

Méthodes numériques appliquées au calcul  
de la diffusion d'une onde électromagnétique  
par des interfaces rugueuses monodimensionnelles

Nicolas Déchamps

21 décembre 2004

---

---

[...] Par la suite, Gertrude Stein amène Alice B. Tocklas à l'atelier de Picasso. Après qu'elles l'eurent quitté, Stein lui demande : "Qu'avez-vous pensé de ce que vous avez vu ?"

– Eh bien, j'ai vu quelque chose.

– Assurément, mais avez-vous vu quels liens cela a avec les toiles qui vous ont absorbée si longtemps ?

– ... Simplement que les Picasso étaient plutôt laids et que les autres ne l'étaient pas.

– C'est que, dit Stein, comme le remarquait un jour Picasso, quand vous faites une chose, c'est si compliqué de la faire qu'elle est forcément laide, tandis que ceux qui viennent après vous n'ont pas à se préoccuper de la faire et qu'ils peuvent à leur aise la rendre jolie, en sorte qu'elle plaise à tout le monde."

J. M. Nash, *L'Art Moderne*.



## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement le laboratoire IREENA de Polytech'Nantes de m'avoir accueilli et de m'avoir fait confiance, en particulier Joseph Saillard, directeur de l'équipe Radar. De même, cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'aide précieuse que m'a apportée le Conseil Général de Loire Atlantique tout au long de ces trois années.

Je remercie également Serge Toutain, à la fois pour sa disponibilité et son soutien en tant que directeur de thèse, ainsi que pour sa bonne humeur (contagieuse!) de chef d'équipe.

Mes remerciements s'adressent aussi, bien évidemment, à mes deux deux co-encadrants, Christophe Bourlier et Nicole de Beauhoudrey, qui m'ont fait découvrir et aimer le "monde de la recherche", et m'ont dévoilé ce qu'opiniâtreté et rigueur voulaient dire. Merci encore de m'avoir soutenu, malgré la patience que cela a exigé ; je n'oublierai pas les bons moments passés ensemble ici et là.

Je souhaite remercier également Walid Tabbara d'avoir accepté d'être président du jury de thèse, ainsi que Marc Saillard et Richard Dusséaux, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs ; merci de m'avoir éclairé sur quelques points jadis obscurs. Mes remerciements s'adressent aussi à Gérard Berginc pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir bien voulu faire partie de ce jury.

Enfin un grand merci à ma famille, à pépé Lulu, si loin et toujours là, à mes amis qui se cotisent pour un stéthoscope, à Mathilde pour son soutien, à Sandrine pour sa grande patience, et aux longues, longues pistes cyclables..



# Table des matières

Table des matières	ii
Liste des acronymes	vii
Introduction	1
<b>1 Ondes électromagnétiques et surfaces rugueuses</b>	<b>5</b>
1.1 Equations de Maxwell	6
1.2 Equations d'onde	7
1.3 Ondes planes et équation de Helmholtz	8
1.3.1 Ondes planes	8
1.3.2 Equation de Helmholtz	8
1.4 Conditions aux limites	9
1.5 Onde incidente – Réduction à un problème 2D	10
1.5.1 Polarisation de l'onde	10
1.5.2 Réduction à un problème 2D : surfaces à variation 1D	10
1.5.3 Onde incidente atténuée gaussiennement	13
1.6 Coefficient de diffusion	15
1.6.1 Vecteur de Poynting	16
1.6.2 Définition des puissances incidente et diffusée	17
1.6.3 Application à l'onde de Thorsos	18
1.6.4 Expression du coefficient de diffusion	18
1.6.5 Critère de Rayleigh	21
1.7 Modélisation de surfaces rugueuses aléatoires	22
1.7.1 Caractérisation statistique d'une surface rugueuse	23
1.7.2 Génération du profil par méthode spectrale	25
1.7.3 Exemples de spectres et surfaces associées	27
1.7.3.1 Spectre gaussien	27
1.7.3.2 Spectre de West-O'Donnell	29
1.7.3.3 Spectre de mer	31
1.8 Conclusion	36
<b>2 Diffusion par une seule interface rugueuse</b>	<b>37</b>
2.1 Définition rigoureuse du problème	38
2.2 Panorama des méthodes existantes	41
2.2.1 Modèles asymptotiques	41

2.2.2	Modèles rigoureux . . . . .	43
2.3	Méthodes intégrales . . . . .	44
2.3.1	Choix d'une méthode intégrale . . . . .	44
2.3.2	Fonction de Green . . . . .	45
2.3.3	Equations intégrales . . . . .	46
2.3.3.1	Milieu inférieur parfaitement conducteur . . . . .	46
2.3.3.2	Milieu inférieur diélectrique . . . . .	50
2.3.3.3	Condition d'impédance sur la surface . . . . .	51
2.3.4	Discrétisation par la Méthode des Moments . . . . .	52
2.3.4.1	Méthode des Moments (MoM) . . . . .	52
2.3.4.2	Milieu inférieur parfaitement conducteur . . . . .	53
2.3.4.3	Milieu inférieur diélectrique . . . . .	58
2.3.5	Résolution du système linéaire . . . . .	60
2.3.6	Coefficient de diffusion . . . . .	61
2.3.6.1	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	63
2.3.6.2	Coefficients cohérent et incohérent . . . . .	63
2.4	Méthodes numériques intégrales rapides . . . . .	65
2.4.1	Principe général des méthodes . . . . .	66
2.4.2	Method of Multiple Ordered Interactions (MOMI) . . . . .	68
2.4.2.1	Cas parfaitement conducteur . . . . .	68
2.4.2.2	Cas diélectrique . . . . .	73
2.4.2.3	méthode MOMI pour un grand nombre d'inconnues . . . . .	74
2.4.2.4	Conclusion . . . . .	74
2.4.3	Banded Matrix Iterative Approach (BMIA) . . . . .	75
2.4.3.1	Cas parfaitement conducteur . . . . .	76
2.4.3.2	Cas diélectrique . . . . .	88
2.4.3.3	Conclusion . . . . .	88
2.4.4	Fast Multipole Method (FMM) . . . . .	89
2.5	Mise en oeuvre des méthodes numériques intégrales . . . . .	90
2.5.1	Conservation de l'énergie : MoM avec inversion LU . . . . .	90
2.5.2	Analyse de l'erreur . . . . .	92
2.5.3	Méthode MOMI . . . . .	96
2.5.4	Méthode BMIA/CAG . . . . .	98
2.5.5	Approximation IBC . . . . .	99
2.5.6	Méthodes pour des problèmes à grand nombre d'inconnues . . . . .	101
2.5.7	Conclusion . . . . .	102
<b>3</b>	<b>Diffusion par deux interfaces rugueuses superposées</b> . . . . .	<b>105</b>
3.1	Introduction . . . . .	105
3.2	Modèles asymptotiques pour une double interface . . . . .	106
3.2.1	Panorama . . . . .	106
3.2.2	Approximation de Kirchhoff et des éléments rayonnants . . . . .	107
3.3	Méthodes Intégrales pour une double interface . . . . .	108
3.3.1	Etablissement des Equations Intégrales pour une couche . . . . .	108
3.3.2	Discrétisation par la Méthode des Moments . . . . .	112
3.3.2.1	Surface inférieure diélectrique . . . . .	112



3.3.2.2	Surface inférieure parfaitement conductrice . . . . .	115
3.3.2.3	Condition d'impédance sur la surface . . . . .	115
3.3.3	Interprétation physique de la matrice impédance . . . . .	117
3.3.3.1	Surface inférieure diélectrique . . . . .	117
3.3.3.2	Surface inférieure parfaitement conductrice . . . . .	118
3.3.4	Coefficient de diffusion . . . . .	118
3.4	Méthode performante pour une double interface . . . . .	119
3.4.1	Algorithme itératif proposé . . . . .	120
3.4.1.1	Détermination du champ $\mathbf{X}_+$ sur la surface supérieure	120
3.4.1.2	Détermination du champ $\mathbf{X}_-$ sur la surface inférieure . . . . .	122
3.4.2	Couplage avec des méthodes rapides pour une seule interface	122
3.4.3	Complexité . . . . .	123
3.4.4	Domaine de validité . . . . .	124
3.4.4.1	Deux interfaces planes superposées . . . . .	124
3.4.4.2	Prise en compte de la rugosité des interfaces . . . . .	129
3.4.4.3	Milieu inférieur parfaitement conducteur . . . . .	131
3.4.5	Préconditionnement . . . . .	133
3.5	Résultats numériques . . . . .	137
3.5.1	Cas plan . . . . .	138
3.5.2	Article de M. Saillard et G. Toso, <i>Radio Science</i> , 1997 [152] .	140
3.5.3	Article de Simonsen et Maradudin, <i>Opt. Comm.</i> , 1999 [158] .	143
3.5.4	Article de O. Calvo-Perez, J. J. Greffet et A. Sentenac, <i>Journ. Opt. A</i> , 1999 [27] . . . . .	147
3.5.5	Temps de calcul . . . . .	148
3.6	Amélioration envisagée pour la méthode . . . . .	149
3.6.1	Accélération du produit matrice de couplage-vecteur . . . . .	149
3.6.1.1	Méthodologie . . . . .	150
3.6.1.2	Choix du rayon d'interaction $r_d$ . . . . .	152
3.7	Conclusion . . . . .	153
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>157</b>
<b>Annexes</b>		<b>161</b>
<b>A Fonctions de Green et fonctions de Hankel</b>		<b>161</b>
A.1	Fonctions de Green . . . . .	161
A.2	Fonctions de Hankel . . . . .	162
<b>B Méthode des moments</b>		<b>163</b>
<b>C Discrétisation de quelques équations intégrales</b>		<b>167</b>
C.1	Intégrales impropres . . . . .	167
C.2	Discrétisation de la MFIE pour le cas TM . . . . .	167
C.3	Discrétisation de la MFIE pour le cas TE . . . . .	169
C.4	Discrétisation de la EFIE pour le cas TM . . . . .	171

<b>D</b>	<b>Méthode MOMI : cas diélectrique</b>	<b>173</b>
<b>E</b>	<b>Méthode BMIA : polarisation TM</b>	<b>179</b>
<b>F</b>	<b>Fast Multipole Method</b>	<b>183</b>
F.1	Notion de découplage . . . . .	183
F.2	Application du découplage . . . . .	184
F.3	Interprétation physique . . . . .	186
F.4	Conclusion . . . . .	186

## Liste des acronymes

- AK** Approximation de Kirchhoff
- BICG** BIConjugate Gradient
- BICGSTAB** BIConjugate Gradient-STABLE
- BMIA/CAG** Banded Matrix Iterative Approach/Canonical Grid
- CFIE** Coupled Field Integral Equation
- CM** Composit Model
- DMOMI** Dielectric-Method of Ordered Multiple Interactions
- EFIE** Electric Field Integral Equation
- EI** Equations Intégrales
- FB** Forward-Backward
- FB/NSA** Forward-Backward with Novel Spectral Acceleration
- FDTD** Finite-Difference Time-Domain
- FEM** Finite Element Method
- FMM** Fast Multipole Method
- FMM multilevel** Fast Multipole Method multilevel
- FWM** Full Wave Method
- GCR** Generalized Conjugate Gradient
- GMRES** General Minimal RESidual
- GPR** Ground Penetrating Radar
- IBC** Impedance Boundary Condition
- IEM** Integral Equation Model
- ILU** Incomplete LU decomposition
- MoM** Méthode des moments
- MFIE** Magnetic Field Integral Equation
- MOMI** Method of Ordered Multiple Interactions
- MOT** Marching-On-in-Time method
- OE** méthode de l'Operator Expansion
- OG** approximation de l'Optique Géométrique
- PBTG-BMIA/CAG** Physic-Based Two-Grid method - Banded Matrix Iterative Approach/Canonical Grid
- QMR** Quasi-Minimum Method
- SPM** Small Perturbation Method - méthode des petites perturbations
- SSA** Small Slope Approximation (méthode des faibles pentes)
- TE** polarisation Transverse Electrique - (polarisation H ou  $s$ )
- TGD** Théorie Géométrique de la Diffraction
- TM** polarisation Transverse Magnétique - (polarisation V ou  $p$ )
- TUD** Théorie Uniforme de la Diffraction



# Introduction

Cette thèse se place dans le contexte de l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par un objet. Un exemple bien connu est le cas d'une surface plane; l'amplitude et la direction des ondes réfléchiées et transmises peuvent être facilement trouvées à l'aide des lois de Snell-Descartes et des coefficients de Fresnel. Ainsi, nous pouvons expliquer qualitativement un grand nombre de phénomènes à l'aide de ces lois simples, comme, par exemple, le changement apparent de l'inclinaison d'une tige lorsqu'on la plonge dans l'eau. Cependant, les surfaces des objets ne sont pas toujours parfaitement lisses mais présentent des irrégularités. Une onde incidente, venant éclairer ces surfaces, n'est donc pas simplement réfléchiée et transmise, mais est diffusée dans de multiples directions; nous devons, par conséquent, avoir recours à une théorie plus élaborée pour déterminer l'onde diffusée.

La recherche de modèles de diffusion est motivée par les nombreuses applications qui existent en télédétection, en télécommunication, en optique, ou encore, en imagerie médicale. Par exemple, l'étude de la diffusion d'une onde radar par la surface de la mer permet de connaître la hauteur des vagues ou encore la direction du vent et la salinité de l'eau; on peut aussi mesurer la rugosité de surfaces optiques, ce qui permet de mieux maîtriser leur fabrication.

Ces applications sont des exemples de problèmes inverses : en illuminant l'objet avec une onde incidente, et à partir de la mesure du champ diffusé (la conséquence) on tente de remonter aux caractéristiques de la surface (la cause de cette diffusion). Afin de résoudre un problème inverse, on doit savoir, auparavant, résoudre le problème direct correspondant : connaissant la cause, prédire la conséquence.

Nous nous focalisons, dans cette thèse, sur le problème direct : une onde incidente éclairant une surface rugueuse de statistique connue, nous souhaitons déterminer le champ diffusé. Ce champ doit satisfaire plusieurs conditions : vérifier des équations de propagation dans les différents milieux, des conditions aux limites sur la (les) surface(s) et des conditions physiques de rayonnement à l'infini.

Les premiers travaux dans ce domaine remontent à environ un siècle. A l'époque, des physiciens tels que Rayleigh, confrontés à la résolution d'équations complexes, effectuent des hypothèses simplificatrices; les modèles correspondant sont qualifiés d'asymptotiques. Les premiers résultats obtenus, à l'aide de méthodes de résolution analytiques, sont donc approchés et ne sont valables que pour certains types de surfaces. De plus, en règle générale, les calculs sont difficiles à mener et les expressions auxquelles ils aboutissent sont difficiles à simplifier.

