoin. Une hypothèse simplificatrice utilisée est de négliger les ondes rampantes. Sous cette approximation, les trièdres du réflecteur polyédrique sont découplés : le courant sur les plaques d'un trièdre ne modifiera pas le courant sur les plaques d'un autre trièdre. Alors, sous l'hypothèse hautes fréquences, le champ diffracté en champ lointain par le réflecteur est la somme (cohérente) des champs diffractés, en champ lointain, par chacun des trièdres. L'étude

est donc ramenée au cas élémentaire de la diffraction par un trièdre.

### 4.1.1 Rappel sur les réflecteurs polyédriques

Dans la section 1.5.1, les réflecteurs polyédriques ont été définis de manière générale à partir de polyèdres subissant un processus de facettage.

Le terme de *classe* a été défini comme le nombre de faces du polyèdre qui est à la base du réflecteur polyédrique. Ainsi, suivant cette dénomination, le réflecteur octaédrique (illustré sur la figure 4.2) est de classe 8 (l'octaèdre possède 8 faces, le réflecteur octaédrique possède 8 trièdres) et le réflecteur icosaédrique (illustré sur la figure 4.5) est de classe 20.

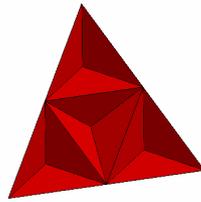


FIG. 4.1 – Réseau de trièdres d'ordre 2.

Chaque trièdre d'un réflecteur polyédrique peut être remplacé par un réseau de trièdre. Sur la figure 4.1 est présenté un réseau de trièdre d'ordre 2. Le terme d'*ordre* a été défini comme le rapport d'homothétie entre le trièdre original (qui est ensuite remplacé par le réseau) et les trièdres constituant le réseau. Pour un réseau d'ordre 2, le trièdre original a été remplacé par un réseau constitué de 4 trièdres de dimensions 2 fois plus petites. Le réseau ainsi formé est contenu dans le même volume que le trièdre initial. A partir de ces remplacements de trièdres en réseaux de trièdres nous pouvons donc créer des réflecteurs polyédriques d'ordre supérieur. Un réflecteur octaédrique d'ordre 2 est donc un octaèdre qui a subi tout d'abord un procédé de facettage (on obtient le réflecteur octaédrique vu à la figure 4.2) puis chacun de ses trièdres a été remplacé par un réseau de trièdre d'ordre 2.

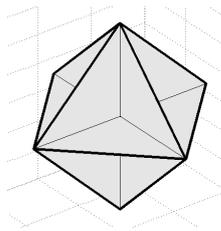


FIG. 4.2 – Le réflecteur octaédrique d'ordre 1 (nombre de trièdres =  $8 \times 1^2 = 8$ ).

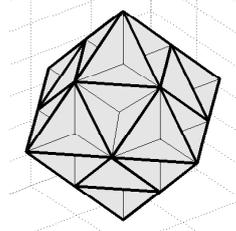


FIG. 4.3 – Le réflecteur octaédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres =  $8 \times 2^2 = 32$ ).

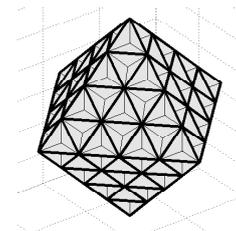


FIG. 4.4 – Le réflecteur octaédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres =  $8 \times 4^2 = 128$ ).

Le réflecteur octaédrique d'ordre 2 ainsi obtenu est représenté à la figure 4.3; il comporte donc  $8 \times 4 = 32$  trièdres. Avec le même procédé, on obtient le réflecteur octaédrique d'ordre 4 et les réflecteurs icosaédriques d'ordre 2 et 4, respectivement représentés sur les figures 4.4, 4.6 et 4.7.

Afin de s'assurer que les méthodes choisies sont les mieux adaptées, il convient de rappeler les travaux menés sur le calcul de la diffraction par un trièdre.

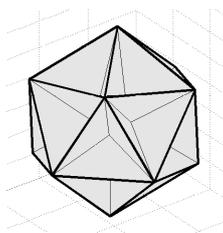


FIG. 4.5 – Le réflecteur ico-saédrique d'ordre 1 (nombre de trièdres =  $20 \times 1^2 = 20$ ).

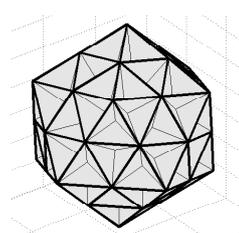


FIG. 4.6 – Le réflecteur ico-saédrique d'ordre 2 (nombre de trièdres =  $20 \times 2^2 = 80$ ).

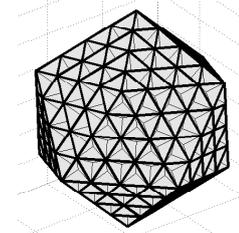


FIG. 4.7 – Le réflecteur ico-saédrique d'ordre 4 (nombre de trièdres =  $20 \times 4^2 = 320$ ).

### 4.1.2 Etat de l'art

En 1944, Spencer [171] a étudié les trièdres en zone optique, sur un modèle de rayons. Il a ainsi déterminé des expressions analytiques pour évaluer la SER monostatique de trièdres à faces carrées et de trièdres à faces triangulaires, les plaques étant mutuellement orthogonales. Trois ans plus tard, Robertson [172] a proposé une méthode élémentaire pour déterminer, dans le cas de plaques de forme régulière, la surface effective du coin, qui est directement liée à sa SER. Et c'est en 1953, que la première étude concernant le trièdre et utilisant la méthode de l'Optique Physique a été réalisée. Les auteurs, Bonkowski et al. [173] se sont alors intéressés aux calculs de triple réflexion sur des trièdres à plaques mutuellement orthogonales.

En 1954, Meeks et al. [174] ont étudié les trièdres en utilisant les travaux de Spencer. Peters [175], quant à lui, a conçu les premières relations approchées analytiques sur le calcul de SER en configuration bistatique sur un trièdre. Cependant, les recherches sur le calcul de la diffraction par un trièdre ne semblaient pas être la priorité dans ce domaine. Ainsi, on trouve de nombreux travaux antérieurs qui concernent la diffraction par le dièdre [152, 176, 177]; les phénomènes de double réflexion pouvant être appliqués au cas du trièdre. Ceci est notable en consultant les travaux de Knott, qui a commencé par développer une technique de prédiction de SER pour des dièdres à angles obtus en 1977 [178]. Ensuite, il a ajouté une troisième plaque à l'objet et a développé une technique de prédiction de SER monostatique pour des trièdres à faces triangulaires et de plaques non mutuellement orthogonales, formant alors des angles arbitraires. Knott [179] a alors utilisé la méthode de l'Optique Physique pour calculer la SER monostatique d'un trièdre à l'aide de l'Optique Géométrique pour prédire les zones illuminées lors des doubles et triples réflexions.

Plus récemment, une équipe américaine et une équipe italienne ont étudié la diffraction par un trièdre à faces triangulaires à l'aide de méthodes asymptotiques [78, 80]. Une approche similaire a été utilisée dans ces deux articles afin d'évaluer la SER monostatique lorsque le coin intérieur du trièdre est excité, zone où la SER est maximale. Cette configuration correspond, en convention FSA, à des angles d'élévation  $\{\pi - \theta_i; \theta_s\}$  et des angles d'azimut  $\{\phi_i + \pi, \phi_s\}$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  radians (voir figure 1.6) lorsque le trièdre est positionné comme illustré sur la figure 4.8(a). Dans leur modèle, l'OP est appliquée sur chaque face pour évaluer la contribution des Simples Réflexions (SR). Pour les Doubles Réflexions (DR) et Triples Réflexions (TR), l'OG est utilisée pour le calcul des premières réflexions (pour la première réflexion des DR et pour les deux premières réflexions des TR); la dernière réflexion des DR et TR étant évaluée par l'OP. Cette approche n'a en soit, rien de nouveau, mis à part une généralisation dans l'écriture permettant une programmation plus aisée. Cependant, l'innovation intervient sur l'ajout des contributions des arêtes externes du réflecteur. En effet, les deux équipes ont également utilisé la Méthode

des Courants Equivalents (MCE) de Mitzner-Michaeli [43, 45, 46, 47, 48, 49] pour calculer les Simples Diffractions (SD) par les arêtes externes du trièdre. Ces deux études ont montré que les SD, SR, DR et TR sont les principales contributions de la signature du trièdre.

Polycarpou et al. [80] ont ainsi développé une formulation pour calculer la SER monostatique de trièdres à faces carrées et triangulaires dont les plaques sont mutuellement orthogonales, toujours dans le domaine d'étude du coin intérieur du trièdre. Corona et al. [78], quant à eux, n'ont étudié que le trièdre à faces triangulaires mais ils ont développé des généralisations mathématiques pour calculer les multiples réflexions pour la configuration monostatique. Cette équipe a continué ses travaux sur des trièdres à plaques non mutuellement orthogonales et sur des trièdres dépolarisants [180, 181]. Toutefois, leurs études sont toujours restées dans le domaine d'étude restreint au coin intérieur du trièdre. Malgré ces récentes recherches dans ce domaine, notons que les travaux ont été menés pour des calculs de SER, souvent dans le cas monostatique et dans des domaines d'excitation et d'observation restreints.

En 1997, B. Chevalier et al. ont proposé dans un rapport de contrat de recherche [182] la signature bistatique d'un trièdre à faces triangulaires rectangles isocèles. Ils ont ainsi complété les travaux présentés ci-dessus, en proposant un calcul asymptotique analytique permettant d'obtenir une signature bistatique polarimétrique du trièdre, excité et observé dans son coin intérieur. L'OP, l'OG et la MCE étaient alors utilisées d'une manière similaire à [78, 80].

Les différents résultats obtenus dans [78, 80, 182] ont montré la pertinence d'utiliser l'OP pour les SR, l'OG combinée à l'OP pour les DR et TR ainsi que la MCE pour les SD. C'est sur ce même schéma que le modèle pour la diffraction par la croix a été proposé à la section 2.2.4.

### 4.1.3 Vers un modèle valide pour des angles d'excitation et d'observation arbitraires

Le modèle proposé dans cette thèse est donc basé sur les travaux de [78, 80, 182]. Mais dans un réflecteur polyédrique, les trièdres ne peuvent pas tous être excités et observés dans leur coin intérieur. En effet, certains trièdres du réflecteur seront excités et/ou observés latéralement, et certains mêmes ne seront pas du tout excités et/ou observés. La détermination de la signature bistatique d'un réflecteur polyédrique nécessite donc le calcul de la signature d'un trièdre pour des angles d'observation et d'excitation arbitraires et dans une configuration bistatique. Or cette démarche n'avait jusqu'à présent, jamais été entreprise. C'est un des objectifs de ce chapitre. Pour cela, les effets d'ombrage en excitation (voir figure 4.8(a)) et d'ombrage en observation (voir figure 4.8(b)), déjà évoqués pour la diffraction par un dièdre (à la section 2.2.4), doivent être pris en compte.

Précisons que dans cette étude la convention choisie est  $e^{+i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , plus souvent utilisée pour les problèmes de diffraction par des obstacles déterministes dans des scènes 3D. Le formalisme de la MCE a été notamment décrit initialement dans cette convention.

## 4.2 Signature polarimétrique bistatique d'un trièdre

Dans un réflecteur polyédrique, un trièdre peut être orienté de diverses manières. Afin de faciliter les calculs, il convient alors de proposer un modèle dans un repère local associé au trièdre et d'exprimer ensuite les composantes des champs dans le repère fixe. De plus, les calculs des contributions pour chaque face du trièdre sont similaires, il est par conséquent intéressant de généraliser la procédure par l'utilisation d'indices et de mener les calculs dans les repères locaux

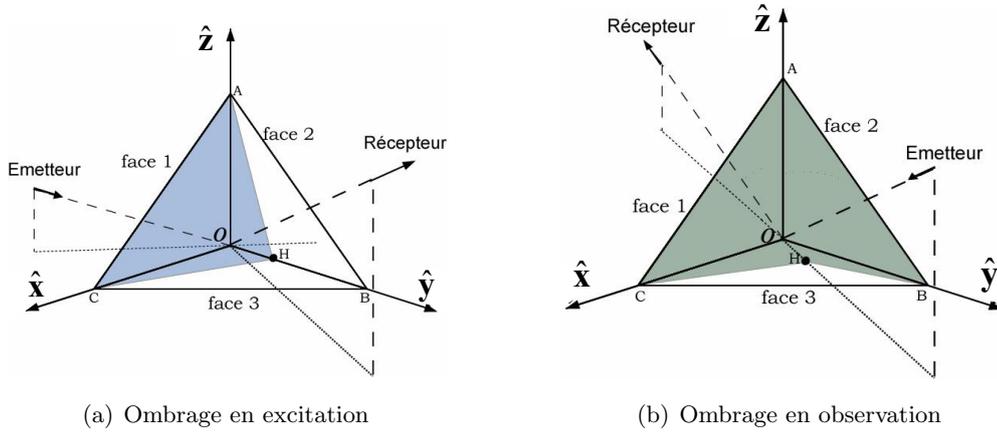


FIG. 4.8 – Illustration des ombrages en excitation et observation.

des faces.

#### 4.2.1 Changement de repères : projection des composantes de la matrice de diffraction

Ainsi, on doit être en mesure d'évaluer la signature d'une contribution dans un repère local  $(0, \hat{x}_{R_1}, \hat{y}_{R_1}, \hat{z}_{R_1})$  donné, noté  $R_1$ , pour ensuite l'exprimer dans un autre repère  $(0, \hat{x}_{R_2}, \hat{y}_{R_2}, \hat{z}_{R_2})$ , noté  $R_2$ . Ceci est effectué à l'aide de la matrice de passage  $\bar{\mathbf{P}}_p^{R_1 R_2}$  définie par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_p^{R_1 R_2} &= \bar{\mathbf{P}}(\theta_{pR_1}, \phi_{pR_1}; \alpha_{eR_1}, \beta_{eR_1}, \gamma_{eR_1}; \alpha_{eR_2}, \beta_{eR_2}, \gamma_{eR_2}; \theta_{pR_2}, \phi_{pR_2}) \\ &= \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_{pR_1}, \phi_{pR_1})^T \bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_{eR_1}, \beta_{eR_1}, \gamma_{eR_1})^T \bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_{eR_2}, \beta_{eR_2}, \gamma_{eR_2}) \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_{pR_2}, \phi_{pR_2}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $T$  symbolise la transposée et l'indice  $p = \{i; s\}$ .

- $\bar{\mathbf{R}}_s(\theta_{pR_1}, \phi_{pR_1})$  est la matrice de rotation sphérique (définie par l'équation (1.50)) qui établit la relation entre le repère cartésien  $(0, \hat{x}_{R_1}, \hat{y}_{R_1}, \hat{z}_{R_1})$  et le repère sphérique  $(0, \hat{k}_{pR_1}, \hat{\theta}_{pR_1}, \hat{\phi}_{pR_1})$ .
- $\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_{eR_1}, \beta_{eR_1}, \gamma_{eR_1})$  est la matrice de rotation d'Euler (définie à l'annexe C) qui établit le passage du repère  $R_1$   $(0, \hat{x}_{R_1}, \hat{y}_{R_1}, \hat{z}_{R_1})$  vers le repère fixe  $(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  à l'aide de trois rotations successives, respectivement d'angle  $\alpha_{eR_1}$ ,  $\beta_{eR_1}$  et  $\gamma_{eR_1}$ .
- $\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_{eR_2}, \beta_{eR_2}, \gamma_{eR_2})$  est la matrice de rotation d'Euler (définie à l'annexe C) qui établit le passage du repère  $R_2$   $(0, \hat{x}_{R_2}, \hat{y}_{R_2}, \hat{z}_{R_2})$  vers le repère fixe à l'aide de trois rotations successives, respectivement d'angle  $\alpha_{eR_2}$ ,  $\beta_{eR_2}$  et  $\gamma_{eR_2}$ .
- $\bar{\mathbf{R}}_s(\theta_{pR_2}, \phi_{pR_2})$  est la matrice de rotation sphérique qui établit la relation entre le repère cartésien  $(0, \hat{x}_{R_2}, \hat{y}_{R_2}, \hat{z}_{R_2})$  et le repère sphérique  $(0, \hat{k}_{pR_2}, \hat{\theta}_{pR_2}, \hat{\phi}_{pR_2})$ .

Et les angles  $\theta_{pR}$  et  $\phi_{pR}$  (avec  $R = \{R_1, R_2\}$ ) sont définis dans le repère local  $R$  par :

$$\theta_{pR} = \arccos(\hat{k}_p \cdot \hat{z}_R), \quad (4.2)$$

$$\phi_{pR} = \arctan\left(\frac{\hat{k}_p \cdot \hat{y}_R}{\hat{k}_p \cdot \hat{x}_R}\right), \quad (4.3)$$

avec  $\theta_{pR} \in [0; \pi]$  et  $\phi_{pR} \in [0; 2\pi]$   
 pour  $p = \{i, s\}$  et  $R = \{R_1, R_2\}$ .

et les vecteurs  $\hat{\mathbf{k}}_p$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_R$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_R$ , et  $\hat{\mathbf{z}}_R$  doivent être exprimés dans la même base.

Alors, si l'on note  $\bar{\mathbf{S}}_{R_2}$  la matrice de diffraction, d'un obstacle, exprimée dans le repère  $R_2$  et  $\bar{\mathbf{S}}_{R_1}$  la matrice de diffraction, du même obstacle, exprimée dans le repère  $R_1$  on a la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \bar{\mathbf{S}}_{R_1} & \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}}_s^{R_1 R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \bar{\mathbf{S}}_{R_2} & \end{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_i^{R_1 R_2 T}. \quad (4.4)$$

Afin de faciliter la lecture, cette relation de passage sera notée par la suite  $[R_2 \rightarrow R_1](\bullet)$ . L'équation (4.4) s'écrit alors :

$$\bar{\mathbf{S}}_{R_1} = [R_2 \rightarrow R_1](\bar{\mathbf{S}}_{R_2}). \quad (4.5)$$

A noter que si par exemple le repère  $R_1$  est considéré comme étant le repère fixe alors  $\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_{e_{R_1}}, \beta_{e_{R_1}}, \gamma_{e_{R_1}}) = \bar{\mathbf{I}}$  et l'on note  $\bar{\mathbf{P}}_p^{R_1 R_2} = \bar{\mathbf{P}}_p^{R_2}$ , l'opérateur de passage de l'équation (4.5) est alors noté  $[R_2 \rightarrow R_{\text{fixe}}](\bullet)$ .

Les prochains paragraphes présentent l'évaluation des différentes contributions de la signature du trièdre (SR, DR, TR et SD). Les calculs sont tous ramenés dans le repère local  $R_k$  ( $0, \hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k, \hat{\mathbf{z}}_k$ ) associé au trièdre  $k$ , c'est à dire que sauf indication contraire, les vecteurs définissant les repères locaux sont définis dans le repère  $R_k$  illustré sur la figure 4.9.

## 4.2.2 Contribution des simples réflexions du trièdre

Le calcul des simples réflexions est identique pour les trois faces, on utilise alors l'indice  $j_1$  avec  $j_1 = \{1, 2, 3\}$ , où  $j_1$  représente l'indice de la face sur laquelle la contribution de simple réflexion est évaluée. La figure 4.9 illustre la numérotation des faces dans le trièdre. Le calcul est mené dans le repère  $R_{j_1}$  ( $0, \hat{\mathbf{x}}_{j_1}, \hat{\mathbf{y}}_{j_1}, \hat{\mathbf{z}}_{j_1}$ ) associé à la face  $j_1$  (voir figure 4.10). Pour qu'une simple réflexion existe sur la face  $j_1$ , il faut qu'elle soit potentiellement excitée et observée. Pour s'en assurer les deux conditions suivantes doivent être vérifiées (les deux vecteurs devant être exprimés dans la même base, ici :  $(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)$ ) :

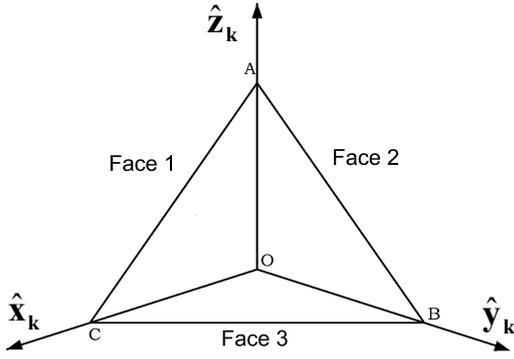
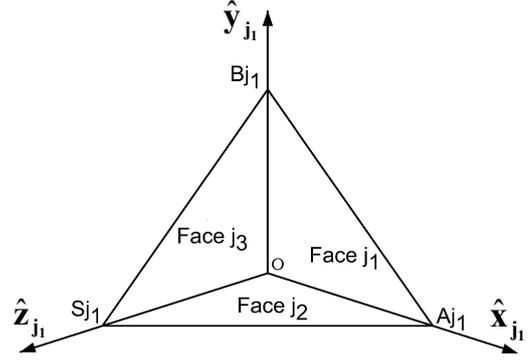
$$\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_1} < 0, \quad (4.6)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{s_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_1} > 0, \quad (4.7)$$

où  $\hat{\mathbf{k}}_{i_k}$  et  $\hat{\mathbf{k}}_{s_k}$  sont, respectivement, les vecteurs d'onde de l'onde incidente et de l'onde diffractée, exprimés dans le repère associé au trièdre  $k$ . Ainsi, la face  $j_1$  est potentiellement excitée par l'onde incidente si la première condition est respectée, et si la seconde est vérifiée alors la face  $j_1$  est potentiellement observée. Il est important de noter que cela ne permet pas encore de conclure que la face est réellement excitée ou observée puisqu'un ombrage peut intervenir dû à une autre face du trièdre.

Les faces indexées du trièdre sont définies sur la figure 4.10, et les vecteurs du repère local de la face  $j_1$  définis dans le repère associé au trièdre  $k$  sont :

$$\hat{\mathbf{x}}_{j_1} = \begin{bmatrix} \delta_{j_1}^3 \\ \delta_{j_1}^2 \\ \delta_{j_1}^1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}}_{j_1} = \begin{bmatrix} \delta_{j_1}^1 \\ \delta_{j_1}^3 \\ \delta_{j_1}^2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{z}}_{j_1} = \begin{bmatrix} \delta_{j_1}^2 \\ \delta_{j_1}^1 \\ \delta_{j_1}^3 \end{bmatrix} \quad \text{avec } j_1 = \{1, 2, 3\}, \quad (4.8)$$


 FIG. 4.9 – Définitions de la numérotation des faces et du repère local du trièdre  $k$ .

 FIG. 4.10 – Définitions des faces indexées et du repère local de la face  $j_1$  pour le calcul des SR.

où  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker : Les trois sommets du trièdre sont exprimés dans la base locale  $(\hat{x}_{j_1}, \hat{y}_{j_1}, \hat{z}_{j_1})$  par :

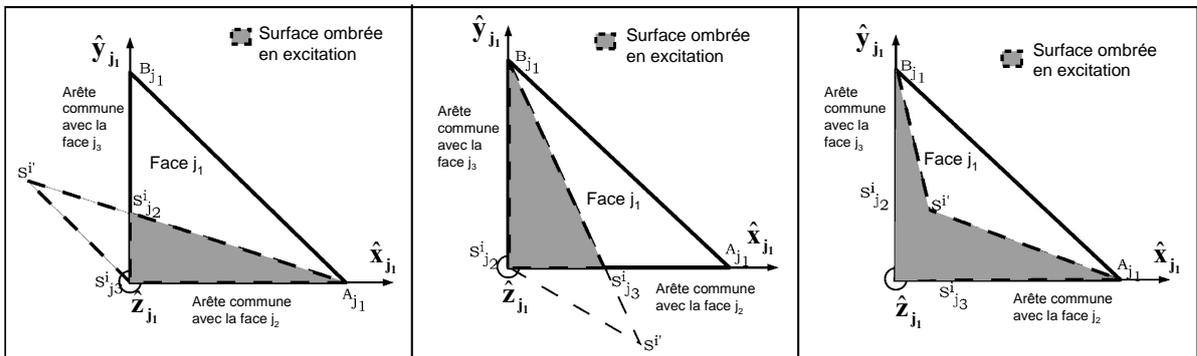
$$A_{j_1} = \begin{bmatrix} +L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{j_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ +L \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_{j_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +L \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Les deux autres faces  $j_2$  et  $j_3$  sont définies de telle sorte que les indices  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$  sont indexés dans le sens direct. Ce choix est arbitraire mais doit être défini pour la suite. On a alors

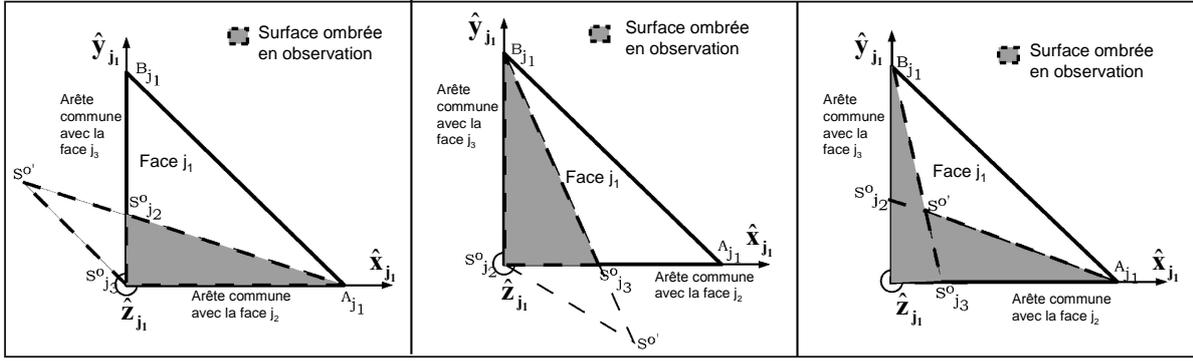
$$\begin{aligned} j_1 &= \{1, 2, 3\}, \\ j_2 &= \text{Mod}(j_1, 3) + 1, \\ j_3 &= 6 - j_1 - j_2. \end{aligned}$$

Où l'opérateur modulo  $\text{Mod}(x, y)$  produit le reste de la division de  $x$  par  $y$

La géométrie illustrée sur la figure 4.10 est considérée. La face  $j_1$  peut être ombrée en excitation par les faces  $j_2$  et/ou  $j_3$  et peut également être ombrée en observation par les faces  $j_2$  et/ou  $j_3$ . Pour évaluer ces ombrages, l'OG est utilisée. Ainsi, le point  $S^{i'}$  est défini par la projection dans la direction d'incidence, du sommet  $S_{j_1}$  (appartenant aux faces  $j_2$  et  $j_3$ ) sur la face  $j_1$ . Sur la figure 4.11, trois possibilités d'ombrage en excitation sont représentées.


 FIG. 4.11 – Ombrage en excitation sur la face  $j_1$  pour les SR.

La même procédure est réalisée pour obtenir le point  $S^{o'}$  en considérant cette fois la direction d'observation. Sur la figure 4.12, trois possibilités d'ombrage en observation sont représentées.


 FIG. 4.12 – Ombrage en observation sur la face  $j_1$  pour les SR.

En connaissant les coordonnées des points  $S^{i'}$  et  $S^{o'}$ , les surfaces ombrées en excitation et en observation sont alors connues. Puis, en considérant l'intersection de ces surfaces ombrées, la surface à la fois excitée et observée de la face  $j_1$  est finalement obtenue. La forme de la surface, dans le cas général, est un triangle quelconque comme illustré sur la figure 4.13 où le point C est défini comme le point d'intersection de l'ombre en excitation avec celle en observation. Sur cette figure (et sur d'autres figures à venir dans ce manuscrit) des points supplémentaires sont nommés et annotés ; ceux-ci facilitent les différents tests à effectuer et, par conséquent, servent au programme de calcul de la signature.

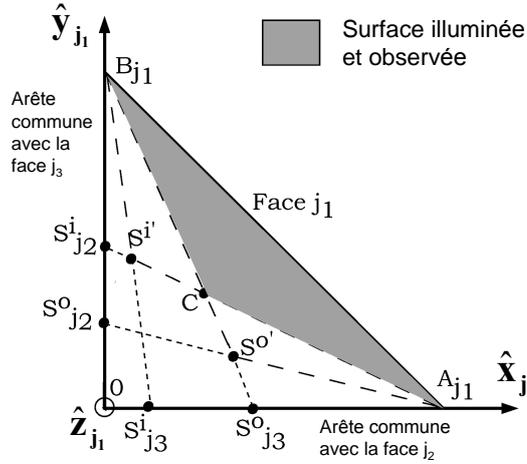


FIG. 4.13 – Exemple d'ombrage en excitation et en observation pour le calcul des SR.

Pour évaluer la signature de la surface à la fois illuminée et observée, un calcul de signature bistatique de triangle quelconque est nécessaire. Ce calcul est détaillé dans l'annexe D. A partir des coordonnées des trois points du triangle  $A_{j_1}B_{j_1}C$ , nous sommes donc en mesure de calculer la matrice de diffraction de la plaque  $j_1$  dans le repère local  $R_{j_1}$ , que l'on note :  $\bar{\mathbf{S}}_{j_1}^{sr,j_1}$ . Cette signature est ensuite exprimée dans le repère du trièdre à l'aide de l'opérateur défini à l'équation (4.5) :

$$\bar{\mathbf{S}}_k^{sr,j_1} = [R_{j_1} \rightarrow R_k] \left( \bar{\mathbf{S}}_{j_1}^{sr,j_1} \right). \quad (4.10)$$

On obtient finalement la signature des contributions des simples réflexions du trièdre  $k$  par

sommation cohérente de la signature de SR des trois faces du trièdre :

$$\bar{\mathbf{S}}_k^{sr} = \sum_{j_1=1}^3 \bar{\mathbf{S}}_k^{sr,j_1}. \quad (4.11)$$

### 4.2.3 Contribution des doubles réflexions du trièdre

Il existe six DR possibles dans le trièdre, trois dans le sens direct :  $1 \rightsquigarrow 2$ ,  $2 \rightsquigarrow 3$ ,  $3 \rightsquigarrow 1$ , et trois dans le sens indirect :  $1 \rightsquigarrow 3$ ,  $2 \rightsquigarrow 1$ ,  $3 \rightsquigarrow 2$ . La procédure de calcul est la même pour toutes les DR, on utilise alors l'indice  $j_1$  avec  $j_1 = \{1, 2, 3\}$  pour indexer la première face de la DR  $j_1 \rightsquigarrow j_2$ . L'OG est appliquée pour calculer la première réflexion de la DR. La direction spéculaire est définie, dans le repère local de la face  $j_1$ , par les angles  $(\theta_{r_{j_1}}, \phi_{r_{j_1}})$  obtenus à partir des angles d'incidence  $(\theta_{i_{j_1}}, \phi_{i_{j_1}})$  calculés avec les équations (4.2) et (4.3) :

$$\theta_{r_{j_1}} = \pi - \theta_{i_{j_1}}, \quad (4.12)$$

$$\phi_{r_{j_1}} = \phi_{i_{j_1}}. \quad (4.13)$$

Ainsi, le vecteur définissant la direction du rayon réfléchi par la face  $j_1$  vers la face  $j_2$  est calculé dans le repère  $R_k$  associé au trièdre  $k$  par :

$$\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_1j_2} = \hat{\mathbf{k}}_{i_k} - 2(\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_1})\hat{\mathbf{z}}_{j_1}, \quad (4.14)$$

où  $\hat{\mathbf{z}}_{j_1}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $j_1$  et  $\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_1j_2}$  est le vecteur d'onde de l'onde réfléchie par la face  $j_1$ , exprimé dans le repère associé au trièdre  $k$ . Finalement on a

$$\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_1j_2} = \begin{bmatrix} (1 - 2\delta_{j_1}^2) \sin(\theta_{i_k}) \cos(\phi_{i_k}) \\ (1 - 2\delta_{j_1}^1) \sin(\theta_{i_k}) \sin(\phi_{i_k}) \\ (1 - 2\delta_{j_1}^3) \cos(\theta_{i_k}) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Le champ réfléchi par la face  $j_1$  peut illuminer les deux autres faces du trièdre. Les faces étant indexées, les DR dans le sens direct ( $1 \rightsquigarrow 2$ ,  $2 \rightsquigarrow 3$ ,  $3 \rightsquigarrow 1$ ) et celles en sens indirect ( $1 \rightsquigarrow 3$ ,  $2 \rightsquigarrow 1$ ,  $3 \rightsquigarrow 2$ ) sont distinguées. L'indice de la seconde face ( $j_2$ ) intervenant dans la DR est défini par :

$$j_2 = j_{2_i}(1 - \text{sens})/2 + j_{2_d}(1 + \text{sens})/2, \quad (4.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \text{sens} &= \{+1; -1\}, \\ j_{2_d} &= \text{Mod}(j_1, 3) + 1, \\ j_{2_i} &= 6 - j_1 - j_{2_d}. \end{aligned}$$

Ainsi, la troisième face (qui participe dans la DR seulement par l'effet d'ombrage) est :

$$j_3 = 6 - j_1 - j_2. \quad (4.17)$$

La seconde réflexion sur la face  $j_2$  ne peut se produire que si le vecteur directeur du champ réfléchi par la face  $j_1$  vérifie la condition (les deux vecteurs devant être exprimés dans la même base, ici :  $(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k, \hat{\mathbf{z}}_k)$ ) :

$$\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_1j_2} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_2} \leq 0. \quad (4.18)$$

$\hat{z}_{j_2}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $j_2$ . La relation (4.18) assure que le champ réfléchi (après la première réflexion) rencontrera la face  $j_2$ . Ceci implique que la face  $j_2$  ne crée pas d'ombrage en excitation sur la face  $j_1$ . Alors, la DR doit être évaluée pour seulement deux cas : lorsqu'il existe un effet d'ombrage en excitation par la face  $j_3$  sur la face  $j_1$  et lorsqu'il n'existe pas d'effet d'ombrage en excitation.