Avec l'apparition de l'informatique, des méthodes numériques voient le jour.

L'intérêt de celles-ci est double : d'une part, combinées à des méthodes analytiques, elles permettent d'aboutir à des résultats, même lorsque la formulation est complexe. D'autre part, elles peuvent être employées pour résoudre le problème de façon rigoureuse.

Cependant, bien que l'on sache aujourd'hui résoudre de façon exacte le problème de diffusion, les méthodes asymptotiques présentent encore un grand intérêt. Elles sont utilisées, d'une part, pour expliquer et prédire des phénomènes physiques mis en jeu lors de la diffusion ; d'autre part, elles demandent peu de calculs, et sont donc employées dans des applications où la vitesse de calcul et la taille mémoire priment sur la précision (programmes en temps-réel embarqués dans des satellites, programmes de rendu d'image,...). Les méthodes numériques exactes, quant à elles, servent de référence pour déterminer le domaine de validité des méthodes asymptotiques ; cependant elles sont très gourmandes en temps de calcul. Elles sont aussi employées en recherche et développement (dans l'industrie aéronautique par exemple) lorsque une précision accrue est nécessaire. Par ailleurs, elles permettent d'obtenir des résultats pour des configurations où les méthodes asymptotiques sont complexes à développer.

Mon laboratoire d'accueil ne disposait il y a trois ans, que de méthodes analytiques et numériques *approchées*, s'appuyant sur des modèles asymptotiques de diffusion par des interfaces rugueuses. Or des méthodes *exactes* de référence faisaient défaut. Le but de cette thèse est donc :

- d'une part, de recenser, de choisir et de programmer parmi les méthodes existantes, des méthodes numériques *exactes* pour le cas d'une simple interface rugueuse ;
- d'autre part, de développer de nouvelles méthodes numériques *exactes* pour le cas de deux interfaces rugueuses superposées (configuration aussi dénommée couche rugueuse).

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous faisons quelques rappels d'électromagnétisme et présentons le problème de la diffusion par une simple interface rugueuse ; nous nous limitons dans cette thèse au cas d'un problème bidimensionnel, où les surfaces à variation unidimensionnelle séparent des milieux homogènes. Nous nous focalisons sur le problème numérique ; le choix d'une onde incidente d'étendue spatiale limitée est abordé, ainsi que la génération numérique de surfaces rugueuses. Nous donnons en fin de chapitre quelques exemples de surfaces obtenues à partir de différents spectres.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le cas d'une simple interface rugueuse ; les points développés dans ce chapitre nous serviront dans le troisième. Nous commençons par donner une formulation rigoureuse du problème et recensons les méthodes de résolution existantes, tant analytiques que numériques. Dans le cadre d'une résolution numérique exacte, nous justifions et exposons la classe de méthodes retenue, les méthodes intégrales. Nous discrétisons les équations intégrales correspondantes par la méthode des moments, et donnons les expressions des matrices impédances. Des méthodes performantes (encore appelées méthodes rapides) dédiées aux méthodes intégrales sont ensuite présentées ; les résultats

numériques qui figurent en fin de chapitre nous amènent à choisir la méthode qui nous paraît la mieux adaptée au problème.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la diffusion par deux interfaces rugueuses superposées; c'est ce chapitre qui regroupe notre contribution personnelle. Les équations intégrales sont écrites pour cette configuration; discrétisées par la méthode des moments, elles nous conduisent à système linéaire. Nous faisons alors le lien entre la matrice impédance et les matrices impédances du cas mono-interface. Ceci nous permet de développer une méthode performante, à l'aide des méthodes rapides existantes pour le cas mono-interface. Enfin, nous étudions en détail le domaine de validité de notre méthode et comparons nos résultats avec ceux de la littérature. Nous donnons en fin de chapitre les améliorations envisageables pour cette méthode.





# Chapitre 1

## Ondes électromagnétiques et surfaces rugueuses

Lord Rayleigh fut le premier, il y a un siècle environ, à définir rigoureusement ce qu'est la rugosité d'une surface et à étudier explicitement l'influence de celle-ci sur la diffusion d'une onde [141, 142]. Depuis, bien sûr, ses travaux ont été complétés et affinés, mais le critère de rugosité qu'il introduisit et qui porte son nom, est resté. Nous rappellerons sa formulation en temps venu, après avoir introduit les notations géométriques nécessaires portant sur l'onde et la surface.

En suivant l'exemple de Rayleigh, les calculs furent d'abord effectués analytiquement en s'appuyant sur des hypothèses simplificatrices; puis vint l'ère de l'informatique qui, dès les années 70, fut utilisée dans ce domaine pour valider les résultats analytiques. Aujourd'hui, les deux méthodes de résolution, analytique et numérique, se côtoient et se complètent. Malgré leurs différences, toutes les méthodes de détermination de l'onde diffusée par une surface rugueuse ont un point commun : elles s'appuient sur une formulation électromagnétique du problème, découlant des équations de Maxwell. On rappellera dans ce premier chapitre quelques éléments d'électromagnétisme. Notre raisonnement nous mènera ensuite à la puissance que véhicule une onde, puis nous donnerons une définition du coefficient de diffusion. Enfin, nous présenterons un exemple qui permettra de comprendre intuitivement comment agit la rugosité d'une surface sur le coefficient de diffusion.

Par ailleurs, dans cette thèse, nous nous plaçons dans le cadre d'une résolution numérique. L'avantage de celle-ci est de pouvoir résoudre un problème de diffusion assez compliqué; suffisamment compliqué en tout cas pour que l'on ne puisse pas, pour l'instant, les résoudre de façon analytique. Son inconvénient est que l'on est limité par la place mémoire et la vitesse des processeurs des ordinateurs que nous avons à disposition. Ceci dit, le point important des méthodes numériques est que l'on a besoin de générer une surface aléatoire discrète, remplissant certaines conditions statistiques. La fin de ce chapitre est consacrée à ce point.

## 1.1 Equations de Maxwell

James Clerk Maxwell publie en 1864 un traité où sont enfin reliés tous les phénomènes électriques, magnétiques et optiques, tout comme l'avait fait auparavant Newton en mécanique classique. A l'origine, les équations formulées par Maxwell formaient un système de 20 équations à 20 inconnues. Réécrites sous forme vectorielle par Oliver Heaviside et Josiah W. Gibbs en 1884, les équations mettent alors en évidence la symétrie qui existe entre les différents champs. Elles sont données, sous forme locale, par :

$$\text{(Equation de Maxwell-Gauss électrique)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Gauss magnétique)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Faraday)} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Ampère)} \quad \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.4)$$

Pour plus de clarté, les grandeurs qui entrent en jeu dans ces équations sont rassemblées dans le tableau 1.1. Nous avons conservé pour  $\mathbf{H}$  l'appellation ancienne mais courante de *champ magnétique*. Ainsi le couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  est appelé champ électromagnétique ; les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  sont inclus pour rendre compte des relations entre le champ électromagnétique et la matière environnante.

Dans ce manuscrit, les grandeurs en gras désigneront des vecteurs. Les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,

Grandeur	Nom	Unité SI
$\mathbf{E}$	champ électrique	$V/m$
$\mathbf{H}$	champ magnétique	$A/m$
$\mathbf{D}$	induction électrique	$C/m^2$
$\mathbf{B}$	induction magnétique	<i>Tesla</i>
$\mathbf{J}$	densité de courant électrique	$A/m^2$
$\rho$	densité de charge	$C/m^3$

**Tab.1.1** – Variables mises en jeu dans les équations de Maxwell.

$\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  ont chacun 3 composantes, ce qui donne en tout, avec la densité de charge  $\rho$ , 16 inconnues scalaires. Or si on examine d'un peu plus près le système d'équations de Maxwell, on compte 2 équations scalaires, (1.1) et (1.2), ainsi que 2 équations vectorielles, (1.3) et (1.4), soit en tout 8 équations scalaires. Pour être précis, les 8 équations ne sont pas indépendantes<sup>1</sup>, et le système est en fait de rang 7. Posé ainsi, le problème peut avoir une infinité de solutions.

Pour que ces équations forment un système complet, il faut leur adjoindre des relations constitutives qui tiennent compte des caractéristiques du milieu (vide,

---

<sup>1</sup>Les deux équations scalaires de Gauss peuvent être déduites des équations d'Ampère, de Faraday et de l'équation scalaire de conservation de la charge  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

matériau diélectrique ou magnétique...). En particulier, si le milieu est linéaire, homogène et isotrope (LHI)<sup>2</sup>, ces relations constitutives relient respectivement  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{E}$ . Elles sont données sous la forme :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.5b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.5c)$$

où  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont, respectivement, la permittivité, la perméabilité et la conductivité du milieu. Le vide a, par définition, une permittivité et une perméabilité notées respectivement  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ ; elles vérifient  $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Par la suite, nous aurons souvent recours aux permittivités et perméabilités *relatives*  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  définies par :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (1.6)$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \text{avec} \quad \mu_0 \simeq 1.256 \times 10^{-6} \text{ H/m} \quad (1.7)$$

## 1.2 Equations d'onde

Nous nous limiterons au cas d'un milieu LHI, de perméabilité  $\mu$  et de permittivité  $\varepsilon$ , en l'absence de charge et de courant; on a alors  $\rho = 0$  et  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Dérivons l'équation d'Ampère (1.4) par rapport au temps, en supposant que les paramètres  $(\varepsilon, \mu)$  du milieu sont indépendants du temps, et en incluant les relations constitutives (1.5a) et (1.5b). On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

qui devient, en utilisant la relation (1.3) :

$$-\frac{1}{\mu} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

Puis en utilisant l'égalité  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , et le fait que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  selon (1.1), on démontre que le champ électrique  $\mathbf{E}$  vérifie l'équation :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}} \quad (1.10)$$

De même le champ magnétique  $\mathbf{H}$  vérifie :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}} \quad (1.11)$$

Les équations (1.10) et (1.11) sont les *équations d'onde* électrique et magnétique. Ces équations sont encore appelées équations de propagation.

<sup>2</sup>Un milieu est dit *linéaire* si ses caractéristiques électromagnétiques  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont indépendants de la puissance des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ ; il est dit *homogène* si  $\varepsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas du point considéré; enfin, il est dit *isotrope* si, en tout point donné,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des scalaires.

*Remarque :* En coordonnées cartésiennes, si on représente le laplacien scalaire par  $\Delta \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , le laplacien vectoriel  $\nabla^2 \cdot$  sera défini par

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta A_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta A_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.12)$$

## 1.3 Ondes planes et équation de Helmholtz

### 1.3.1 Ondes planes

Une solution particulière de (1.10) est donnée par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]) \quad (1.13)$$

$$\text{avec } \mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon\mu} \omega \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}} \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{k}$  désigne le vecteur d'onde,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le milieu,  $\omega$  la pulsation, et  $\hat{\mathbf{u}}$ , un vecteur unitaire choisi arbitrairement. Dans le cas particulier du vide, on a :

$$\lambda = \lambda_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \hat{\mathbf{u}} \quad (1.15)$$

Physiquement, (1.13) représente une onde plane progressive monochromatique, se propageant dans la direction  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ . Les composantes d'une onde plane sont indépendantes de la position sur un plan d'onde donné. Ceci implique notamment que les composantes de  $\mathbf{E}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$ . Par ailleurs, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont reliés par :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\mu\omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\|\mathbf{k}\|} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{H} \wedge \mathbf{k}}{\varepsilon\omega} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\mathbf{H} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \quad (1.16)$$

### 1.3.2 Equation de Helmholtz

La forme harmonique de (1.13) a une conséquence pratique sur les grandeurs vectorielles  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{J}$  reliées par les équations de Maxwell. Pour celles-ci, la dérivée par rapport au temps se ramène à une multiplication par  $-i\omega$ . Ainsi  $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = i\omega \cdot i\omega \cdot \mathbf{E} = -\omega^2 \mathbf{E}$  et donc, le terme de gauche de l'équation d'onde électrique (1.10) devient dans ce cas là :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - (-\omega^2)\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} \quad (1.17)$$

Et finalement  $\mathbf{E}$  vérifie l'équation dite de Helmholtz :

$$\boxed{(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0} \quad (1.18)$$

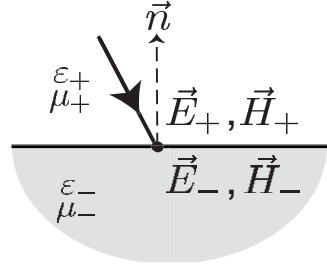
*Remarques :*

- De même, le champ magnétique  $\mathbf{H}$  vérifie l'équation de Helmholtz.
- Si  $\psi$  désigne une des trois composantes du champ  $\mathbf{E}$  (ou  $\mathbf{H}$ ) alors elle vérifie l'équation de Helmholtz scalaire :

$$(\Delta + k^2)\psi = 0 \quad (1.19)$$

- Par la suite le facteur  $e^{-i\omega t}$  des grandeurs harmoniques sera sous-entendu.

## 1.4 Conditions aux limites



**Fig.1.1** – Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface délimitant deux milieux différents.

superieur. Les champs dans le milieu supérieur, au niveau de l'interface, seront repérés par le signe + et dans le milieu inférieur, toujours au niveau de l'interface, par le signe -. Sur la frontière, nous avons orienté la normale locale  $\hat{n}$  dans la direction du milieu supérieur.

On suppose, dans un premier temps, que les milieux sont diélectriques<sup>3</sup>. Les relations locales au niveau de l'interface sont données par :

$$\hat{n} \cdot (\varepsilon_+ \mathbf{E}_+ - \varepsilon_- \mathbf{E}_-) = 0 \quad (1.20a)$$

$$\hat{n} \wedge (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = \mathbf{0} \quad (1.20b)$$

$$\hat{n} \cdot (\mu_+ \mathbf{H}_+ - \mu_- \mathbf{H}_-) = 0 \quad (1.20c)$$

$$\hat{n} \wedge (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{0} \quad (1.20d)$$

Ces relations permettent de relier, au niveau d'une interface, les valeurs des champs électrique et magnétique de chacun de deux milieux. Elles nous seront utiles dans le deuxième chapitre.

Si le milieu inférieur est un conducteur parfait, les relations ci-dessus deviennent :

$$\hat{n} \cdot \varepsilon_+ \mathbf{E}_+ = \rho_s \quad (1.21a)$$

$$\hat{n} \wedge \mathbf{E}_+ = \mathbf{0} \quad (1.21b)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{H}_+ = 0 \quad (1.21c)$$

$$\hat{n} \wedge \mathbf{H}_+ = \mathbf{J}_s \quad (1.21d)$$

où  $\rho_s$  et  $\mathbf{J}_s$  désignent respectivement les densités surfaciques de charge et de courant. Dans ce cas, les équations traduisent la continuité de la composante normale de  $\mathbf{H}$  et de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$ , à la traversée de l'interface, les autres composantes de ces champs étant discontinues.

<sup>3</sup>Un diélectrique parfait est un matériau comportant des charges qui peuvent osciller autour d'une position d'équilibre mais qui ne contient pas de charge susceptible de se déplacer librement dans le milieu. De ce fait, les charges ne peuvent pas se concentrer en certains points, et en particulier sur la surface de séparation, qui n'est pas chargée et n'est pas parcourue par un courant.

## 1.5 Onde incidente – Réduction à un problème 2D

### 1.5.1 Polarisation de l'onde

Résoudre un problème de diffusion électromagnétique consiste à déterminer, à partir de la donnée d'un champ incident  $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$  venant illuminer une surface, le champ  $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$  diffusé par celle-ci (où l'indice  $s$  dénote le champ diffusé, *scattered* en anglais). C'est donc un problème *vectoriel*.

Pour caractériser complètement la diffusion électromagnétique par des surfaces quelconques bidimensionnelles, il suffit de résoudre le problème pour deux polarisations linéaires de l'onde incidente. Définissons  $\mathcal{P}$  comme étant le plan moyen ( $z = 0$ ) de la surface. Les deux polarisations les plus courantes sont :

- celle où le champ incident  $\mathbf{E}_{inc}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  (cas Transverse Electrique, appelé aussi polarisation  $s$  (*senkrecht*) ou polarisation horizontale),
- celle où c'est le champ incident  $\mathbf{H}_{inc}$  qui est parallèle à  $\mathcal{P}$  (cas Transverse Magnétique, appelé aussi polarisation  $p$  ou encore polarisation verticale).

Les notations pour les polarisations sont représentées sur la figure 1.2.

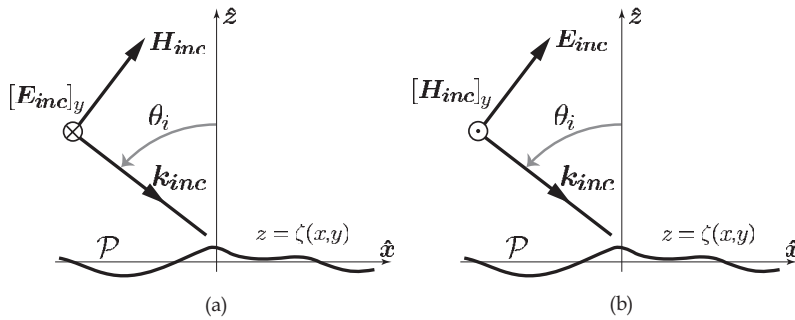


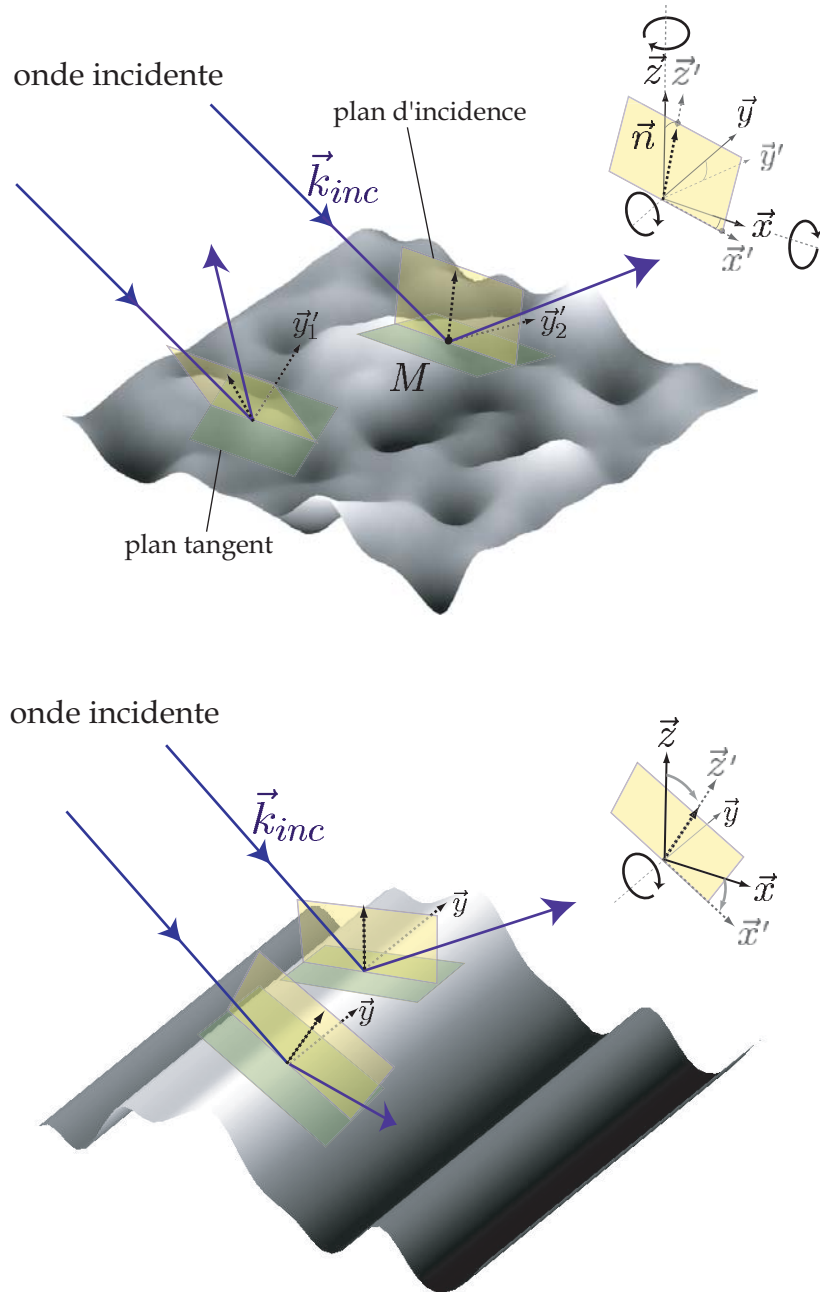
Fig.1.2 – Polarisation de l'onde incidente. (a) Cas TE ; (b) Cas TM.

### 1.5.2 Réduction à un problème 2D : surfaces à variation 1D

Dans cette thèse, nous limiterons l'étude à des surfaces rugueuses invariantes selon une direction (nous choisissons arbitrairement la direction  $\hat{\mathbf{y}}$ ). Moyennant une perte de généralité, ce choix présente l'intérêt de conduire à un problème à traiter beaucoup plus simple.

En effet, raisonnons à l'aide du schéma présenté sur la figure 1.3. Considérons un champ incident se propageant parallèlement au plan  $\Pi$  ( $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}$ ) et atteignant une surface bidimensionnelle de plan moyen  $\mathcal{P}$  défini précédemment. Définissons le plan d'incidence au point  $M$  de la surface comme étant le plan formé par la normale locale  $\hat{\mathbf{n}}$  à la surface et la direction  $\mathbf{k}_{inc}$  de l'onde incidente.

Si la surface est quelconque, la normale locale est aussi orientée de façon quelconque et les plans d'incidence locaux ne sont pas obligatoirement parallèles entre eux. Par contre si la surface est invariante selon la direction  $\hat{\mathbf{y}}$ , les normales locales sont toutes perpendiculaires à cette direction  $\hat{\mathbf{y}}$ . Les normales locales et le vecteur d'onde



**Fig.1.3** – En haut, surface quelconque; les plans d'incidence ne sont pas obligatoirement parallèles entre eux. Le problème est *vectoriel*; c'est le cas le plus général. En bas, surface invariante selon une direction (ici  $\hat{y}$ ); les plans d'incidence sont tous parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction  $\hat{y}$ . Le problème se ramène à un problème *scalaire*, où l'inconnue est la composante  $\psi$  selon  $\hat{y}$  du champ électrique ou magnétique.

incident sont donc parallèles au plan  $\Pi$ , ce qui implique que tous les plans d'incidence locaux sont parallèles entre eux.

Finalement, dans ce cas, le champ diffusé se propage selon la direction  $\mathbf{k}_s$ , qui reste contenue dans le plan d'incidence parallèle au plan  $\Pi$  ( $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}$ ). Donc on peut prendre pour inconnue du problème la composante  $\psi$  selon  $\hat{\mathbf{y}}$  du champ électromagnétique :  $\psi$  est la composante transverse au plan d'incidence. Précisément, pour une polarisation TE, l'inconnue est la composante selon  $\hat{\mathbf{y}}$  du champ électrique, alors que pour la polarisation TM, l'inconnue est la composante selon  $\hat{\mathbf{y}}$  du champ magnétique. On parle ainsi de problème *scalair*.

En prenant

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

nous avons dans le cas Transverse Electrique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}}\psi(x, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(x, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\text{d'où} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu\omega} k_z \psi(x, z) \\ 0 \\ \frac{1}{\mu\omega} k_x \psi(x, z) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

et dans le cas Transverse Magnétique

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}}\psi(x, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(x, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\text{d'où} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon\omega} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{k_z}{\varepsilon\omega} \psi(x, z) \\ 0 \\ -\frac{k_x}{\varepsilon\omega} \psi(x, z) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Ces expressions sont valables pour le champ incident (avec  $\mathbf{k}_{inc}$ ,  $\psi_{inc}$ ), le champ diffusé (avec  $\mathbf{k}_s$ ,  $\psi_s$ ), le champ transmis (avec  $\mathbf{k}_{tr}$ ,  $\psi_{tr}$ ) et le champ total,  $\psi$ , somme du champ incident et du champ réfléchi.

Dans les définitions précédentes, comme dans le reste de la thèse, l'amplitude du champ incident est supposée unitaire, mais dans le cas le plus général, l'amplitude,  $E_0$  ou  $H_0$ , du champ intervient :  $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) = E_0 \hat{\mathbf{y}} \psi_{inc}(x, z)$  (cas TE) ou  $\mathbf{H}_{inc}(\mathbf{r}) = H_0 \hat{\mathbf{y}} \psi_{inc}(x, z)$  (cas TM).

Une surface rugueuse quelconque (univoque) est définie par sa hauteur en tout point  $(x, y)$  :  $z = \zeta(x, y)$ . Nous avons choisi de nous limiter aux surfaces invariantes selon une direction ( $\hat{\mathbf{y}}$ ) ; la surface est donc telle que  $z = \zeta(x)$ ,  $\forall y$ . En conséquence, nous pouvons simplifier le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel, dans le plan  $\Pi$  ( $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}$ ), en considérant une surface monodimensionnelle  $z = \zeta(x)$ .

Les points de ce plan (Fig. 1.4) sont désignés indifféremment par le couple  $(x, z)$  ou le vecteur  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}}$ . L'angle  $\theta_i$  est l'angle d'incidence, orienté dans



le sens anti-horaire; il représente l'écart angulaire entre l'onde incidente et la normale au plan moyen de la surface. Par convention, et sans affecter la généralité de l'étude, nous considérerons toujours que l'onde incidente arrive par la gauche de la surface; l'angle d'incidence sera donc compris entre  $\theta_i = 0^\circ$  et  $\theta_i = 90^\circ$ . On parlera alors respectivement d'incidence normale et d'incidence rasante. L'angle, variable, d'observation du champ diffusé (*scattered*) est noté  $\theta_s$  et le vecteur d'onde correspondant  $\vec{k}_s$ ; il est orienté dans le sens horaire.

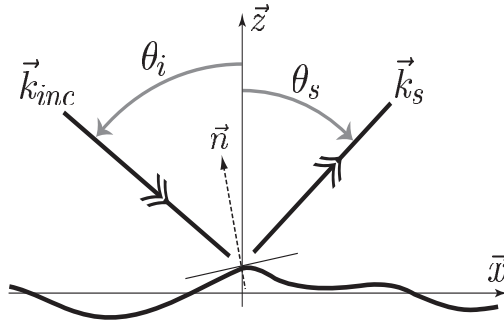


Fig.1.4 – Problème 2D (angles, vecteurs d'onde et normale locale à la surface).

### 1.5.3 Onde incidente atténuée gaussiennement

Comme nous envisageons une résolution *numérique* du problème, nous devons nous cantonner à l'étude d'une surface *d'étendue finie*. Pour éviter les effets de bord (diffraction, réflexions parasites), nous devons faire en sorte que le faisceau incident éclaire la surface sur région centrale réduite, et donc que les courants et champs surfaciques s'annulent aux extrémités de la surface. C'est une hypothèse capitale sur le champ incident, et les méthodes de résolution que nous utiliserons dans les chapitres suivants ne sont valables que si cette condition est remplie.

Toute la difficulté vient du fait que les ondes planes, que nous avons présentées, tout comme les ondes sphériques, elles aussi solutions des équations d'onde, sont d'étendue infinie. Ainsi, nous avons besoin d'une onde qui éclaire la surface sur une étendue finie et qui, de plus, soit modélisable simplement du point de vue électromagnétique, de façon à l'intégrer dans les simulations numériques.

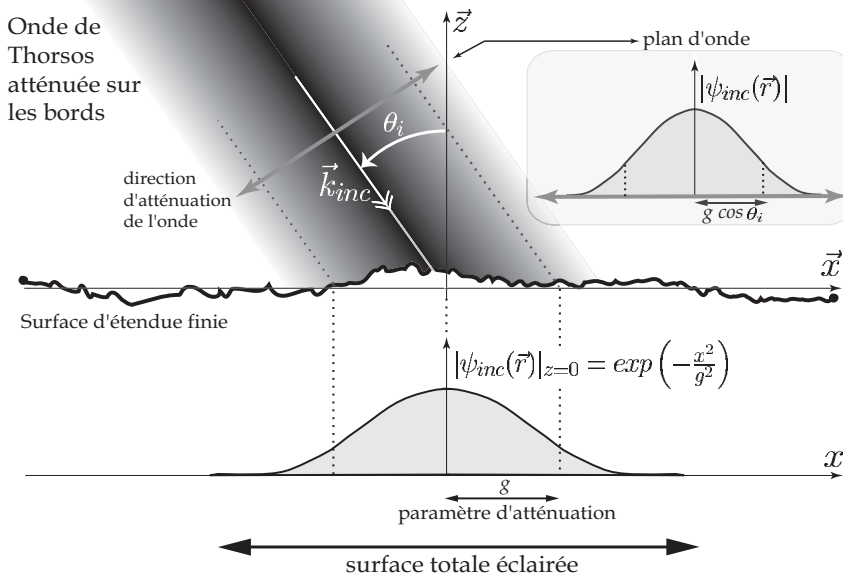
Thorsos [171] a proposé en 1988 une solution qui a été très utilisée par la suite à cause de sa grande simplicité. Il existe d'autres champs électromagnétiques remplissant cette condition d'étendue finie, comme les faisceaux gaussiens [51, 52, 149].