De ce fait, l'existence de chaque DR est conditionnée par trois relations :

$$\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_1} < 0, \quad (4.19)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_2} < 0, \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{s_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_2} > 0. \quad (4.21)$$

La face  $j_1$  est potentiellement excitée par le champ incident si la première condition (4.19) est vérifiée. Si la seconde (4.20) l'est également, alors la face  $j_2$  ne crée aucun ombrage en excitation sur  $j_1$ . Enfin, si la troisième condition (4.21) est satisfaite, la face  $j_2$  est potentiellement observée par le récepteur. Alors la double réflexion  $j_1 \rightsquigarrow j_2$  doit être calculée.

Comme pour le calcul des ombrages des SR, la surface ombrée en excitation est évaluée sur la première face de la DR à l'aide d'une projection géométrique, parallèlement à la direction d'incidence. La surface excitée sur la face  $j_1$  est ensuite projetée sur la face  $j_2$ , parallèlement à la direction de la réflexion spéculaire.

Le vecteur d'onde du champ réfléchi est défini dans le repère local de la face  $j_2$  par :

$$\hat{\mathbf{k}}_{j_2}^{rj_1j_2} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i_{j_2}}) \cos(\phi_{i_{j_2}}) \\ \sin(\theta_{i_{j_2}}) \sin(\phi_{i_{j_2}}) \\ \cos(\theta_{i_{j_2}}) \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

où  $(\theta_{i_{j_2}}, \phi_{i_{j_2}})$  sont les angles  $(\theta_{r_{j_1}}, \phi_{r_{j_1}})$  exprimés cette fois dans la base locale de la face  $j_2$ . Ils sont obtenus à partir des équations (4.2) et (4.3) :

$$\theta_{i_{j_2}} = \arccos \left( \hat{\mathbf{k}}_{j_2}^{rj_1j_2} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{z_{j_2}} \right), \quad (4.23)$$

$$\phi_{i_{j_2}} = \arctan \left( \frac{\hat{\mathbf{k}}_{j_2}^{rj_1j_2} \cdot \hat{\mathbf{y}}_{j_2}}{\hat{\mathbf{k}}_{j_2}^{rj_1j_2} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{j_2}} \right), \quad (4.24)$$

avec  $\theta_{i_{j_2}} \in [0; \pi]$  et  $\phi_{i_{j_2}} \in [0; 2\pi]$ .

Connaissant  $\hat{\mathbf{k}}_{j_2}^{rj_1j_2}$ , la surface illuminée sur la face  $j_2$  est obtenue par une projection de la surface illuminée de la face  $j_1$  sur la face  $j_2$ . Trois cas peuvent être obtenus pour un sens de DR donné ; ils sont illustrés sur la figure 4.14 pour un sens indirect de DR.

Il existe cependant quatre possibilités pour l'observation lors de la seconde réflexion sur  $j_2$  : un ombrage en observation par la face  $j_1$  sur  $j_2$ , un ombrage en observation par la face  $j_3$  sur  $j_2$ , un ombrage en observation par les faces  $j_1$  et  $j_3$  sur  $j_2$ , et lorsqu'il n'y a aucun ombrage en observation. Comme pour le calcul des ombrages des SR, la surface ombrée en observation est évaluée à l'aide d'une projection géométrique, parallèlement à la direction d'observation. Les trois cas possibles d'ombrage sont représentés sur la figure 4.15 pour un sens indirect de DR.

Finalement, il existe six configurations possibles de surface à la fois illuminée et observée. Elles sont illustrées sur les figures 4.16 et 4.17 pour un sens indirect de DR.

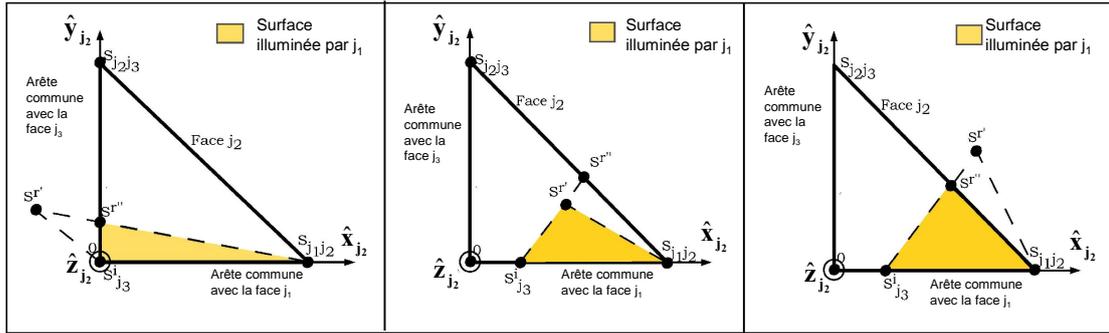


FIG. 4.14 – Surface de la face  $j_2$  excitée par le champ initialement réfléchi par la face  $j_1$  lors de la première réflexion de la DR ; le sens indirect est considéré.

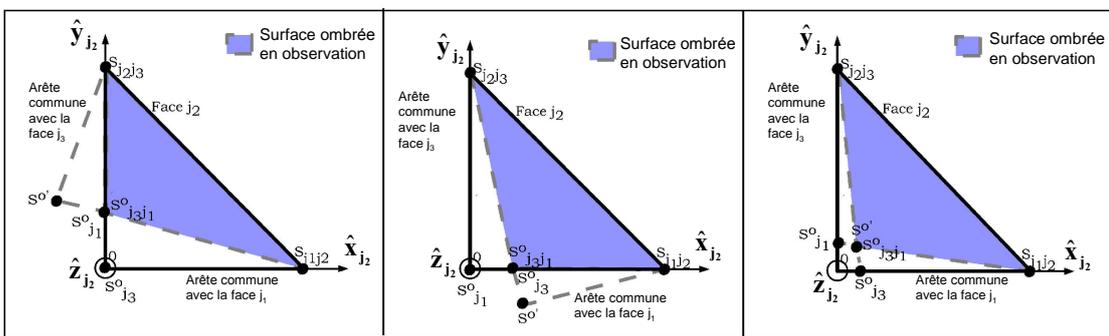


FIG. 4.15 – Ombrage en observation sur la face  $j_2$  pour le calcul de la DR ; le sens indirect est considéré.

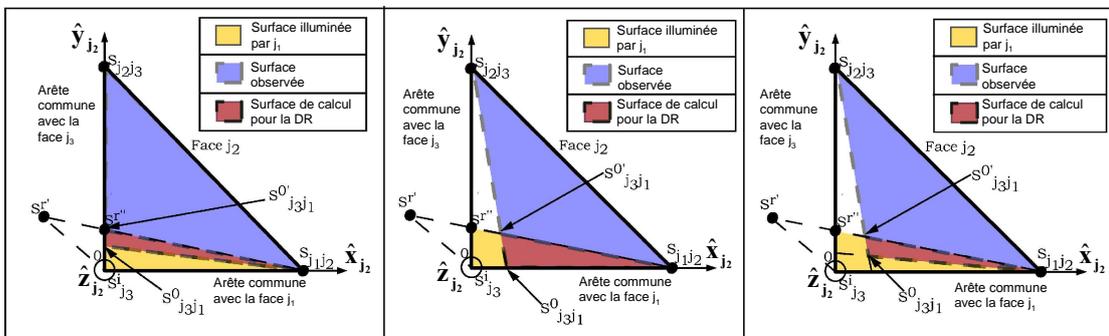


FIG. 4.16 – Intersections des surfaces illuminées et observées sur la face  $j_2$  pour le calcul de la DR pour un sens indirect : pas d'ombrage en excitation sur la face  $j_1$ .

Après avoir effectué des tests et calculs d'intersection appropriés (généralisables pour les deux sens de DR), la surface à la fois illuminée et observée est obtenue, et on montre qu'elle peut prendre la forme d'un triangle quelconque ou d'un quadrilatère quelconque.

La signature de la DR  $j_1 \rightsquigarrow j_2$  est alors obtenue à partir de la signature de triangle quelconque (dont le calcul est détaillé en annexe D) exprimée dans le repère local de la face  $j_2$ . Si la surface de calcul est un quadrilatère, une décomposition en deux triangles est nécessaire, s'en suit alors une sommation cohérente des signatures des deux triangles.

La signature de la DR est ensuite projetée dans le repère associé au trièdre  $k$  à l'aide de la

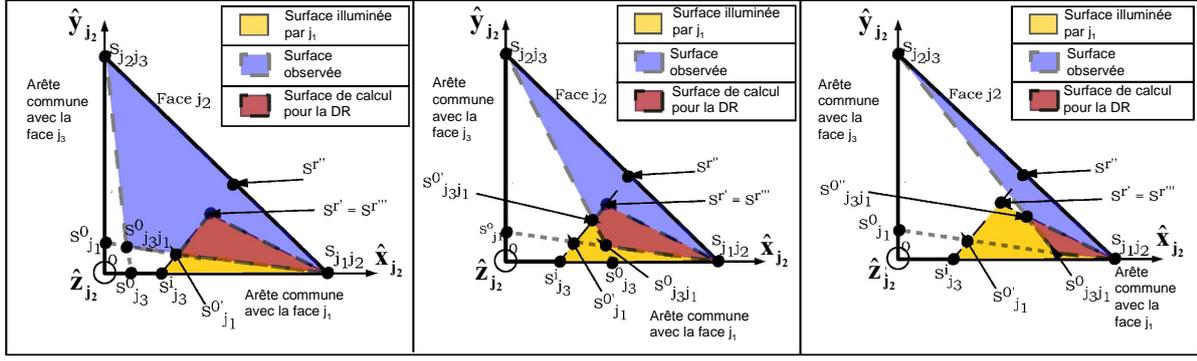


FIG. 4.17 – Intersections des surfaces illuminées et observées sur la face  $j_2$  pour le calcul de la DR pour un sens indirect : ombrage en excitation sur la face  $j_1$ .

relation suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S}_k^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} \\ 0 & \bar{S}_k^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} \end{bmatrix} = \bar{P}_s^{kj_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S}_{j_2}^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} \\ 0 & \bar{S}_{j_2}^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} \end{bmatrix} \bar{P}_s^{j_2 j_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F} \\ 0 & \bar{F} \end{bmatrix} \bar{P}_i^{kj_1 T}, \quad (4.25)$$

où les matrices  $\bar{P}_s^{kj_2}$ ,  $\bar{P}_s^{j_2 j_1}$  et  $\bar{P}_i^{kj_1}$  sont définies par l'équation (4.1) en utilisant les indices appropriés. La matrice  $\bar{F}$ , quant à elle, est la signature de la première face lors de la première réflexion de la DR. Puisque la réflexion sur la première face de la DR,  $j_1$ , est évaluée par l'OG, cette matrice de diffraction est constituée des coefficients de Fresnel pour le cas PC :

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Comme les matrices de rotation d'Euler et les matrices de rotation sphérique sont des matrices orthogonales (la transposée de la matrice est égale à son inverse), il est possible de montrer que la relation de passage (4.25) est également donnée par :

$$\bar{S}_k^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} = [R_{j_2} \rightarrow R_k] \left( \bar{S}_{j_2}^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} \right) [R_{j_1} \rightarrow R_k] (\bar{F}). \quad (4.27)$$

La signature de la contribution en DR du trièdre, exprimée dans le repère local  $R_k$  est obtenue par sommation des signatures des DR évaluées dans ce même repère :

$$\bar{S}_k^{dr} = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \bar{S}_k^{dr,j_1 \rightsquigarrow j_2} \quad \text{avec } j_1 \neq j_2. \quad (4.28)$$

Considérons maintenant le calcul des triples réflexions.

#### 4.2.4 Contribution des triples réflexions du trièdre

Il existe six triples réflexions possibles dans le trièdre, trois dans le sens direct :  $(1 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 3)$ ,  $(2 \rightsquigarrow 3 \rightsquigarrow 1)$ ,  $(3 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 2)$ , et trois dans le sens indirect :  $(1 \rightsquigarrow 3 \rightsquigarrow 2)$ ,  $(2 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 3)$ ,  $(3 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1)$ .

La réflexion sur la première face a été expliquée dans la section précédente, et la même procédure est appliquée pour le calcul de la seconde réflexion (réflexion sur la deuxième face) de la TR. Les indices des faces utilisés pour les TR sont les mêmes que ceux utilisés pour les DR, et la TR considérée est  $j_1 \rightsquigarrow j_2 \rightsquigarrow j_3$ .

L'utilisation de l'OG pour la seconde réflexion implique que le champ réfléchi par  $j_2$  est dirigé dans la direction de la réflexion spéculaire. Cette direction est définie par les angles  $(\theta_{r_{j_2}}, \phi_{r_{j_2}})$ . Ils sont obtenus à partir des angles  $(\theta_{i_{j_2}}, \phi_{i_{j_2}})$  qui sont les angles d'incidence sur la face  $j_2$  du champ initialement réfléchi par la face  $j_1$  (voir équations (4.23) et (4.24)) :

$$\theta_{r_{j_2}} = \pi - \theta_{i_{j_2}}, \quad (4.29)$$

$$\phi_{r_{j_2}} = \phi_{i_{j_2}}. \quad (4.30)$$

Ainsi, le vecteur définissant la direction du rayon réfléchi par la face  $j_2$  vers la face  $j_3$  est calculé dans le repère  $R_k$  par :

$$\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3} = \hat{\mathbf{k}}_k^{rj_1j_2} - 2(\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_1j_2} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_2})\hat{\mathbf{z}}_{j_2}, \quad (4.31)$$

où  $\hat{\mathbf{z}}_{j_2}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $j_2$  et  $\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3}$  est le vecteur d'onde de l'onde réfléchie par la face  $j_2$ , exprimé dans le repère associé au trièdre  $k$ . On obtient finalement :

$$\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3} = \begin{bmatrix} (1 - 2\delta_{j_1}^2)(1 - 2\delta_{j_2}^3) \sin(\theta_{i_k}) \cos(\phi_{i_k}) \\ (1 - 2\delta_{j_1}^1)(1 - 2\delta_{j_2}^1) \sin(\theta_{i_k}) \sin(\phi_{i_k}) \\ (1 - 2\delta_{j_1}^3)(1 - 2\delta_{j_2}^3) \cos(\theta_{i_k}) \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

La troisième réflexion, intervenant sur la face  $j_3$ , n'existe (selon l'OG) que si la condition suivante est vérifiée :

$$\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_3} \leq 0. \quad (4.33)$$

$\hat{\mathbf{z}}_{j_3}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $j_3$ . La relation (4.33) assure que le champ réfléchi par la face  $j_2$  rencontrera la face  $j_3$ . Puisque les deux premières réflexions sont dirigées dans la direction spéculaire, on montre que la condition (4.33) implique que les faces  $j_2$  et  $j_3$  ne créent pas d'ombrage en excitation sur la face  $j_1$ . Et comme la face  $j_1$  doit être excitée par le champ incident pour créer une triple réflexion, alors l'existence de la TR  $j_1 \rightsquigarrow j_2 \rightsquigarrow j_3$  est conditionnée par quatre relations :

$$\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_1} < 0, \quad (4.34)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_2} < 0, \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{i_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_3} < 0, \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{d_k} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_3} > 0. \quad (4.37)$$

La quatrième condition (4.37) est vérifiée si la face  $j_3$  est potentiellement observée par le récepteur. Si, et seulement si, ces quatre relations sont respectées alors le calcul de la TR  $j_1 \rightsquigarrow j_2 \rightsquigarrow j_3$  doit être effectué. Comme pour le calcul des DR, la surface illuminée sur la face  $j_1$  est projetée sur la face  $j_2$ . Cependant, les conditions (4.34), (4.35) et (4.36) impliquent que la face  $j_1$  est entièrement excitée par le champ incident. La surface finalement excitée sur la face  $j_2$  par le champ réfléchi par la face  $j_1$  correspond au cas illustré sur la gauche de la figure 4.14. Le vecteur d'onde du champ réfléchi lors de la seconde réflexion peut également être défini dans la base locale de la face  $j_3$  :

$$\hat{\mathbf{k}}_{j_3}^{rj_2j_3} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i_{j_3}}) \cos(\phi_{i_{j_3}}) \\ \sin(\theta_{i_{j_3}}) \sin(\phi_{i_{j_3}}) \\ \cos(\theta_{i_{j_3}}) \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

où  $(\theta_{i_{j_3}}, \phi_{i_{j_3}})$  sont les angles  $(\theta_{r_{j_2}}, \theta_{r_{j_3}})$  exprimés cette fois dans la base locale de la face  $j_3$ . Ils sont obtenus à partir des équations (4.2) and (4.3) :

$$\theta_{i_{j_3}} = \arccos \left( \hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{j_3} \right), \quad (4.39)$$

$$\phi_{i_{j_3}} = \arctan \left( \frac{\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3} \cdot \hat{\mathbf{y}}_{j_3}}{\hat{\mathbf{k}}_k^{rj_2j_3} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{j_3}} \right), \quad (4.40)$$

avec  $\theta_{i_{j_3}} \in [0; \pi]$  et  $\phi_{i_{j_3}} \in [0; 2\pi]$ .

Connaissant  $\hat{\mathbf{k}}_{j_3}^{rj_2j_3}$ , la surface illuminée sur la face  $j_3$  est obtenue par une projection géométrique de la surface illuminée de la face  $j_2$  vers la face  $j_3$ . Trois cas peuvent être obtenus pour un sens de TR donné, ils sont illustrés sur la figure 4.18 pour le cas d'une TR dans le sens indirect.

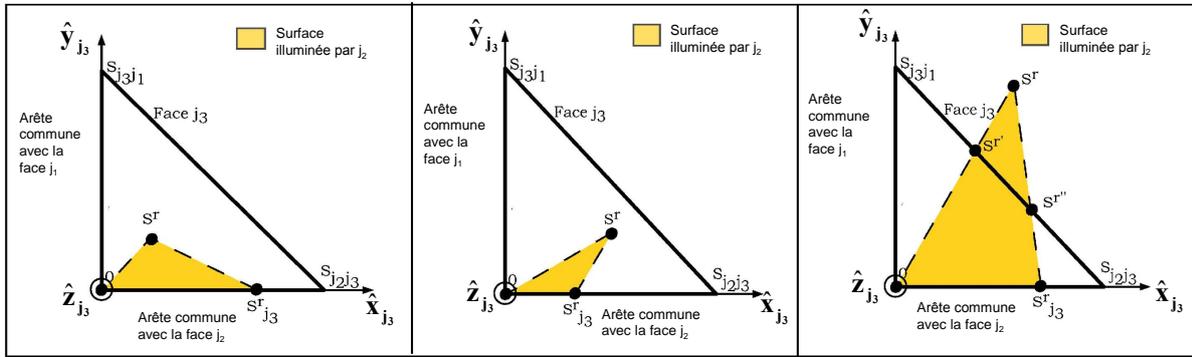


FIG. 4.18 – Surface de la face  $j_3$  excitée par le champ initialement réfléchi par la face  $j_2$  lors de la seconde réflexion de la TR ; le sens indirect est considéré.

Il existe cependant quatre possibilités pour l'observation lors de la troisième réflexion : un ombrage en observation par la face  $j_1$  sur la face  $j_3$ , un ombrage en observation par la face  $j_2$  sur la face  $j_3$ , un ombrage en observation par les faces  $j_1$  et  $j_2$  sur la face  $j_3$ , et lorsqu'il n'y a aucun ombrage en observation. Comme pour les SR et les DR, la surface ombrée en observation est obtenue par une projection géométrique, parallèlement à la direction d'observation. Les trois cas possibles d'ombrage sont représentés sur la figure 4.19 pour un sens indirect de TR.

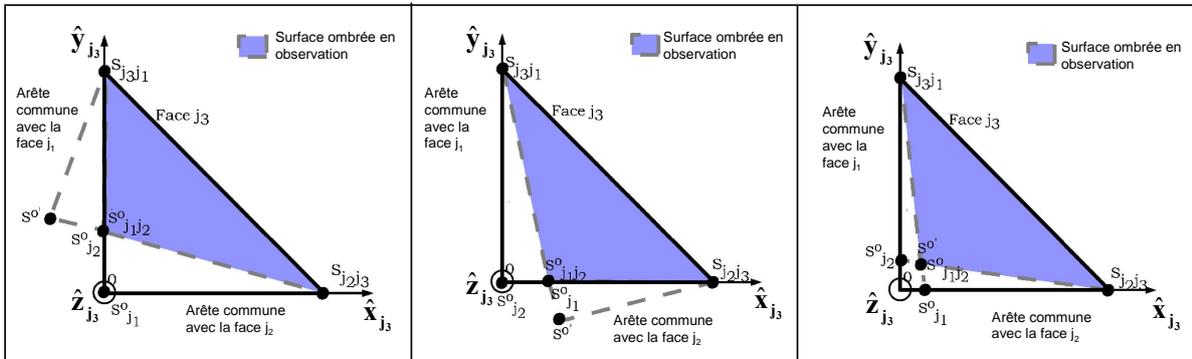


FIG. 4.19 – Ombrage en observation sur la face  $j_3$  pour le calcul de la TR ; le sens indirect est considéré.

Finalement, il existe neuf configurations possibles de surface à la fois illuminée et observée. Elles sont illustrées sur la figure 4.20 pour un sens indirect de TR.

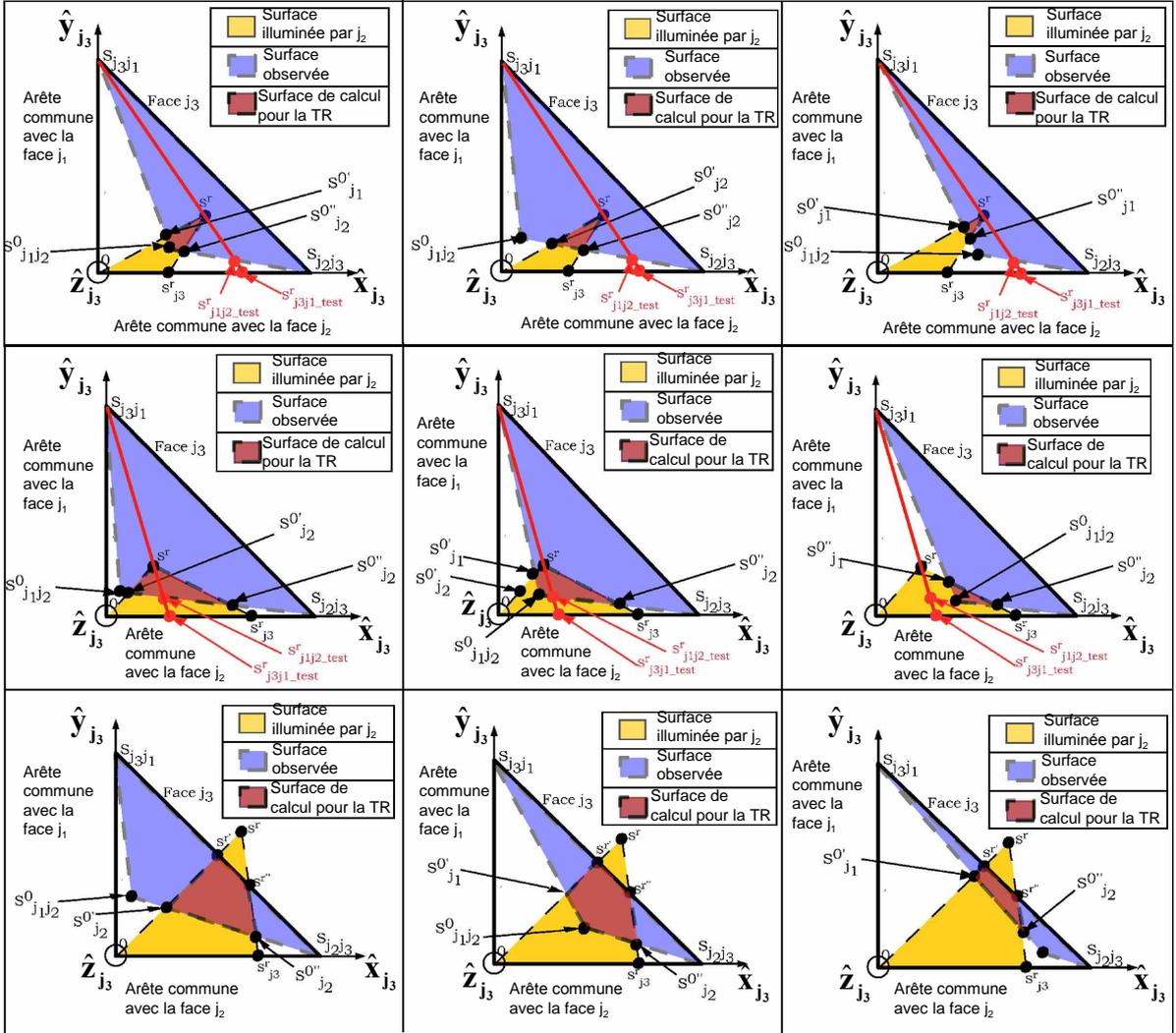


FIG. 4.20 – Intersections des surfaces illuminées et observées sur la face  $j_3$  pour le calcul de la TR pour un sens indirect.

A l'aide de tests et de calculs d'intersection appropriés (généralisables pour les deux sens de TR), la surface à la fois illuminée et observée est obtenue, et on montre qu'elle peut prendre la forme d'un triangle quelconque, d'un quadrilatère quelconque ou même d'un pentagone quelconque. Quelle que soit sa forme, la diffraction par cette surface est ramenée à la signature ou à la somme de signatures de triangles quelconques (dont le calcul est détaillé à l'annexe D). La matrice de diffraction obtenue est ensuite projetée dans le repère associé au trièdre  $k$  à l'aide de la relation suivante :

$$\bar{S}_k^{tr, j_1 \rightsquigarrow j_2 \rightsquigarrow j_3} = [R_{j_3} \rightarrow R_k] \left( \bar{S}_{j_3}^{tr, j_1 \rightsquigarrow j_2 \rightsquigarrow j_3} \right) [R_{j_2} \rightarrow R_k] (\bar{F}) [R_{j_1} \rightarrow R_k] (\bar{F}). \quad (4.41)$$

La signature de la contribution en TR du trièdre, exprimée dans le repère local  $R_k$  est obtenue

par sommation des signatures des TR évaluées dans ce même repère :

$$[S_k^{tr}] = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \sum_{j_3=1}^3 \bar{S}_k^{tr, j_1 \rightsquigarrow j_2 \rightsquigarrow j_3} ; j_1 \neq j_2 \neq j_3. \quad (4.42)$$

Pour que le modèle soit complet, il reste encore à tenir compte des simples diffractions d'arêtes du trièdre.

#### 4.2.5 Contribution des simples diffractions d'arêtes du trièdre

La signature des SD du trièdre  $k$  est évaluée à l'aide la MCE [43, 45, 46, 47, 48, 49], pour prendre en compte les champs diffractés par les arêtes externes du trièdre : les segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$  illustrés sur la figure 4.21.

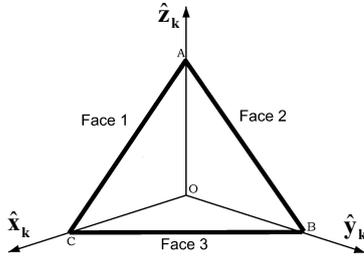


FIG. 4.21 – Numérotation des arêtes externes du trièdre.

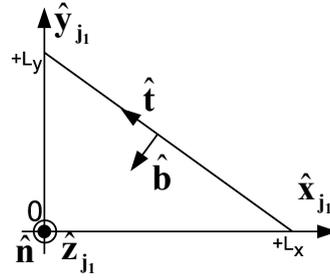


FIG. 4.22 – Arête de la face  $j_1$ .

En utilisant les indices vus à la section 4.2.2 pour le calcul des SR, le calcul est mené en considérant l'arête externe de la face  $j_1$ . Après avoir vérifié que l'arête n'est pas ombrée en excitation et observation (en s'inspirant des calculs d'ombrage des SR), la matrice de diffraction de la SD de cette arête est obtenue dans le repère local de la face  $j_1$  à l'aide du calcul détaillé à l'annexe E. Ce calcul nécessite la définition géométrique de l'arête (le problème est illustré sur la figure 4.22) : les vecteurs  $\hat{\mathbf{t}}$  (tangente),  $\hat{\mathbf{b}}$  (binormale) et  $\hat{\mathbf{n}}$  (normale) associés à l'arête ainsi que le terme de pondération spatio-fréquentielle  $P_{A_{j_1}}$ . Ainsi, les vecteurs  $\hat{\mathbf{t}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  sont définis par :

$$\hat{\mathbf{t}} = -\frac{L_x}{L_{j_1}} \hat{\mathbf{x}}_{j_1} + \frac{L_y}{L_{j_1}} \hat{\mathbf{y}}_{j_1}, \quad (4.43)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = -\frac{L_y}{L_{j_1}} \hat{\mathbf{x}}_{j_1} - \frac{L_x}{L_{j_1}} \hat{\mathbf{y}}_{j_1}, \quad (4.44)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}_{j_1}, \quad (4.45)$$

où

$$L_{j_1} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}. \quad (4.46)$$

L'intégrale  $I_{A_{j_1}}$  s'écrit :

$$I_{A_{j_1}} = \int_0^{L_x} e^{-ik(u x' + v L_y \frac{1-x'}{L_x})} dx', \quad (4.47)$$

avec

$$u = \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) - \sin(\theta_s) \cos(\phi_s), \quad (4.48)$$

et

$$v = \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) - \sin(\theta_s) \sin(\phi_s). \quad (4.49)$$

On a donc

$$I_{A_{j_1}} = L_x \operatorname{sinc} \left( \frac{k(uL_x - vL_y)}{2} \right) e^{-ik \frac{uL_x + vL_y}{2}}, \quad (4.50)$$

et on obtient finalement le terme de pondération :

$$P_{A_{j_1}} = L_x \operatorname{sinc} \left( \frac{k(uL_x - vL_y)}{2} \right) e^{-ik \frac{uL_x + vL_y}{2}} \frac{e^{-ikr}}{2\pi r}. \quad (4.51)$$

A noter que dans notre étude, les trièdres sont formés par trois faces triangulaires isocèles rectangles identiques :  $L_x = L_y = L$ . La matrice de diffraction de la SD de l'arête de la face  $j_1$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_{j_1}^{sd, j_1}$ , est alors obtenue avec le calcul de l'annexe E. Cette signature est ensuite exprimée dans le repère du trièdre à l'aide de l'opérateur défini à l'équation (4.5) :

$$\bar{\mathbf{S}}_k^{sd, j_1} = [R_{j_1} \rightarrow R_k] \left( \bar{\mathbf{S}}_{j_1}^{sd, j_1} \right). \quad (4.52)$$

On obtient finalement la signature des contributions des simples diffractions d'arête du trièdre  $k$  par sommation cohérente de la signature de SD de l'arête externe des trois faces du trièdre :

$$\bar{\mathbf{S}}_k^{sd} = \sum_{j_1=1}^3 \bar{\mathbf{S}}_k^{sd, j_1}. \quad (4.53)$$

#### 4.2.6 Résultats et validité du modèle de la signature d'un trièdre

Les résultats issus du modèle asymptotique analytique (nommé "Asymptotique") sont comparés à ceux obtenus par une méthode de référence. L'étude étant menée dans le domaine des hautes fréquences (domaine de validité de l'OG, de l'OP et de la MCE), la MdM n'est pas applicable ici dû au nombre très élevé d'inconnues. La méthode de référence choisie est une méthode rigoureuse rapide : la MLFMM, simulée à l'aide du logiciel de simulation électromagnétique FEKO [183, 184]. A titre d'exemple, en considérant un trièdre dont les arêtes internes sont de longueurs  $L = 10\lambda_0$ , le nombre d'inconnues donné par FEKO est de 27388. Dans toutes les simulations de ce paragraphe, le trièdre est fixe positionné dans le repère fixe comme illustré sur la figure 4.8(a), l'arête interne est  $L = 10\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage utilisé pour le maillage sous FEKO est de  $\lambda_0/8$ , la fréquence est de  $f = 10$  GHz, et les angles sont donnés dans la convention FSA illustrée sur la figure 1.6.