Pour le problème 2D (surface 1D  $x \mapsto \zeta(x)$ ), Thorsos propose un champ incident  $\psi_{inc}$  atténué en amplitude aux bords de la surface ( $z = 0$  représente la hauteur moyenne de la surface et  $(x = 0, z = 0)$  désigne le point milieu du plan  $\Pi(\hat{x}, \hat{z})$ ) :

$$|\psi_{inc}(\mathbf{r})|_{z=0} = \exp\left(-\frac{x^2}{g^2}\right) \quad (1.27)$$

où le paramètre d'atténuation  $g$ , homogène à une longueur, est choisi en fonction de la longueur de la surface, de l'échantillonnage et de l'angle d'incidence, comme nous

le verrons dans la suite de ce paragraphe.



**Fig.1.5** – Représentation de l’onde de Thorsos; schéma de l’atténuation sur un plan d’onde.

Thorsos part de la représentation intégrale suivante de l’onde incidente [174], en tout point  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}}$  tel que  $z > \zeta(x)$  :

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp \left[ -\frac{(\theta - \theta_i)^2}{(\Delta \theta)^2} \right] \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\theta \quad (1.28)$$

où  $\Delta \theta = 2/kg \cos \theta_i$  et  $\mathbf{k} = k(\sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta \hat{\mathbf{z}})$ .

Il en déduit la représentation approchée de l’onde incidente [171] :

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = \underbrace{\exp(i \mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r})}_{\text{onde plane}} \cdot \underbrace{\exp \left( -\frac{(x + z \tan \theta_i)^2}{g^2} \right)}_{\text{terme d'atténuation}} \cdot \underbrace{\exp(i \mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r} w(\mathbf{r}))}_{\text{terme correctif}} \quad (1.29)$$

$$\text{avec } w(\mathbf{r}) = \frac{\left[ 2 \frac{(x + z \tan \theta_i)^2}{g^2} - 1 \right]}{(kg \cos \theta_i)^2} \quad (1.30)$$

$$\text{et } \mathbf{k}_{inc} = k(\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \quad (1.31)$$

Sans entrer dans les détails, nous pouvons expliquer brièvement la signification de certaines composantes de l’onde incidente. Par exemple, dans le terme d’atténuation, l’argument de l’exponentielle vérifie :

$$\underbrace{\nabla(\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r})}_{\text{direction de propagation}} \cdot \underbrace{\nabla \left( \frac{(x + z \tan \theta_i)^2}{g^2} \right)}_{\text{direction d'atténuation de l'onde}} = 0 \quad (1.32)$$

et donc l'atténuation s'effectue perpendiculairement au vecteur d'onde incident ; ainsi l'atténuation est gaussienne dans un plan d'onde donné. Le lecteur peut se reporter à la figure 1.5 pour plus de clarté.

Par ailleurs le terme correctif contenant  $w(\mathbf{r})$  permet à l'onde incidente de “*mieux*” vérifier l'équation de Helmholtz. En effet, calculons  $(\Delta + k^2)\psi_{inc}$  [181] :

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)\psi_{inc} &= \frac{\partial^2 \psi_{inc}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{inc}}{\partial z^2} + k^2 \psi_{inc} \\ &= k^2 \psi_{inc} \left\{ -w^2 - 16 \frac{(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)^2 (x + z \tan \theta_i)^2}{k^4 g^8 \cos^6 \theta_i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4ik(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)}{k^4 g^4 \cos^4 \theta_i} \left[ 1 - \frac{4(x + z \tan \theta_i)^2}{g^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Dans l'équation ci-dessus, l'expression entre accolades est de l'ordre de grandeur de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4 g^4 \cos^4 \theta_i}\right)$ , et donc l'onde incidente donnée par Thorsos vérifie l'équation de Helmholtz si  $kg \cos \theta_i \gg 1$ . Or ce n'est pas le cas :

- pour des incidences rasantes,  $k$  et  $g$  étant fixés, car alors  $\theta_i \rightsquigarrow 90^\circ$  et  $kg \cos \theta_i \rightsquigarrow 0$ .
- si le paramètre  $g$  est trop *petit* par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  ; autrement dit, si le faisceau incident est trop *étroit*.

Une solution est de déterminer le paramètre  $g$  adéquat pour un angle d'incidence  $\theta_i$  et une longueur d'onde  $\lambda$ , donnés. On impose généralement :

$$\frac{1}{kg \cos(\theta_i)} \leq C \quad \forall \theta_i \quad (1.34)$$

où  $C$  est une constante petite par rapport à 1. Nous choisirons arbitrairement  $C = 0.037$  comme dans [173, 177]. Nous avons représenté sur la figure 1.6 la valeur de  $\frac{1}{kg \cos(\theta_i)}$  en fonction des deux paramètres  $\theta_i$  et  $g/\lambda$ . Pour un angle d'incidence  $\theta_i$  donné, le trait blanc correspond à la valeur de  $g/\lambda$  pour laquelle  $1/(kg \cos(\theta_i)) = 0.037$ . Par exemple, d'après cette figure, en incidence normale ( $\theta_i = 0^\circ$ ),  $g$  doit être choisi supérieur à  $5\lambda$  environ ; pour une incidence rasante  $\theta_i = 80^\circ$ ,  $g$  doit être supérieur à  $30\lambda$ .

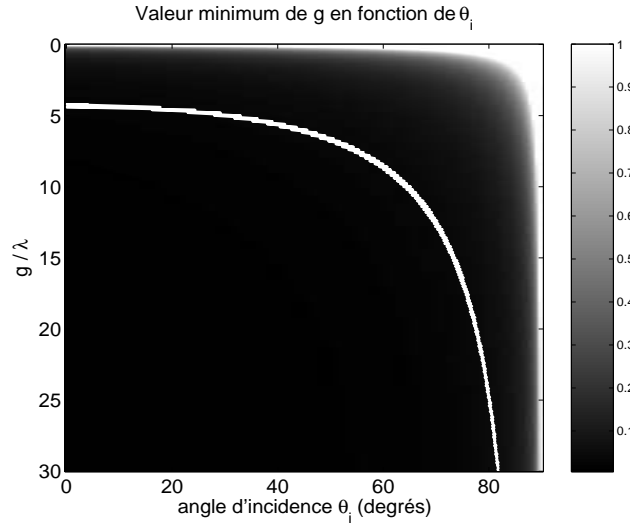
Par ailleurs, on pose, suivant la convention très répandue,  $g = L/4$ . Physiquement, un tel choix pour  $g$  implique que 96% environ de la la puissance incidente arrive sur la surface rugueuse entre les abscisses  $x = -L/4$  et  $x = +L/4$ .

Cette relation supplémentaire, reliant  $L$  et  $g$ , impose une longueur minimum  $L$  en fonction du paramètre  $g$ , déterminé d'après la condition (1.34). Cette longueur se voit donc augmentée, tout comme  $g$ , lorsque l'angle d'incidence augmente, pour une longueur d'onde fixée.

Une étude plus approfondie de l'onde de Thorsos, notamment pour les incidences rasantes, peut être trouvée dans [174].

## 1.6 Coefficient de diffusion

Imaginons qu'une onde électromagnétique arrive sur une surface plane parfaitement conductrice ; elle est alors réfléchiée dans la direction spéculaire, selon



**Fig.1.6** – Tracé de  $1/(kg \cos(\theta_i))$  en fonction de  $\theta_i$  et  $g/\lambda$ . En trait blanc : les points tels que  $1/(kg \cos(\theta_i)) = 0.037$ .

les lois de Descartes. Si, au contraire, la surface est rugueuse, de la puissance est aussi diffusée dans des directions autres que la direction spéculaire. Le coefficient de diffusion  $\sigma(\theta_s)$  permet de caractériser, en fonction de la direction d'observation  $\theta_s$ , la proportion de la puissance réfléchiée dans cette direction par rapport à la puissance incidente. Pour obtenir une expression mathématique de cette quantité, on doit déterminer au préalable l'expression de la puissance du champ incident ainsi que celle du champ diffusé. Les notations angulaires utilisées par la suite sont présentées sur la figure 1.4.

### 1.6.1 Vecteur de Poynting

On supposera comme précédemment le problème 2D, et le champ incident  $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$  défini par les équations (1.23)-(1.26). L'onde définie par  $\psi_{inc}$  se propageant selon la direction  $\mathbf{k}_{inc}$ , de l'énergie se déplace selon cette même direction. Elle est reliée au vecteur de Poynting complexe

$$\mathbf{S}_{inc} = \mathbf{E}_{inc} \wedge \mathbf{H}_{inc}^* \quad (1.35)$$

où  $\mathbf{H}^*$  est le complexe conjugué de  $\mathbf{H}$ . Une grandeur ne dépendant plus du temps est la moyenne temporelle de ce vecteur :

$$\langle \mathbf{S}_{inc} \rangle_t = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{inc} \wedge \mathbf{H}_{inc}^* \quad (1.36)$$

Nous supposons par la suite que l'onde incidente est polarisée horizontalement, donc que  $\mathbf{E}_{inc} = \hat{\mathbf{y}} \psi_{inc}$ ; le raisonnement est similaire pour la polarisation verticale.

Comme par ailleurs  $\mathbf{H}_{inc} = (\mathbf{k}_{inc} \wedge \mathbf{E}_{inc}) / \mu\omega$  et  $\|\mathbf{k}_{inc}\| = k_{inc} = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega$  :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S}_{inc} \rangle_t &= \frac{1}{2\mu\omega} \mathbf{E}_{inc} \wedge (\mathbf{k}_{inc} \wedge \mathbf{E}_{inc})^* \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\mu\varepsilon}\omega} \hat{\mathbf{y}}\psi_{inc} \wedge (\mathbf{k}_{inc} \wedge \hat{\mathbf{y}}\psi_{inc})^* \\
 &= \frac{1}{2\eta k_{inc}} \psi_{inc} \psi_{inc}^* \mathbf{k}_{inc} \\
 &= \frac{1}{2\eta k_{inc}} |\psi_{inc}|^2 \mathbf{k}_{inc}
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

en supposant que le milieu où se propage l'onde incidente est sans pertes ; on définit l'impédance diélectrique  $\eta$  du milieu par :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1.38}$$

On obtient l'expression de  $\Re(\langle \mathbf{S}_{inc} \rangle_t)$ , qui est reliée à la puissance de l'onde incidente :

$$\Re(\langle \mathbf{S}_{inc} \rangle_t) = \frac{1}{2\eta k_{inc}} |\psi_{inc}|^2 \mathbf{k}_{inc} \tag{1.39}$$

Cette grandeur étant celle que nous utiliserons par la suite, on posera par commodité  $\mathbf{S}_{inc} \equiv \Re(\langle \mathbf{S}_{inc} \rangle_t)$ . Notons que  $\mathbf{S}_s$  est obtenu de manière similaire à  $\mathbf{S}_{inc}$  en partant de l'expression (1.35) pour l'onde diffusée, et en supposant, en champ lointain, que l'onde est plane, ce qui permet d'utiliser les relations (1.16).

### 1.6.2 Définition des puissances incidente et diffusée

À présent, appelons  $P_{inc}$  et  $P_s$  respectivement les puissances incidente et réfléchie (Fig. 1.7). La puissance incidente est par définition le flux du vecteur de Poynting à travers le plan moyen  $\mathcal{P}$  de la surface rugueuse  $\mathcal{S}$  ;  $P_{inc}$  dépend de l'inclinaison  $\theta_i$  du champ incident par rapport à la normale à  $\mathcal{P}$ .

Quant à la puissance réfléchie  $P_s$ , elle est calculée différemment. En supposant que le champ incident éclaire une portion de surface centrée en  $O$  ( $x = 0, z = 0$ ), alors, à grande distance  $r$  de la surface  $\mathcal{S}$ , le champ diffusé résultant semblera provenir de l'origine. En champ lointain,  $P_s$  sera donc approchée par la somme des puissances élémentaires reçues par les éléments de surface orientée  $d\mathbf{S}(\theta_s) = r d\theta_s$ ,  $\theta_s$  balayant tous les angles compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ .

Elles sont calculées simplement d'après les définitions précédentes ( $\hat{\mathbf{z}}$  étant la normale à la surface plane moyenne définie par  $z = 0$ ) :

$$P_{inc} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\mathbf{S}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0} \tag{1.40}$$

et  $P_s$  est obtenue par :

$$P_s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s r S_s(r, \theta_s) \tag{1.41}$$

où le terme sous l'intégrale dans l'expression de  $P_s$  est exprimé dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Le signe  $-$  dans l'expression de la puissance incidente vient du fait que le plan  $\mathcal{P}$  défini par  $z = 0$  est choisi orienté vers les  $z$  négatifs, afin que la puissance incidente soit positive. On vérifie bien que, pour un paramètre d'atténuation  $g$  fixé (donc pour une surface d'éclairement fixée), la puissance  $P_{inc}$  reçue est maximale lorsque l'onde arrive verticalement; en effet, le produit  $(\mathbf{S}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0}$  est alors maximal. Par un raisonnement similaire, si l'onde incidente est rasante, la puissance reçue est très faible, car alors  $\mathbf{S}_{inc}$  est dirigée selon  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ .

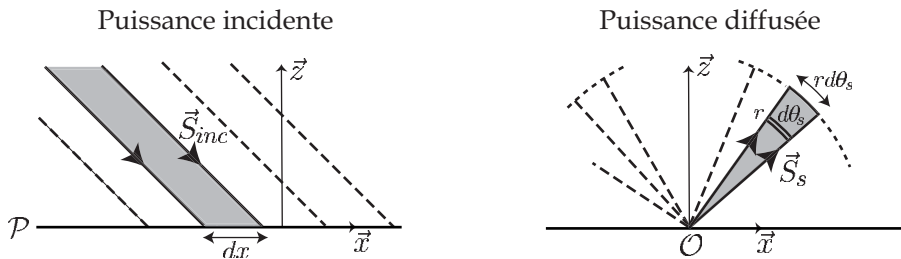


Fig.1.7 – Méthodes respectives de calcul des puissances incidente et réfléchie.

### 1.6.3 Application à l'onde de Thorsos

En utilisant les relations (1.29) et (1.39), on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0} &= \frac{1}{2\eta k_{inc}} (|\psi_{inc}|^2)_{z=0} \mathbf{k}_{inc} \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{1}{2\eta k_{inc}} \left\{ k \cos \theta_i \left[ 1 + \frac{2x^2}{g^2} - 1 \right] - \frac{4k \sin \theta_i \tan \theta_i x^2}{k^2 g^4 \cos^2 \theta_i} \right\} e^{-\frac{2x^2}{g^2}} \end{aligned} \quad (1.42)$$

où nous avons appliqué les relations suivantes, valables pour une onde plane :

$$\begin{aligned} |\psi_{inc}|^2 \mathbf{k}_{inc} &= \psi_{inc} \psi_{inc}^* \mathbf{k}_{inc} \\ &= -\Im m (\psi_{inc} \nabla \psi_{inc}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\Im m \left( \psi_{inc} \frac{\partial \psi_{inc}^*}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

En introduisant l'expression (1.42) dans (1.40) on obtient l'expression suivante de la puissance incidente pour l'onde de Thorsos [181] :

$$P_{inc} = \frac{\cos \theta_i}{2\eta} g \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \frac{1 + \tan^2 \theta_i}{2k^2 g^2 \cos^2 \theta_i} \right\} \quad (1.44)$$

### 1.6.4 Expression du coefficient de diffusion

Le coefficient de diffusion  $\sigma(\theta_s)$  est par définition [145] égal à la portion de la puissance diffusée par la surface, par rapport à la puissance incidente, dans un

intervalle angulaire de largeur  $d\theta_s$  autour de la direction d'observation variable  $\theta_s$  :

$$\frac{P_s}{P_{inc}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \sigma(\theta_s) \quad (1.45)$$

Il permet ainsi de caractériser, en fonction de l'angle  $\theta_s$ , la proportion de la puissance diffusée ou réfléchiée dans cette direction. Il est défini de manière implicite par (1.44). On peut obtenir une expression explicite de  $\sigma(\theta_s)$ ; en effet, d'après (1.41) et (1.44),

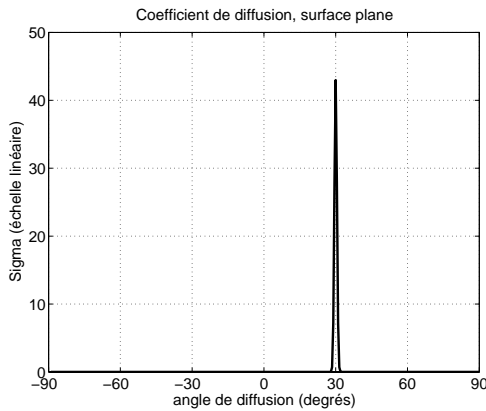
$$\frac{P_s}{P_{inc}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \frac{r S_s}{P_{inc}} \quad (1.46)$$

Par identification, on obtient

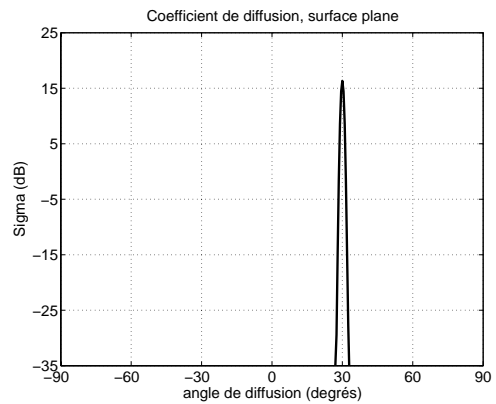
$$\boxed{\sigma(\theta_s) = \frac{r S_s}{P_{inc}}} \quad (1.47)$$

Dans les exemples qui suivent, le milieu supérieur est l'air et le milieu inférieur est choisi parfaitement conducteur. L'onde incidente utilisée est celle de Thorsos; le paramètre d'atténuation est choisi égal à  $g = L/4$ , où  $L$  est la longueur de la surface; on a choisi  $L = 80 \text{ m}$ , échantillonnée à  $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ . Le coefficient de diffusion est calculé en champ lointain, c'est-à-dire en supposant que  $r \rightsquigarrow \infty$  dans l'équation ci-dessus.

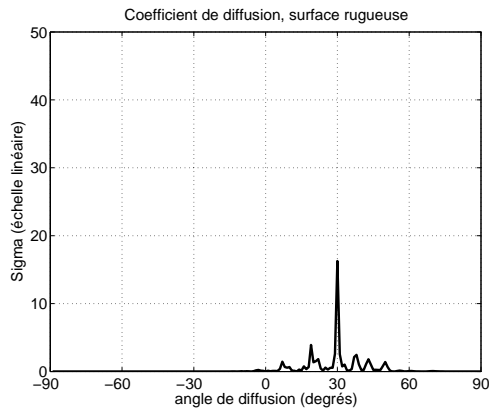
La figure 1.8 est une représentation du coefficient de diffusion obtenu dans le cas où l'onde incidente, d'inclinaison  $\theta_i = 30^\circ$ , se réfléchit sur une surface plane. La figure 1.9 représente le même coefficient de diffusion, tracé en échelle logarithmique. Le lobe de réflexion de l'onde est centré dans la direction spéculaire, symétrique de la direction incidente. Cette direction est donnée par  $\theta_s = +\theta_i$ , puisque  $\theta_i$  et  $\theta_s$  sont orientés en sens contraire. Si la surface était de longueur infinie, donc si l'onde incidente était d'étendue infinie ( $g = L/4 \rightarrow \infty$ ), le lobe se réduirait à un pic de Dirac dans cette direction. La largeur du lobe ( $\pm 3^\circ$ ) correspond à l'étendue spatiale limitée de l'onde de Thorsos.



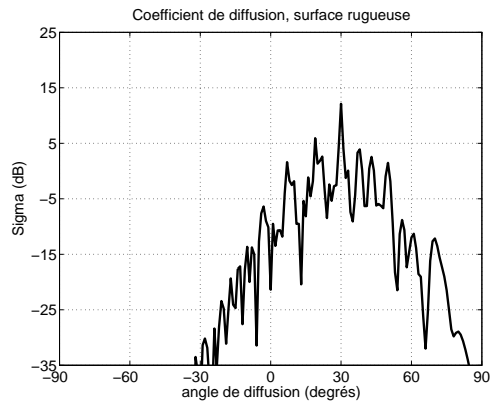
**Fig.1.8** – Coefficient de diffusion d'une surface plane, échelle linéaire.



**Fig.1.9** – Même coefficient, mais tracé en échelle logarithmique.



**Fig.1.10** – Coefficient de diffusion d'une surface rugueuse, échelle linéaire.

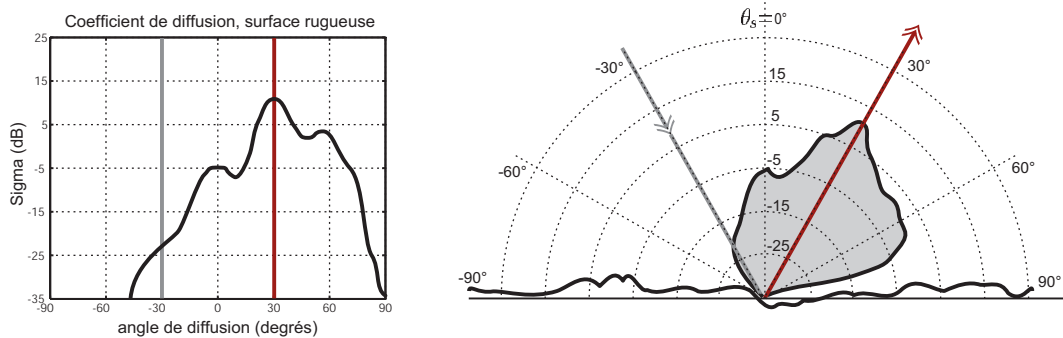


**Fig.1.11** – Tracé en échelle logarithmique.

Les figures 1.10 et 1.11 sont, quant à elles, obtenues avec une surface rugueuse, parfaitement conductrice, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 0.1$  m, d'écart-type des pentes  $\sigma_p = 0.1$ . Dans ce dernier cas, la puissance est diffusée dans toutes les directions; cependant, la plus grande partie est rayonnée dans les environs de la direction spéculaire  $\theta_s = 30^\circ$ .

On peut aussi tracer le coefficient de diffusion de façon plus naturelle en s'appuyant sur la répartition en arc de cercle de l'angle de diffusion  $\theta_s$  : c'est ce qui est fait sur la figure 1.12 en représentant  $\sigma(\theta_s)$  dans un repère polaire. On y a superposé les notations angulaires de la figure 1.4. Sur ce schéma, il ne faut pas oublier que le coefficient de diffusion est calculé en champ lointain, et qu'en aucun cas il ne représente le module du champ près de la surface. Par ailleurs, le tracé de  $\sigma(\theta_s)$  correspond à la diffusion par la surface rugueuse d'un faisceau étendu spatialement et non d'un simple rayon comme le pourrait laisser croire la figure.

En résumé, une surface plane et une surface rugueuse n'interagissent pas avec



**Fig.1.12** – Représentation du coefficient de diffusion dans un repère polaire.

une onde de la même façon et ne donnent pas le même coefficient de diffusion. La différence que l'on observe semble venir intuitivement de la différence de rugosité entre les deux surfaces considérées. Nous verrons que cela n'est pas tout à fait



exact au sens précis de *rugosité* ; ainsi deux surfaces rugueuses de caractéristiques statistiques différentes, peuvent avoir la même rugosité et, pourtant, diffuser différemment une onde. Une définition rigoureuse de ce que nous entendons par *rugosité* est rappelée ci-dessous.

### 1.6.5 Critère de Rayleigh

La rugosité d'une surface n'est pas une propriété intrinsèque de celle-ci. Elle est aussi définie par rapport aux caractéristiques de l'onde qui vient illuminer cette surface (telle que la longueur d'onde, l'angle d'incidence).

Intuitivement, une surface est dite très peu rugueuse ou encore lisse si l'ordre de grandeur des défauts est très petit par rapport à la longueur d'onde incidente. Elle sera qualifiée de rugueuse dans le cas contraire. Toutefois, l'angle d'incidence de l'onde est aussi un paramètre déterminant. Pour mieux comprendre comment il intervient dans cette discrimination entre rugueux et lisse, il convient d'introduire le paramètre de Rayleigh.

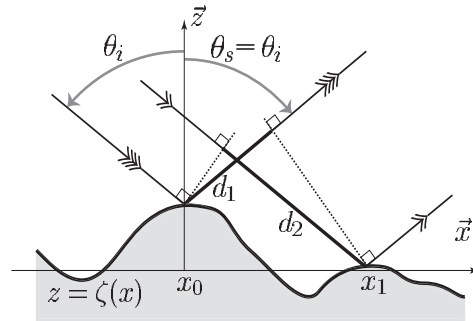
Considérons une surface monodimensionnelle définie par  $x \mapsto \zeta(x)$ . Choisissons deux points arbitraires de cette surface,  $(x_0, \zeta(x_0))$  et  $(x_1, \zeta(x_1))$ . Une question que l'on peut se poser est de savoir quelle est la différence de phase entre deux rayons réfléchis par ces points ; nous admettrons que l'on peut assimiler le champ incident à des rayons, et pour plus de facilité nous nous bornerons à l'étude dans la direction spéculaire. Il est assez facile de montrer à l'aide de la figure 1.13 que cette différence de phase est donnée par [132] :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} (\zeta(x_0) - \zeta(x_1)) \cos(\theta_{inc}) \quad (1.48)$$

On peut déjà noter que, si la surface est plane, la différence de phase est nulle (dans la direction spéculaire) indépendamment de l'angle d'incidence. Si la différence de phase est très faible, ( $|\Delta\phi| \ll \pi$ ), les deux rayons interféreront constructivement. Si, au contraire,  $|\Delta\phi| \simeq \pi$ , les rayons seront pratiquement en opposition de phase, donc interféreront destructivement et, ainsi, très peu d'énergie sera réfléchi dans la direction spéculaire. L'étude ci-dessus, menée dans le cas de deux points seulement, peut être étendue à la surface entière. On définit ainsi le paramètre :

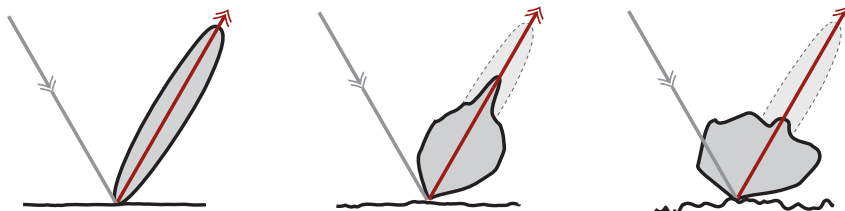
$$R_a = \frac{4\pi}{\lambda} \sigma_h \cos(\theta_{inc}) \quad (1.49)$$

où  $\sigma_h$  désigne l'écart-type des hauteurs de la surface.  $R_a$  est le *paramètre de Rayleigh*. si  $R_a < \pi/4$ , la surface sera dite *lisse* ou *peu rugueuse*, et si  $\pi/4 < R_a$ ,



**Fig.1.13** – Calcul du déphasage entre deux rayons dans la direction d'observation spéculaire.

elle sera dite *rugueuse*. Le critère  $R_a < \pi/4$  est plus connu sous le nom de *Critère de Rayleigh*. On a représenté sur la figure 1.14 l'influence du paramètre de Rayleigh sur la diffusion.



**Fig.1.14** – Coefficients de diffusion obtenus pour des surfaces avec des valeurs de  $R_a$  croissantes. À gauche, surface peu rugueuse,  $R_a < \pi/4$ ; à droite surface très rugueuse,  $\pi/4 < R_a$ . L'intégrale du lobe, représentant la puissance diffusée totale est la même pour toutes les configurations.