Sur les figures 4.23(a) et 4.23(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\theta_s$  avec  $\phi_s = 45^\circ$  pour une configuration monostatique ( $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ ). Sur la figure 4.23(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\theta\theta}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.23(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\phi\theta}$  est illustrée.

Dans cette configuration, le trièdre est excité et observé dans le coin intérieur. On remarque un très bon accord sur la SER en co-polarisation. En polarisation croisée, les niveaux sont très faibles et les résultats pourraient être assimilés à un bruit de calcul, néanmoins, il est difficile de conclure sur la pertinence de chacune des méthodes. Sur la figure 4.23(a), on note la présence de la réflexion spéculaire de la face 3 du trièdre pour  $\theta_s = 0^\circ$  (contribution de la SR de la face 3). On peut vérifier que la valeur de la formulation géométrique de la SER (valide uniquement en hautes fréquences, en monostatique et pour une excitation selon la normale à la plaque) est obtenue :

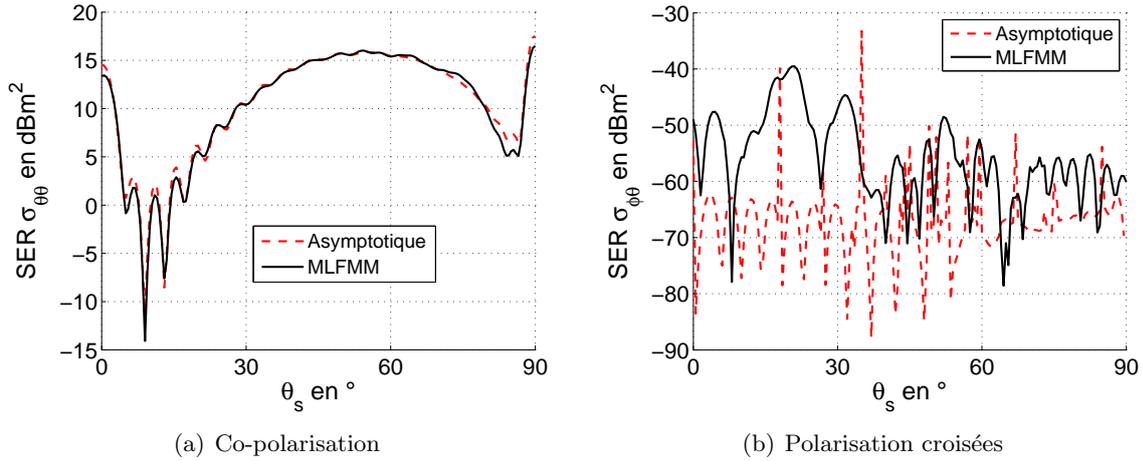


FIG. 4.23 – Comparaison de la SER d’un trièdre, évaluée à l’aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\phi_s = 45^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ .

$\sigma = 4\pi(S/\lambda_0)^2$ , soit ici pour la face 3 :  $\sigma = 4\pi\left(\frac{L^2}{2\lambda_0}\right)^2 = 14.5 \text{ dBm}^2$  (avec  $L = 10\lambda_0$ ). A  $\theta_s = 90^\circ$ , aucune TR n’est possible, et la contribution des SR des faces 1 et 2 est faible devant celle des DR  $1 \rightsquigarrow 2$  et  $2 \rightsquigarrow 1$ . En effet, en considérant les angles de diffusion et d’incidence, pour  $\theta_s = 90^\circ$ , la configuration correspond à la direction spéculaire des DR. Ainsi, en négligeant la contribution des SR, la valeur de la SER peut être assimilée au spéculaire de la plaque triangulaire effective formée par les faces 1 et 2. Cette plaque a pour base  $\sqrt{2}L$  et pour hauteur  $L$ , et on vérifie que la valeur donnée par la formulation géométrique est obtenue :  $\sigma = 4\pi\left(\frac{L^2}{\sqrt{2}\lambda_0}\right)^2 = 17.5 \text{ dBm}^2$ . La contribution des TR se manifeste par la présence d’un large lobe, centré autour de  $\theta_s = 54.7^\circ$  (angle entre l’axe ( $0z$ ) et la hauteur du trièdre) dont le maximum est voisin de  $15.9 \text{ dBm}^2$ .

Sur les figures 4.24(a) et 4.24(b), la SER issue du modèle asymptotique analytique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l’angle  $\phi_s$  avec  $\theta_s = 60^\circ$  pour une configuration monostatique ( $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ ). Sur la figure 4.24(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\phi\phi}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.24(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\theta\phi}$  est illustrée.

Dans cette configuration, le trièdre est également excité et observé dans le coin intérieur. On remarque un très bon accord sur la SER en co-polarisation. En polarisation croisée, le profil est obtenu mais les niveaux sont sous-estimés par le modèle asymptotique. Plusieurs causes sont possibles. Premièrement l’utilisation de l’OG dans le calcul des DR suppose un couplage entre les faces en champ lointain. Cette hypothèse forte, nécessaire pour obtenir un calcul analytique, peut impliquer des conséquences notables sur les niveaux de SER, notamment pour la polarisation croisée (où les niveaux faibles impliquent une analyse fine pour obtenir une bonne précision). Enfin, certains phénomènes sont négligés dans le modèle, notamment les doubles diffractions d’arêtes, les réflexions/diffractions (d’une face vers une arête) et les diffractions/réflexions (d’une arête vers une face). Ces dernières étant les plus indiquées à produire un champ diffracté non négligeable lorsque les autres contributions impliquent une SER faible [14].

Le modèle asymptotique est maintenant testé pour des configurations bistatiques. Sur les figures 4.25(a) et 4.25(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l’angle  $\phi_s$  pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 30 = 210^\circ$ . Sur la figure 4.25(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\phi\phi}$  est

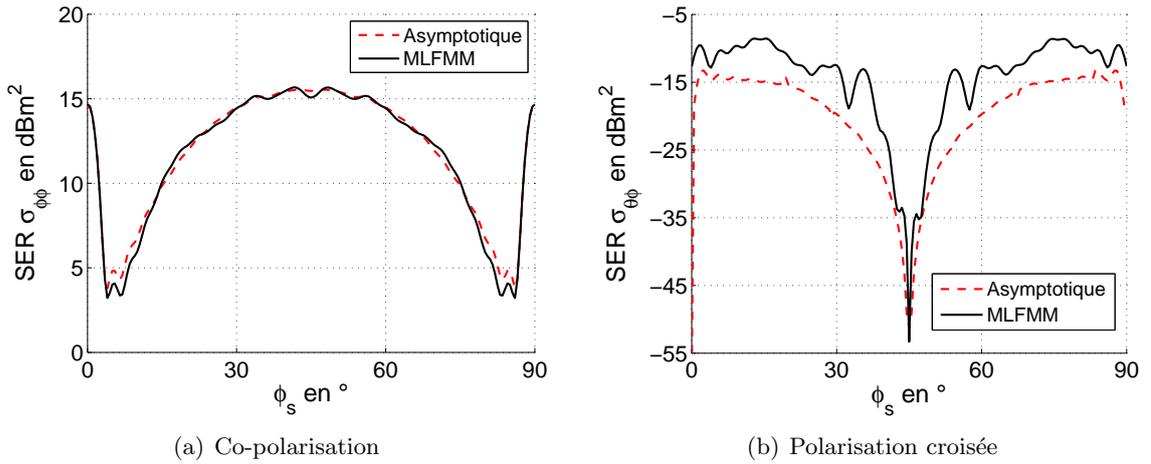


FIG. 4.24 – Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ .

considérée, tandis que sur la figure 4.25(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\theta\phi}$  est illustrée.

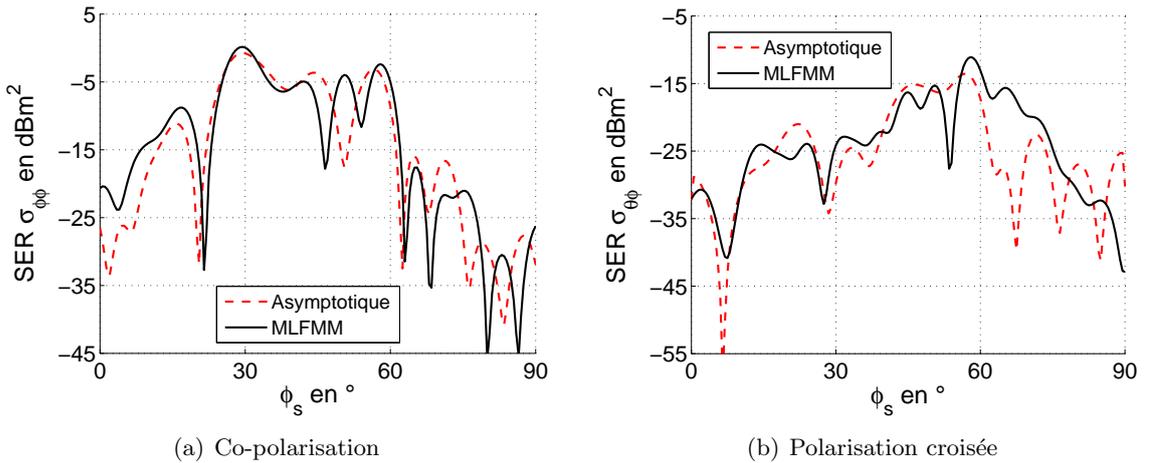


FIG. 4.25 – Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 30 = 210^\circ$ .

Dans cette configuration, le trièdre est également excité et observé dans le coin intérieur. Le profil et les niveaux de la SER sont globalement obtenus mais des différences notables sont cependant observées, notamment en polarisation croisée autour de  $\phi_s = 70^\circ$ .

Sur les figures 4.26(a) et 4.26(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\theta_s$  pour une configuration bistatique :  $\phi_s = 45^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ ,  $\phi_i = 180 - 30 = 150^\circ$ . Sur la figure 4.26(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\theta\phi}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.26(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\theta\phi}$  est illustrée.

Dans cette configuration, le récepteur est orienté en direction du coin intérieur du trièdre mais celui-ci est excité latéralement : la face 1 du trièdre est excitée du côté externe comme illustré sur la figure 4.8(a). L'ombrage en excitation intervient dans ce cas. Ainsi seules les SR

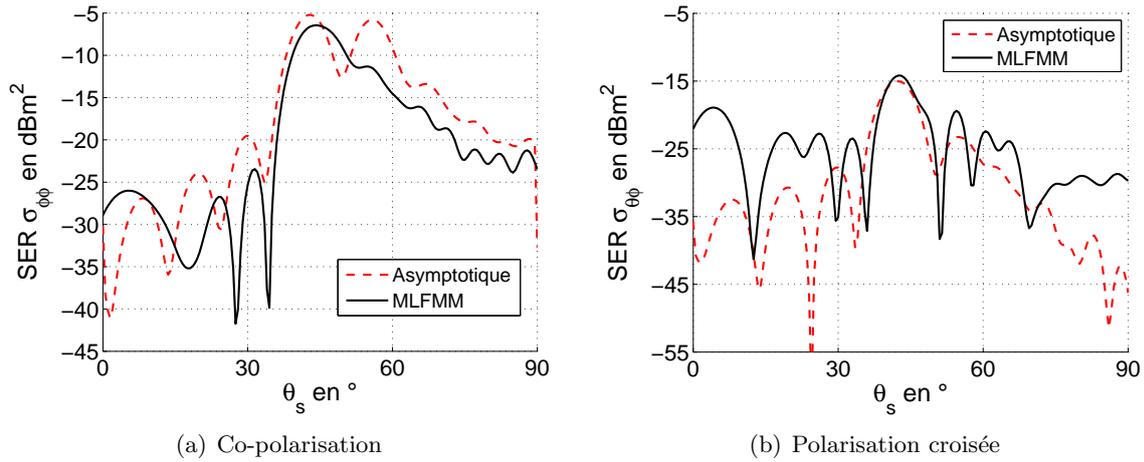


FIG. 4.26 – Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\phi_s = 45^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ ,  $\phi_i = 180 - 30 = 150^\circ$ .

des faces 2 et 3 et les DR  $2 \rightsquigarrow 3$  et  $3 \rightsquigarrow 2$  contribuent dans le modèle asymptotique. Des résultats satisfaisants sont obtenus lorsque les faces 2 et 3 ne sont pas observées sous des angles rasants, cela intervient autour de  $\theta_s = 45^\circ$ . Lorsque la face 2 ou la face 3 est observée à angle rasant, pour  $\theta_s < 30^\circ$  ou  $\theta_s > 60^\circ$  respectivement, des différences notables sont observées.

Sur les figures 4.27(a) et 4.27(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\theta_s$  pour une configuration bistatique :  $\phi_s = -30^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ . Sur la figure 4.27(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\theta\theta}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.27(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\theta\phi}$  est illustrée.

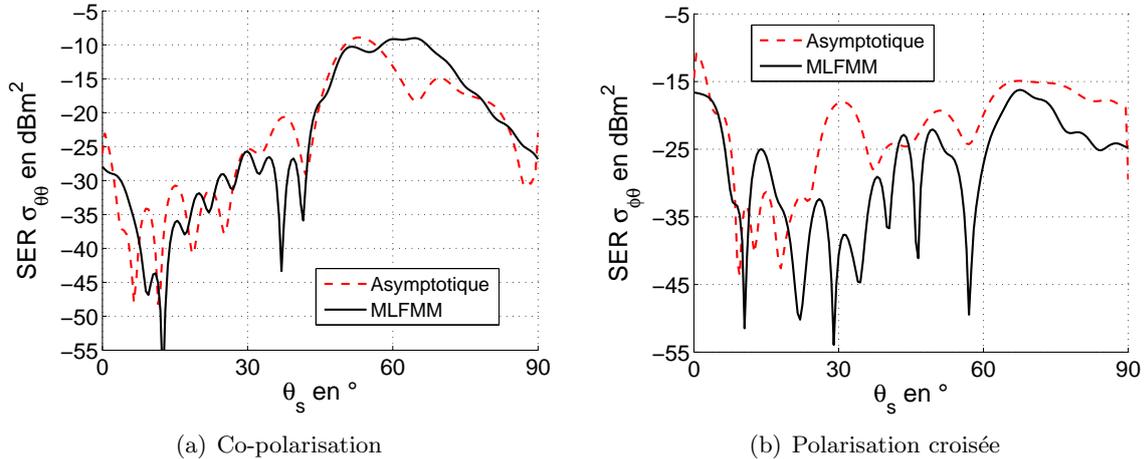


FIG. 4.27 – Comparaison de la SER d'un trièdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\phi_s = -30^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ .

Dans cette configuration, l'émetteur est orienté en direction du coin intérieur du trièdre mais celui-ci est observé latéralement : le récepteur vise le côté externe de la face 1 du trièdre. Des résultats globalement satisfaisants sont obtenus en co-polarisation, tandis qu'en polarisation

croisée des différences sont présentes même si les niveaux sont du même ordre de grandeur. La surestimation des niveaux par la méthode asymptotique pourrait être due à l'hypothèse de couplage en champ lointain entre les faces.

Finalement, les différentes comparaisons montrent des résultats satisfaisants en configuration bistatique pour la co-polarisation. En polarisation croisée, tant pour les cas monostatiques que bistatiques, les niveaux sont globalement similaires à ceux de la MLFMM ; cependant des différences sont notables sur le profil. La prise en compte de l'effet de "forward scattering" pourrait améliorer les résultats obtenus pour les configurations bistatiques. Enfin, en configuration monostatique et en co-polarisation de très bons résultats sont obtenus. Il convient donc d'appliquer ce modèle pour évaluer la signature d'un réflecteur polyédrique afin d'étudier si cette modélisation demeure encore intéressante.

### 4.3 Signature bistatique d'un réflecteur polyédrique

#### 4.3.1 Calcul de la matrice de diffraction du réflecteur polyédrique

Connaissant la géométrie d'un polyèdre (emplacement des sommets par exemple) donné dans de nombreux ouvrages et notamment dans [75], le procédé de facettage est appliqué (voir section 1.5.1). Le réflecteur polyédrique est alors obtenu, chaque face étant remplacée par un trièdre dont l'origine est calculée géométriquement à partir des trois points de la face triangulaire. Les trièdres sont numérotés ( $k = 1..N$  où  $N$  est le nombre de trièdres composant le réflecteur polyédrique) et les repères locaux ( $0_k, \hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{z}_k$ ), exprimés dans la base  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , leurs sont associés. La numérotation des trièdres pour le réflecteur octaédrique d'ordre 1 est donnée sur la figure 4.28.

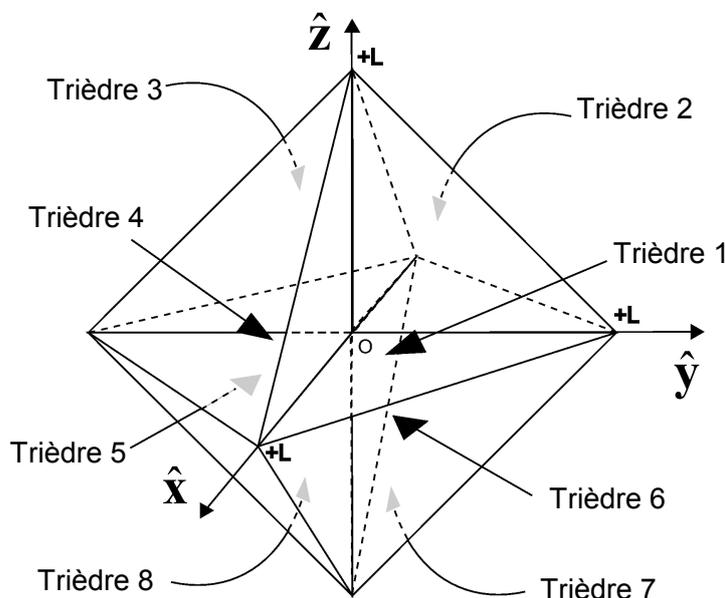


FIG. 4.28 – Numérotation des trièdres dans le réflecteur octaédrique d'ordre 1.

La matrice de diffraction bistatique du réflecteur polyédrique est obtenue par sommation des

matrices de diffraction des trièdres composant le réflecteur, toutes exprimées dans le repère fixe :

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{S}}^{tri_k}, \quad (4.54)$$

où la matrice  $\bar{\mathbf{S}}^{tri_k}$  du trièdre  $k$  est obtenue en projetant dans le repère fixe, la signature du trièdre  $k$  obtenue dans son repère local :

$$\bar{\mathbf{S}}^{tri_k} = Tr_k [R_k \rightarrow R_{\text{fixe}}] \left( \bar{\mathbf{S}}_k^{tri_k} \right), \quad (4.55)$$

où  $Tr_k$  est un terme exprimant le déphasage induit par le changement de l'origine des phases lors du changement de repère. En effet l'origine des repères locaux des trièdres n'est pas forcément localisée à l'origine du repère fixe. Par exemple pour le réflecteur icosaédrique, l'origine des trièdres n'est pas reliée au point 0 du repère fixe (voir figure 4.5), alors que c'est le cas pour le réflecteur octaédrique d'ordre 1. Le terme  $Tr_k$  est donné par :

$$Tr_k = e^{-ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{00}_k}. \quad (4.56)$$

où  $\mathbf{0}_k$  est le point origine du repère local du trièdre  $k$ . Dans l'équation (4.55), la signature du trièdre dans le repère local  $R_k$  est obtenue par sommation cohérente des contributions intervenant dans la diffraction, toutes exprimées dans le repère local associé au trièdre  $k$  :

$$\bar{\mathbf{S}}_k^{tri_k} = \bar{\mathbf{S}}_k^{sd} + \bar{\mathbf{S}}_k^{sr} + \bar{\mathbf{S}}_k^{dr} + \bar{\mathbf{S}}_k^{tr}. \quad (4.57)$$

Les simples réflexions sur les faces externes du trièdre ne sont pas prises en compte puisqu'elles correspondent aux simples réflexions sur les faces internes d'autres trièdres appartenant au réflecteur polyédrique. A noter qu'une attention particulière doit être portée pour la matrice  $\bar{\mathbf{S}}_k^{sd}$  afin de ne pas calculer deux fois la diffraction par la même arête puisque dans un réflecteur polyédrique, une arête est toujours commune à deux trièdres.

Précisons également que l'équation (4.54) ne prend pas en compte les couplages entre les trièdres du réflecteur. Cette hypothèse est consistante avec l'approximation de l'Optique Physique qui néglige les phénomènes d'ondes rampantes. Cette approximation (nécessaire pour obtenir un calcul analytique) est pertinente dans le domaine des hautes fréquences et a déjà fait l'objet d'une étude dans le cas 2D pour la croix (voir section 2.2.4).

### 4.3.2 Résultats et validité du modèle de la signature d'un réflecteur octaédrique d'ordre 1

Les résultats issus du modèle asymptotique analytique (nommé "Asymptotique") sont comparés à ceux obtenus par la MLFMM calculée à l'aide de FEKO pour un réflecteur octaédrique d'ordre 1 (nommé par la suite "octaèdre" par abus de langage). Dans toutes les simulations de ce paragraphe, l'octaèdre est positionné dans le repère fixe comme illustré sur la figure 4.28, l'arête interne des trièdres le composant vaut  $L = 10\lambda_0$ , la fréquence est de  $f = 10$  GHz, et les angles sont donnés dans la convention FSA illustrée sur la figure 1.6. Le pas d'échantillonnage utilisé pour le maillage sous FEKO est de  $\lambda_0/5$ ; la simulation n'étant pas réalisable pour un pas plus fin dû au nombre très élevé d'inconnues : 42806.

Sur les figures 4.29(a) et 4.29(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\theta_s$  avec  $\phi_s = 45^\circ$  pour une configuration

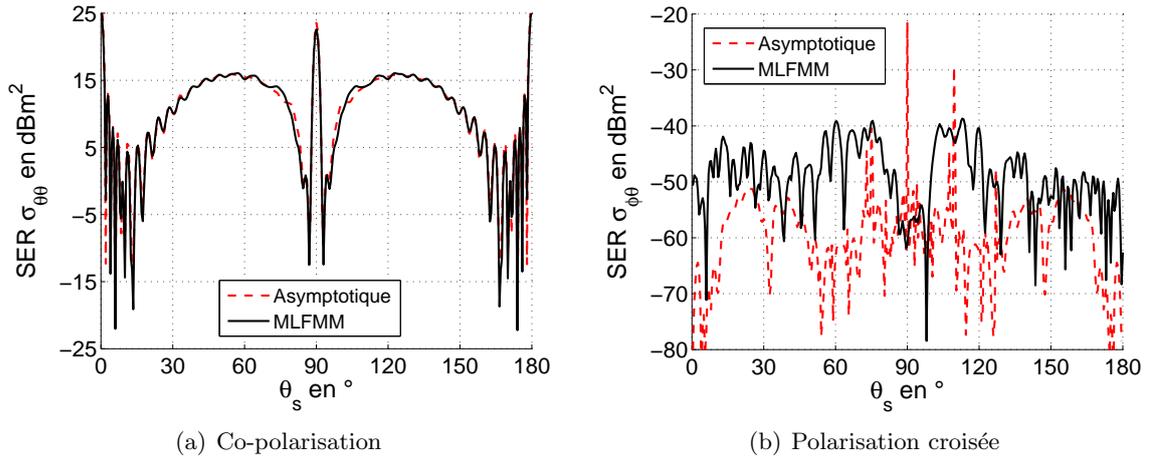


FIG. 4.29 – Comparaison de la SER d’un octaèdre, évaluée à l’aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\phi_s = 45^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ .

monostatique ( $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ ). Sur la figure 4.29(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\theta\theta}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.29(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\phi\phi}$  est illustrée.

La SER en polarisation croisée peut être assimilée à un bruit de calcul, comme pour le cas du trièdre seul (4.23(b)). En co-polarisation, un très bon accord entre les deux méthodes est observé. Un des avantages du modèle asymptotique est que toutes les contributions (SR, DR, TR et SD) sont calculées indépendamment et peuvent alors être comparées à la signature globale pour comprendre les phénomènes physiques mis en jeu. Ainsi, la même configuration que pour la figure 4.29(a) est considérée pour la figure 4.30 sur laquelle les SER évaluées en ne considérant que les SR, DR et SD de l’octaèdre d’une part, et en ne considérant que les SR et SD de l’octaèdre d’autre part, sont tracées. Lorsque  $\theta_s = 0^\circ$ , seules les SR des faces 3 des trièdres 1 à 4 contribuent. Autour de  $\theta_s = 54.7^\circ$ , les TR du trièdre 1 contribuent principalement et on retrouve un lobe, en co-polarisation, similaire au cas du trièdre seul de la figure 4.23(a). Pour  $\theta_s = 90^\circ$ , seules les SR et DR des faces 1 et 2 des trièdres 1 et 6 contribuent et on retrouve un pic sur la SER correspondant aux réflexions spéculaires des DR des deux trièdres 1 et 6 comme pour le cas du trièdre seul (figure 4.23(a)). Par symétrie, on retrouve sur la figure 4.29(a), la contribution principale des TR du trièdre 6 autour de  $\theta_s = 125.3^\circ$ . Autour de  $\theta_s = 10^\circ$  les faces 3 des trièdres 2, 3 et 4 sont encore très peu ombrées en excitation et observation, et ces contributions sont constructives ou destructives sur les contributions en SR, DR et TR du trièdre 1. Ainsi, de fortes oscillations sont observées autour de ces angles dues aux interférences entre les contributions des trièdres 1 à 4 (principalement dues aux lobes secondaires de la plaque carrée formée par les faces 3 des trièdres 1 à 4). Les mêmes phénomènes entre les trièdres 5 à 8 sont observés autour de  $\theta_s = 170^\circ$  sur la figure 4.29(a).

Sur les figures 4.31(a) et 4.31(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l’angle  $\phi_s$  avec  $\theta_s = 45^\circ$  pour une configuration monostatique ( $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ ). Sur la figure 4.31(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\phi\phi}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.31(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\theta\theta}$  est illustrée.

En polarisation croisée le profil global de la SER est obtenu, toutefois, des différences avec les résultats de la MLFMM sont observés. En co-polarisation, un très bon accord entre les deux méthodes est obtenu. Pour  $\phi_s = 0^\circ$ , seules les SR et DR des faces 2 et 3 des trièdres 1 et 4

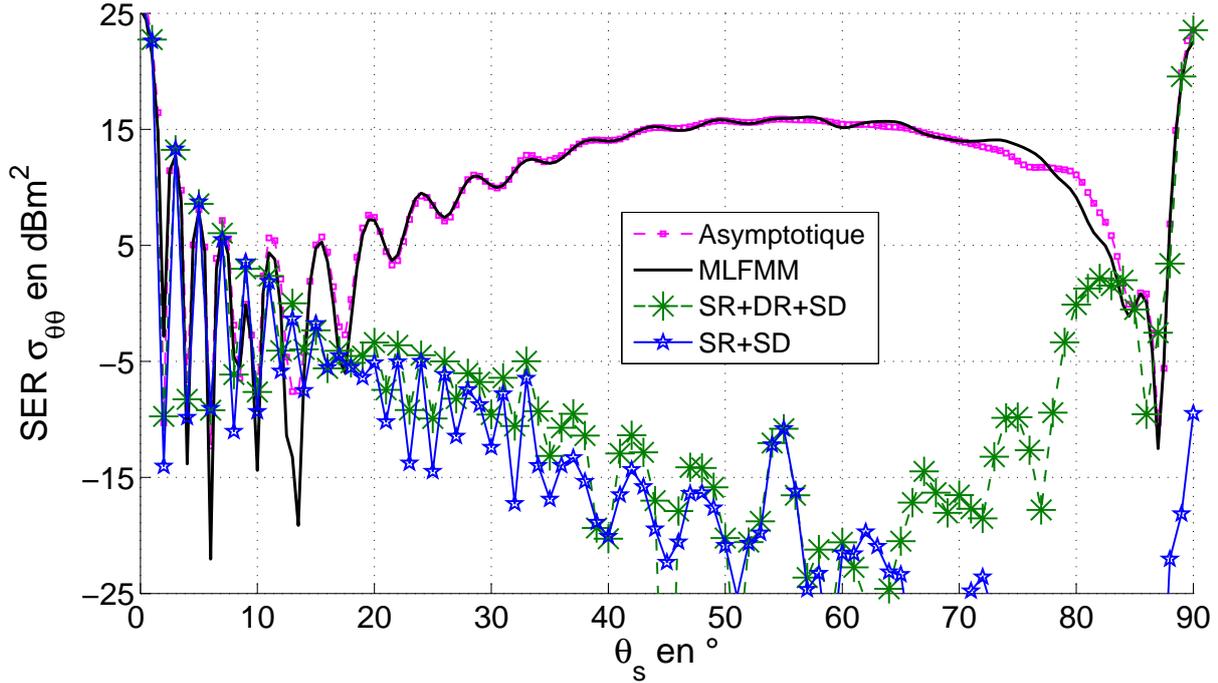


FIG. 4.30 – Comparaison de la SER d’un octaèdre, évaluée à l’aide du modèle asymptotique analytique avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\theta_s = 45^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ . De plus les SER pour les contributions SR+SD seules et SR+DR+SD seules, sont tracées

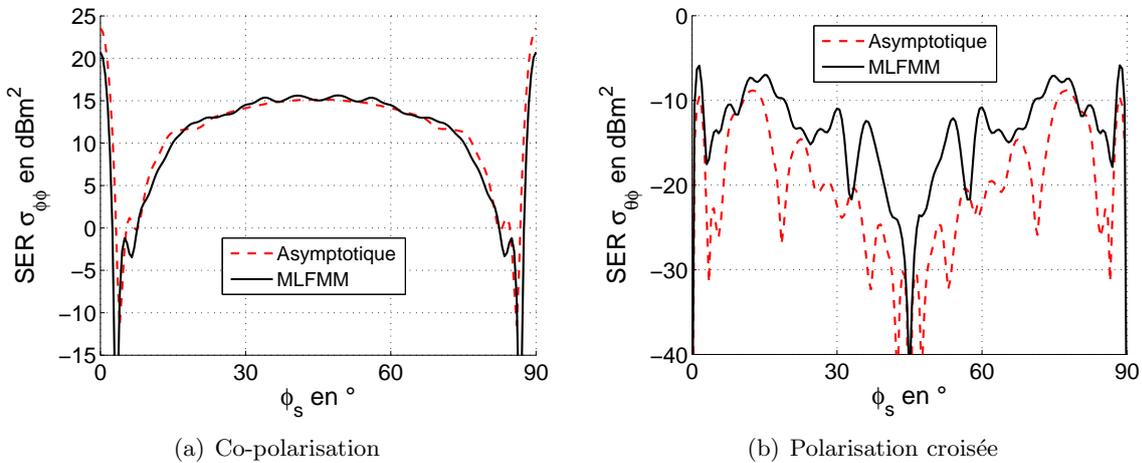


FIG. 4.31 – Comparaison de la SER d’un octaèdre, évaluée à l’aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\theta_s = 45^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ .

contribuent, on retrouve un pic sur la SER correspondant aux réflexions spéculaires des DR des deux trièdres 1 et 4 comme pour le cas du trièdre seul (figure 4.23(a)). Par symétrie, les mêmes phénomènes sont obtenus avec les faces 1 et 3 des trièdres 1 et 2. Pour  $\phi_s \in [10^\circ; 80^\circ]$ , un large lobe est obtenu, principalement créé par les TR du trièdre 1.

Sur les figures 4.32(a) et 4.32(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle

obtenue avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\phi_s$  pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 30^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 30 = 150^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ . Sur la figure 4.32(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\theta\theta}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.32(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\phi\theta}$  est illustrée.