Ainsi, la rugosité se définit d'après la valeur du paramètre de Rayleigh qui prend en compte l'écart-type des hauteurs de la surface, la longueur d'onde et l'incidence de l'onde. Cependant, d'autres paramètres de la surface (l'écart-type des pentes, la courbure... par exemple) influent aussi sur la diffusion de l'onde. Idéalement, pour appréhender et pouvoir mesurer leurs effets il faut pouvoir être capable de générer des surfaces en contrôlant précisément tous ces paramètres. Toutefois, le choix même du type de surface modélisée, naturelle ou artificielle, etc... fait que certains de ces paramètres peuvent être liés. Une étude détaillée des surfaces que nous allons utiliser dans la suite de la thèse fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.7 Modélisation de surfaces rugueuses aléatoires

Dans le but de générer numériquement un profil *ressemblant*<sup>4</sup> à un profil donné, nous souhaitons décrire de façon pertinente –donc avec le moins de paramètres possibles, un profil rugueux. Il faut aussi noter que si nous y parvenons, nous pourrions effectuer une étude paramétrée de la diffusion d'une onde électromagnétique par ces profils. Nous pourrions aussi imaginer remonter, à partir de la connaissance du coefficient de diffusion, aux valeurs des paramètres de la surface.

Il existe une grande quantité de surfaces rugueuses que nous pouvons chercher à modéliser; surfaces de mer, surfaces rocheuses, surfaces recouvertes par de la végétation ou de la neige... mais aussi des interfaces "artificielles" telles que des surfaces optiques, ou des revêtements de navires ou d'avions... Devant ce florilège de cas, nous nous contenterons de modéliser des surfaces ayant une *distribution gaussienne des hauteurs*; parmi celles-ci on retrouve les surfaces de mer, en excluant toutefois les phénomènes non linéaires tels que le déferlement, donc en ne considérant que des vents faibles à modérés. D'autres types de surfaces que nous n'étudierons pas, comme celles modélisées par des fractales, présentent aussi un

<sup>4</sup>C'est-à-dire ayant les mêmes propriétés statistiques.

grand intérêt pratique (modélisation de surfaces de champs labourés par exemple), et le lecteur pourra se reporter à la lecture de [181] pour plus d'informations.

Pour des surfaces gaussiennes, à partir de la donnée supplémentaire du *spectre des hauteurs* de la surface, nous pourrions générer un profil aléatoire correspondant. Nous allons utiliser pour cela la méthode spectrale, explicitée après le rappel statistique.

### 1.7.1 Caractérisation statistique d'une surface rugueuse

Il s'agit dans ce rappel, de relier un profil à des valeurs statistiques clés, telles que l'écart-type des hauteurs, l'écart-type des pentes, la longueur de corrélation par exemple, qui pourront le caractériser pleinement du point de vue statistique. Nous supposons que le profil est mono-dimensionnel et défini de façon univoque, c'est-à-dire que nous pourrions le décrire à l'aide d'une fonction  $x \mapsto \zeta(x)$ ; pour être précis, nous supposons que le profil est une réalisation, à un instant  $t_0$ , d'un processus aléatoire stationnaire<sup>5</sup> ergodique<sup>6</sup> à valeurs réelles  $(x, t) \mapsto \zeta(x, t)$ .

Notons  $p(\zeta)$  la distribution statistique des hauteurs  $\zeta(x)$  de ce profil;  $p(\zeta)d\zeta$  représente la probabilité, pour un point de la surface, d'être compris entre les hauteurs  $\zeta$  et  $\zeta + d\zeta$ . La distribution des hauteurs des profils considérés par la suite est choisie gaussienne, centrée et d'écart type  $\sigma_h$ ;  $p(\zeta)$  est alors donnée par :

$$p(\zeta) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma_h^2}\right) \quad (1.50)$$

et vérifie

$$\langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta p(\zeta) d\zeta = 0 \quad (1.51)$$

Ce moyennage des hauteurs est le moment d'ordre un. Le moment d'ordre deux,  $\langle \zeta^2 \rangle$ , encore appelé variance, correspond ici au moyennage sur le carré des hauteurs. Et la racine carrée de la variance,  $\sigma_h = \langle \zeta^2 \rangle^{1/2}$ , désigne l'écart-type des hauteurs du profil.

On définit la fonction d'autocorrélation  $x \mapsto \sigma_h^2 C(x)$  par :

$$\langle \zeta(X) \zeta(X+x) \rangle = \sigma_h^2 C(x) \quad (1.52)$$

Expression dans laquelle  $C$  représente la fonction d'autocorrélation *normalisée* de la surface, telle que  $C(0) = 1$ . Finalement, les données de la distribution des hauteurs et de la fonction d'autocorrélation définissent complètement le profil; en effet, les profils de distribution gaussienne des hauteurs possèdent la propriété intéressante d'avoir tous leurs moments statistiques reliés aux deux seuls premiers.

Il est intéressant, par ailleurs, d'introduire la densité spectrale de puissance de la

---

<sup>5</sup>Un processus est dit stationnaire si ses propriétés statistiques restent inchangées au cours du temps.

<sup>6</sup>Un processus est dit ergodique si les valeurs moyennes statistiques et temporelles sont identiques. Un processus ergodique est nécessairement stationnaire, mais la réciproque est fausse.

surface (aussi appelée spectre des hauteurs de la surface), qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$S(k) = TF\{\sigma_h^2 C(x)\}(k) = \sigma_h^2 \widehat{C}(k) = \sigma_h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx C(x) e^{-ikx} \quad (1.53)$$

où  $k$  représente la fréquence spatiale par cycle et est homogène à des  $rad.m^{-1}$ . On note  $\widehat{u}$  la transformée de Fourier d'une fonction  $u$ . Dans l'expression ci-dessus,  $C$  est réelle et  $C(x) = C(-x)$ ; ceci impose au spectre  $S$  d'être réel et pair.

*Remarques :*

- On trouve aussi, dans la littérature, le spectre exprimé en fonction de la fréquence spatiale  $\nu$ , où on a posé  $k = 2\pi\nu$  :

$$S(\nu) = TF\{\sigma_h^2 C(x)\}(\nu) = \sigma_h^2 \widehat{C}(\nu) = \sigma_h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx C(x) e^{-i2\pi\nu x} \quad (1.54)$$

On emploiera indifféremment, par abus de langage, les formes (1.52) ou (1.53), le choix de la variable,  $k$  ou  $\nu$ , indiquant le choix de l'expression utilisée. Cependant, il faut faire attention à l'expression de la transformée de Fourier inverse dans chacun des deux cas, expression qui varie d'un facteur  $\frac{1}{2\pi}$  :

$$\widehat{\zeta}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \zeta(x) e^{-ikx} \text{ a pour transformée inverse } \zeta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \widehat{\zeta}(k) e^{+ikx}$$

alors que

$$\widehat{\zeta}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \zeta(x) e^{-i2\pi\nu x} \text{ a pour transformée inverse } \zeta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \widehat{\zeta}(\nu) e^{+i2\pi\nu x}$$

- On avait introduit précédemment la variable  $k = 2\pi/\lambda$ , nombre d'onde de l'onde électromagnétique, homogène à des  $rad.m^{-1}$ . Il faut distinguer cette grandeur de celle introduite en (1.52) dans l'expression de la transformée de Fourier; cette dernière représente les abscisses du spectre des hauteurs de la surface, et est aussi homogène à des  $m^{-1}$ . Le schéma (1.15) illustre cette différence.

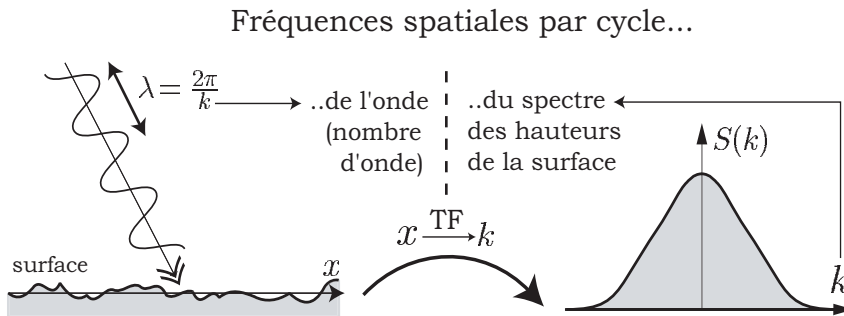


Fig.1.15 – Fréquences spatiales de l'onde et du spectre de la surface.

- Dans l'équation (1.51) on a introduit l'écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  ; d'autres grandeurs physiques, qui peuvent servir à apprécier de façon simple la rugosité de la surface, peuvent être aussi rapportées : l'écart-type des pentes  $\sigma_p$  et la distance moyenne  $\langle D \rangle$  entre deux pics consécutifs de la surface. Elles sont estimées d'après les expressions suivantes :

$$\sigma_p = \langle \zeta'(x)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 S(k)} = \sigma_h \sqrt{-C''(0)} \quad (1.55)$$

$$\langle D \rangle \simeq \pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^2 S(k)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^4 S(k)}} \quad (1.56)$$

- On définit aussi la *longueur de corrélation*  $L_c$  d'un profil comme étant la distance à partir de laquelle la fonction d'autocorrélation est inférieure au rapport  $\sigma_h^2/e$ . Cette longueur est du même ordre de grandeur que la distance moyenne  $\langle D \rangle$ .

### 1.7.2 Génération du profil par méthode spectrale

Nous voulons générer une surface discrète de longueur  $L$ , décrite par  $N$  échantillons  $(x_n, \zeta_n = \zeta(x_n))$ , qui ait :

- une distribution gaussienne des hauteurs,
- et un spectre des hauteurs égal à un spectre donné,  $S_\zeta$ .

On choisit un pas constant  $\Delta x$  en abscisse, d'où  $\Delta x = \frac{L}{N}$  et :

$$x_n = -\frac{L}{2} + (n - \frac{1}{2})\Delta x, \quad n = 1..N \quad (1.57)$$

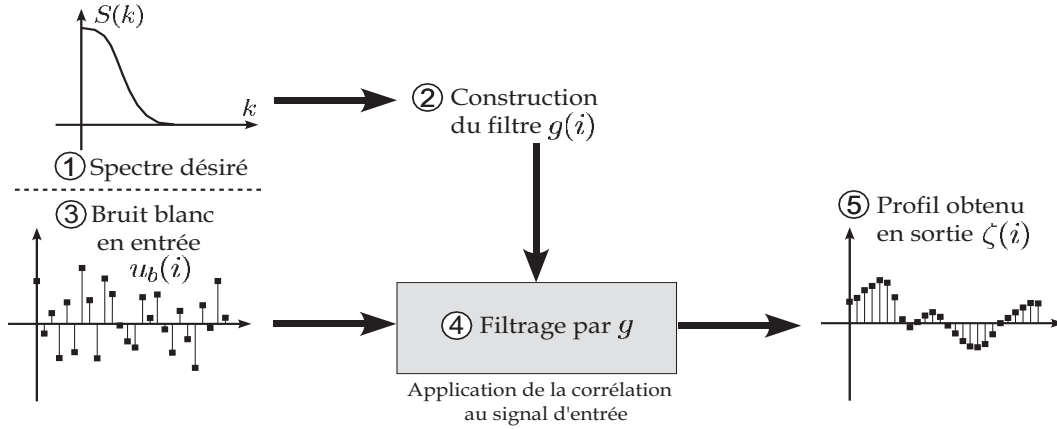
Afin d'obtenir les échantillons  $\zeta_n$  des hauteurs, un filtre  $g$  est créé qui, à un bruit blanc gaussien  $u_b(i)$  en entrée, associera le signal attendu  $\zeta(i) = \zeta_i$  en sortie. Par linéarité de l'opération de filtrage, on sait déjà que le signal de sortie  $\zeta(i)$  a aussi une distribution gaussienne des hauteurs. Il reste à déterminer précisément les coefficients du filtre pour que le signal de sortie ait, en plus, le bon spectre. Le principe est schématisé sur la figure 1.16.

Considérons un signal discret  $u(i)$  appliqué en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle  $g$  ; en sortie, on recueille un signal  $\zeta(i)$ . Par définition de la réponse impulsionnelle, en notant  $*$  l'opérateur de convolution,

$$\zeta(i) = (g * u)(i) \quad (1.58)$$

Soient  $S_u(k)$  et  $S_\zeta(k)$  les spectres de puissance respectifs des signaux d'entrée et de sortie et  $\hat{g}(k)$  la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $g(i)$  du filtre. On a la relation :

$$S_\zeta(k) = |\hat{g}(k)|^2 \cdot S_u(k) \quad (1.59)$$



**Fig.1.16** – Schéma de génération d'un profil à l'aide d'un filtre. Dans notre étude le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien.

qui conduit, puisque tous les signaux considérés ici sont réels, à l'expression de la réponse impulsionnelle  $g(i)$  du filtre :

$$g(i) = TF^{-1} \left( \frac{\sqrt{S_\zeta(k)}}{\sqrt{S_u(k)}} \right) \quad (1.60)$$

Les coefficients  $g(i)$  sont donc déterminés à condition de connaître l'expression  $S_u$  du spectre du signal d'entrée. Choisissons alors en entrée un *bruit blanc gaussien*  $u_b$  de variance 1, qui l'avantage d'avoir un spectre constant égal à 1 :

$$u_b \text{ bruit blanc gaussien de variance 1} \Rightarrow S_{u_b}(k) = 1, \quad \forall k \quad (1.61)$$

En modifiant (1.59) en conséquence, la réponse impulsionnelle du filtre est cette fois complètement déterminée :

$$g(i) = TF^{-1}(\sqrt{S_\zeta(k)}) \quad (1.62)$$

On peut, dès lors, obtenir le profil  $\zeta(i)$  en remplaçant cette expression dans la formule (1.57) et en effectuant la convolution. Cependant, on utilisera la formule équivalente, plus efficace numériquement :

$$\zeta(i) = TF^{-1}(\hat{g}(k) \times \hat{u}(k))(i) \quad (1.63)$$

En transformant (1.62) à l'aide de (1.61), on aboutit à :

$$\boxed{\zeta(i) = TF^{-1}(\sqrt{S_\zeta(k)} \times \hat{u}_b(k))(i)} \quad (1.64)$$

Pour générer le profil  $(x_n, \zeta_n)$ , où  $x_n = -\frac{L}{2} + (n - \frac{1}{2})\Delta x$ ,  $n = 1..N$ , la formule précédente s'applique en pratique de la façon suivante [171], [72] :

$$\boxed{\zeta_n = \frac{1}{L} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} F(k_m) \exp(ik_m x_n)} \quad (1.65)$$

avec, pour  $m \geq 0$ ,

$$F(k_m) = \sqrt{L S_\zeta(k_m)} \times \begin{cases} (\mathcal{N}(0, 1) + i\mathcal{N}(0, 1))/\sqrt{2} & m \neq 0, N/2 \\ \mathcal{N}(0, 1) & m = 0, N/2 \end{cases} \quad (1.66)$$

et, pour  $m \leq 0$ ,

$$F(k_m) = F(k_{-m})^* \quad (1.67)$$

où  $\mathcal{N}(0, 1)$  est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne centrée de variance unité, et  $k_m = 2\pi m/L$ . Pour plus de détails, nous conseillons au lecteur de consulter la référence [181], p. 124.

### 1.7.3 Exemples de spectres et surfaces associées

#### 1.7.3.1 Spectre gaussien

Dans ce premier cas, la fonction d'autocorrélation  $\sigma_h^2 C$  de la surface est choisie gaussienne :

$$\sigma_h^2 C(x) = \sigma_h^2 . e^{-\frac{x^2}{L_c^2}} \quad (1.68)$$

où la longueur de corrélation  $L_c$  et l'écart type des hauteurs  $\sigma_h$  sont connus. Dans la littérature les surfaces associées sont dites *gaussiennes*, en référence aux distributions statistiques des hauteurs et au spectre des hauteurs, qui sont gaussiens. Pour une telle fonction d'autocorrélation, le spectre correspondant s'écrit :

$$S(k) = \sigma_h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx C(x) e^{-ikx} = \sigma_h^2 L_c \sqrt{\pi} . e^{-\frac{k^2 L_c^2}{4}} \quad (1.69)$$

forme équivalente, d'après notre convention, à

$$S(\nu) = \sigma_h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx C(x) e^{-i2\pi\nu x} = \sigma_h^2 L_c \sqrt{\pi} . e^{-\pi^2 \nu^2 L_c^2} \quad (1.70)$$

L'écart-type des pentes est relié à l'écart-type des hauteurs et à la longueur de corrélation d'après (1.54) :

$$\sigma_p = \langle \zeta'(x)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 S(k)} = \sigma_h \sqrt{-C''(0)} = \sqrt{2} \frac{\sigma_h}{L_c} \quad (1.71)$$

Sur la figure 1.17 nous avons représenté un exemple de profil généré à l'aide de l'équation (1.64) et de la donnée du spectre (1.68). Nous avons choisi  $L = 80$  m,  $\sigma_h = 0.212$  m,  $L_c = 0.9$  m et  $\Delta x = 0.1$  m.

On peut constater, sur l'agrandissement du profil donné en figure 1.18, que la moyenne  $\langle D \rangle$  entre deux pics consécutifs de la surface est légèrement supérieure à  $L_c$ . Cela peut se vérifier par le calcul. En effet, d'après (1.55) :

$$\langle D \rangle \simeq \pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^2 S(k)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^4 S(k)}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} L_c \simeq 1.28 L_c \quad (1.72)$$

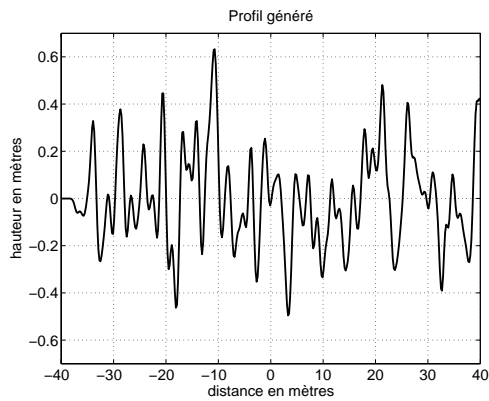


Fig.1.17 – Exemple de profil gaussien.

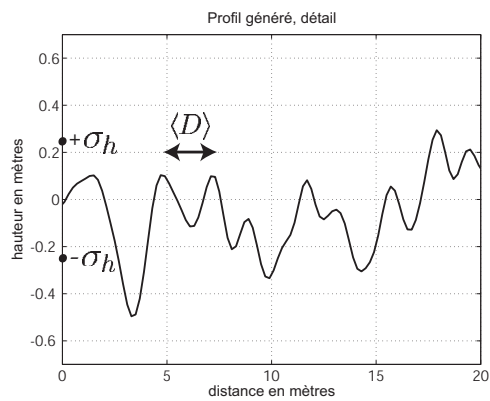


Fig.1.18 – Détail du profil.

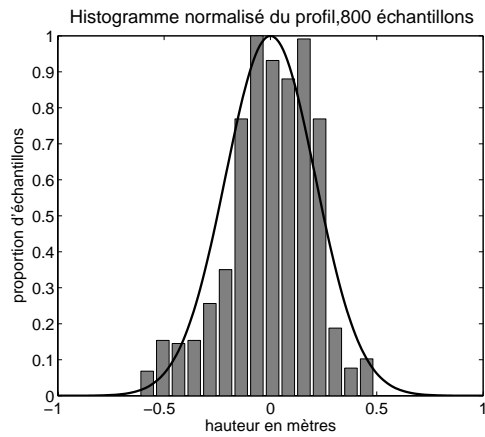


Fig.1.19 – Histogramme normalisé du profil, théorique (courbe) et mesuré (histogramme).

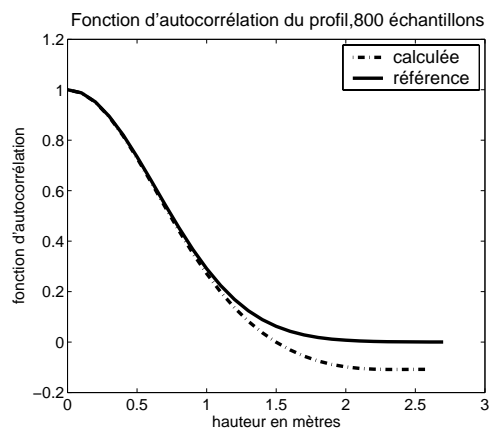
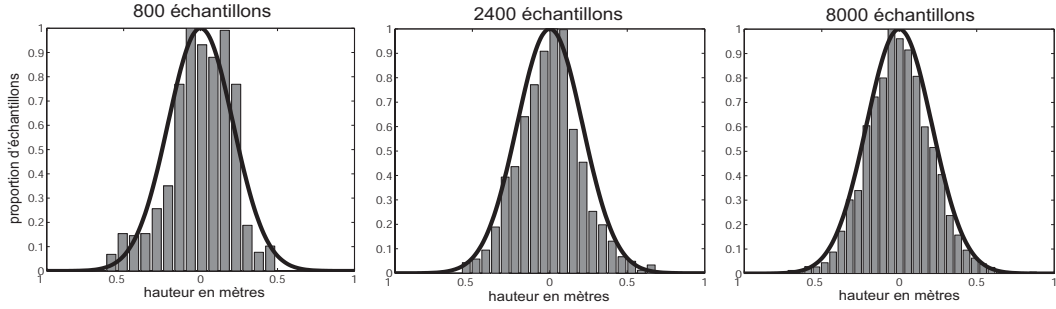


Fig.1.20 – Fonction d'autocorrélation normalisée du profil, théorique (courbe pleine) et mesuré (courbe hachurée).

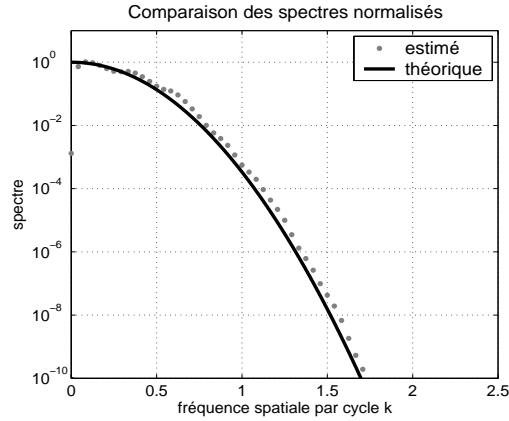
Nous avons représenté sur la figure 1.19 l'histogramme normalisé des hauteurs de ce même profil et, sur la figure 1.20, la fonction d'autocorrélation normalisée des hauteurs. On retrouve bien d'après la figure 1.19 que le profil obtenu a des hauteurs globalement comprises entre  $-3\sigma_h$  et  $3\sigma_h = 0.636\text{ m}$ . On constate que pour un tel profil de 800 échantillons, l'histogramme et la fonction d'autocorrélation ne sont pas très éloignés de la forme gaussienne de référence. Cependant, on peut améliorer ces résultats en générant une surface plus longue pour un pas d'échantillonnage,  $\Delta x$ , fixe. On a tracé sur la figure 1.21 l'évolution de l'histogramme des hauteurs en fonction du nombre d'échantillons  $N = L/\Delta x$  pour  $L$  croissant; l'évolution de la fonction d'autocorrélation, non représentée ici, est similaire et, pour 8000 échantillons par exemple, les résultats théoriques et mesurés sont très proches.

Finalement, afin de valider la méthode, on détermine numériquement le spectre des hauteurs du profil obtenu puis on le compare au spectre théorique normalisé, défini d'après (1.68) (Fig. 1.22). On pourrait estimer le spectre directement en effectuant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation tracée ci-dessus, mais





**Fig.1.21** – Histogramme des hauteurs pour des profils de longueur  $L$  croissante ( $L = 80, 240, 800$  m). Les autres paramètres sont fixes :  $\sigma_h = 0.212$  m,  $L_c = 0.9$  m et  $\Delta x = 0.1$  m.



**Fig.1.22** – Comparaison des spectres estimé et théorique;  $L = 80$  m,  $\sigma_h = 0.212$  m,  $L_c = 0.9$  m,  $\Delta x = 0.1$  m.

cette méthode, dite du périodogramme, ne donne pas de bons résultats; en effet l'estimateur correspondant a une variance qui ne diminue pas quand le nombre d'échantillons augmente. On préfère utiliser la variante du périodogramme moyenné par la méthode de Welch, qui consiste à calculer  $M$  périodogrammes à partir de  $M$  sous-suites de  $\zeta_n$ , et à en effectuer la moyenne. La méthode se présente sous la forme [170] [136] :

$$S_M(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \frac{1}{P} \left| \sum_{p=0}^{P-1} x_{m_p} f_p e^{-j p \omega} \right|^2 \right] \quad (1.73)$$

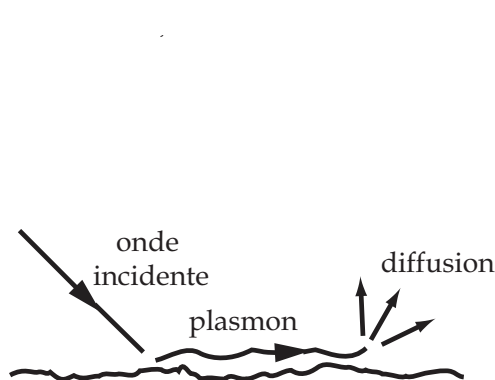
où les  $f_p$  sont les coefficients d'une fenêtre d'amortissement, telle que celle de Hanning par exemple. Dans la relation ci-dessus,  $M$ ,  $L$  et  $N$ , vérifient  $(M - 1)D + P = N$  où  $D$  est un entier et  $N$ , le nombre total d'échantillons de la surface. Pour la méthode de Welch,  $M \simeq 2N/P$ .

### 1.7.3.2 Spectre de West-O'Donnell

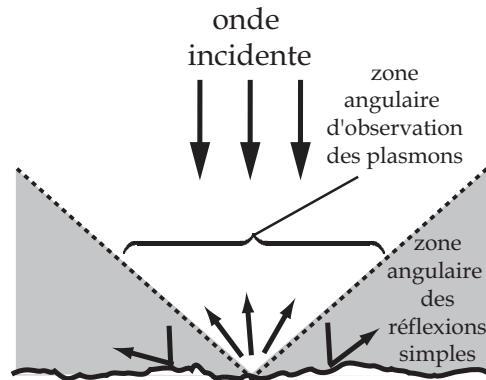
Lorsqu'un champ électromagnétique éclaire une surface peu rugueuse, la plus grande partie de l'énergie incidente est renvoyée dans la direction spéculaire; c'est comme si, en moyenne, la surface rugueuse se comportait comme le plan  $z = 0$ . D'après cette analogie, on comprend que l'onde qui est diffusée dans la direction spéculaire a subi, la plupart du temps, une seule réflexion. Mais il se peut que d'autres ondes, qui ont suivi un cheminement plus compliqué et qui ont subi des réflexions multiples, soient aussi diffusées au voisinage de la direction spéculaire; cependant elles sont minoritaires. Ceci peut masquer la contribution des réflexions multiples qui est plus faible que celle obtenue dans la direction spéculaire.

Or, depuis quelques années déjà, on s'intéresse à un phénomène particulier : l'excitation, par l'onde incidente, d'un plasmon de surface au voisinage d'une surface rugueuse [119, 126] (Fig. 1.23). Ce plasmon est associé à une onde dont le champ électromagnétique possède à la fois des composantes longitudinale et transverse par rapport à la direction de propagation. Il en résulte un transport d'énergie au voisinage de la surface sur une distance très courte, ce jusqu'à diffusion de l'onde. Ce phénomène est très difficile à observer et, souvent, le niveau d'énergie des réflexions simples masque les effets produits par les plasmons de surface.

Il s'agissait donc de trouver une configuration très sophistiquée pour effectuer



**Fig.1.23** – Schéma du couplage entre l'onde incidente et un plasmon de surface; le plasmon se propage avant de se diffuser.