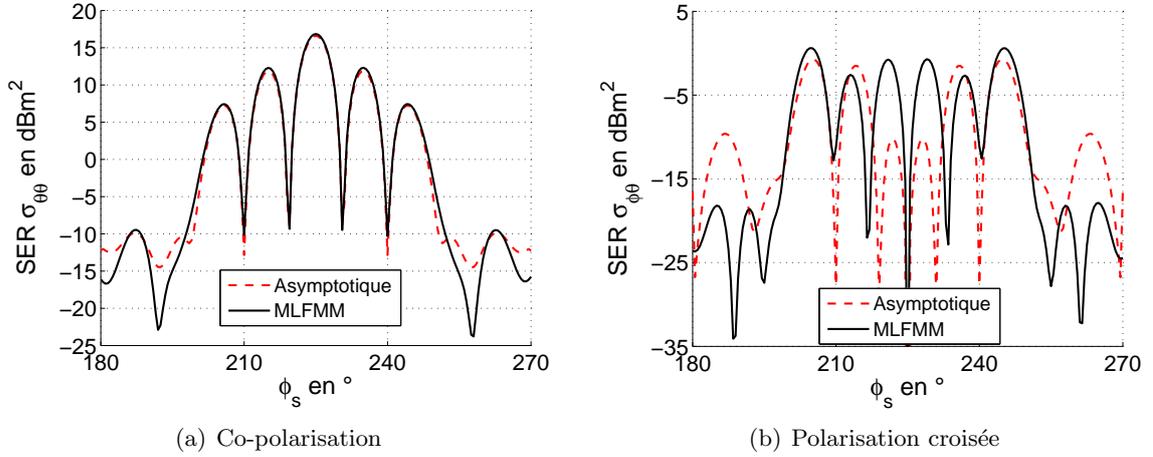


FIG. 4.32 – Comparaison de la SER d'un octaèdre, évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 30^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 30 = 150^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ .

Dans cette configuration bistatique, l'émetteur est dirigé vers le coin intérieur du trièdre 1 tandis que le récepteur est orienté vers celui du trièdre 3. En co-polarisation, le maximum est obtenu pour  $\phi_s = 225^\circ$ , ce qui correspond à la direction de la réflexion spéculaire par les surfaces illuminées et observées des faces 3 des trièdres 1 à 4. Autour de ce maximum, les trièdres interfèrent créant alors des contributions destructives. Pour  $\phi_s < 200^\circ$  et  $\phi_s > 250^\circ$ , quelques différences apparaissent. Ceci pourrait être amélioré en ajoutant les contributions de "forward scattering". En effet, actuellement cette contribution n'a pas été incluse dans le modèle, or nous avons vu au paragraphe 2.2.4.2, toute l'importance de tenir compte de ce phénomène si des configurations de fort bistatisme sont considérées. Les faces 1 et 2 du trièdre 1 pourraient induire une contribution non négligeable pour ces angles d'observation. Pour ajouter cette contribution, il conviendrait d'étudier plus en détail quelle méthode serait la plus précise pour le cas 3D entre le principe de Huygens combinée à l'OP et le principe de Babinet combinée à l'OP. En polarisation croisée, les niveaux de SER et le profil sont globalement similaires.

Sur les figures 4.33(a) et 4.33(b), la SER issue du modèle asymptotique est comparée à celle obtenue avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\phi_s$  pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 50^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ . Sur la figure 4.33(a), la SER en co-polarisation  $\sigma_{\theta\theta}$  est considérée, tandis que sur la figure 4.33(b) la SER en polarisation croisée  $\sigma_{\phi\theta}$  est illustrée.

Dans cette configuration bistatique, l'émetteur et le récepteur sont tous les deux dirigés vers le coin intérieur du trièdre 1. En co-polarisation, le maximum est obtenu pour  $\phi_s = 45^\circ$ . Un très bon accord est obtenu entre les deux méthodes pour  $\phi_s \in [25^\circ; 65^\circ]$ . Au delà de ces angles les faces 1 et 2 du trièdre 1 sont observées avec des angles d'observation rasants et le modèle ne permet pas une bonne précision dans ces configurations. En polarisation croisée, les niveaux de SER et le profil sont globalement bien obtenus.

Finalement, de très bons résultats sont obtenus en co-polarisation en configurations monostatiques et bistatiques. En polarisation croisée les résultats sont satisfaisants puisque globalement les profils sont obtenus. A noter que l'intérêt principal de ce modèle asymptotique analytique est

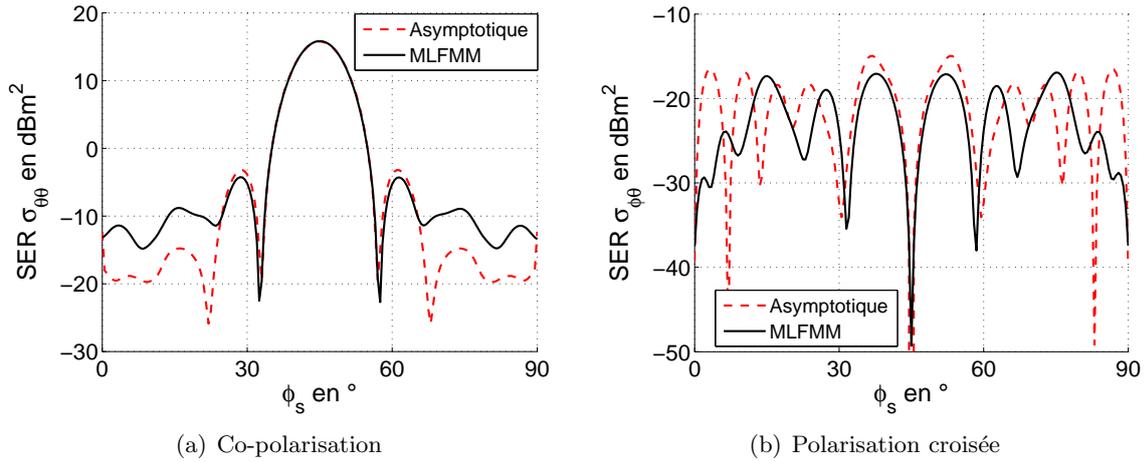


FIG. 4.33 – Comparaison de la SER d’un octaèdre, évaluée à l’aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 50^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 50 = 130^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 45 = 225^\circ$ .

son temps de calcul. A titre d’exemple, le calcul des quatre termes de la matrice de diffraction pour la configuration de la figure 4.29(a) a nécessité 138 heures et 20 minutes pour la MLFMM de FEKO alors que seulement 5 secondes ont été requises pour le modèle asymptotique. Ces calculs ont été réalisés sur un PC de processeur Intel Pentium 4 à 2.4 GHz et 1Go de RAM.

A présent, il convient d’appliquer le modèle à des réflecteurs polyédriques d’ordre supérieur (voir paragraphe 1.5.1.3). Cependant, la MLFMM ne peut pas être appliquée à un réflecteur octaédrique d’ordre 2 dû au trop grand nombre d’inconnues.

### 4.3.3 Résultats et validité du modèle de la signature d’un quart de réflecteur octaédrique d’ordre 2

Afin d’étudier la validité du modèle asymptotique lorsque l’ordre d’un réflecteur augmente, on considère le quart d’un réflecteur octaédrique d’ordre 2, représenté sur la figure 4.34 et nommé par la suite “quart d’octaèdre d’ordre 2” par abus de langage.

Les résultats issus du modèle asymptotique analytique sont comparés à ceux obtenus par la MLFMM. Dans toutes les simulations de ce paragraphe, le quart d’octaèdre d’ordre 2 est positionné dans le repère fixe comme illustré sur la figure 4.34, la fréquence est de  $f = 10$  GHz et les angles sont donnés dans la convention FSA illustrée sur la figure 1.6. Les résultats issus du modèle asymptotique (avec toutes les contributions : SR+DR+TR+SD) sont comparés à ceux obtenus avec la MLFMM. De plus, les résultats issus du modèle asymptotique en ne considérant que les SD, que les SR+SD et que les SR+DR+SD sont également tracés.

#### 4.3.3.1 Réflecteur de grande taille : $L = 10\lambda_0$

On considère dans un premier temps un réflecteur de grande taille : l’arête interne des trièdres le composant est  $L = 10\lambda_0$ , le pas d’échantillonnage utilisé pour le maillage sous FEKO est de  $\lambda_0/5$ ; la simulation n’étant pas réalisable pour un pas plus fin dû au nombre très élevé d’inconnues : 80504.

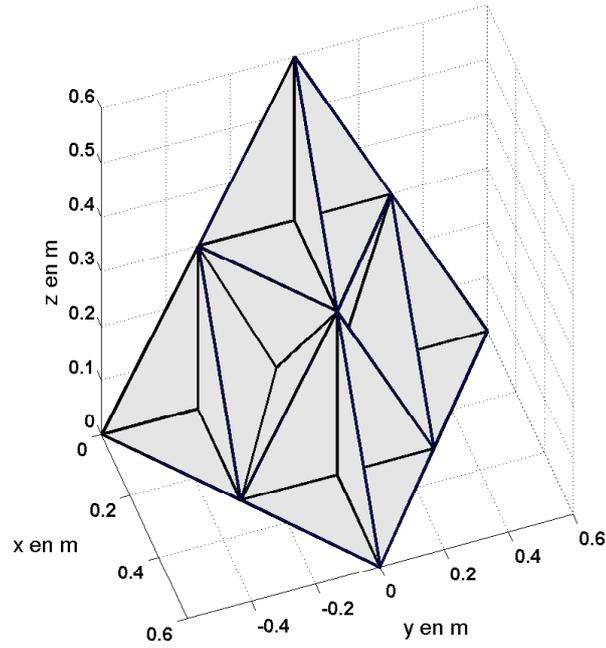


FIG. 4.34 – Illustration du quart de réflecteur octaédrique d'ordre 2.

Sur la figure 4.35, les SER  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{\phi\theta}$  issues du modèle asymptotique sont comparées à celles obtenues avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\theta_s$  avec  $\phi_s = 30^\circ$ , pour une configuration monostatique ( $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ ).

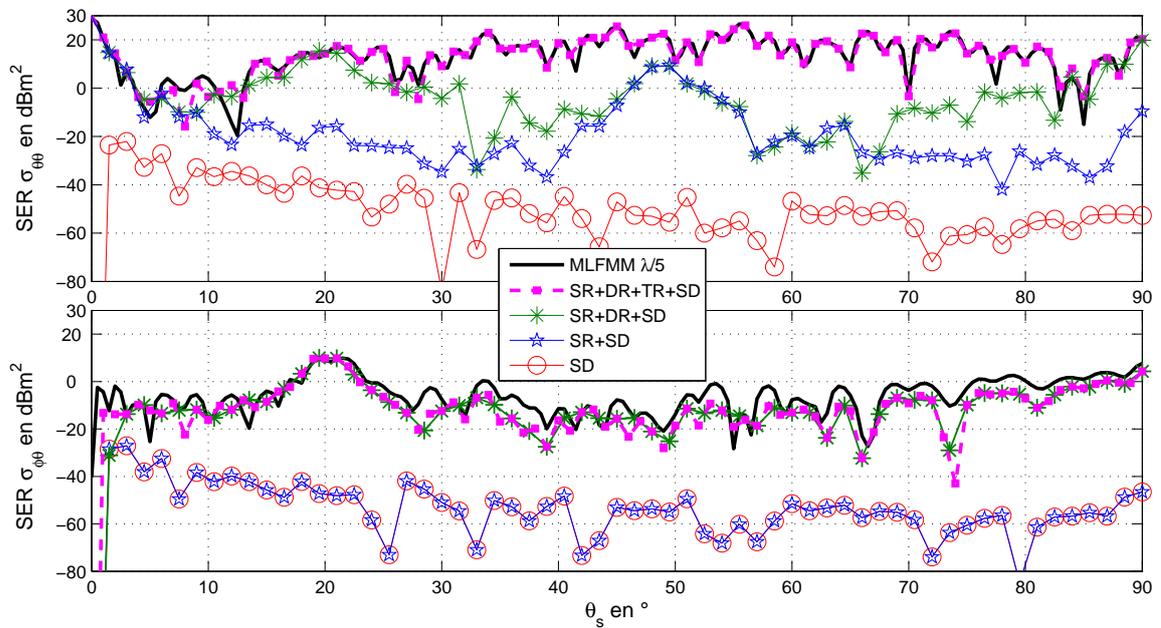


FIG. 4.35 – Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec  $L = 10\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\phi_s = 30^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées.

On observe un excellent accord entre le modèle proposé et la méthode de référence en co-polarisation. En polarisation croisée, un bon accord est obtenu autour de la valeur maximale ; pour d'autres angles les différences augmentent, même si le profil est similaire à celui obtenu avec la MLFMM. D'autres simulations, en configuration monostatique, menées pour d'autres angles d'incidence ( $\phi_i = \{180^\circ, 225^\circ\}$ ), non présentées dans ce manuscrit, aboutissent aux mêmes conclusions. Sur la figure 4.35, on peut également remarquer que la contribution des SD est très faible par rapport aux autres. En effet, en polarisation croisée, les DR produisent de très fortes valeurs (en comparant SR+DR+SD à SR+SD) alors que les TR sont négligeables (en comparant "Asymptotique" à SR+DR+SD). Cependant, les TR contribuent significativement en co-polarisation. En général, les SD sont nécessaires pour les co-polarisations et polarisations croisées si les autres contributions sont de faibles valeurs.

Sur la figure 4.36, les SER  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{\phi\theta}$  issues du modèle asymptotique sont comparées à celles obtenues avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\phi_s$  pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 0 = 180^\circ$ .

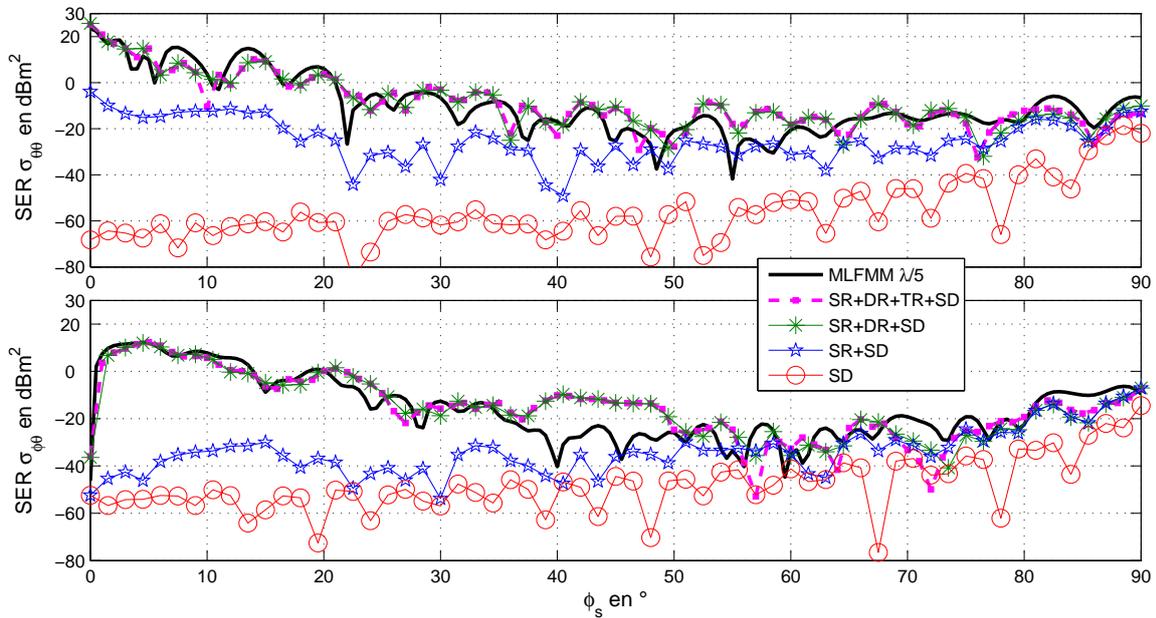


FIG. 4.36 – Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec  $L = 10\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 0 = 180^\circ$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées.

On observe un bon accord entre le modèle proposé et la méthode de référence en co-polarisation et en polarisation croisée. Néanmoins, autour de  $\phi_s = 45^\circ$  les différences augmentent. En effet, on peut montrer que la surestimation des DR des deux trièdres retournés (ceux se situant au milieu des deux réseaux de trièdre ; voir sur la figure 4.34) est à l'origine de ces différences qui peuvent être dues à l'hypothèse de couplage en champ lointain entre les faces.

Les autres différences obtenues sur les figures 4.35 et 4.36 peuvent être dues aux contributions manquantes dans le modèle tels que les diffraction/réflexion par exemple. Pour y remédier, une solution consisterait à utiliser conjointement la MCE et l'OP, mais le calcul numérique d'une triple intégrale serait nécessaire si le couplage est considéré en champ proche. C'est une procédure coûteuse en temps de calcul. Une autre approche consisterait à utiliser la Théorie Géométrique de

la Diffraction [34, 35] (voir paragraphe 1.4.2.1) au lieu de l'OG pour les premières réflexions des DR et TR. Les interactions entre les faces seraient prises en compte comme avec l'OG, mais les interactions entre les arêtes et les faces seraient également incluses au prix d'une "augmentation raisonnable du temps de calcul" d'après Corona et al. [79]. Comme on l'a déjà évoqué, sous l'approximation de l'OG l'onde réfléchie par une face lors des premières réflexions des DR et TR est supposée plane. Cette approximation est nécessaire pour éviter le calcul numérique de quatre intégrales imbriquées (calcul des DR) et de six intégrales imbriquées (calcul des TR) qui sont très coûteuses en temps de calcul ; les six intégrales imbriquées ne sont d'ailleurs généralement pas calculables sur un PC standard de bureau. Mais cette approximation peut altérer la précision des résultats, notamment en polarisation croisée. Elle a été discutée en détail par Griesser et al. dans l'étude de la SER d'un dièdre [152]. Il peut être important de noter que pour des configurations bistatiques, les effets d'ombrages sont plus courants, en conséquence les limitations de l'OG peuvent être d'autant plus révélées.

#### 4.3.3.2 Réflecteur de plus petite taille : $L = 5\lambda_0$

On considère à présent un réflecteur de plus petite taille : l'arête interne des trièdres le composant est  $L = 5\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage utilisé pour le maillage sous FEKO est de  $\lambda_0/8$ .

Sur la figure 4.37, les SER  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{\phi\theta}$  issues du modèle asymptotique sont comparées à celles obtenues avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\theta_s$  avec  $\phi_s = 30^\circ$  pour une configuration monostatique ( $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ ).

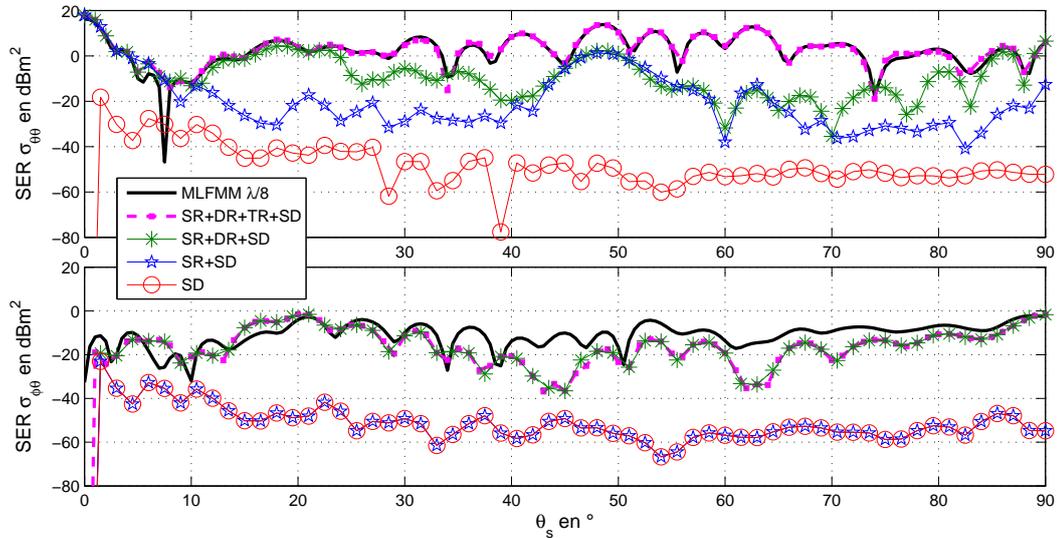


FIG. 4.37 – Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec  $L = 5\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration monostatique :  $\phi_s = 30^\circ$ ,  $\theta_i = \pi - \theta_s$ ,  $\phi_i = \pi + \phi_s$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées.

Ces résultats peuvent être comparés à ceux illustrés sur la figure 4.35 où  $L = 10\lambda_0$ . Bien que pour un petit réflecteur l'OP, l'OG et la MCE ne sont pas appropriées (l'étude n'est plus dans le domaine des hautes fréquences), on observe un très bon accord en co-polarisation. Cependant, de plus importantes différences (par rapport à la figure 4.35) sont observées en polarisation croisée.

Sur la figure 4.38, les SER  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{\phi\theta}$  issues du modèle asymptotique sont comparées à celles

obtenues avec la MLFMM en fonction de l'angle  $\phi_s$  pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 0 = 180^\circ$ .

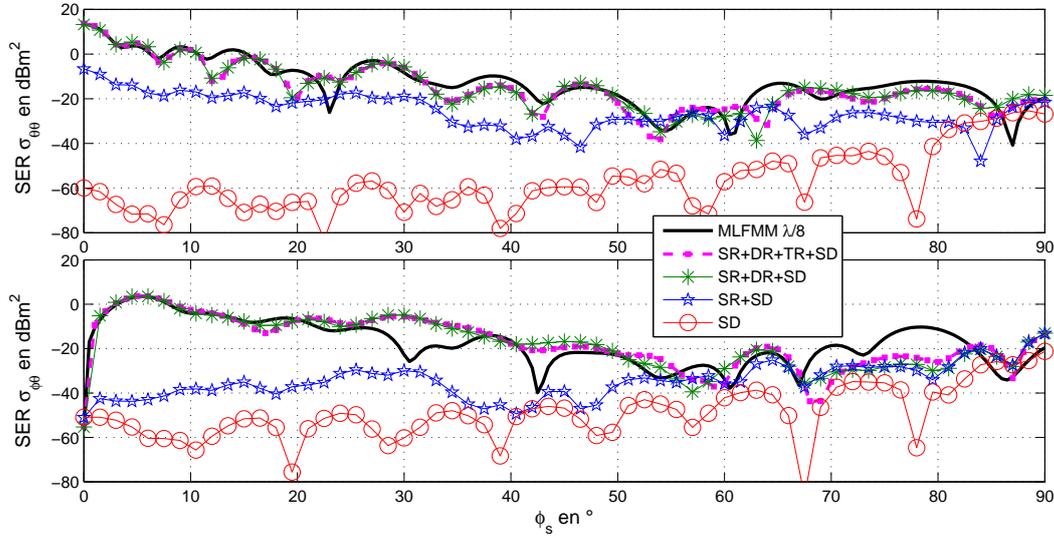


FIG. 4.38 – Comparaison de la SER d'un quart d'octaèdre d'ordre 2 (avec  $L = 5\lambda_0$ ), évaluée à l'aide du modèle asymptotique analytique, avec celle calculée par la MLFMM, pour une configuration bistatique :  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\theta_i = 180 - 60 = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 180 + 0 = 180^\circ$ . Les contributions SD, SR+SD et SR+DR+SD sont également tracées.

Ces résultats peuvent être comparés à ceux illustrés sur la figure 4.36 où  $L = 10\lambda_0$ . Les résultats sont globalement satisfaisants en co-polarisation. En polarisation croisée, le modèle asymptotique proposé produit de bons résultats autour de la direction de rétrodiffusion ( $\phi_s = 0^\circ$ ). On peut noter cependant que les différences en polarisation croisée sont plus importantes que celles obtenues avec un plus grand réflecteur (voir figure 4.36).

Finalement, pour s'assurer de bons résultats en co-polarisation et polarisation croisée la longueur de l'arête interne d'un trièdre doit être au moins de  $L = 10\lambda_0$ . A noter que plus le réflecteur est grand plus le modèle asymptotique devient intéressant puisque les résultats sont plus précis sans aucune augmentation du temps de calcul alors que les méthodes rigoureuses deviennent plus difficilement applicables : temps de calcul très long et problèmes de stockage en mémoire.

### 4.3.3.3 Comparaison du temps de calcul

Sur le tableau 4.1, les temps de calcul pour obtenir les quatre termes de la matrice de diffraction avec le modèle asymptotique et la MLFMM sont comparés pour les quatre configurations étudiées dans ce paragraphe. Les calculs ont été réalisés sur un PC de processeur Intel Core 2 à 2.66 GHz et 3Go de RAM.

Comme attendu, le modèle proposé est bien plus rapide que la MLFMM puisqu'il produit des résultats quasiment instantanément. Ce modèle est donc très intéressant pour des applications temps-réel ou pour des phases de simulations requérant de très nombreux calculs qui de ce fait se doivent d'être rapides.

TAB. 4.1 – Comparaison des temps de calculs pour obtenir les quatre termes de la matrice de diffraction, entre le modèle asymptotique proposé et la méthode de référence (MLFMM), pour les résultats présentés dans cette section.

	Asymptotique	MLFMM
Figure 4.35	4.8 secondes	53 heures 10 minutes
Figure 4.36	3 secondes	33 minutes
Figure 4.37	3.6 secondes	10 heures 58 minutes
Figure 4.38	2.4 secondes	24 minutes

### 4.3.4 Propriétés intrinsèques des réflecteurs polyédriques

Après avoir étudié la validité du modèle asymptotique, il est à présent utilisé pour dégager des propriétés intrinsèques des réflecteurs polyédriques.

#### 4.3.4.1 Influence de la classe du réflecteur polyédrique

Dans un premier temps, l'étude concerne l'influence de la classe du réflecteur. Pour cela, la SER de l'octaèdre (réflecteur octaédrique rigoureusement) d'ordre 1 et celle de l'icosaèdre (réflecteur icosaédrique rigoureusement) d'ordre 1 sont comparées. Les deux réflecteurs sont dimensionnés de telle sorte qu'ils soient tous deux inscrits dans une même sphère circonscrite de rayon 0.4035 m. Ainsi, la longueur de l'arête interne des trièdres composant l'octaèdre d'ordre 1 est de  $L = 0.4035$  m tandis que celle des trièdres composant l'icosaèdre d'ordre 1 est de  $L = 0.3$  m. De ce fait, les deux réflecteurs polyédriques occupent globalement le même espace. La fréquence est de  $f = 10$  GHz.

La SER monostatique  $\sigma_{\theta\theta}$  de l'octaèdre d'ordre 1 et celle de l'icosaèdre d'ordre 1 sont calculées pour  $\theta_s \in [0^\circ; 180^\circ]$  et  $\phi_s \in [0^\circ; 360^\circ]$ . L'étude est ainsi menée sur  $4\pi$  stéradians. La SER de l'octaèdre d'ordre 1 est illustrée sur la figure 4.39, celle de l'icosaèdre d'ordre 1 est tracée sur la figure 4.40.

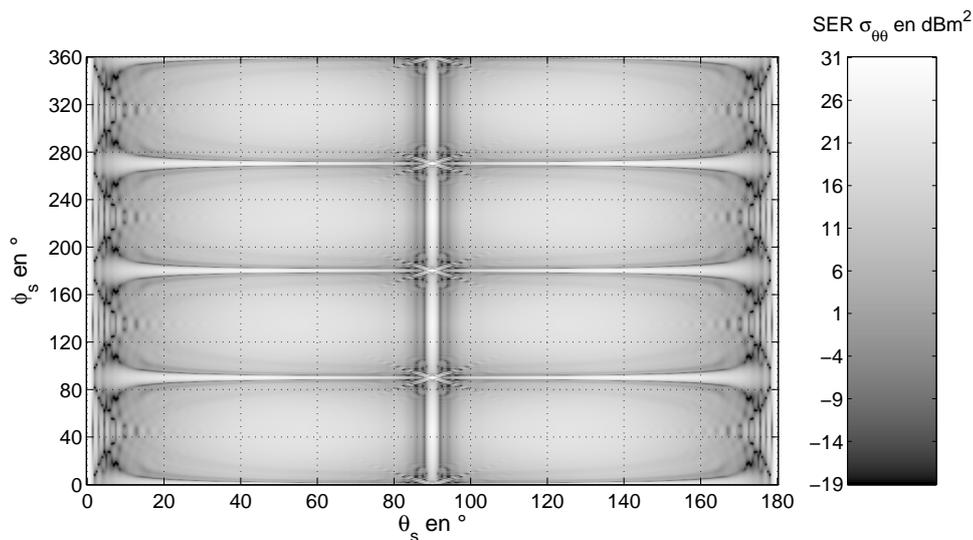


FIG. 4.39 – SER monostatique  $\sigma_{\theta\theta}$  de l'octaèdre d'ordre 1 ( $L = 0.4035$  m et  $f = 10$  GHz).

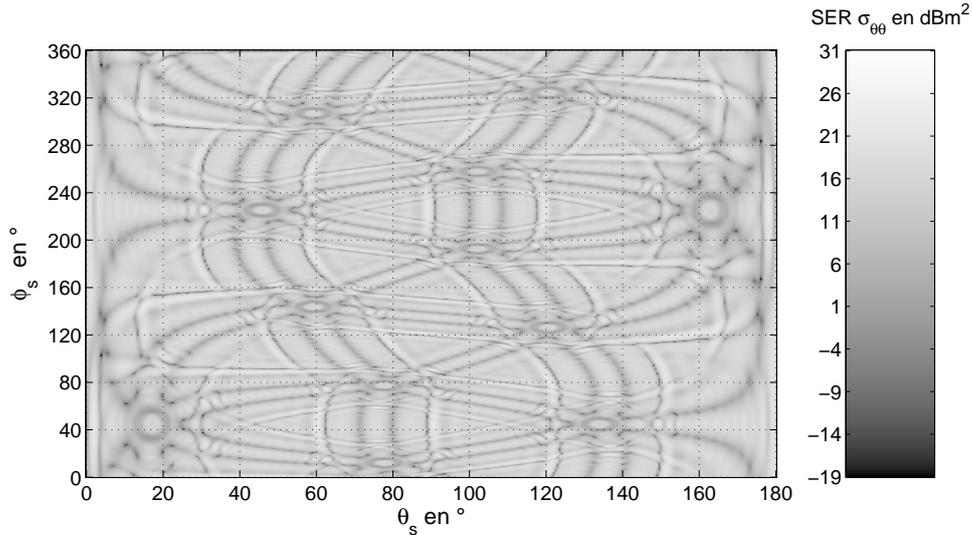


FIG. 4.40 – SER monostatique  $\sigma_{\theta\theta}$  de l'icosaèdre d'ordre 1 ( $L = 0.4035$  m et  $f = 10$  GHz).

A partir des figures 4.39 et 4.40, on peut remarquer que l'octaèdre est plus directif que l'icosaèdre. Sur la figure 4.39, on remarque très distinctement la réponse de chaque trièdre composant l'octaèdre; chaque trièdre interférant peu avec les trièdres adjacents. En effet, l'angle solide créé par les faces d'un trièdre ( $\pi/2$  stéradians) et ceux des trièdres adjacents ne se superposent pas. Ainsi, des valeurs de SER élevées sont obtenues pour chaque trièdre autour des directions privilégiées obtenues en considérant le trièdre seul (spéculaires des SR, spéculaires des DR, lobes des TR). Il en est tout autre pour l'icosaèdre : la réponse de chaque trièdre est difficilement identifiable. En effet, les angles solides des 20 trièdres (valant tous  $\pi/2$  stéradians) vont se superposer, impliquant de fortes interférences. De ce fait, l'énergie est répartie sur les  $4\pi$  stéradians, et la dynamique de la SER de l'icosaèdre est plus faible que celle de l'octaèdre. Afin d'illustrer ce phénomène, la fonction de répartition des SER est calculée. Pour cela, le nombre de valeurs de SER comprises entre deux niveaux donnés de SER est calculé, on obtient ainsi un histogramme. Pour un seuil donné, compris entre les valeurs minimum ( $\min(\text{SER})$ ) et maximum ( $\max(\text{SER})$ ) de la SER, la fonction de répartition est obtenue en intégrant l'histogramme entre la valeur  $\min(\text{SER})$  et le seuil puis en normalisant (la valeur finale (pour  $\max(\text{SER})$ ) est de ce fait égale à un). Autrement dit, la valeur de la fonction de répartition est la proportion de valeurs de la SER qui est strictement inférieure à une valeur  $\sigma$  donnée.

Les fonctions de répartition de la SER  $\sigma_{\theta\theta}$  de l'octaèdre d'ordre 1 et de l'icosaèdre d'ordre 1 sont respectivement calculées à partir des résultats données sur les figures 4.39 et 4.40. Ces deux fonctions de répartition sont comparées sur la figure 4.41, et la fonction de répartition de la SER de la sphère de rayon 0.4035 m est également tracée.

Comme attendu, la dynamique de la SER de l'octaèdre est plus grande que celle de l'icosaèdre. Pour la sphère, la SER monostatique vaut  $\pi a^2 \forall \theta_s, \phi_s$ , où  $a$  est le rayon de la sphère. Alors la fonction de répartition de la sphère est un échelon qui se traduit par une ligne verticale positionnée à  $\sigma = 10 \log_{10}(\pi a^2)$  sur la figure 4.41. La pente des fonctions de répartition autour de la valeur moyenne (à 50% sur la figure 4.41) est liée à la dispersion des valeurs autour de la valeur moyenne : l'écart-type. Physiquement cette dispersion correspond à la directivité. De ce fait et d'après la figure 4.41, la signature de l'octaèdre est plus anisotrope (dépendance forte en fonction des directions) que l'icosaèdre; ce dernier est donc moins directif. Avec un réflecteur polyédrique de classe supérieure, par exemple avec le réflecteur pentadodécaédrique (obtenu par

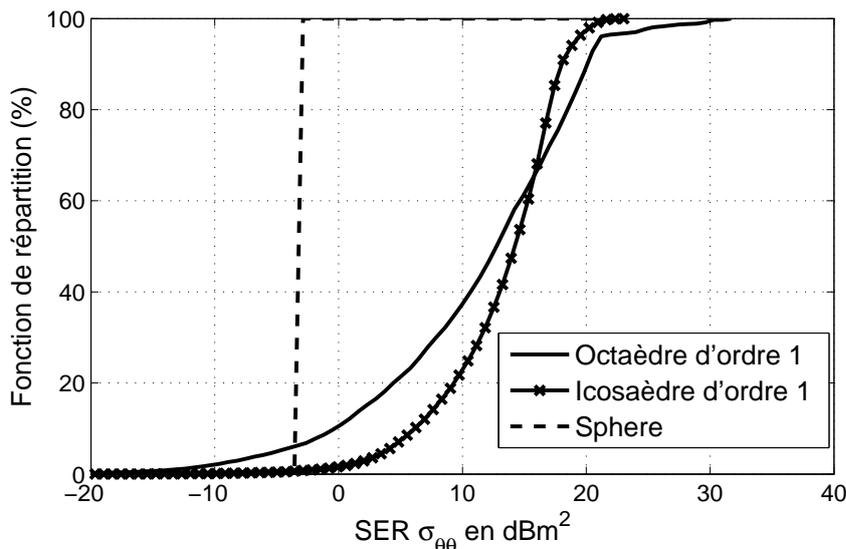


FIG. 4.41 – Fonction de répartition de la SER  $\sigma_{\theta\theta}$  pour les réflecteurs octaédriques et icosaédriques d'ordre 1 et de la sphère de rayon 0.4035 m. Les SER étant calculées sur  $4\pi$  stéradians.

facettage du pentadodécaèdre, également nommé dodécaèdre pentakis, qui est de classe 60), la forme du réflecteur approximera d'autant plus la forme de la sphère tout en préservant l'effet trièdre (effet des SR, DR et TR principalement). Le réflecteur tendrait alors vers un caractère proche de l'isotropie.

Finalement, la classe du réflecteur polyédrique influe sur la directivité du réflecteur.

#### 4.3.4.2 Influence de l'ordre du réflecteur polyédrique

L'étude concerne maintenant l'influence de l'ordre du réflecteur. Pour cela, la SER monostatique sur  $4\pi$  stéradians des octaèdres (réflecteurs octaédriques rigoureusement) d'ordre 1, 2 et 4 et celle des icosaèdres (réflecteurs icosaédriques rigoureusement) d'ordre 1, 2 et 4 sont calculées. Les réflecteurs sont dimensionnés de telle sorte qu'ils soient tous inscrits dans une même sphère circonscrite de rayon 1.614 m. Ainsi, la longueur de l'arête interne des trièdres composant l'icosaèdre d'ordre 4 est de  $L = 0.3$  m. La fréquence est de  $f = 10$  GHz.

La différence des SER en co-polarisation et polarisation croisée exprimées en dB :  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  (soit le rapport en dB des SER exprimées en linéaire  $(\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{\phi\theta})$  (dB)), est calculée pour chaque réflecteur. Les fonctions de répartition de ce rapport pour les octaèdres d'ordre 1, 2 et 4 sont comparées sur la figure 4.42(a) et les fonctions de répartition de ce rapport pour les icosaèdres d'ordre 1, 2 et 4 sont comparées sur la figure 4.42(b).

On remarque sur ces deux figures que lorsque l'ordre augmente les courbes sont translatées vers la gauche, indiquant que  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  diminue que ce soit pour les octaèdres que pour les icosaèdres. Ceci implique que, pour une classe donnée, le réflecteur polyédrique d'ordre 4 est plus dépolarisant que ceux d'ordre 1 et 2, puisque la différence entre la co-polarisation et la polarisation croisée diminue quand l'ordre augmente. A titre d'exemple, pour l'icosaèdre d'ordre 4, 50% des valeurs de  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  sont inférieures à 10 dB. Ainsi, la SER en co-polarisation est au maximum 10 dB supérieure à la SER en polarisation croisée pour 50% des configurations monostatiques sur les  $4\pi$  stéradians étudiés. Bien que le modèle ne propose pas une précision fine du calcul de la SER, la polarisation croisée est sous-estimée par le modèle

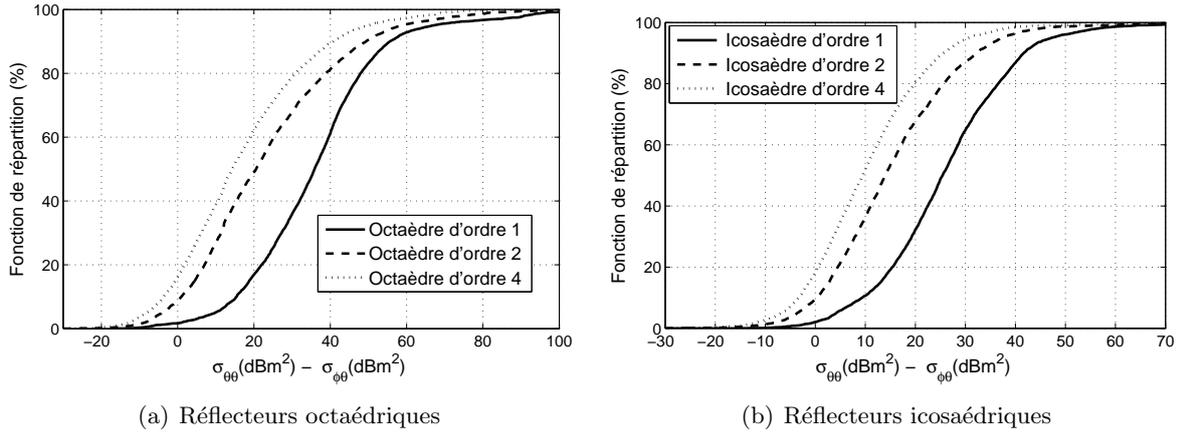


FIG. 4.42 – Fonction de répartition de la différence  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  pour les réflecteurs octaédriques et icosaédriques d'ordre 1, 2 et 4. Les SER étant calculées sur  $4\pi$  stéradians.

asymptotique quand des différences existent avec la MLFMM dans la très grande majorité des cas étudiés. L'effet dépolarisant pourrait donc en réalité être plus important qu'il n'est prédit dans ce paragraphe. Finalement il peut être intéressant de noter que l'effet de dépolarisation obtenu en augmentant l'ordre du réflecteur est différent de celui décrit dans [89, 185, 186].

Il peut s'avérer intéressant de savoir si ce phénomène correspond à des directions d'observation réparties uniformément sur les  $4\pi$  stéradians (auquel cas il sera difficile de profiter de cet effet) ou s'il concerne des zones angulaires assez larges. Pour y répondre les figures 4.43 et 4.44 illustrent les valeurs du terme  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  pour le cas monostatique avec  $\theta_s \in [0^\circ; 90^\circ]$  et  $\phi_s \in [0^\circ; 90^\circ]$  pour un réflecteur octaédrique d'ordre 4 dont la longueur d'une arête interne de trièdre est  $L = 0.3$  m. La fréquence est de  $f = 10$  GHz. Sur la figure 4.43 une dynamique de 20dB est considérée et le maximum est fixé à 0 dB ce qui laisse apparaître les zones angulaires où le terme  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  est négatif : quand la polarisation croisée est plus élevée que la co-polarisation.

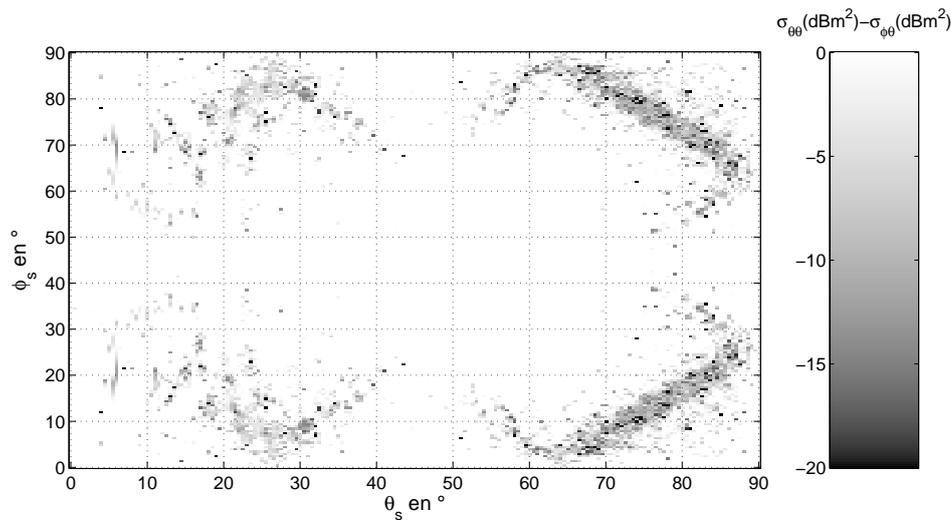


FIG. 4.43 –  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  pour le réflecteur octaédrique d'ordre 4.  $L = 0.3$  m et  $f = 10$  GHz. Dynamique de 20 dB.

Sur la figure 4.44 une dynamique de 50dB avec un maximum de 30 dB.

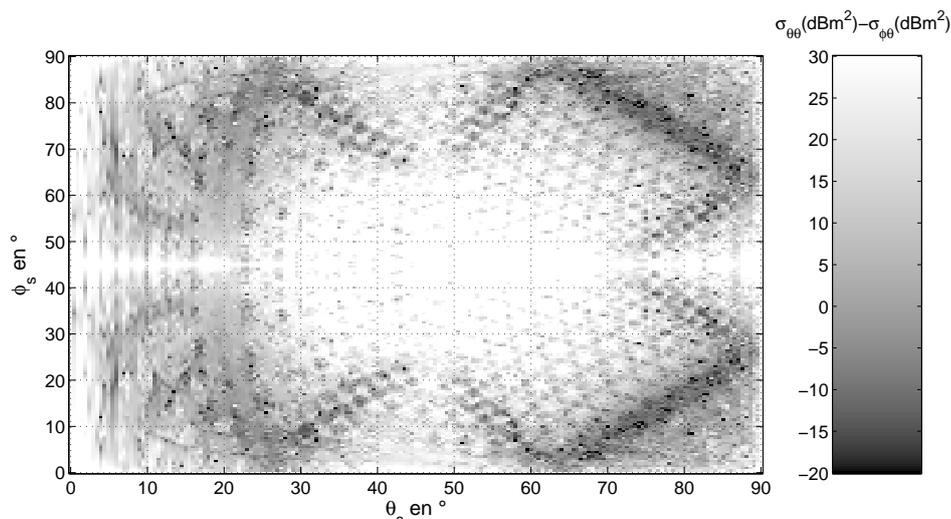


FIG. 4.44 –  $\sigma_{\theta\theta}(\text{dBm}^2) - \sigma_{\phi\theta}(\text{dBm}^2)$  pour le réflecteur octaédrique d'ordre 4.  $L = 0.3$  m et  $f = 10$  GHz. Dynamique de 50 dB.

On remarque sur ces deux figures que l'effet de dépolarisation, induit par l'augmentation de l'ordre du réflecteur, est obtenu pour des secteurs angulaires suffisamment large pour être exploité. D'autres simulations, non présentées dans ce manuscrit, ont montré des résultats similaires en considérant le réflecteur icosaédrique d'ordre 4 ou même un réseau de trièdre d'ordre 2 (illustré sur la figure 4.1). De telles structures pourraient être employées afin de modifier la signature d'un diffuseur. Une application militaire possible serait de disposer ces structures à des endroits clés d'un navire en les orientant de sorte qu'une forte dépolarisation soit obtenue en réponse à une onde excitatrice provenant d'une menace.

Finalement, on peut conclure que l'ordre du réflecteur polyédrique influe sur l'effet de dépolarisation créé par le réflecteur.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle asymptotique analytique pour le calcul de la diffraction par un réflecteur polyédrique en espace libre a été présenté. Il repose sur le calcul asymptotique de la signature bistatique d'un trièdre en utilisant conjointement l'OG, l'OP et la MCE tout en tenant compte des effets d'ombrage en observation et en excitation.

Les comparaisons des résultats issus de ce modèle avec une méthode de référence, la MLFMM, ont montré tout l'intérêt d'une telle modélisation : bien qu'en polarisation croisée seul le profil de la SER est retrouvé, les résultats en co-polarisation sont très satisfaisants aussi bien en configurations monostatiques que bistatiques. Les temps de calcul sont de l'ordre de la seconde alors que la méthode rigoureuse rapide nécessite de nombreuses heures de calcul pour des configurations monostatiques, si le calcul est réalisable. En effet dans le domaine des hautes fréquences, dû au nombre élevé d'inconnues, les réflecteurs pouvant être étudiés avec une méthode rigoureuse sur un PC de bureau ne sont que d'ordre 1 et de classe 8 au maximum. Quant à lui, le modèle asymptotique peut être appliqué, sans aucun problème de stockage mémoire, quels que soient la taille, l'ordre et la classe du réflecteur polyédrique sans augmenter le temps de calcul. A noter

que plus les réflecteurs sont de grande taille et plus l'OG, l'OP et la MCE sont pertinentes : le modèle devient encore plus précis.

A l'aide de ce modèle, des propriétés intrinsèques des réflecteurs ont été dégagées. Nous avons ainsi montré deux propriétés intéressantes. La première est que plus la classe du réflecteur polyédrique augmente et moins celui-ci est directif. La seconde étant que plus l'ordre du réflecteur polyédrique augmente et plus l'effet de dépolarisation en monostatique est important.

Ce travail a fait l'objet de deux publications en revue [187, 188], de trois publications en conférence internationale [189, 190, 191] ainsi que d'une publication en conférence nationale [192].

# Conclusion et perspectives

Cette thèse a été dévolue à l'étude de la diffusion par un réflecteur polyédrique situé au-dessus d'une surface de mer. Ce réflecteur, assimilable à une croix dans une scène bidimensionnelle, favorise le retour de l'onde incidente et dispose ainsi d'un fort pouvoir réflecteur. Cependant, lorsqu'il est placé en environnement marin, les couplages avec la surface de mer peuvent altérer fortement l'écho obtenu lorsque celui-ci est considéré en espace libre. Le principal objectif de ce manuscrit a été d'étudier rigoureusement ces phénomènes de couplage pour une scène bidimensionnelle et de proposer des méthodes "exactes" et rapides pour résoudre ce problème. Ces méthodes servent alors de référence pour tester la validité d'une méthode hybride également proposée. Un modèle asymptotique analytique de la diffraction par le réflecteur en espace libre a été détaillé et étendu au cas tridimensionnel, donnant des résultats temps-réel très satisfaisants.

Dans un premier temps, les notions et moyens nécessaires pour modéliser la diffusion par un réflecteur polyédrique au-dessus d'une surface de mer ont été exposés. Un large éventail de méthodes de résolution du problème de la diffusion a été présenté, orientant ainsi notre choix sur les méthodes à utiliser. Enfin, une analyse de la scène est venue clore ce premier chapitre. La classe et l'ordre d'un réflecteur polyédrique ont été définis, la description des surfaces rugueuses aléatoires ainsi qu'une méthode permettant de générer un profil rugueux ont été présentés.

A partir de l'analyse réalisée au chapitre 1, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la diffusion par un diffuseur placé en espace libre dans une scène bidimensionnelle (cas 2D). La Méthode des Moments a été appliquée sur une surface rugueuse monodimensionnelle (scène 2D) en espace libre. Afin d'obtenir un modèle rigoureux de complexité plus faible, les méthodes "Forward-Backward" (FB) et "Forward-Backward with Spectral Acceleration" (FB-SA) ont été étudiées, exposées et appliquées. Les résultats issus des méthodes FB et FB-SA ont été comparés à ceux obtenus à partir de la MdM (inversion directe par décomposition LU) pour différents types de surfaces rugueuses (gaussienne, surface de mer, PC, TC, diélectrique...). Plusieurs conclusions ont été tirées pour le cas d'une surface gaussienne :

- la méthode FB, de complexité de  $\mathcal{O}(N^2)$ , converge très efficacement vers la MdM à condition de bien dimensionner l'ordre  $P_{\text{FB}}$  intervenant dans la procédure itérative,
- la norme de la matrice caractéristique de la procédure itérative de la FB,  $\|\bar{\mathbf{M}}_{\text{FB}}\|$ , est un critère pertinent et indépendant des angles d'incidence et de diffusion, pour étudier la validité de la méthode FB,
- la FB-SA, de complexité de  $\mathcal{O}(N)$ , converge vers la FB en choisissant pour distance des interactions fortes :  $x_{d0} = 3L_c$ ,
- pour une surface diélectrique, le résultat de la FB-SA tend vers le résultat de la FB mais ne

l'égale pas ; un nouveau contour d'intégration adapté à ce type de surface devrait résoudre ce problème.

Plusieurs conclusions ont également été dressées pour le cas d'une surface de mer TC :

- la convergence de la méthode FB est faiblement sensible à l'angle d'incidence, à l'écart type des hauteurs ainsi qu'à la fréquence,
- la convergence est plus rapide en TM qu'en TE,
- la FB-SA converge vers la FB en choisissant pour distance des interactions fortes :  $x_{d0} = \alpha L_c$  avec  $\alpha \geq 0.02$ , où  $L_c = (0.154u_{10}^{2.04})$  est la longueur de corrélation spatiale de la rugosité de grande échelle.

A titre d'exemple, pour  $f = 3$  GHz ( $\lambda = 0.1$  m) et  $u_{10} = 5$  m/s, la distance des interactions fortes peut être  $x_{d0} = 0.2$  m seulement, ce qui correspond à seulement  $N_s = 20$  échantillons concernés par les interactions fortes (avec un pas d'échantillonnage  $\Delta x = \lambda/10$ ). Nous avons ainsi montré que la FB-SA est une méthode particulièrement bien adaptée pour des applications maritimes.

La deuxième partie de ce chapitre a concerné la modélisation de la diffraction par une croix en espace libre. L'application de la MdM sur l'objet a été validée en considérant en premier lieu un cylindre circulaire dont la solution analytique est connue. Fort de ces résultats, la MdM a pu être appliquée au cas de la croix. Un modèle asymptotique analytique, basé sur l'Optique Physique (OP) et l'Optique Géométrique (OG), a été proposé pour évaluer la SER d'une croix en espace libre et des comparaisons avec la méthode de référence (la MdM) ont montré des résultats encourageants. Une étude menée sur la diffraction en configuration de fort bistatisme a montré la pertinence d'appliquer le principe de Huygens pour tenir compte du phénomène de "forward scattering". Dans le cas du dièdre, nous avons alors montré la nécessité d'évaluer les ombrages en observation pour tenir compte de ce phénomène dans le calcul des Simples Réflexions (SR) et Doubles Réflexions (DR).

Dans le chapitre 3, le calcul de la diffusion par une scène 2D constituée d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse a été considéré. Les phénomènes de couplage ont tout d'abord été mis en exergue en étudiant les équations intégrales de la scène. En utilisant l'étude menée au chapitre 2, la MdM a été appliquée pour servir de méthode de référence.

Afin d'envisager l'accélération du calcul et améliorer le stockage mémoire, la méthode PILE développée dans la thèse de N. Déchamps [1] a été utilisée. Dans un premier temps elle a été appliquée pour un objet situé sous une surface rugueuse. Cette étude a fait l'objet d'une publication en revue [134] et d'une publication en conférence internationale [169]. Nous avons ensuite proposé l'extension de la méthode PILE pour le cas plus général où les deux diffuseurs sont situés dans le milieu incident. Cette méthode numérique rigoureuse, qui exploite la décomposition par bloc de la matrice impédance, admet une interprétation physique simple. A l'aide de cette décomposition par bloc, la FB-SA a ensuite été appliquée pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse. Des comparaisons avec la MdM ont démontré la convergence et la validité de la méthode PILE+FB-SA qui peut maintenant servir de méthode de référence. Une conclusion importante de cette étude est que le paramétrage des méthodes FB et FB-SA intégrées dans la méthode PILE ne dépend que du problème "surface seule". La méthode PILE+FB-SA est très intéressante en terme de complexité. En effet si la surface rugueuse est très grande et si l'objet est de petite taille alors  $N_2 \gg N_1$  et la complexité de la méthode est de  $[(2Q + 1)P_{FB} (P_{PILE} + 1) \mathcal{O}(N_2)]$ . Le stockage mémoire est également nettement amélioré puisque si  $N_2 \gg N_s$  alors le nombre d'éléments à stocker n'est que  $N_2 N_s$  pour la sous-matrice liée à la surface rugueuse. Ce travail a fait l'objet d'une publication en revue [137] et d'une publication en conférence internationale [170].

La méthode FB-SA a ensuite été appliquée pour un grand nombre de réalisations afin de dégager des comportements physiques de la scène. Afin d'accélérer le calcul et de diminuer encore la complexité de la méthode, une hybridation de la PILE+FB-SA a été proposée en appliquant l'OP sur la croix. Les contributions des SR des dièdres sont évaluées par l'OP tandis qu'une itération de l'OP est nécessaire pour les DR. Des comparaisons avec la MmM ont montré la pertinence d'une telle méthode via des résultats satisfaisants pour le cas d'une scène maritime dans le domaine micro-ondes. D'autant plus avantageuse que le nombre d'inconnues sur la croix est grand, cette méthode hybride a permis d'obtenir de très bons résultats notamment dans la direction de rétro-diffusion, en considérant un grand nombre de réalisations. De plus, si le nombre d'inconnues sur la croix devient trop important (environ 2500 inconnues sur un PC standard de bureau possédant 2Go de RAM par exemple) alors l'inversion directe par décomposition LU (pour les interactions locales sur l'objet) ne peut être réalisée. par contre, la méthode PILE+FB-SA+OP peut être utilisée.

Finalement, dans le chapitre 4, nous avons détaillé la modélisation de la diffraction par un réflecteur polyédrique (scène 3D) en espace libre. Le modèle asymptotique analytique proposé repose sur le calcul asymptotique de la signature bistatique d'un trièdre en utilisant conjointement l'OG, l'OP et la MCE tout en tenant compte des effets d'ombrage en observation et en excitation. Après avoir modélisé les simples, doubles et triples réflexions et les simples diffractions d'arêtes, des comparaisons avec une méthode de référence, la "Multi-Level Fast Multipole Method", ont permis de tester la validité de la méthode.

Cette étude a montré tout l'intérêt d'une telle modélisation : bien qu'en polarisation croisée seul le profil de la SER est retrouvé, les résultats en co-polarisation sont très satisfaisants tant pour des configurations monostatiques que bistatiques. Les temps de calcul sont de l'ordre de la seconde alors que la méthode rigoureuse rapide nécessite de nombreuses heures de calcul pour des configurations monostatiques. De plus, le modèle asymptotique est applicable quelle que soit la taille du réflecteur, sans aucun problème de stockage mémoire. Alors que ce n'est bien entendu pas le cas pour les méthodes numériques. A noter justement que plus les réflecteurs sont de grande taille et plus l'utilisation de l'OG, de l'OP et de la MCE est pertinente : le modèle devenant alors plus précis. Ce travail a fait l'objet d'une publication en revue [187], d'une publication en conférence internationale [189] ainsi que d'une publication en conférence nationale [192].

Ce modèle asymptotique a été appliqué à différents réflecteurs polyédriques et une étude a ensuite été menée pour dégager des propriétés intrinsèques de ces obstacles particuliers. On a ainsi montré que la classe et l'ordre du réflecteur polyédrique ont une influence directe sur la signature de l'obstacle en terme de directivité et de comportement dépolarisant. Cette étude a fait l'objet d'une publication en revue [188] et de deux publications en conférence internationale [190, 191].

En conclusion, ce travail de thèse a conduit à quatre publications en revue [134, 137, 187, 188], cinq publications en conférence internationale [169, 170, 189, 190, 191] ainsi qu'une publication en conférence nationale [192].

Une des perspectives envisagées est d'obtenir un modèle asymptotique global de la diffusion par une croix au-dessus d'une surface rugueuse en conjuguant d'une part un modèle de résolution sur la croix et un modèle de la diffusion par la surface rugueuse d'autre part. Dans un premier temps, l'étude pourrait être menée pour une scène bidimensionnelle afin de tester sa validité avec les méthodes numériques de référence développées durant cette thèse. L'extension au cas

3D pourrait ensuite être envisagée si les résultats sont concluants.

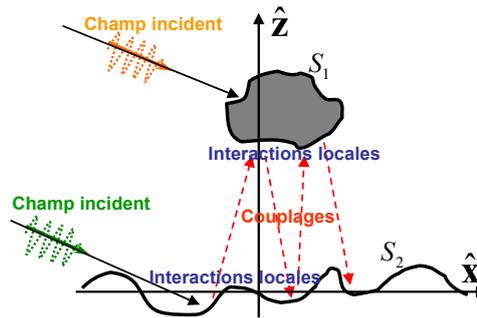


FIG. 4.45 – Géométrie du problème et illustration des différentes étapes de calcul de la méthode PILE.

La figure 4.45 rappelle la géométrie du problème ainsi que les divers calculs nécessaires à la méthode PILE : les interactions locales sur chaque surface et les couplages.

Dans la méthode hybride proposée dans ce manuscrit, seules les interactions locales sur l'objet ont été évaluées asymptotiquement. Il conviendrait donc de faire de même pour les interactions locales sur la surface rugueuse. Pour cela, l'Optique Physique pourrait être utilisée en tenant compte des ombrages ainsi que des multiples réflexions [164, 93, 165, 166]. Cependant cette méthode asymptotique qui pourrait être nommée PILE+OP (OP sur l'objet et OP pour la surface rugueuse) serait très difficile à appliquer au cas 3D pour les interactions locales sur l'obstacle. Pour une scène tridimensionnelle, le calcul des interactions locales sur l'objet ne peut pas être réalisé par des itérations de l'OP comme cela a été proposé dans la méthode hybride (pour le cas 2D). En effet, dans le cas d'un réflecteur polyédrique, les couplages rigoureux lors des doubles réflexions nécessitent le calcul numérique de quatre intégrales imbriquées. Et six intégrales imbriquées seraient nécessaires pour le calcul des triples réflexions. Il est donc indispensable d'ajouter des hypothèses simplificatrices pour les interactions locales sur l'objet.

La résolution asymptotique analytique de la diffraction par une croix en espace libre proposée au paragraphe 2.2.4 de ce manuscrit semble la plus pertinente pour cela et produit des résultats encourageants. Cette méthode applique l'OP pour les SR et l'OG combinée à l'OP pour les DR. L'utilisation de l'OG lors de la première réflexion des DR permet de s'affranchir de la complexité du couplage en champ proche des faces du dièdre mais le calcul de la direction de la réflexion spéculaire est nécessaire. Ce calcul n'a de sens que si l'onde excitatrice est considérée plane. Or le champ provenant de la surface inférieure ne peut pas être considéré comme une onde plane au niveau de la croix. Il conviendrait alors de décomposer ce champ en une somme d'onde plane (en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green), d'utiliser ensuite le modèle analytique sur la croix pour chaque onde plane et d'évaluer ainsi la réponse de la croix par sommation des champs diffractés. Une alternative pour la décomposition en onde plane serait d'appliquer la méthode du Spectre angulaire d'Ondes Planes (PWS pour Plane Wave Spectrum en anglais) par le biais d'une transformée de Fourier [193, 194].

Le modèle asymptotique basé sur l'OP combinée à l'OG/OP (paragraphe 2.2.4) est évalué analytiquement en considérant le récepteur placé en champ lointain. Mais le champ diffracté par la croix ne peut pas être considéré comme une onde plane au niveau de la surface rugueuse. Le rayonnement par l'OP (pour les SR et pour la deuxième réflexion des DR) vers la surface rugueuse doit être évalué rigoureusement en zone de champ proche tout comme cela est réalisé dans le modèle hybride proposé au chapitre 3. Dans le cas 3D cela revient à calculer numérique-

ment une intégrale surfacique (deux intégrales imbriquées) par plaque du réflecteur participant à la diffraction (non ombrée). Bien que le calcul ne puisse pas être temps-réel, il n'en demeurerait pas moins réalisable et calculable sur un PC standard de bureau. En effet, utiliser l'OG lors des couplages entre les plaques de l'objet permet de s'affranchir des calculs d'intégrales surfaciques supplémentaires. Le modèle asymptotique basé sur l'OG et l'OP, développé pour le dièdre pour le cas 2D, semble donc très intéressant.

Quant à la surface rugueuse, d'autres modèles asymptotiques analytiques existants s'avèrent très intéressants (voir paragraphe 1.4.3). On peut citer par exemple la SSA (Small Slope Approximation) [70, 71, 72, 73] ou bien la WCA (Weighted Curvature Approximation) [167, 73, 168], valides pour des angles d'incidence modérés.

A l'aide des modèles numériques rapides ou du modèle hybride développés au cours de cette thèse, la validité du modèle asymptotique analytique obtenu pourrait être testée pour diverses configurations pouvant même impliquer un très grand nombre d'inconnues.

Si ce modèle asymptotique pour une scène 2D est validé après différentes étapes de test, son extension à une scène tridimensionnelle nécessitera l'emploi du modèle de la diffraction par un réflecteur polyédrique, détaillé dans ce manuscrit. De ce fait, il sera également intéressant d'améliorer le calcul en ajoutant d'autres contributions, notamment le calcul en zone de "forward scattering" (configuration de fort bistatisme). Pour cela, l'étude menée dans ce manuscrit sur le dièdre 2D pourra être étendue au cas 3D en considérant le rayonnement par le principe de Huygens ou par le principe de Babinet. L'emploi de la Théorie Géométrique de la Diffraction au lieu de l'OG lors des premières réflexions des DR et TR pourrait également améliorer la précision des résultats notamment en polarisation croisée. En effet, les phénomènes de diffractions/réflexions seraient ainsi inclus dans le modèle. Cela suppose, entre autres, de revoir les projections géométriques réalisées dans les calculs, puisque les rayons réfléchis par une arête forment un cône (le cône de Keller [35]) comme l'ont fait Corona et al. [79]. Mais il faudrait également tenir compte en plus des ombrages (afin que le modèle soit valide pour tout angle d'excitation et d'observation).

Dans un souci d'être le plus fidèle à la réalité, d'autres phénomènes pourraient être inclus dans les modèles tels que des déformations des réflecteurs. Ainsi, on pourra considérer des trièdres dont les plaques sont non mutuellement orthogonales ou dont les arêtes externes sont courbées (elles étaient supposées rectilignes jusqu'à présent). Dans les deux cas, cela oblige à revoir complètement les projections géométriques lors de la prise en compte des ombrages, et lors des calculs des différentes contributions. Enfin, le phénomène de conduit d'évaporation (variation de l'indice de réfraction suivant la direction verticale au-dessus de la mer) engendré par un gradient de température entre l'air et la surface de l'eau pourra également faire l'objet d'une étude afin de l'inclure dans les modèles. Une première modélisation consisterait à utiliser la méthode de l'Equation Parabolique [194].



## Annexe A

# Représentation intégrale des champs en 3D

Utilisons la relation (1.16)

$$\iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dv = \iint_S [\mathbf{P} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{P})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (\text{A.1})$$

et posons  $\mathbf{P} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{Q} = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}}$  où  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unitaire constant et de direction arbitraire [9, 10, 11, 2] et  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la fonction de Green définie par l'équation (1.15).  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  sont des vecteurs positions, respectivement point source et point d'observation, tous deux placés dans le volume  $V_0$ . Sachant que le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  vérifie l'équation de propagation (1.7) et avec quelques relations vectorielles, les éléments de l'équation (A.1) peuvent être calculés séparément :

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P} = k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q} = k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} + \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{Q} = \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \wedge \hat{\mathbf{u}}. \quad (\text{A.4})$$

En remplaçant dans l'équation (A.1), le terme de gauche s'écrit alors

$$\iiint_{V_0} \left\{ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} \cdot (k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r})) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} + \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))] \right\} dv. \quad (\text{A.5})$$

Le dernier terme de cette expression peut être simplifié. En effet  $\mathbf{A} \cdot \nabla B = \nabla \cdot (B\mathbf{A}) - B\nabla \cdot \mathbf{A}$ , soit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \mathbf{E}(\mathbf{r})] - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})), \quad (\text{A.6})$$

et en tenant compte qu'il y a absence de charges et que par conséquent  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (\text{A.7})$$

Utilisons le théorème d'Ostrogradski [9], qui stipule que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface :

$$\iiint_{V_0} \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \mathbf{E}(\mathbf{r})] dv = \iint_{S_0} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) ds. \quad (\text{A.8})$$

Le terme de gauche de l'équation (A.1) peut donc s'écrire :

$$\iiint_{V_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot (i\omega\mu g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r})) dv - \iint_{S_0} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) ds. \quad (\text{A.9})$$

En considérant l'équation (A.4), le terme de droite de l'équation (A.1) s'écrit quant à lui

$$\iint_{S_0} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \wedge (\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \wedge \hat{\mathbf{u}}) - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 ds, \quad (\text{A.10})$$

et en utilisant les égalités du double produit vectoriel on obtient

$$\iint_{S_0} [(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \hat{\mathbf{u}} - (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla + (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 ds, \quad (\text{A.11})$$

qui peut également s'écrire

$$\iint_{S_0} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}) (\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) - (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) - (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) + (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) ds. \quad (\text{A.12})$$

Une factorisation par  $\hat{\mathbf{u}}$  est ensuite réalisée, et le terme (A.12) peut être s'écrire

$$\iint_{S_0} [(\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \hat{\mathbf{n}}_0 + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{u}} ds, \quad (\text{A.13})$$

et on reconnaît dans ce terme deux égalités du double produit vectoriel, on obtient donc

$$\iint_{S_0} [(\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_0 \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}))] \cdot \hat{\mathbf{u}} ds, \quad (\text{A.14})$$

et en utilisant les équations (1.1b) et (1.2b), le terme de droite de l'équation (A.1) se simplifie finalement en

$$\iint_{S_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds. \quad (\text{A.15})$$

A partir des équations (A.9) et (A.15), l'équation (A.1) s'écrit

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot (i\omega\mu g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r})) dv = \\ & + \iint_{S_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] ds. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Comme la surface  $S_0$  est la réunion de  $S$  et  $S_\infty$ , nous pouvons décomposer l'intégrale sur  $S_0$  en deux intégrales de surface en tenant compte du sens des normales (d'après le théorème de Green, les normales doivent être tournées vers l'extérieur de  $V_0$ ). L'équation (A.16) devient alors :

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot (i\omega\mu g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r})) dv = \\ & + \iint_{S_\infty} \hat{\mathbf{u}} \cdot (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}}_\infty \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}}_\infty \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}}_\infty \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) ds \\ & - \iint_S \hat{\mathbf{u}} \cdot (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Le vecteur  $\hat{\mathbf{u}}$  peut être supprimé de l'équation puisqu'il est constant et arbitraire. L'intégrale sur la surface  $S_\infty$  est nulle du fait de la condition de rayonnement à l'infini. La fonction de Dirac contribuera seulement si le point d'observation, défini par le vecteur position  $\mathbf{r}'$ , se situe dans la région 0 et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{r}' \in V_1 \end{cases} = \iiint_{V_0} i\omega\mu g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}) dv \\ & + \iint_S (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

La première intégrale dans le terme de droite de l'équation est le champ généré par la source de courant propagé au point  $\mathbf{r}'$  et correspond au champ incident  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}')$ . L'équation suivante est finalement obtenue :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{r}' \in V \end{cases} = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \\ & + \iint_S (g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Dans le cas d'un objet diélectrique, une deuxième équation intégrale est nécessaire. Celle-ci est obtenue en appliquant le même raisonnement dans le même volume  $V$  (les vecteurs  $\mathbf{r}'$  et  $\mathbf{r}$  sont positionnés dans le volume  $V$ ) et on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in V \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} = \\ & - \iint_S (g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu_1 (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) \wedge \nabla g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \nabla g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) ds, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

où le signe  $-$  vient du fait que la normale à la surface du volume  $V$  ( $\hat{\mathbf{n}}$ ) est dirigée vers le volume  $V_0$ .  $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et  $\mu_1$  sont respectivement la fonction de Green et la perméabilité dans le milieu  $\Omega_1$ .



## Annexe B

# Calcul de l'intégration de l'OP numérique dans la méthode PILE étendue - cas TE

L'intégration de l'OP dans la méthode PILE étendue en polarisation TE nécessite d'appliquer l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  sur les fonctions de propagation des champs vers la croix. Ces champs, qui excitent l'objet, sont le champ incident, le champ total surfacique  $\psi_2$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2}$  et le champ sur une autre face de la croix lors des doubles réflexions. On rappelle que la dérivée normale d'une fonction est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \nabla_{r_1} f = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_1} \end{bmatrix} = \frac{v}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \left( -\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \right), \quad (\text{B.1})$$

puisque

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \frac{v}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \begin{bmatrix} -\gamma_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

où  $v$  tient compte de l'orientation de la normale. Il s'agit maintenant d'appliquer cet opérateur sur les différents champs.

### B.1 Calcul sur le champ incident

Le champ incident sur l'objet dans le cas TE est obtenu en appliquant l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  sur le champ incident sur l'objet obtenu dans le cas TM :

$$b_1''(x_1, z_1) = \frac{\partial b_1'(x_1, z_1)}{\partial n_1}, \quad (\text{B.3})$$

avec

$$b_1'(x_1, z_1) = \begin{cases} \psi_i(x_1, z_1) & \text{sur } S_i \\ 0 & \text{sur } S_{\text{ombre}} \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

où  $S_i$  est la surface de la croix directement excitée par le champ incident et  $S_{\text{ombre}}$  est la surface à l'ombre du champ incident. Soit :

$$b_1''(x_1, z_1) = \begin{cases} \frac{\partial \psi_i(x_1, z_1)}{\partial n_1} & \text{sur } S_i \\ 0 & \text{sur } S_{\text{ombre}} \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

Le calcul de la dérivée normale du champ incident peut être réalisé analytiquement à partir de l'expression de  $\psi_i$  donnée par (2.19). Numériquement, ce calcul est également facilement obtenu après échantillonnage de l'expression suivante :

$$\frac{\partial \psi_i(x_1, z_1)}{\partial n_1} = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} \psi_i(\mathbf{r}_1) = \frac{v}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \left( -\gamma_1 \frac{\partial \psi_i(x_1, z_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i(x_1, z_1)}{\partial z_1} \right) \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Calcul du couplage entre la surface inférieure et l'objet

Le champ sur l'objet provenant de la surface inférieure dans le cas TE est obtenu en appliquant l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  sur le champ sur l'objet provenant de la surface inférieure obtenu dans le cas TM :

$$Z_{21}''(x_1, z_1) = \frac{\partial Z_{21}'(x_1, z_1)}{\partial n_1}, \quad (\text{B.7})$$

où  $Z_{21}'(x_1, z_1)$  est la fonction de couplage dans le cas TM, obtenue à partir de l'équation intégrale (3.30) qui, après échantillonnage, aboutit à l'équation (3.35) où les éléments des matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  sont donnés respectivement par (3.26) et (3.27). Ainsi, en considérant la propagation de la dérivée normale du champ total surfacique  $\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2}$ , on a :

$$Z_{21}'(x_1, z_1) = \begin{cases} g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) ds_2 & \text{sur } S_{i_{21}} \\ 0 & \text{sur } S_{\text{ombre}_{21}} \end{cases}, \quad (\text{B.8})$$

où  $S_{i_{21}}$  est la surface de la croix directement excitée par le champ provenant de la surface rugueuse et  $S_{\text{ombre}_{21}}$  est la surface à l'ombre de ce champ. Et en considérant la propagation du champ total surfacique  $\psi_2$ , on a :

$$Z_{21}'(x_1, z_1) = \begin{cases} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial n_2} ds_2 & \text{sur } S_{i_{21}} \\ 0 & \text{sur } S_{\text{ombre}_{21}} \end{cases}, \quad (\text{B.9})$$

Considérons dans un premier temps la propagation de la dérivée normale du champ total surfacique  $\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2}$  en appliquant l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$ .

### B.2.1 Propagation de la dérivée normale du champ surfacique en TE

A partir des équations (B.7) et (B.8), on a :

$$Z_{21}''(x_1, z_1) = \begin{cases} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) ds_2}{\partial n_1} & \text{sur } S_{i_{21}} \\ 0 & \text{sur } S_{\text{ombre}_{21}} \end{cases}, \quad (\text{B.10})$$

or

$$g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) ds_2 = + \frac{i\alpha_2}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|) dx_2 = af(u(x_1, z_1, x_2, z_2)). \quad (\text{B.11})$$

avec

$$\begin{cases} a = \frac{i\alpha_2 dx_2}{4}, \\ f(u) = H_0^{(1)}(u), \\ u(x_1, z_1, x_2, z_2) = k_0 r = u, \\ r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Alors pour  $\mathbf{r}_1 \in S_{i_{21}}$ , on a

$$\begin{aligned} Z_{21}''(x_1, z_1) &= a \frac{\partial f(u)}{\partial n_1} \\ &= a \frac{v}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \left( -\gamma_1 \frac{\partial f(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(u)}{\partial z_1} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

avec

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_1} = -k_0 H_1^{(1)}(u) \frac{x_1 - x_2}{r}, \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial z_1} = -k_0 H_1^{(1)}(u) \frac{z_1 - z_2}{r}, \quad (\text{B.15})$$

### B.2.2 Propagation du champ surfacique en TE

A partir des équations (B.7) et (B.9), on a :

$$Z_{21}''(x_1, z_1) = \begin{cases} \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial n_1 \partial n_2} ds_2 & \text{sur } S_{i_{21}} \\ 0 & \text{sur } S_{\text{ombre}_{21}} \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial n_2} ds_2 &= \frac{a}{\sqrt{1 + \gamma_2^2}} \left( -\gamma_2 \frac{\partial f(u)}{\partial x_2} + \frac{\partial f(u)}{\partial z_2} \right) \\ &= -\frac{ik_0 dx_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 r)}{r} [-\gamma_2(x_2 - x_1) + (z_2 - z_1)], \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

car

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_2} = -k_0 H_1^{(1)}(u) \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial z_2} = -k_0 H_1^{(1)}(u) \frac{z_2 - z_1}{r}. \quad (\text{B.19})$$

Alors pour  $\mathbf{r}_1 \in S_{i_{21}}$ , on a

$$Z_{21}''(x_1, z_1) = \frac{v}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \left( -\gamma_1 \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial x_1 \partial n_2} ds_2 + \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial z_1 \partial n_2} ds_2 \right), \quad (\text{B.20})$$

soit

$$Z_{21}''(x_1, z_1) = \frac{v dx_2}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \left( \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial x_1 \partial x_2} - \gamma_1 \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial x_1 \partial z_2} - \gamma_2 \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial z_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\partial z_1 \partial z_2} \right). \quad (\text{B.21})$$

En utilisant les fonctions définies à l'équation (B.12), on peut écrire :

$$Z''_{21}(x_1, z_1) = \frac{iv dx_2}{4\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \left( \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_1 \partial x_2} - \gamma_1 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_1 \partial z_2} - \gamma_2 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial z_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f(u)}{\partial z_1 \partial z_2} \right). \quad (\text{B.22})$$

Avec

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2 k_0^2 h_{10}(u)}{r^2} + \frac{k_0 h_{11}(u)}{r} \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_1 \partial z_2} = \frac{(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) k_0^2 h_{10}(u)}{r^2} - \frac{2h_{11}(u)}{r^3} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial z_1 \partial x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) k_0^2 h_{10}(u)}{r^2} - \frac{2h_{11}(u)}{r^3} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{(z_1 - z_2)^2 k_0^2 h_{10}(u)}{r^2} + \frac{k_0 h_{11}(u)}{r} \quad (\text{B.26})$$

où

$$h_{10}(u) = H_0^{(1)}(k_0 r) = f(u) \quad (\text{B.27})$$

$$h_{11}(u) = H_1^{(1)}(k_0 r) \quad (\text{B.28})$$

### B.2.3 Discrétisation des fonctions de propagation

La matrice de couplage est donc définie par l'équation (3.35), où les éléments des matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  sont ici obtenus par discrétisation des fonctions de propagation définies aux équations (B.22) et (B.13) respectivement. Pour l'échantillonnage, il suffit de remplacer les variables continues  $x_1, z_1, x_2, z_2, v, \gamma_{1m}, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, dx_2$  par les variables discrètes  $x_{1m}, z_{1m}, x_{2n}, z_{2n}, v_m, \gamma_{1m}, \gamma_{2n}, \alpha_{2n}, \alpha_{1m}, \Delta x_{2n}$  respectivement. Ainsi, et à titre d'exemple, les éléments de la matrice  $\bar{\mathbf{B}}_{21}$  modifiée (l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  a été appliqué) sont donnés par

$$B''_{21m,n} = -\frac{i\Delta x_2 \alpha_{2n}}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_{1m} - \mathbf{r}_{2n}\|)}{\|\mathbf{r}_{1m} - \mathbf{r}_{2n}\|} v_m k_0 \left[ \frac{-\gamma_{1m}(x_{1m} - x_{2n}) + (z_{1m} - z_{2n})}{\sqrt{1 + \gamma_{1m}^2}} \right], \quad (\text{B.29})$$

et

$$\|\mathbf{r}_{1m} - \mathbf{r}_{2n}\| = \sqrt{(x_{1m} - x_{2n})^2 + (z_{1m} - z_{2n})^2} \quad (\text{B.30})$$

L'équation (B.22) est échantillonnée selon la même procédure pour obtenir les éléments  $A''_{21m,n}$ .

## B.3 Calcul du couplage entre les faces

Le champ sur la face  $f_j$  de la croix provenant de la face  $f_i$  dans le cas TE est obtenu en appliquant l'opérateur  $\frac{\partial \bullet}{\partial n_1}$  sur le champ sur la face  $f_j$  provenant de la face  $f_i$  obtenu dans le cas TM :

$$C''(x_1, z_1) = \frac{\partial C(x_1, z_1)}{\partial n_1}, \quad (\text{B.31})$$

où  $C(x_1, z_1)$  est la fonction de couplage des DR dans le cas TM, qui après échantillonnage, aboutit à la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{DR}$  dont les éléments sont donnés par l'équation (3.72). La fonction  $C(x_1, z_1)$  est donnée par :

$$C(x_1, z_1) = \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_{f_i}, \mathbf{r}_1)}{\partial n_{f_i}} ds_{f_i} \quad \forall \mathbf{r}_1 \in S_{f_j}, \quad (\text{B.32})$$

or

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}_{f_i}, \mathbf{r}_1)}{\partial n_{f_i}} ds_{f_i} = -\frac{ik_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_{f_i} - \mathbf{r}_1\|)}{4 \|\mathbf{r}_{f_i} - \mathbf{r}_1\|} [\gamma_{f_i}(x_{f_i} - x_1) - (z_{f_i} - z_1)] dx_{f_i} \quad (\text{B.33})$$

La croix étant parfaitement conductrice, en TE le champ total surfacique est nul. Seule la dérivée normale du champ est à propager et on a pour  $\mathbf{r}_1 \in S_{f_j}$  :

$$C'''(x_1, z_1) = \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}_{f_i}, \mathbf{r}_1)}{\partial n_1 \partial n_{f_i}} ds_{f_i}. \quad (\text{B.34})$$

On remarque que l'équation (B.34) est similaire à l'équation (B.16), et les calculs peuvent donc être adaptés au calcul du couplage en DR pour la polarisation TE. Pour cela, il suffit de remplacer dans les équations l'indice 2 par l'indice  $f_i$  et tenir compte que pour la face  $f_i$ , la normale s'écrit :

$$\hat{\mathbf{n}}_{f_i} = \frac{v_{f_i}}{\sqrt{1 + \gamma_{f_i}^2}} \begin{bmatrix} -\gamma_{f_i} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.35})$$



## Annexe C

# Rotation d'Euler

La matrice de rotation d'Euler est définie dans cette annexe. Elle exprime la transformation d'un repère  $R(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  en un repère  $R(0, \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  à l'aide de trois rotations successives, respectivement d'angle  $\alpha_e$ ,  $\beta_e$  et  $\gamma_e$ .

### C.1 Rotation d'angle $\alpha_e$

Cette rotation, effectuée autour de l'axe  $(0z)$ , transforme le repère  $R(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  en un repère  $R(0, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z})$  comme illustré sur la figure C.1

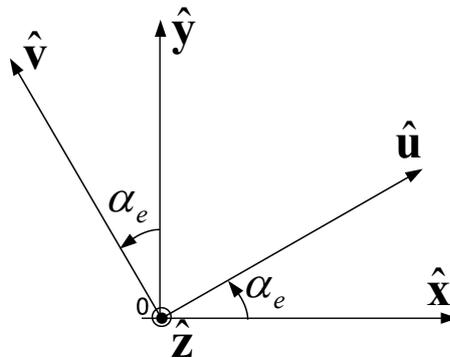


FIG. C.1 – Rotation d'angle  $\alpha_e$ .

Les coordonnées des repères  $R(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  et  $R(0, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z})$  sont liées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{R}_{\alpha_e} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\bar{R}_{\alpha_e} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_e) & -\sin(\alpha_e) & 0 \\ \sin(\alpha_e) & \cos(\alpha_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

### C.2 Rotation d'angle $\beta_e$

Cette rotation, effectuée autour de l'axe  $(0u)$ , transforme le repère  $R(0, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z})$  en un repère  $R(0, \hat{u}, \hat{w}, \hat{z}')$  comme illustré sur la figure C.2

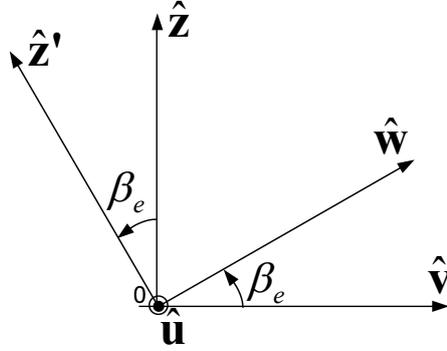


FIG. C.2 – Rotation d'angle  $\beta_e$ .

Les coordonnées des repères  $R(0, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z})$  et  $R(0, \hat{u}, \hat{w}, \hat{z}')$  sont liées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_{\beta_e} \begin{bmatrix} u \\ w \\ z' \end{bmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\bar{\mathbf{R}}_{\beta_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_e) & -\sin(\beta_e) \\ 0 & \sin(\beta_e) & \cos(\beta_e) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

### C.3 Rotation d'angle $\gamma_e$

Cette rotation, effectuée autour de l'axe  $(0z')$ , transforme le repère  $R(0, \hat{u}, \hat{w}, \hat{z}')$  en un repère  $R(0, \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  comme illustré sur la figure C.3

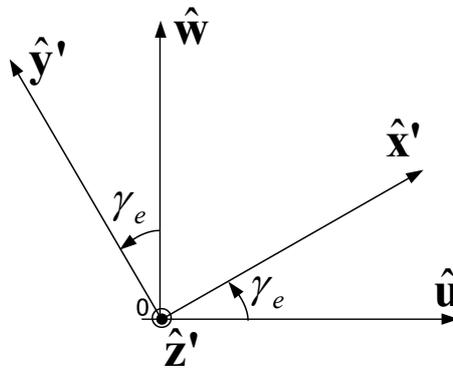


FIG. C.3 – Rotation d'angle  $\gamma_e$ .

Les coordonnées des repères  $R(0, \hat{u}, \hat{w}, \hat{z}')$  et  $R(0, \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  sont liées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ z' \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_{\gamma_e} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

avec

$$\bar{\mathbf{R}}_{\gamma_e} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_e) & -\sin(\gamma_e) & 0 \\ \sin(\gamma_e) & \cos(\gamma_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

La matrice de rotation d'Euler lie finalement les coordonnées des repères  $R(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  et  $R(0, \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

avec

$$\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e) = \bar{\mathbf{R}}_{\alpha_e} \bar{\mathbf{R}}_{\beta_e} \bar{\mathbf{R}}_{\gamma_e}, \quad (\text{C.8})$$

on a alors

$$\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e) = \begin{bmatrix} c(\alpha_e)c(\gamma_e) - s(\alpha_e)c(\beta_e)s(\gamma_e) - c(\alpha_e)s(\gamma_e) - s(\alpha_e)c(\beta_e)c(\gamma_e) & s(\alpha_e)s(\beta_e) \\ s(\alpha_e)c(\gamma_e) + c(\alpha_e)c(\beta_e)s(\gamma_e) - s(\alpha_e)s(\gamma_e) + c(\alpha_e)c(\beta_e)c(\gamma_e) & -c(\alpha_e)s(\beta_e) \\ s(\beta_e)s(\gamma_e) & s(\beta_e)c(\gamma_e) & c(\beta_e) \end{bmatrix} \quad \text{avec } c = \cos \text{ et } s = \sin. \quad (\text{C.9})$$

Les colonnes de la matrice  $\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$  correspondent en fait aux coordonnées des vecteurs unitaires  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$  et  $\hat{z}'$ , exprimés dans la base  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  :

$$\hat{x}' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_e) \cos(\gamma_e) - \sin(\alpha_e) \cos(\beta_e) \sin(\gamma_e) \\ \sin(\alpha_e) \cos(\gamma_e) + \cos(\alpha_e) \cos(\beta_e) \sin(\gamma_e) \\ \sin(\beta_e) \sin(\gamma_e) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

$$\hat{y}' = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_e) \sin(\gamma_e) - \sin(\alpha_e) \cos(\beta_e) \cos(\gamma_e) \\ -\sin(\alpha_e) \sin(\gamma_e) + \cos(\alpha_e) \cos(\beta_e) \cos(\gamma_e) \\ \sin(\beta_e) \cos(\gamma_e) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

$$\hat{z}' = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_e) \sin(\beta_e) \\ -\cos(\alpha_e) \sin(\beta_e) \\ \cos(\beta_e) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

La transformation inverse de la relation (C.7) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

car  $\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$  est une matrice orthogonale.

Les angles d'Euler peuvent être calculés à partir de la matrice  $\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$  en utilisant les relations suivantes :

$$\tan(\gamma_e) = \frac{R_{e31}}{R_{e32}}, \quad (\text{C.14})$$

$$\tan(\alpha_e) = -\frac{R_{e13}}{R_{e23}}, \quad (\text{C.15})$$

$$\tan(\beta_e) = \frac{R_{e32}}{\cos(\gamma_e)R_{e33}} = \frac{R_{e31}}{\sin(\gamma_e)R_{e33}}, \quad (\text{C.16})$$

où la notation suivante est considérée :

$$\bar{\mathbf{R}}_e(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e) = \begin{bmatrix} R_{e11} & R_{e12} & R_{e13} \\ R_{e21} & R_{e22} & R_{e23} \\ R_{e31} & R_{e32} & R_{e33} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

## Annexe D

# Matrice de diffraction de la surface d'une plaque triangulaire par l'Optique Physique

Dans un premier temps, la matrice de diffraction par un réflecteur plan quelconque est investiguée. Ces calculs sont ensuite appliqués à un réflecteur plan en forme de triangle rectangle. La signature d'un triangle quelconque est finalement obtenue, cette figure géométrique étant décomposable en deux triangles rectangles.

### D.1 Matrice de diffraction de la surface d'un réflecteur plan quelconque

Les réflecteurs plans constituent les sous-structures les plus élémentaires d'une cible radar complexe. Il est de ce fait primordial de connaître précisément la signature de ces contributeurs élémentaires. Dans le cadre de l'approximation hautes fréquences, les termes de diffraction par la surface et de diffraction par les arêtes constituent les termes dominants de la signature d'un réflecteur plan de dimension finie. Dans cette section, l'OP est appliquée pour évaluer la signature par la surface de ce réflecteur.

#### D.1.1 Equations intégrales et diverses approximations

On pose :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (D.1a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (D.1b)$$

où  $(\mathbf{H}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r}))$  est le champ électromagnétique total sur la surface,  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale à la surface,  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  est le courant surfacique électrique et  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  le courant surfacique magnétique. Avec la convention  $e^{+i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , on montre alors que l'équation (1.19) peut s'écrire sous la forme [14] :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = - \iint_S \left[ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{i}{\omega\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] ds, \quad (D.2)$$

et en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday (1.1b) on obtient une équation intégrale équivalente :

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = - \iint_S \left[ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') i\omega\epsilon \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{i}{\omega\mu} (\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] ds. \quad (\text{D.3})$$

Après quelques développements, de nouvelles expressions sont obtenues

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = \frac{i}{\omega\epsilon} \iint_S \left[ (1 + ikr' - k^2 r'^2) \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{(-k^2 r'^2 + jkr')}{\eta} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right. \\ \left. + (-3 - 3ikr' + k^2 r'^2) (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})) \hat{\mathbf{k}}_s \right] \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r'^2} ds, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = \frac{i}{\omega\mu} \iint_S \left[ (1 + ikr' - k^2 r'^2) \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \eta(-k^2 r'^2 + jkr') \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right. \\ \left. + (-3 - 3ikr' + k^2 r'^2) (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})) \hat{\mathbf{k}}_s \right] \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r'^2} ds. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Si l'élément de surface  $ds$  est éloigné du point d'observation tel que  $k_0 r' \gg 1$  alors les termes en  $1/r'$  et en  $1/r'^2$  (sans considérer l'atténuation inhérente à la fonction de Green) peuvent être considérés comme nuls. De plus, on considère que le réflecteur est placé dans un milieu assimilé au vide (d'où, entre autres,  $k = k_0$ ,  $\eta = \eta_0$  et  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ) et on obtient alors des expressions simplifiées [14] :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = -ik_0 \iint_S \left[ \left\{ \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \eta_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right\} \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right] g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = ik_0 \iint_S \left[ \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s}{\eta_0} \right\} \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right] g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds. \quad (\text{D.7})$$

Sous l'hypothèse de champ lointain (voir section 1.2.1.3), l'expression de la fonction de Green est simplifiée et les équations (D.6) et (D.7) deviennent

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = -ik_0 \frac{e^{-ik_0 r'}}{4\pi r'} \iint_S \left[ \left\{ \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \eta_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right\} \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right] e^{+ik_0 \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} ds, \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = ik_0 \frac{e^{-ik_0 r'}}{4\pi r'} \iint_S \left[ \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s}{\eta_0} \right\} \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right] e^{+ik_0 \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} ds. \quad (\text{D.9})$$

En considérant l'approximation de l'OP, les courants surfaciques électriques et magnétiques s'expriment, sur la surface illuminée par l'onde incidente, en fonction du champ incident et du champ réfléchi sur le plan tangent à  $S$ . Ils sont considérés nuls dans la zone d'ombre :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_r(\mathbf{r})) \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}) &= -\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad \text{pour } \mathbf{r} \in S_i, \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{pour } \mathbf{r} \notin S_i. \quad (\text{D.11})$$

où  $S_i$  est la surface du réflecteur illuminée par l'onde incidente. Le champ réfléchi s'exprime simplement en fonction du champ incident à l'aide des coefficients de réflexion de Fresnel. Pour un réflecteur parfaitement conducteur, le champ réfléchi est donné par  $\mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ , d'où  $\forall \mathbf{r} \in S_i$  :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 2(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{r})), \quad (\text{D.12a})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (\text{D.12b})$$

Alors les équations (D.8) et (D.9) s'écrivent :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = ik_0\eta_0 \frac{e^{-ik_0r'}}{2\pi r'} \iint_S \left[ \left\{ (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{r})) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right\} \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right] e^{+ik_0\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} ds \quad (\text{D.13})$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = ik_0 \frac{e^{-ik_0r'}}{2\pi r'} \iint_S \left[ (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{r})) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s \right] e^{+ik_0\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} ds. \quad (\text{D.14})$$

L'intégrale (D.14), comportant moins d'opérations vectorielles que l'intégrale (D.13), il est préférable de conduire la suite des développements à partir de l'expression du champ magnétique diffracté. Toutefois, la matrice de diffraction d'une cible étant définie pour le champ électrique par la relation

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}') = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{E}_i(\mathbf{0}) \quad (\text{D.15})$$

où  $\mathbf{E}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{E}_{\mathbf{0}_i}$  (voir équation (1.47)) est le champ électrique incident à l'origine du repère local de la cible. Il sera donc nécessaire de convertir les calculs obtenus pour le champ magnétique en utilisant la relation suivante :

$$\mathbf{E}_p = \eta_0 \mathbf{H}_p \wedge \hat{\mathbf{k}}_p \text{ avec } p = \{i, s\} \quad (\text{D.16})$$

### D.1.2 Développement analytique pour un réflecteur plan

Considérons un réflecteur plan de surface  $S$  contenu dans le plan  $(0, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ , comme représenté sur la figure D.1, ainsi, la normale au plan est dirigée selon l'axe  $(0, \hat{\mathbf{z}})$  ( $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ ). Les vecteurs directeurs des rayons incident et diffracté sont repérés par les angles sphériques  $(\theta_i, \phi_i)$  et  $(\theta_s, \phi_s)$ . Les composantes des champs incident et diffracté sont exprimées, en convention FSA, dans les bases sphériques liées aux rayons,  $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i)$  et  $(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\boldsymbol{\theta}}_s, \hat{\boldsymbol{\phi}}_s)$  définis aux équations (1.48) et (1.49).

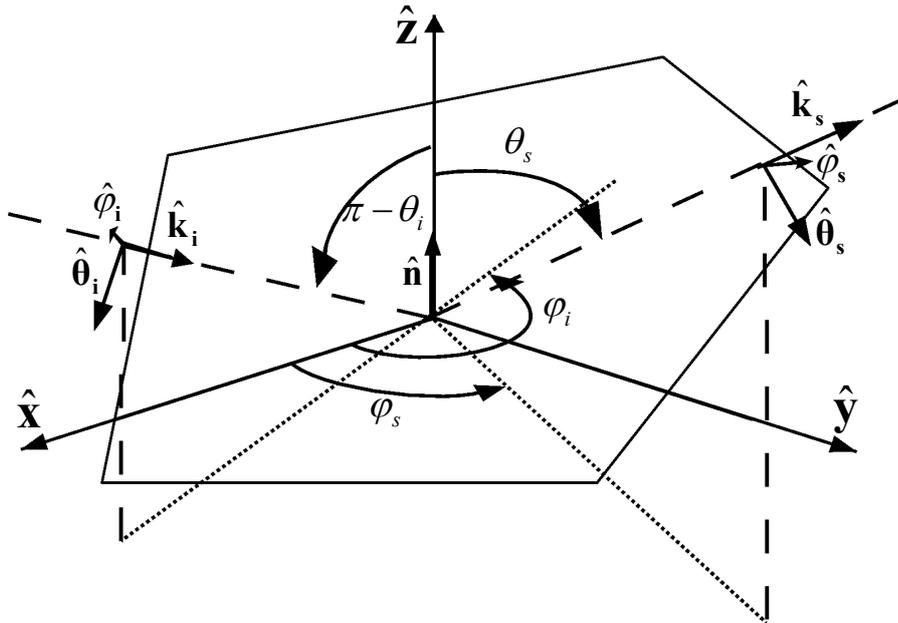


FIG. D.1 – Configuration pour la diffraction par la surface d'un réflecteur plan.

Sous la condition d'un éclairage en onde plane dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}_i$ , le champ magnétique incident en un point  $P$  de coordonnées  $\mathbf{r}$ , sur la surface du réflecteur, est lié au champ incident capté au point 0, l'origine du repère, par la relation suivante :

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{0_i} e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{D.17})$$

avec

$$\mathbf{H}_{0_i} = H_0 \hat{\mathbf{h}}_i \quad (\text{D.18})$$

où  $H_0$  et  $\hat{\mathbf{h}}_i$  représentent respectivement l'amplitude et la polarisation du champ magnétique incident. Alors, en utilisant l'équation (D.14), le champ magnétique diffracté par la surface du réflecteur au point d'observation  $P'$  de coordonnées  $\mathbf{r}'$  s'écrit sous la forme synthétique suivante :

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = ik_0 H_0 I_S \frac{e^{-ik_0 r'}}{2\pi r'} \hat{\mathbf{h}}_s, \quad (\text{D.19})$$

avec :

$$I_S = \int_S e^{-ik_0 (\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \vec{r}} ds, \quad (\text{D.20})$$

et

$$\hat{\mathbf{h}}_s = (\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{h}}_i) \wedge \hat{\mathbf{k}}_s, \quad (\text{D.21})$$

où  $I_S$  est une intégrale de phase sur la surface du réflecteur, et  $\hat{\mathbf{h}}_s$  décrit la polarisation du champ magnétique diffracté.

En exprimant les différents vecteurs dans le repère  $(0, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$  lié à la cible, on obtient une expression plus exploitable de l'intégrale  $I_S$ . Ainsi, puisque

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) \\ \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) \\ \cos(\theta_i) \end{bmatrix}, \quad (\text{D.22})$$

$$\hat{\mathbf{k}}_s = \begin{bmatrix} \sin(\theta_s) \cos(\phi_s) \\ \sin(\theta_s) \sin(\phi_s) \\ \cos(\theta_s) \end{bmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

et

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.24})$$

on obtient :

$$(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{r} = ux + vy, \quad (\text{D.25})$$

avec

$$u = \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) - \sin(\theta_s) \cos(\phi_s), \quad (\text{D.26})$$

et

$$v = \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) - \sin(\theta_s) \sin(\phi_s). \quad (\text{D.27})$$

L'intégrale  $I_S$  peut alors s'écrire sous la forme d'une transformée de Fourier :

$$I_S = \iint_S e^{-ik_0(ux+vy)} dx ds \quad (\text{D.28})$$

Le développement du terme de polarisation permet ensuite de faire apparaître la matrice de diffraction élémentaire du plan réflecteur. Pour cela, la relation (D.21) est tout d'abord reformulée avec des produits scalaires :

$$\hat{\mathbf{h}}_s = (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{h}}_i - (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{h}}_i)\hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{D.29})$$

Les produits scalaires sont ensuite calculés en exprimant tous les vecteurs dans le repère fixe. On obtient ainsi les composantes du vecteur  $\hat{\mathbf{h}}_s$  dans la base  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$  :

$$\hat{\mathbf{h}}_s = \begin{bmatrix} h_s^x \\ h_s^y \\ h_s^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_s)h_i^x \\ \cos(\theta_s)h_i^y \\ -\sin(\theta_s)\cos(\phi_s)h_i^x - \sin(\theta_s)\sin(\phi_s)h_i^y \end{bmatrix}, \quad (\text{D.30})$$

où les composantes du vecteur  $\hat{\mathbf{h}}_i$  dans la base  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$  s'expriment en fonction des composantes sphériques  $h_i^\theta$  et  $h_i^\phi$  par la relation suivante (en utilisant la matrice de rotation sphérique vue à l'équation (1.50)) :

$$\hat{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} h_i^x \\ h_i^y \\ h_i^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i)\cos(\phi_i)h_i^\theta - \sin(\phi_i)h_i^\phi \\ \cos(\theta_i)\sin(\phi_i)h_i^\theta + \cos(\phi_i)h_i^\phi \\ -\sin(\theta_i)h_i^\theta \end{bmatrix}. \quad (\text{D.31})$$

Les composantes sphériques du vecteur  $\hat{\mathbf{h}}_s$  sont alors données par :

$$\begin{bmatrix} h_s^r \\ h_s^\theta \\ h_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\phi_s)h_i^x + \sin(\phi_s)h_i^y \\ -\cos(\theta_s)\sin(\phi_s)h_i^x + \cos(\theta_s)\cos(\phi_s)h_i^y \end{bmatrix} \quad (\text{D.32})$$

soit

$$\begin{bmatrix} h_s^\theta \\ h_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_s) & \sin(\phi_s) \\ -\cos(\theta_s)\sin(\phi_s) & \cos(\theta_s)\cos(\phi_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i^x \\ h_i^y \end{bmatrix}. \quad (\text{D.33})$$

Or, à partir de (D.31), on a :

$$\begin{bmatrix} h_i^x \\ h_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i)\cos(\phi_i) - \sin(\phi_i) \\ \cos(\theta_i)\sin(\phi_i) & \cos(\phi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i^\theta \\ h_i^\phi \end{bmatrix}, \quad (\text{D.34})$$

d'où

$$\begin{bmatrix} h_s^\theta \\ h_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_s) & \sin(\phi_s) \\ -\cos(\theta_s)\sin(\phi_s) & \cos(\theta_s)\cos(\phi_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i)\cos(\phi_i) - \sin(\phi_i) \\ \cos(\theta_i)\sin(\phi_i) & \cos(\phi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i^\theta \\ h_i^\phi \end{bmatrix}. \quad (\text{D.35})$$

Soit

$$\begin{bmatrix} h_s^\theta \\ h_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i)\cos(\phi_s - \phi_i) & \sin(\phi_s - \phi_i) \\ -\cos(\theta_s)\cos(\theta_i)\sin(\phi_s - \phi_i) & \cos(\theta_s)\cos(\phi_s - \phi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i^\theta \\ h_i^\phi \end{bmatrix}. \quad (\text{D.36})$$

En notant  $\hat{\mathbf{e}}_s$  et  $\hat{\mathbf{e}}_i$  les termes de polarisation des champs électriques diffracté et incident, la relation (D.16) permet alors d'exprimer la relation précédente pour les champs électriques :

$$\begin{bmatrix} e_s^\phi \\ e_s^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_s)\cos(\phi_s - \phi_i) & \cos(\theta_s)\cos(\theta_i)\sin(\phi_s - \phi_i) \\ -\sin(\phi_s - \phi_i) & \cos(\theta_i)\cos(\phi_s - \phi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i^\theta \\ e_i^\phi \end{bmatrix}. \quad (\text{D.37})$$

La matrice de diffraction de la surface d'un plan réflecteur, calculée à l'aide de la méthode de l'Optique Physique, a finalement pour expression :

$$\bar{\mathbf{S}} = P_S \bar{\mathbf{S}}^{\text{elem}}, \quad (\text{D.38})$$

où

$$P_s = i \frac{e^{-ik_0 r'}}{\lambda_0 r'} I_s, \quad (\text{D.39})$$

et  $I_s$  est donné par l'équation (D.28), et la matrice  $\bar{\mathbf{S}}^{\text{elem}}$  est donnée par

$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{elem}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_s) \cos(\phi_s - \phi_i) & \cos(\theta_s) \cos(\theta_i) \sin(\phi_s - \phi_i) \\ -\sin(\phi_s - \phi_i) & \cos(\theta_i) \cos(\phi_s - \phi_i) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.40})$$

Cette matrice constitue la matrice de diffraction élémentaire de la surface d'un plan réflecteur de forme quelconque. L'information liée à la forme géométrique du plan réflecteur est contenue dans l'intégrale de phase  $I_S$ . Le paramètre  $P_S = P_S(r', \lambda_0, \theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, S)$  est un terme de pondération spatio-fréquentielle qui dépend de la distance d'observation  $r'$ , de la longueur d'onde  $\lambda_0$ , des angles d'incidence et de diffraction, et de la surface  $S$  du réflecteur.

Les coefficients de SER bistatique sont définis, à partir des coefficients de la matrice de diffraction, par la relation (1.53), soit :

$$\sigma_{pq} = \lim_{r' \rightarrow \infty} [4\pi r'^2 |S_{pq}|^2] \quad (\text{D.41})$$

avec  $p = \{\theta, \phi\}$  et  $q = \{\theta, \phi\}$ . On obtient ainsi la matrice de SER bistatique suivante :

$$\bar{\sigma} = 4\pi r^2 |P_s|^2 \begin{bmatrix} (\cos \theta_s \cos(\phi_s - \phi_i))^2 & (\cos \theta_s \cos \theta_i \sin(\phi_s - \phi_i))^2 \\ (\sin(\phi_s - \phi_i))^2 & (\cos \theta_i \cos(\phi_s - \phi_i))^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.42})$$

## D.2 Matrice de diffraction de la surface d'un réflecteur en forme de triangle rectangle

La configuration géométrique adoptée pour une plaque triangulaire rectangle est représentée sur la figure D.2. La plaque est définie par les dimensions  $L_x$  et  $L_y$  suivant les axes  $(0x)$  et  $(0y)$ . Le centre de phase est situé à l'angle droit de la plaque triangulaire.

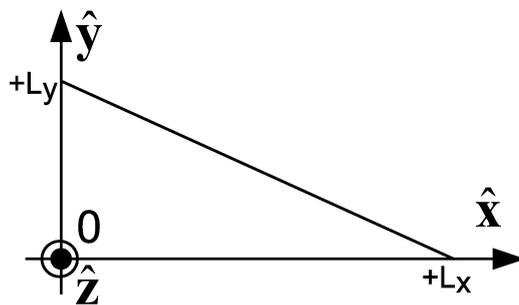


FIG. D.2 – Configuration géométrique d'une plaque triangulaire rectangle.

L'information liée à la géométrie de la surface est contenue dans l'intégrale de phase  $I_S$ , donnée par la relation (D.28). La surface d'une plaque triangulaire rectangle étant définie par :

$$S = \left\{ (x, y) \setminus \left( x \in [0; L_x], y \in \left[ 0; L_y \left( 1 - \frac{x}{L_x} \right) \right] \right) \right\}. \quad (\text{D.43})$$

L'intégrale de phase s'écrit alors :

$$I_S = \int_0^{L_x} e^{-ik_0ux} \left( \int_0^{L_y(1-x/L_x)} e^{-ik_0vy} dy \right) dx, \quad (\text{D.44})$$

avec

$$\int_0^{L_y(1-x/L_x)} e^{-ik_0vy} dy = \frac{1 - e^{-ik_0vL_y(1-x/L_x)}}{ik_0v}. \quad (\text{D.45})$$

On a alors

$$I_S = \frac{1}{ik_0v} \int_0^{L_x} \left( e^{-ik_0ux} - e^{-ik_0vL_y} e^{-jk(u-v\frac{L_y}{L_x})x} \right) dx, \quad (\text{D.46})$$

$$= \frac{1}{ik_0v} \left( \frac{1 - e^{-ik_0uL_x}}{ik_0u} - L_x \frac{e^{-ik_0vL_y} - e^{-ik_0uL_x}}{ik_0(uL_x - vL_y)} \right), \quad (\text{D.47})$$

$$= L_x L_y \frac{\text{sinc}(k_0vL_y/2)e^{-ik_0vL_y/2} - \text{sinc}(k_0uL_x/2)e^{-ik_0uL_x/2}}{ik_0(uL_x - vL_y)}. \quad (\text{D.48})$$

En définissant la fonction  $\zeta(x, y)$  par

$$\zeta(x, y) = \frac{\text{sinc}(y)e^{-iy} - \text{sinc}(x)e^{-ix}}{i(x - y)}, \quad (\text{D.49})$$

avec

$$\zeta(0, 0) = 1 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq 0}} \zeta(x, y) = \frac{e^{-ix}}{x} [\text{sinc}(x) - e^{-ix}], \quad (\text{D.50})$$

on obtient finalement

$$I_S = \frac{L_x L_y}{2} \zeta(k_0uL_x/2, k_0vL_y/2). \quad (\text{D.51})$$

Le terme de pondération spatio-fréquentielle caractérisant la diffraction par la surface d'une plaque triangulaire rectangle, est alors donné par :

$$P_S = ik_0 \frac{L_x L_y}{2} \zeta(k_0uL_x/2, k_0vL_y/2) \frac{e^{-ik_0r'}}{2\pi r'} \quad (\text{D.52})$$

### D.3 Matrice de diffraction de la surface d'un réflecteur en forme de triangle quelconque

Tout triangle quelconque est décomposable géométriquement en deux triangles rectangles. Il suffit pour cela de déterminer une hauteur issue d'un sommet et coupant le côté opposé à l'intérieur du triangle, comme illustré sur la figure D.3.

Alors, les deux triangles rectangles sont définis dans leurs propres repères locaux, comme illustré sur la figure D.4, à l'aide de rotations d'Euler (voir l'annexe C). Les angles de rotation pour obtenir les deux repères étant calculés à partir des coordonnées des points des deux triangles. Les angles d'incidence et de diffusion dans les repères locaux sont calculés à partir des équations (4.2) et (4.3). En utilisant les équations (D.38) et (D.52), la signature de la surface de chaque triangle rectangle est alors évaluée dans le repère local associé. Ces deux signatures sont ensuite

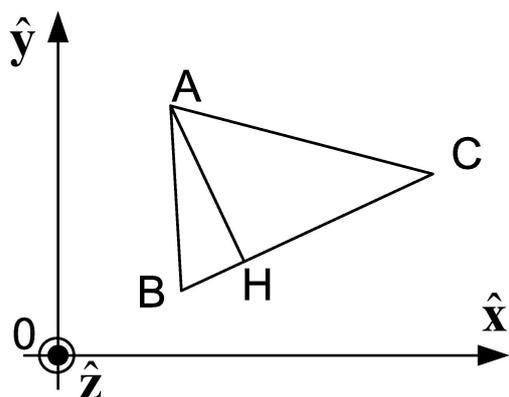


FIG. D.3 – Décomposition d'un triangle quelconque.

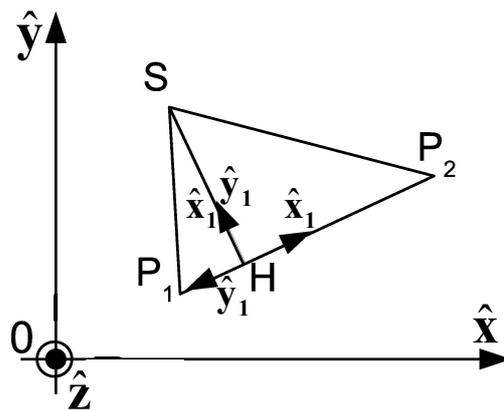


FIG. D.4 – Repères locaux des deux triangles rectangles.

transposées dans le repère associé au triangle quelconque (il est supposé ici comme étant le repère fixe) :

$$\bar{\mathbf{S}}_{ti} = Tr [R_i \rightarrow R_{\text{fixe}}] (\bar{\mathbf{S}}_i^{ti}), \quad (\text{D.53})$$

où  $Tr$  est un terme exprimant le déphasage induit par le changement de l'origine des phases lors du changement de repère (les origines des repères locaux ne sont pas localisés à l'origine du repère fixe) :

$$Tr = e^{-ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{0}H}. \quad (\text{D.54})$$

La matrice de diffraction de la surface du réflecteur en forme de triangle quelconque est alors la sommation des matrices de diffraction des deux triangles rectangles exprimés dans le repère fixe :

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{t^i=1}^2 \bar{\mathbf{S}}_{ti}. \quad (\text{D.55})$$

## Annexe E

# Matrice de diffraction d'une arête par la Méthode des Courants Equivalents

Dans le cadre de l'approximation hautes fréquences (voir paragraphe 1.4.2.2), le champ total diffracté par un réflecteur plan résulte de la somme des champs produits par deux courants distincts :

- Un courant uniforme circulant sur la surface du réflecteur. Ce courant peut être évalué à l'aide de l'Optique Physique ;
- un courant non-uniforme traduisant les discontinuités de la surface du réflecteur (circulant par conséquent sur les arêtes de l'obstacle).

La Méthode des Courants Equivalents (MCE ou encore MEC en anglais pour Method of Equivalent Currents) [45, 46, 47, 48], nommée ILDC (Incremental length Diffraction Coefficients) par Mitzner [43, 49], décrit le courant non-uniforme, source du champ diffracté, en termes de courants équivalents fictifs [43, 44]. Ces courants sont calculés en supposant l'arête localement rectiligne autour de chaque point du contour considéré. Il s'agit en fait de l'analogie de l'approximation du plan tangent de l'Optique Physique. En considérant la convention  $e^{+i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , le champ diffracté est alors calculé par une intégration linéique des courants équivalents sur le contour  $L$  de l'arête :

$$\mathbf{E}_s = ik_0 \frac{e^{-ik_0 r'}}{4\pi r'} \int_L \left[ \eta_0 I_e(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{k}}_s \wedge (\hat{\mathbf{k}}_s \wedge \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})) + I_m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{k}}_s \wedge \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \right] e^{+ik_0 \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}} dl \quad (\text{E.1})$$

où

- $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})$  est le vecteur unitaire tangent à l'arête au point d'intégration ;
- $\mathbf{I}_e(\mathbf{r}) = I_e(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}$  et  $\mathbf{I}_m(\mathbf{r}) = I_m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}$  sont les courants électrique et magnétique équivalents au point d'intégration.

L'expression de ces courants équivalents sont donnés par la théorie de Mitzner ou celle de Michaeli, qui ont été ré-écrites sous un seul et même formalisme par Knott [43] :

$$I_e(\mathbf{r}) = \frac{-2i}{k_0 \eta_0} \left\{ D_e [\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})] + D_{em} [\eta_0 \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})] \right\}, \quad (\text{E.2})$$

$$I_m(\mathbf{r}) = \frac{2i}{k_0} D_m [\eta_0 \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})], \quad (\text{E.3})$$

Ces relations s'écrivent aussi sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \eta_0 I_e(\mathbf{r}) \\ I_m(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = -\frac{2i}{k_0} \begin{bmatrix} D_e & D_{em} \\ 0 & -D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \\ \eta_0 \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

où  $(D_e, D_{em}, D_m)$  sont les coefficients donnés par la MCE [43] (parfois appelés "coefficients de Mitzner-Michaeli"). Ils dépendent des angles  $(\beta_i, \psi_i)$  et  $(\beta_s, \psi_s)$  définis dans le repère local  $(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{b}})$  associé à l'arête. Ces angles et le repère local sont illustrés sur les figures E.1 et E.2 pour une arête rectiligne commune à deux plans formant un angle d'ouverture de  $(2-n)\pi$ .

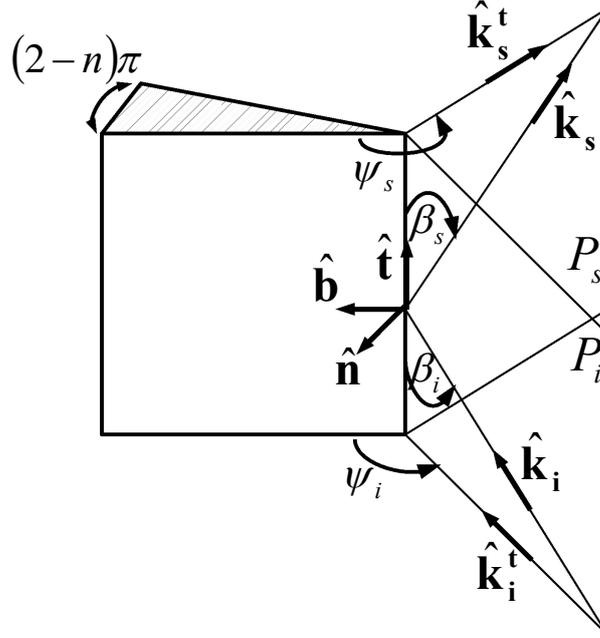


FIG. E.1 – Définition des angles  $\beta_i$  et  $\beta_s$  dans les plans d'incidence et de diffraction.

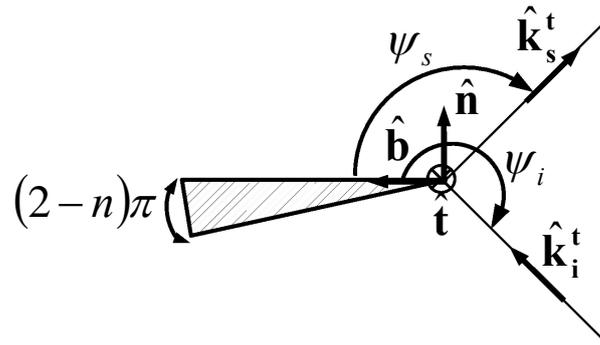


FIG. E.2 – Définition des angles  $\psi_i$  et  $\psi_s$  dans le plan normal à l'arête.

Les angles  $\beta_i$  et  $\beta_s$  sont respectivement définis dans les plans d'incidence  $P_i = (\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{t}})$  et de diffraction  $P_s = (\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{t}})$  par :

$$\beta_i = \arccos(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}), \quad (\text{E.5})$$

et

$$\beta_s = \arccos(\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{t}}). \quad (\text{E.6})$$

Les angles  $\psi_i$  et  $\psi_s$  sont respectivement définis dans les plans  $(\hat{\mathbf{k}}_i^t, \hat{\mathbf{b}})$  et  $(\hat{\mathbf{k}}_s^t, \hat{\mathbf{b}})$  par les relations :

$$\psi_i = \pi - [\pi - \arccos(-\hat{\mathbf{k}}_i^t \cdot \hat{\mathbf{b}})] \text{sign}(-\hat{\mathbf{k}}_i^t \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (\text{E.7})$$

$$\psi_s = \pi - [\pi - \arccos(\hat{\mathbf{k}}_s^t \cdot \hat{\mathbf{b}})] \text{sign}(\hat{\mathbf{k}}_s^t \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (\text{E.8})$$

avec

$$\hat{\mathbf{k}}_i^t = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}\|}, \quad (\text{E.9})$$

$$\hat{\mathbf{k}}_s^t = \frac{\hat{\mathbf{k}}_s - (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_s - (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}\|}. \quad (\text{E.10})$$

A noter que les angles  $\psi_i$  et  $\psi_s$  doivent vérifier :  $\psi_i, \psi_s \in [0; n\pi]$

Les expressions générales des coefficients de diffraction ( $D_e, D_{em}, D_m$ ) ne sont pas détaillées dans ce manuscrit. Elles sont néanmoins données pour l'arête rectiligne d'un demi plan ( $n = 2$ ) par les relations [43] :

$$D_e = \frac{\sin(\psi_i/2)}{\sin^2 \beta_i [\sin(\alpha/2) + \cos(\psi_i/2)]}, \quad (\text{E.11})$$

$$D_{em} = \frac{-Q \cos(\psi_s)}{2 \sin^2 \beta_i \sin(\alpha/2) [\sin(\alpha/2) + \cos(\psi_i/2)]} - \frac{\cos(\beta_i)}{\sin^2(\beta_i)}, \quad (\text{E.12})$$

$$D_m = \frac{-\sin(\psi_s)}{2 \sin \beta_i \sin \beta_s \sin(\alpha/2) [\sin(\alpha/2) + \cos(\psi_i/2)]}, \quad (\text{E.13})$$

où

$$Q = \frac{(1 + \cos \beta_s \cos \beta_i)(\cos \beta_i - \cos \beta_s)}{\sin \beta_s \sin \beta_i} \quad (\text{E.14})$$

$$\alpha = \begin{cases} -i \log(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}) & \text{pour } \mu > 1 \\ -i \log(\mu + i \sqrt{1 - \mu^2}) & \text{pour } |\mu| \leq 1 \\ -i \log(\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}) & \text{pour } \mu < -1 \end{cases}, \quad (\text{E.15})$$

la fonction  $\log(z)$  étant définie par  $\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$  avec  $\arg(z) \in [-\pi; \pi]$ , et  $\mu$  est défini par :

$$\mu = \frac{\sin \beta_s \sin \beta_i \cos \psi_s + \cos \beta_s \cos \beta_i - \cos^2 \beta_i}{\sin^2 \beta_i}. \quad (\text{E.16})$$

Considérons le cas général d'une arête rectiligne, de longueur  $L$ , située dans le plan  $(0, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ . Le trièdre  $(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{b}})$  lié à l'arête est défini à partir des relations :

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{E.17})$$

$$\hat{\mathbf{t}} = t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{E.18})$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{t}} = -t_y \hat{\mathbf{x}} + t_x \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{E.19})$$

Sous la condition d'un éclairage en onde plane dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}_i$ , le champ électrique incident en un point  $P$ , de coordonnées  $\hat{\mathbf{r}}$ , le long de l'arête du réflecteur est lié au champ incident au point de référence 0 par la relation suivante :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0_i} e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{E.20})$$

avec

$$\mathbf{E}_{0_i} = E_0 \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{E.21})$$

où  $E_0$  et  $\hat{\mathbf{e}}_i$  représentent respectivement l'amplitude et la polarisation du champ électrique incident. De même pour le champ magnétique incident, on a :

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{0_i} e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{E.22})$$

avec

$$\mathbf{H}_{0_i} = H_0 \hat{\mathbf{h}}_i = \frac{E_0}{\eta_0} (\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_i), \quad (\text{E.23})$$

où  $H_0$  et  $\hat{\mathbf{h}}_i$  représentent respectivement l'amplitude et la polarisation du champ magnétique incident.

Les courants équivalents sont établis à partir des composantes tangentielles du champ électromagnétique incident. Pour cela, le vecteur  $\hat{\mathbf{t}}$  est exprimé dans la base sphérique  $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i)$ , lié au rayon incident :

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) \\ \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) \\ -t_x \sin \phi_i + t_y \cos \phi_i \end{bmatrix}, \quad (\text{E.24})$$

et avec

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ e_i^\theta \\ e_i^\phi \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{h}}_i = \frac{1}{\eta_0} \begin{bmatrix} 0 \\ -e_i^\phi \\ e_i^\theta \end{bmatrix}, \quad (\text{E.25})$$

pour la polarisation des champs électrique et magnétique, on obtient :

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} = e_i^\theta \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - e_i^\phi (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i), \quad (\text{E.26})$$

$$\eta_0 \hat{\mathbf{h}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} = -e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i). \quad (\text{E.27})$$

Les équations (E.2) et (E.3) s'écrivent alors :

$$I_e(\mathbf{r}) = -\frac{2i}{k_0 \eta_0} E_0 e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} \left\{ D_e [e_i^\theta \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - e_i^\phi (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i)] \right. \\ \left. - D_{em} [e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i)] \right\}, \quad (\text{E.28})$$

$$I_m(\mathbf{r}) = -\frac{2i}{k_0} E_0 e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}} D_m [e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i)]. \quad (\text{E.29})$$

L'expression du champ diffracté par l'arête, donnée par la relation (E.1), requiert le calcul des relations vectorielles  $\hat{\mathbf{k}}_s \wedge \hat{\mathbf{t}}$  et  $\hat{\mathbf{k}}_s \wedge (\hat{\mathbf{k}}_s \wedge \hat{\mathbf{t}})$ . Pour cela, le vecteur  $\hat{\mathbf{t}}$  est cette fois exprimé dans la base sphérique  $(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\boldsymbol{\theta}}_s, \hat{\boldsymbol{\phi}}_s)$  :

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} t_s^k \\ t_s^\theta \\ t_s^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) \\ \cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) \\ -t_x \sin \phi_s + t_y \cos \phi_s \end{bmatrix}. \quad (\text{E.30})$$

On obtient alors :

$$\hat{\mathbf{k}}_s \wedge \hat{\mathbf{t}} = -t_s^\phi \hat{\boldsymbol{\theta}}_s + t_s^\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}_s, \quad (\text{E.31})$$

et

$$\hat{\mathbf{k}}_s \wedge (\hat{\mathbf{k}}_s \wedge \hat{\mathbf{t}}) = -t_s^\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_s - t_s^\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}_s. \quad (\text{E.32})$$

En notant  $\mathbf{E}_s$  le champ diffracté par l'arête, la relation (E.1) s'écrit alors sous la forme synthétique suivante :

$$\mathbf{E}_s = E_0 I_A \frac{e^{-ik_0 r'}}{2\pi r'} \hat{\mathbf{e}}_s, \quad (\text{E.33})$$

où  $I_A$  est une intégrale de phase sur le contour rectiligne de l'arête donnée par :

$$I_A = \int_L e^{-ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{r}} dl \quad (\text{E.34})$$

et  $\hat{\mathbf{e}}_s$  est la polarisation du champ électrique diffracté dont les composantes sont données par :

$$\begin{aligned} e_s^\theta = & -\cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) \left\{ D_e [e_i^\theta \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - e_i^\phi (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i)] \right. \\ & \left. - D_{em} [e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i)] \right\} \\ & + (t_x \sin \phi_s - t_y \cos \phi_s) D_m [e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i)], \quad (\text{E.35}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_s^\phi = & (t_x \sin \phi_s - t_y \cos \phi_s) \left\{ D_e [e_i^\theta \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - e_i^\phi (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i)] \right. \\ & \left. - D_{em} [e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i)] \right\} \\ & + \cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) D_m [e_i^\theta (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + e_i^\phi \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i)]. \quad (\text{E.36}) \end{aligned}$$

La matrice de diffraction d'une arête tangente au vecteur  $\hat{\mathbf{t}} = t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}}$ , calculée par la MCE, a finalement pour expression :

$$\bar{\mathbf{S}} = P_A \bar{\mathbf{S}}^{\text{elem}}, \quad (\text{E.37})$$

où  $P_A$  est une pondération spatio-fréquentielle définie par :

$$P_A = I_A \frac{e^{-ik_0 r'}}{2\pi r'} \quad (\text{E.38})$$

$I_A$  étant définie par l'équation (E.34) et  $\bar{\mathbf{S}}^{\text{elem}}$  est la matrice de diffraction élémentaire d'une arête dont les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta}^{\text{elem}} = & -\cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) \{ D_e \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - D_{em} (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) \} \\ & + (t_x \sin \phi_s - t_y \cos \phi_s) D_m (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i), \quad (\text{E.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\theta\phi}^{\text{elem}} = & +\cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) \{ D_e (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + D_{em} \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) \} \\ & + (t_x \sin \phi_s - t_y \cos \phi_s) D_m \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i), \quad (\text{E.40}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\phi\theta}^{\text{elem}} = & (t_x \sin \phi_s - t_y \cos \phi_s) \{ D_e \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) - D_{em} (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) \} \\ & + \cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) D_m (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i), \quad (\text{E.41}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\phi\phi}^{\text{elem}} = & -(t_x \sin \phi_s - t_y \cos \phi_s) \{ D_e (t_x \sin \phi_i - t_y \cos \phi_i) + D_{em} \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i) \} \\ & + \cos \theta_s (t_x \cos \phi_s + t_y \sin \phi_s) D_m \cos \theta_i (t_x \cos \phi_i + t_y \sin \phi_i). \quad (\text{E.42}) \end{aligned}$$

En conclusion, on peut remarquer que la signature bistatique d'une arête d'un réflecteur plan PC est évaluée pour tout angle d'excitation et d'observation à l'aide d'une matrice élémentaire qui décrit le phénomène de diffraction, et à l'aide d'une pondération spatio-fréquentielle qui prend en compte la géométrie du problème.

# Bibliographie

Les derniers nombres correspondent aux numéros des pages dans lesquelles les références sont citées.

- [1] N. Déchamps, *Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004. 27, 54, 56, 65, 70, 115, 117, 119, 184
- [2] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*. Pergamon, New York, 1959. 30, 35, 47, 90, 96, 189
- [3] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*. 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1990. 31, 34
- [4] J.-P. Pérez, R. Carles, and R. Fleckinger, *Electromagnétisme : fondements et applications*. Dunod, 4ème ed., Paris, 2001. 31, 32
- [5] N. Morita, N. Kumagai, and J. R. Mautz, *Integral equation methods for electromagnetics*. Artech house, 1990. 33, 46, 64
- [6] G. L. Trigg, *Mathematical tools for physicists 6th ed.* John Wiley & Sons, New York, 2005. 34
- [7] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists 6th ed.* Academic Press, New York, 2005. 34
- [8] R. P. Feynman, "Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics," *Reviews of Modern Physics*, vol. 20, pp. 367–387, Apr. 1948. 34
- [9] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991. 34, 189
- [10] J. A. Stratton and L. J. Chu, "Diffraction theory of electromagnetic waves," *Physical Review*, vol. 56, pp. 99–107, July 1939. 34, 189
- [11] J. A. Stratton, *Théorie de l'électromagnétisme*. Dunod, Paris, 1961. 34, 189
- [12] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding, and C. O. Ao, *Scattering of electromagnetic waves : Volume I. Theories and Applications*. Wiley Series on Remote Sensing, 2001. 36
- [13] N. Pinel, *Etude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles - Application à une mer recouverte de pétrole -*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2006. 38, 54, 55, 132
- [14] P. Pouliguen, *Contribution aux études théoriques et expérimentales en analyse des signatures radar*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Rennes 1, 2000. 41, 164, 203, 204
- [15] E. Pottier, *Contribution de la polarimétrie dans la discrimination de cibles radar. Application à l'imagerie électromagnétique haute résolution*. Thèse de doctorat, Université de Rennes, 1990. 41, 42

- [16] G. Sinclair, "The transmission and reception of elliptically polarized waves," *Proc. IRE*, vol. 38, pp. 148–151, 1950. 42
- [17] A.-L. Germond, E. Pottier, and J. Saillard, *Ultra-Wideband Radar Technology*, ch. Bistatic Radar polarimetry Theory, pp. 379–414. CRC Press, 2000. 42
- [18] J. Bowman, T. Senior, and P. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shape*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1987. 44
- [19] O. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, New York, 1971. 45
- [20] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, May 1966. 45
- [21] A. Taflove and M. Brodwin, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependant maxwell's equations," *IEEE Transactions on Microwave Theory Technology*, vol. 23, pp. 623–630, Aug. 1975. 45
- [22] A. Taflove and K. Umashankar, "Radar cross section of general three-dimensional scatterers," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 25, pp. 433–440, Nov. 1983. 45
- [23] B. Engquist and A. Majda, "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves," *Mathematics of Computation*, July 1977. 45
- [24] J. Bérenger, "Calcul aux différences finies de la réponse de structures filaires en milieu conducteur," *Actes du colloque CEM, Clermont-Ferrand*, 1985. 45
- [25] J. Bérenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 185–200, 1994. 45
- [26] R. F. Harrington, *Field computation by moment methods*. Mac Millan, New York, 1968. 45
- [27] C. Lu and W. Chew, "A multilevel algorithm for solving a boundary integral equation of wave scattering," *Microwave Optical Technology Letter*, vol. 7, pp. 466–470, July 1994. 46, 71
- [28] J. Song and W. Chew., "Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," *Microwave Optical Technology Letter*, vol. 10, pp. 14–19, Sept. 1995. 46, 71
- [29] E. Darve, *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999. 46, 71
- [30] E. Darrigrand, *Couplage méthodes multipôles - discrétisation microlocal pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux - Ecole doctorale de mathématiques et informatique, 2002. 46, 71
- [31] H. T. Chou and J. T. Johnson, "A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the Forward-Backward method," *Radio Science*, vol. 33, pp. 1277–1287, 1998. 46, 71, 72, 74, 75
- [32] D. Holliday, L. L. DeRaad Jr., and G. J. St-Cyr, "Forward-Backward : a new method for computing low-grazing angle scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 5, pp. 722–729, 1996. 46, 71, 72
- [33] L. Tsang, C. H. Chang, K. Pak, and H. Sangani, "Monte Carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the BMIA/CAnonical Grid method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 29, pp. 851–859, 1995. 46, 65, 71

- 
- [34] J. Keller, "Geometrical theory of diffraction," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 52, pp. 116–130, 1962. 46, 175
- [35] R. Kouyoumjian and P. Pathak, "A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, pp. 1448–1461, Nov. 1974. 46, 175, 187
- [36] F. Mollinet, "Geometrical theory of diffraction (GTD), part I. : Foundation of the theory," *IEEE Trans. AP Society Newsletter*, Aug. 1987. 46
- [37] F. Mollinet, "Geometrical theory of diffraction (GTD), part II. : Extensions and future trends of the theory," *IEEE Trans. AP Society Newsletter*, Oct. 1987. 46
- [38] R. Kouyoumjian, "Asymptotic high-frequency methods," *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, pp. 864–876, Aug. 1965. 46
- [39] W. R. Hamilton, *The collected papers of W.R. Hamilton*. 1, Geometrical optics, Cambridge University Press, 1931. 46
- [40] M. Kline, "An asymptotic solution of Maxwell's equations," *Communication on Pure and Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 225–262, 1951. 47, 100
- [41] R. Luneberg, *Mathematical theory of optics*. Brown University, Advanced instruction and research in mechanics, Providence, R.I., 1944. 47, 100
- [42] J. Asvestas, "The physical optics method in electromagnetic scattering," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 21, pp. 290–299, Feb. 1980. 47
- [43] E. Knott, "The relationship between Mitzner's ILDC and Michaeli's equivalent currents," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-33, pp. 112–114, Jan. 1985. 48, 150, 162, 211, 212, 213
- [44] E. Knott, "Comparison of three high frequency diffraction techniques," *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, Feb. 1985. 48, 211
- [45] A. Michaeli, "Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-32, pp. 252–258, Mar. 1984. 48, 150, 162, 211
- [46] A. Michaeli, "Correction to 'equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation'," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-33, p. 227, Feb. 1985. 48, 150, 162, 211
- [47] A. Michaeli, "Elimination of infinities in equivalent edge currents. I. fringe current components," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, pp. 912–918, July 1986. 48, 150, 162, 211
- [48] A. Michaeli, "Elimination of infinities in equivalent edge currents. II. physical optics components," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, pp. 1034–1037, Aug. 1986. 48, 150, 162, 211
- [49] K. Mitzner, "Incremental length diffraction coefficients," Tech. Rep. AFAL-TR-73-296, Aircraft division Northrop Corp., 1974. 48, 150, 162, 211
- [50] S. Laybros, *Utilisation du lancer de rayons pour le calcul de l'interaction d'un rayonnement électromagnétique avec des objets complexes métalliques et diélectriques*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (Toulouse III), 2004. 48
- [51] A. Voronovich, *Wave Scattering from Rough Surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. 48
- [52] A. Soubret, *Diffusion des ondes électromagnétiques par des milieux et des surfaces aléatoires : étude des effets cohérents dans le champ diffusé*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée - Aix Marseille II - Centre de physique théorique, 2001. 48, 55
-

- [53] A. Fung, *Microwave scattering and emission models and their applications*. Artech House, Boston, 1994. 48
- [54] J. Avarez-Perez, “An extension of the IEM/IEMM surface scattering model,” *Waves in Random Media*, vol. 11, pp. 307–329, 2001. 48
- [55] F. Koudogbo, *Etude des diffusions de surface et de volume par une surface rugueuse diélectrique. Calcul des interactions entre un objet 3D et une surface naturelle*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (Toulouse III), 2002. 48
- [56] F. Koudogbo, P. Combes, and H.-J. Mametsa, “Numerical and experimental validations of IEM for bistatic scattering from natural and manmade rough surfaces,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 46, pp. 203–244, 2004. 48
- [57] L. Rayleigh, *The theory of sound*. New York : Dover, 1945 (originally published in 1877). 49
- [58] S. Rice, “Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces,” *Communication on Pure and Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 351–378, 1951. 49
- [59] M. A. Demir and J. T. Johnson, “Fourth- and higher-order small-perturbation solution for scattering from dielectric rough surfaces,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 20, pp. 2330–2337, Dec. 2003. 49
- [60] J. T. Johnson, “Third-order small-perturbation method for scattering from dielectric rough surfaces,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 16, pp. 2720–2736, Nov. 1999. 49
- [61] F. Toigo, A. Marvin, V. Celli, and N. Hill, “Optical properties of rough surfaces : general theory and the small roughness limit,” *Physical Review B*, vol. 15, pp. 5618–5626, June 1977. 49
- [62] A. Soubret, G. Berginc, and C. Bourrelly, “Application of reduced rayleigh equations to electromagnetic wave scattering by two-dimensional randomly rough surfaces,” *Physical Review B*, vol. 63, pp. 245411(1–20), June 2001. 49
- [63] W. Ament, “Toward a theory of reflection by a rough surface,” *IRE Proc.*, vol. 41, pp. 142–146, 1953. 49
- [64] D. Freund, N. Woods, H.-C. Ku, and R. Awadallah, “Forward radar propagation over a rough sea surface : a numerical assessment of the Miller-Brown approximation using a horizontally polarized 3-GHz line source,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, pp. 1292–1304, Apr. 2006. 49
- [65] V. Fabbro, C. Bourlier, and P. Combes, “Forward propagation modeling above gaussian rough surfaces by the parabolic wave equation : introduction of the shadowing effect,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 58, pp. 243–269, 2006. 49
- [66] N. Pinel, C. Bourlier, and J. Saillard, “Rayleigh parameter of a rough layer : application to forward radar propagation over oil slicks on sea surfaces under the ament model,” *Microwave Optical Technology Letter*, vol. 49, pp. 2285–2290, Sept. 2007. 49, 132
- [67] N. Pinel, C. Bourlier, and J. Saillard, “Forward radar propagation over oil slicks on sea surfaces using the Ament model with shadowing effect,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 76, pp. 95–126, 2007. 49
- [68] E. Bahar, “Depolarization and scattering of electromagnetic waves by irregular boundaries for arbitrary incident and scatter angles full-wave solutions,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-27, pp. 214–225, Mar. 1979. 49

- 
- [69] E. Bahar and B. Lee, "Radar scatter cross sections for two-dimensional random rough surface full-wave solutions and comparisons with experiments," *Waves in Random Media*, vol. 6, pp. 1–23, Jan. 1996. 49
- [70] A. Voronovich, "Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces," *Waves in Random Media*, vol. 4, no. 3, pp. 337–367, 1994. 49, 145, 187
- [71] A. Voronovich, "A two-scale model from the point of view of the small-slope approximation," *Waves in Random Media*, vol. 6, pp. 77–83, Jan. 1996. 49, 145, 187
- [72] C. Bourlier, "Azimuthal harmonic coefficients of the microwave backscattering from a non-Gaussian ocean surface with the first-order SSA model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, no. 11, pp. 2600–2611, 2004. 49, 145, 187
- [73] C. Bourlier, N. Déchamps, and G. Berginc, "Comparison of asymptotic backscattering models (SSA, WCA and LCA) from one-dimensional ocean-like surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 5, pp. 1640–1652, 2005. 49, 145, 187
- [74] T. Elfouhaily and C. Guérin, "A critical survey of approximate scattering wave theories from random surfaces," *Waves in Random Media*, vol. 14, no. 4, pp. R1–R40, 2004. 49
- [75] P. Cromwell, *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1999. 50, 167
- [76] Sept. 2008. "<http://www.mathcurve.com>". 50
- [77] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*. Macmillan, 1963. 50
- [78] P. Corona, G. Ferrara, C. Gennarelli, and G. Riccio, "A physical optics solution for the backscattering by triangularly shaped trihedral corners," *Annales des Télécommunications*, vol. 50, pp. 557–562, May 1995. 52, 58, 92, 100, 149, 150
- [79] P. Corona, G. Ferrara, F. D'Agostino, C. Gennarelli, and G. Riccio, "An improved physical optics model for the evaluation of the field backscattered by triangular trihedral corner reflectors," *Proceedings of 8th Mediterranean Electrotechnical Conference on Industrial Applications in Power Systems, Computer Science and Telecommunications (MELECON 96)*, vol. 1, pp. 534–537, May 1996. 52, 58, 92, 175, 187
- [80] A. Polycarpou, C. Balanis, and C. Birtcher, "Radar cross section of trihedral corner reflectors using PO and MEC," *Annales des Télécommunications*, vol. 50, pp. 510–516, May 1995. 52, 58, 92, 100, 149, 150
- [81] F. Canning, "Arrangement of corner reflectors for a nearly omnidirectional return," Tech. Rep. 6742903 B2, U.S. Patent, June 2004. 53
- [82] L. van Buskirk, "Radar significant target," Tech. Rep. 4096479, U.S. Patent, June 1978. 53
- [83] R. Berg, "Omni-directional radar and electro-optical multiple corner retro reflector," Tech. Rep. 4551726, U.S. Patent, Nov. 1985. 53
- [84] E. Graham, "Reflector for radar purposes," Tech. Rep. 362117, U.S. Patent, June 1953. 53
- [85] C. Bradley, P. Collins, J. Fortuny-Guasch, M. Hastriter, G. Nesti, J. Terzuoli, A.J., and K. Wilson, "An investigation of bistatic calibration objects," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, pp. 2177–2184, Oct. 2005. 53
- [86] P. Eccles, "The orientation and construction of high efficiency passive radar targets," *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, pp. 1115–1117, Aug. 1965. 53
- [87] G. Gentry and J. Bain, "Inflatable radar reflector," Tech. Rep. 4673934, U.S. Patent, June 1987. 53
-

- [88] J. Laby and J. Sparrow, "Wind studies using level balloons," *Journal of Applied Meteorology*, vol. 4, pp. 585–589, Oct. 1965. 53
- [89] D. Michelson and E. Jull, "Depolarizing trihedral corner reflectors for radar navigation and remote sensing," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-43, pp. 513–518, May 1995. 53, 180
- [90] J. Puska and I. Lindell, "Direction differentiating cluster reflector for marine/air navigation," *Electronic Letters*, vol. 32, pp. 702–704, Apr. 1996. 53
- [91] J. van Zyl, "Calibration of polarimetric radar images using only image parameters and trihedral corner reflector responses," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 28, pp. 337–348, May 1990. 53
- [92] C. Bourlier, *Diffraction électromagnétiques par des obstacles*. Notes de cours du MASTER2 RECHERCHE SEGE, 2008. 54, 55, 67, 86
- [93] J. Ogilvy, *Theory of wave scattering from random surfaces*. Bristol and Philadelphia : Institute of Physics Publishing, 1991. 55, 144, 186
- [94] A. Maradudin and T. Michel, "The transverse correlation length for randomly rough surfaces," *Journal of Statistical Physics*, vol. 58, no. 3-4, pp. 485–502, 1990. 55
- [95] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding, and C. O. Ao, *Scattering of electromagnetics waves : Volume II. Numerical simulations*. Wiley Series on Remote Sensing, 2001. 56, 62, 65, 67, 68, 70
- [96] A. Fung and M. Chen, "Numerical simulation of scattering from simple and composite random surfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 2, pp. 2274–2284, Dec. 1985. 56
- [97] C. Bourlier, *Rayonnement infrarouge d'une surface stochastique - Application au domaine océanique*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1999. 57, 79, 80, 82
- [98] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandermark, "A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves," *Journal of Geophysical Research*, vol. 102, no. C7, pp. 781–796, 1997. 57
- [99] A. Sommerfeld, *Lectures on theoretical physics*, vol. 6. 1964. 57
- [100] G. Videen, "Light scattering from a sphere on or near a surface," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 8, pp. 483–489, Mar. 1991. 57
- [101] G. Videen and D. Ngo, "Light scattering from a cylinder near a plane interface : theory and comparison with experimental data," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 14, pp. 70–78, Jan. 1997. 57
- [102] P. J. Valle, F. Gonzalez, and F. Moreno, "Electromagnetic wave scattering from conducting cylindrical structures on flat substrates : study by means of the extinction theorem," *Applied Optics*, vol. 33, pp. 512–523, Jan. 1994. 57
- [103] A. Madrazo and M. Nieto-Vesperinas, "Scattering of electromagnetic waves from a cylinder in front of a conducting plane," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 12, pp. 1298–1309, June 1995. 57
- [104] J. T. Johnson, "A study of the four-path model for scattering from an object above a half space," *Microwave Optical Technology Letter*, vol. 30, pp. 130–134, July 2001. 57
- [105] M. R. Pino, L. Landesa, J. L. Rodriguez, F. Obelleiro, and R. Burkholder, "The generalized Forward-Backward method for analyzing the scattering from targets on ocean-like rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, pp. 961–969, June 1999. 57, 108

- 
- [106] J. T. Johnson, "A numerical study of scattering from an object above a rough surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 10, pp. 1361–1367, 2002. 57, 108
- [107] X. Wang, C.-F. Wang, Y.-B. Gan, and L.-W. Li, "Electromagnetic scattering from a circular target above or below rough surface," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 40, pp. 207–227, 2003. 57, 108, 115
- [108] P. Liu and Y. Q. Jin, "The Finite-Element Method with domain decomposition for electromagnetic bistatic scattering from the comprehensive model of a ship on and a target above a large scale rough sea surface," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, pp. 950–956, May 2004. 57, 108
- [109] H. Ye and Y. Jin, "Fast iterative approach to difference electromagnetic scattering from the target above a rough surface," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, pp. 108–115, Jan. 2006. 57, 108
- [110] C. Dong, C. Wang, X. Wei, and H. Yin, "EM scattering from complex targets above a slightly rough surface," *PIERS online*, vol. 3, no. 5, pp. 685–688, 2007. 57, 108
- [111] H. Ye and Y.-Q. Jin, "A hybrid analytic-numerical algorithm of scattering from an object above a rough surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 5, pp. 1174–1180, 2007. 57, 108
- [112] D. Çolak, R. J. Burkholder, and E. H. Newman, "Multiple Sweep Method of Moments analysis of electromagnetic scattering from 3D targets on ocean-like rough surfaces," *Microwave Optical Technology Letter*, vol. 49, pp. 241–247, Jan. 2007. 57, 58
- [113] J. T. Johnson and R. J. Burkholder, "Coupled Canonical Grid/Discrete Dipole Approach for computing scattering from objects above or below a rough interface," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, pp. 1214–1220, June 2001. 57, 108
- [114] Y. Zhang, Y. E. Yang, H. Braunisch, and J. A. Kong, "Electromagnetic wave interaction of conducting object with rough surface by hybrid SPM/MoM technique," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 22, pp. 315–335, 1999. 57
- [115] Sept. 2008. "<http://www.mhpcc.edu/>". 57
- [116] P. Tran, "Calculation of the scattering electromagnetic waves from a two-dimensional perfectly conducting surface using the Method of Ordered Multiple Interactions," *Waves in Random Media*, vol. 7, pp. 295–302, 1997. 58
- [117] E. I. Thorsos, "The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum," *Journal of the Acoustical Society of America*, no. 83, pp. 78–92, 1988. 65
- [118] E. I. Thorsos and D. R. Jackson, "Studies of scattering theory using numerical methods," *Waves in Random Media*, vol. 3, no. 83, pp. 165–190, 1191. 65
- [119] G. Soriano, P. Spiga, and M. Saillard, "Diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses : vers un formalisme intégral de frontière pour les angles rasants," in *GDR ondes, 21-23 novembre (Pessac, France)*, 2007. 66
- [120] C. Bourlier, *Diffusion électromagnétique par des interfaces rugueuses séparées par des milieux homogènes : Application à la télédétection océanique microondes et infrarouge*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes, 2007. 67, 72, 74, 75, 80, 115
- [121] K. Mitzner, "An integral equation approach to scattering from a body of finite conductivity," *Radio Science*, vol. 2, pp. 1459–1470, 1967. 70
-

- [122] W. Ellison, A. Balana, G. Delbos, K. Lamkaouchi, L. Eymard, C. Guillou, and C. Prigent, "New permittivity measurements of seawater," *Radio Science*, vol. 33, pp. 639–648, 1998. 70, 79
- [123] D. Kapp and G. Brown, "A new numerical method for rough-surface scattering calculations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 5, pp. 711–722, 1996. 71
- [124] R. J. Adams and G. S. Brown, "An iterative solution of one-dimensional rough-surface scattering problems based on a factorization of the helmholtz operator," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no. 4, pp. 765–767, 1999. 71
- [125] D. Holliday, L. L. DeRaad Jr., and G. J. St-Cyr, "Forward-Backward for scattering from imperfect conductor," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 1, pp. 101–107, 1998. 71
- [126] A. Iodice, "Forward-Backward method for scattering from dielectric rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 7, pp. 901–911, 2002. 71, 72, 75, 77
- [127] L. Tsang, C. H. Chang, and H. Sangani, "A Banded Matrix Iterative Approach to Monte Carlo simulations of scattering of waves by large scale random rough surface problems : TM case," *Electronic Letters*, vol. 29, pp. 1666–1667, 1993. 71
- [128] L. Tsang, C. H. Chang, H. Sangani, A. Ishimaru, and P. Phu, "A Banded Matrix Iterative Approach to Monte Carlo simulations of large scale random rough surface scattering : TE case," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 29, pp. 1185–1200, 1993. 71
- [129] J. T. Johnson, "On the canonical grid method for two-dimensional scattering problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 3, pp. 297–302, 1998. 71
- [130] H. T. Chou and J. T. Johnson, "Formulation of Forward-Backward method using Novel Spectral Acceleration for the modeling of scattering from impedance rough surfaces," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, no. 1, pp. 605–607, 2000. 71, 72, 75
- [131] D. Torrungrueng, H. T. Chou, and J. T. Johnson, "A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from two-dimensional large-scale perfectly conducting random rough surfaces with the Forward-Backward method," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, no. 4, pp. 1656–1668, 2000. 71, 72
- [132] D. Torrungrueng, J. T. Johnson, and H. T. Chou, "Numerical studies of backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional random rough surfaces with the Forward-Backward/Novel Spectral Acceleration method," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 18, no. 10, pp. 2518–2526, 2001. 71, 72, 74
- [133] D. Torrungrueng, J. T. Johnson, and H. T. Chou, "Some issues related to the Novel Spectral Acceleration method for the fast computation of radiation/scattering from one-dimensional extremely large scale quasi-planar structures," *Radio Science*, vol. 37, pp. 1–20, 2002. 71, 72, 74, 75
- [134] C. Bourlier, G. Kubické, and N. Déchamps, "A fast method to compute scattering by a buried object under a randomly rough surface : PILE combined with FB-SA," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 25, pp. 891–902, Apr. 2008. 72, 75, 80, 115, 146, 184, 185
- [135] C. D. Moss, T. M. Grzegorzcyk, H. C. Han, and J. A. Kong, "Forward-Backward method with Spectral Acceleration for scattering from layered rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-54, no. 10, pp. 2917–2929, 2006. 75, 79

- 
- [136] N. Déchamps and C. Bourlier, "Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-Inside-Layer Expansion method combined to the Forward-Backward Novel Spectral Acceleration," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 12, pp. 3576–3586, 2007. 75, 77, 115
- [137] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "Scattering by an object above a randomly rough surface from a fast numerical method : extended PILE method combined with FB-SA," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 18, pp. 495–519, Aug. 2008. 75, 80, 146, 184, 185
- [138] M. Lambert, *Obstacles et cibles*. Notes de cours du DEA Méthodes Physiques en Télédétection, 2001. 86
- [139] M. Abramowitz and I. A. Stung, *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications Inc., New York, 1970. 86, 87
- [140] A. F. Peterson, "The interior resonance problem associated with surface integral equations of electromagnetics : numerical consequences and a survey of remedies," *Electromagnetics*, vol. 10, pp. 293–312, 1990. 89
- [141] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "H-field, E-field, and combined-field solutions for conducting bodies of revolution," *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, vol. 32(4), pp. 157–164, 1978. 89
- [142] A. D. Yaghjian, "Augmented electric- and magnetic-field integral equations," *Radio Science*, vol. 16, pp. 987–1001, 1981. 89
- [143] E. Ngakosso, M. Saillard, and P. Vincent, "Theoretical and numerical study of conical diffraction by cylindrical objects," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 9, no. 4, pp. 479–502, 1995. 89
- [144] R. Mittra and C. A. Klein, "Stability and convergence of moment method solutions," *Topics in Applied Physics*, Springer Verlag Editor, Berlin, 129, 1975. 89
- [145] K. M. Siegel, "Bistatic radars and forward scattering," *Aero Electronics Nat. Conf. Proc., Dayton, Ohio*, pp. 286–290, 1958. 90
- [146] J. I. Glaser, "Bistatic RCS of complex objects near forward scatter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 21, no. 1, pp. 70–78, 1985. 90, 96
- [147] J. I. Glaser, "Some results in the bistatic Radar Cross Section (RCS) of complex targets," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, pp. 639–648, May 1989. 90, 95, 96
- [148] P. Y. Ufimtsev, "Blackbodies and shadow radiation," *Soviet journal of Communications, Technology and Electronics [translation from Russian by Scripta Technica, Inc.]*, vol. 35, no. 5, pp. 108–116, 1990. 90, 95
- [149] P. Y. Ufimtsev, "Blackbodies and the problem of invisible objects," *JINA '92*, 1992. 90
- [150] K. W. Brown and A. Prata Jr, "Closed-form tangential edge conditions for finite-thickness perfectly conducting plates," *Proceedings of the IEEE*, pp. 2076–2079, 1997. 90
- [151] P. Pouliguen, *Méthode asymptotique de calcul de S.E.R. en configuration de fort bistatisme - Proposition d'intégration dans SERMAIL -*. Rapport technique DGA affaire S5601, 2002. 95, 96
- [152] T. Griesser and A. Balanis, "Backscatter analysis of dihedral corner reflectors using Physical Optics and the Physical Theory of Diffraction," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-35, pp. 1137–1147, Oct. 1987. 100, 149, 175
- [153] X. Wang, Y.-B. Gan, and L.-W. Li, "Electromagnetic scattering by partially buried PEC cylinder at the dielectric rough surface interface : TM case," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 2, pp. 319–322, 2003. 108
-

- [154] N. Déchamps, N. De Beaucoudrey, C. Bourlier, and S. Toutain, “Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces : Propagation-Inside-Layer Expansion method,” *Journal of the Optical Society of America A*, no. 23, pp. 359–369, 2006. 115
- [155] N. Déchamps and C. Bourlier, “Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-Inside-Layer Expansion method combined to an updated BMIA/CAG approach,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 10, pp. 2790–2802, 2007. 115
- [156] K. O’Neill, R. F. Lussky, and K. D. Paulsen, “Scattering from a metallic object embedded near the randomly rough surface of a lossy dielectric,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 34, no. 2, pp. 367–376, 1996. 115
- [157] M. Saillard and G. Toso, “Electromagnetic scattering from bounded of infinite subsurface bodies,” *Radio Science*, vol. 32, pp. 1347–1359, 1997. 115
- [158] M. Saillard and G. Toso, “Scattering from rough inhomogeneous media : splitting of surface and volume scattering,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 19, no. 4, pp. 727–736, 2002. 115
- [159] G. Zhang, L. Tsang, and Y. Kuga, “Studies of the angular correlation function of scattering by random rough surfaces with and without a buried object,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35, no. 2, pp. 444–453, 1997. 115
- [160] G. Zhang and L. Tsang, “Angular correlation function of wave scattering by a random rough and discrete scatters and its application in the detection of buried objects,” *Waves in Random Media*, vol. 7, pp. 467–479, 1997. 115
- [161] A. Madrazo and M. Nieto-Vesperinas, “Scattering of light and other electromagnetic waves from a body buried beneath a highly rough random surface,” *Journal of the Optical Society of America*, no. 14, pp. 1859–1866, 1997. 115
- [162] C.-H. Kuo and M. Moghaddam, “Electromagnetic scattering from a buried cylinder in layered media with rough interfaces,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, pp. 2392–2401, 2006. 115
- [163] W. H. Press, S. A. Teutolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2nd edition ed., 1992. 118
- [164] F. G. Bass and I. M. Fuks, *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Pergamon Press Ltd., 1979. 144, 186
- [165] C. Bourlier and G. Berginc, “Multiple scattering in the high-frequency limit with second-order shadowing function from 2D anisotropic rough dielectric surfaces : I. Theoretical study,” *Waves in Random Media*, vol. 14, pp. 229–252, 2004. 144, 186
- [166] C. Bourlier and G. Berginc, “Multiple scattering in the high-frequency limit with second-order shadowing function from 2D anisotropic rough dielectric surfaces : II. Comparison with numerical results,” *Waves in Random Media*, vol. 14, pp. 253–276, 2004. 144, 186
- [167] T. Elfouhaily, S. Guignard, R. Awadallah, and D. Thompson, “Local et non-local curvature approximation : a new asymptotic theory for wave scattering,” *Waves in Random Media*, vol. 13, pp. 321–337, Oct. 2003. 145, 187
- [168] C. Guérin, G. Soriano, and T. Elfouhaily, “Weighted curvature approximation : numerical tests for 2d dielectric surfaces,” *Waves in Random Media*, vol. 14, pp. 349–363, July 2004. 145, 187

- [169] C. Bourlier and G. Kubické, “Scattering from a scatterer near a large random rough surface with the extended PILE method,” in *IGARS 2008, 06-11 juillet (Boston, USA)*, 2008. 146, 184, 185
- [170] G. Kubické and C. Bourlier, “Extended PILE method combined to FB-SA for the scattering by an object above a large randomly rough surface,” in *IEEE APS/URSI 2008, 05-12 juillet (San Diego, USA)*, 2008. 146, 184, 185
- [171] R. Spencer, “Optical theory of the corner reflector,” *Report n°433, MIT Radiation laboratory*, Mar. 1944. 149
- [172] S. Robertson, “Targets for microwave radar navigation,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 26, pp. 852–869, 1947. 149
- [173] C. Bonkowski, R.R. and Lubitz and C. Schensted, “Cross-sections of corner reflectors and other multiple scatterers at microwave frequencies : studies in radar cross sections VI,” *Report UMM-106, University of Michigan radiation laboratory*, Oct. 1953. 149
- [174] M. Meeks, C. Wilcox, and N. Logan, “Reflection properties of radar targets,” *Georgia Institute of Technology, Engineering Experiment Station, Report for the bureau of ordonance, NOrd 11386*, 1954. 149
- [175] L. Peters, “Passive bistatic radar enhancement devices,” *Proc. IEE (London)*, vol. 109, pp. 1–10, Mar. 1962. 149
- [176] T. Griesser and A. Balanis, “Dihedral corner reflector backscatter using higher order reflections and diffractions,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-35, pp. 1235–1247, Nov. 1987. 149
- [177] J.-C. Souyris, P. Borderies, P.-F. Combes, and H.-J. Mametsa, “Evaluation of several shaped dihedrals useful for polarimetric calibration,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 33, pp. 1026–1036, July 1995. 149
- [178] E. Knott, “RCS reduction of dihedral corner reflectors,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 25, pp. 406–409, May 1977. 149
- [179] E. Knott, “A tool for predicting the radar cross section of an arbitrary trihedral corner,” *Proc. IEEE Southeastcon’81 Conf.*, pp. 17–20, 1981. 149
- [180] G. Ferrara, F. Mattia, and F. Posa, “Backscattering study on non-orthogonal trihedral corner reflectors,” *IEE Proc.-Microw. Antennas Propag.*, vol. 142, Dec. 1995. 150
- [181] C. Gennarelli, G. Pelosi, and G. Riccio, “Physical optics analysis of the field backscattered by a depolarizing trihedral corner reflector,” *IEE Proc.-Microw. Antennas Propag.*, vol. 145, June 1998. 150
- [182] B. Chevalier, E. Pottier, and J. Saillard, “Signature de navires en environnement marin,” *Contrat de recherche DRET N°94-480, Tranche conditionnelle 1*, Apr. 1997. 150
- [183] J. van Tonder and U. Jakobus, “Fast multipole solution of metallic and dielectric scattering problems in FEKO,” in *2005 IEEE/ACES International Conference on Wireless Communications and Applied Computational Electromagnetics*, pp. 511–14, 2005. 163
- [184] Sept. 2008. FEKO - EM Software and systems, “www.feko.info”, Technopark-Stellenbosch, South Africa. 163
- [185] P. Corona, F. D’Agostino, G. Ferrara, C. Gennarelli, and G. Riccio, “Physical optics analysis of the field backscattered by a depolarising trihedral corner reflector,” *IEE*, vol. 145, pp. 213–218, June 1998. 180
- [186] H. Hänninen, M. Pitkonen, and K. Nikoskinen, “Method of moments analysis of the backscattering properties of a corrugated trihedral corner reflector,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-54, pp. 1167–1173, Apr. 2006. 180

- [187] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "Polarimetric bistatic signature of a faceted octahedron in high-frequency domain," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 71, pp. 173–209, 2007. 182, 185
- [188] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "High-frequency bistatic scattering by depolarizing, nearly omni-directional reflectors : higher-order polyhedral reflectors," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 3029–3035, Sept. 2008. 182, 185
- [189] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "A physical optics solution for bistatic RCS of triangularly shaped trihedral corners for any incidence and observation angles," in *European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), 6-10 novembre (Nice, France)*, 2006. 182, 185
- [190] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "Computation of the polarimetric signature of trihedral corner reflector arrays in high-frequency domain," in *22nd Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS), 27-30 août (Prague, Rep. Tchèque)*, 2007. 182, 185
- [191] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "Comparison of bistatic signatures of octahedral and icosahedral reflectors in high-frequency domain," in *European RADar conference (EuRAD), 10-12 octobre (Munich, Allemagne)*, 2007. 182, 185
- [192] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, "Signature polarimétrique bistatique d'un octaèdre parfaitement conducteur dans le domaine des hautes fréquences," in *Journées Nationales Microondes (JNM), 23-25 mai (Toulouse, France)*, 2007. 182, 185
- [193] P. Clemmow, *Plane wave spectrum representation of electromagnetic fields*. Ed. PERGAMON Press, 1966. 186
- [194] V. Fabbro, *Retrodiffusion d'une onde électromagnétique par une cible plongée dans un milieu hétérogène. Application à la détection radar à basse altitude au dessus de la mer*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (Toulouse III), 1999. 186, 187