**Fig.1.24** – Effet sur la diffusion simple lors de l'utilisation d'une surface de type West-O'Donnell.

des mesures expérimentales, notamment en configuration champ proche à l'aide de sondes nanométriques, lorsque West et O'Donnell [193, 194] ont très élégamment proposé en 1995 une surface particulière qui répondait au problème. Cette surface en question renvoie très peu d'énergie due aux réflexions simples dans la direction spéculaire; par exemple, éclairée sous des directions proches de la verticale, elle renvoie de l'énergie dans les directions rasantes (typiquement entre  $50^\circ$  et  $90^\circ$ ), (Fig. 1.24). Par ailleurs, dans le but de coupler l'onde incidente aux plasmons surfaciques, la surface a ses propriétés statistiques choisies en fonction de l'onde incidente (en particulier, en fonction du nombre d'onde de l'onde). Le spectre proposé par West

et O'Donnell est le suivant :

$$S(k) = \sigma_h^2 \frac{\pi}{k_+ - k_-} [\vartheta(k_+ - k) \vartheta(k - k_-) + \vartheta(-k_- + k) \vartheta(-k - k_-)] \quad (1.74)$$

où  $\vartheta(\cdot)$  est la fonction de Heaviside, et  $k_+$  et  $k_-$  sont les fréquences de coupure du spectre. La fonction de corrélation associée est :

$$\sigma_h^2 C(x) = \sigma_h^2 \frac{\sin(k_+ x) - \sin(k_- x)}{(k_+ - k_-) x} \quad (1.75)$$

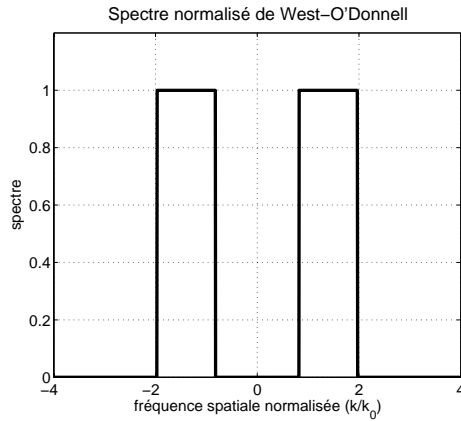
la distance moyenne  $\langle D \rangle$  entre deux pics consécutifs de la surface est donnée par (1.55) :

$$\langle D \rangle \simeq \pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^2 S(k)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^4 S(k)}} = \pi \sqrt{\frac{5 k_+^3 - k_-^3}{3 k_+^5 - k_-^5}} \quad (1.76)$$

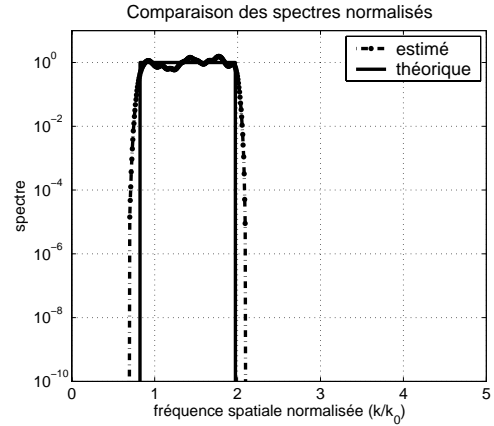
De même, l'écart-type des pentes est calculé d'après (1.54)

$$\sigma_p = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 S(k)} = \frac{\sigma_h}{\sqrt{3}} \sqrt{k_+^2 + k_+ k_- + k_-^2} \quad (1.77)$$

Nous avons représenté sur la figure 1.25 un exemple de spectre de



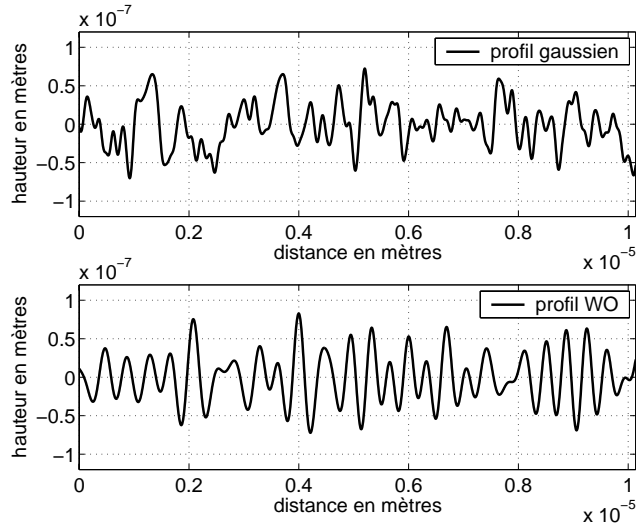
**Fig.1.25** – Exemple de spectre normalisé de West-O'Donnell.



**Fig.1.26** – Spectre mesuré et spectre théorique.

West O'Donnell théorique et sur la figure 1.26 le spectre estimé d'après la surface générée. Celle-ci est tracée sur la figure 1.27. Les paramètres choisis sont ceux de [158], où  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  désigne le nombre d'onde de l'onde incidente :  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ , correspondant à la longueur d'onde d'un laser He-Ne,  $\sigma_h = 30 \text{ nm} \simeq \lambda/21$ ,  $L_c = 212 \text{ nm} \simeq \lambda/3$ ,  $k_- = 0.82 k_0 \simeq 0.81 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_+ = 1.92 k_0 \simeq 1.96 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $L = 160\lambda$  et  $\Delta x = \lambda_0/10$ .

On peut expliquer simplement, d'après la forme de son spectre, pourquoi la surface de West O'Donnell renvoie très peu d'énergie due aux réflexions simples dans la direction spéculaire. En effet, d'après la théorie des petites perturbations [65], la



**Fig.1.27** – Comparaison de profils gaussien et de West-O'Donnell. Pour les deux profils,  $\sigma_h = 30 \text{ nm}$  et  $\sigma_p = 0.42$ .

contribution des réflexions simples au coefficient de diffusion est proportionnelle à  $S(|k_0 \sin \theta_i - k_0 \sin \theta_s|)$ , où  $k_0 \sin \theta_i$  et  $k_0 \sin \theta_s$  sont les projetés, suivant  $\hat{x}$ , des nombres d'onde des ondes incidente et diffusée, respectivement. En conséquence, les contributions des réflexions simples sont importantes lorsque  $S(|k_0 \sin \theta_i - k_0 \sin \theta_s|)$  est grand. Le spectre (1.73) a ceci de particulier qu'il est non nul pour des valeurs de  $|k|$  comprises entre  $k_-$  et  $k_+$ . Ainsi, pour des angles tels que  $|k_0 \sin \theta_i - k_0 \sin \theta_s| < k_-$ , les contributions des réflexions simples sont nulles. En incidence normale,  $\theta_i = 0$ , et la condition précédente devient  $|k_0 \sin \theta_s| < k_-$ ; finalement, on peut donc prédire que pour des valeurs de  $|\theta_s|$  inférieures à  $\sin^{-1}(k_-/k_0)$ , l'énergie diffusée due aux contributions simples sera très réduite. Pour revenir à l'exemple numérique donné plus haut, l'angle limite vaut, dans ce cas,  $\sin^{-1}(0.82) \simeq 55.1^\circ$  (Fig. 1.24).

### 1.7.3.3 Spectre de mer

De façon schématique, une surface de mer se caractérise par des vagues de grande amplitude sur lesquelles se superposent des vaguelettes. En termes ondulatoires, les premières sont appelées vagues de gravité, car elles sont entretenues par la force de gravité. Les secondes sont dénommées vagues de capillarité, et, la force principale qui entre en jeu dans ce cas-là, est la tension superficielle.

De nombreux spectres ont été développés depuis des décennies pour modéliser la surface de la mer ; on peut citer par exemple le spectre de Pierson et Moskowitz [137], et celui de Apel [10]. Nous utiliserons, pour générer la surface discrétisée, le spectre isotrope  $S$  de gravité et de capillarité développé par Elfouhaily [58] ; d'après des simulations numériques récentes [23], il a des caractéristiques concordantes avec les distributions des pentes de Cox et Munk [41], établi d'après des mesures.

Le spectre de Elfouhaily permet, notamment, de modéliser une mer loin des côtes

en régime stationnaire, mer dite alors de houle ou développée; dans ce cas-là, par hypothèse, la surface de mer ne dépend que de la vitesse  $U_z$  du vent, mesurée à une altitude fixée de  $z$  mètres au-dessus du niveau moyen de la mer.  $U_z$  est exprimée en mètres par seconde.

On définit de même la vitesse de friction  $U_f$ , qui est la vitesse limite du vent à la surface de la mer.  $U_f$ , plus faible que  $U_z$ , sera exprimée en centimètres par seconde. La vitesse  $U_z$ , mesurée à une altitude  $z$ , peut être exprimée en fonction de la vitesse de friction :

$$U_z = \frac{U_f}{0.4} \ln \frac{z}{z_0} \quad \text{où} \quad z_0 = \frac{0.684}{u_f} + 4.28 \times 10^{-5} U_f^2 - 4.43 \times 10^{-2} \quad (1.78)$$

Le spectre considéré permet de simuler une surface de mer *bi-dimensionnelle* anisotrope. Nous ne détaillerons que la partie isotrope de ce spectre, qui servira à générer une surface de mer *mono-dimensionnelle*. Le spectre isotrope peut s'écrire sous la forme :

$$S(k) = \frac{B_L(k) + B_H(k)}{k^3} \quad (1.79)$$

où les termes  $B_L$  et  $B_H$  sont respectivement les contributions des vagues de gravité et de capillarité.

- L'expression détaillée du terme de gravité  $B_L$  est donnée par :

$$B_L(k) = \frac{\alpha_p c(k_p) F_p(k)}{2c(k)} \quad (1.80)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_p & = 6 \times 10^{-3} \Omega^{1/2} \\ \Omega & = 0.84 \quad \text{pour une mer complètement développée} \\ c(k) & = [g (1 + k^2/k_m^2)]^{1/2} \\ k_p & = g\Omega^2/U_{10}^2 \\ k_m & \simeq 363 \text{ rad/m} \\ g & \simeq 9.81 \text{ m/s}^2 \end{cases} \quad (1.81)$$

De plus,

$$F_p(k) = \kappa^\Gamma \times \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{k}{k_p} \right)^2 \right] \times \exp \left[ -\Omega \frac{\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1}{\sqrt{10}} \right] \quad (1.82)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \Gamma & = \exp[-(\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1)/(2\delta^2)] \\ \delta & = 0.08 (1 + 4/\Omega^3) \\ \kappa & = 1.7 \quad \text{pour une mer développée} \end{cases} \quad (1.83)$$

- La composante de capillarité  $B_H$  est donnée par :

$$B_H(k) = \frac{\alpha_m c(k_m) F_m(k)}{2c(k)} \quad (1.84)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_m & = 10^{-2} \begin{cases} 1 + \ln[U_f/c(k_m)] & U_f \leq c(k_m) \\ 1 + 3 \ln[U_f/c(k_m)] & U_f > c(k_m) \end{cases} \\ c(k_m) & = 23 \text{ cm/s} \\ F_m(k) & = \exp[-\{k/k_m - 1\}^2/4] \end{cases} \quad (1.85)$$

A partir de cette expression du spectre, on peut calculer la longueur de corrélation ainsi que l'écart-type des hauteurs, et nous les donnons sans entrer dans le détail de leur calcul, que le lecteur pourra trouver dans [23] :

$$L_c \simeq 3 \times 0.154 U_{10}^{2.04} \quad \text{et} \quad \sigma_h \simeq 6.30 \times 10^{-3} U_{10}^{2.02} \quad (1.86)$$

Par ailleurs, l'écart-type des pentes est donné par

$$\sigma_p \simeq \sqrt{\frac{1}{2} (3.16 U_{10} \times 10^{-3} + (3 + 1.92 U_{10}) \times 10^{-3})} \quad (1.87)$$

Cet écart-type des pentes, obtenu à partir du spectre expérimental de Cox et Munk, est bien approché par l'écart-type des pentes calculé de façon numérique à partir du spectre de Elfouhaily. Le calcul de ces grandeurs,  $L_c$ ,  $\sigma_h$  et  $\sigma_p$ , est aussi détaillé pour le spectre de Pierson-Moskowitz dans [174]. Nous devons préciser que la longueur de corrélation donnée pour le spectre d'Elfouhaily par (1.85) est prise 3 fois supérieure à la distance moyenne  $\langle D \rangle$  obtenue par (1.55) ; elle est volontairement surestimée en prenant en compte des considérations physiques [23].

Nous avons représenté dans le tableau 1.2 les valeurs de la longueur de corrélation  $L_c$  et de l'écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  en fonction de la vitesse du vent  $U_{10}$  à une altitude de 10 mètres au dessus du niveau moyen de la mer.

Echelle Beaufort	Vitesse $U_{10}$ en $m/s$	$L_c$ en m	$\sigma_h$ en m	$\sigma_p$
0 (calme)	< 0.2	< 0.017	< 0.0002	< 0.045
1 (très légère brise)	0.4 - 1.4	0.071 - 0.92	0.0010 - 0.0124	0.050 - 0.071
2 (légère brise)	1.7 - 3.3	1.36 - 5.27	0.0184 - 0.701	0.076 - 0.100
3 (petite brise)	3.6 - 5.3	6.30 - 13.9	0.0836 - 0.1826	0.103 - 0.122
4 (jolie brise)	5.6 - 7.8	15.5 - 30.5	0.204 - 0.400	0.125 - 0.146
5 (bonne brise)	7.8 - 10.6	30.5 - 57.0	0.400 - 0.740	0.146 - 0.168
6 (vent frais)	10.8 - 13.8	59.2 - 97.7	0.770 - 1.26	0.170 - 0.191
7 (grand frais)	14.0 - 17.1	101 - 151	1.30 - 1.95	0.193 - .212
8 (coup de vent)	17.3 - 20.7	155 - 223	2.00 - 2.86	0.213 - 0.233

**Tab.1.2** – Longueur de corrélation et écart-type des hauteurs en fonction de la vitesse du vent  $U_{10}$  à une altitude de 10 m.

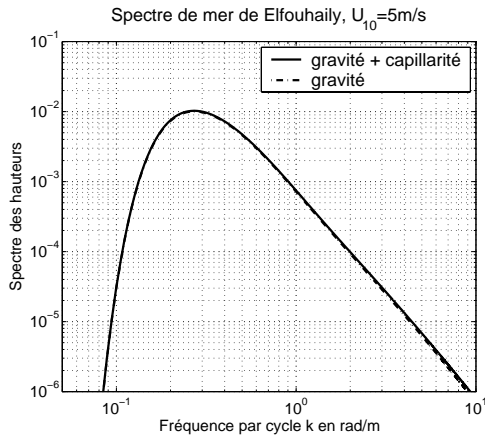
On peut se demander, devant la forme assez compliquée des termes de gravité  $B_L$  et de capillarité  $B_H$ , quelle est leur importance relative dans le spectre. Ceci permettrait, si l'un des deux était négligeable devant l'autre, de ne garder par la suite qu'une expression simplifiée du spectre.

D'après (1.78), on peut définir deux spectres des hauteurs ; l'un de gravité,  $S_L(k) = B_L(k)/k^3$ , et l'autre, de capillarité,  $S_H(k) = B_H(k)/k^3$ . Le spectre de Elfouhaily inclut par construction les spectres de gravité et de capillarité, puisque  $S = S_L + S_H$ . Définissons aussi les spectres des pentes et de la courbure de la surface, par  $k^2 S(k)$  et  $k^3 S(k)$ , respectivement.

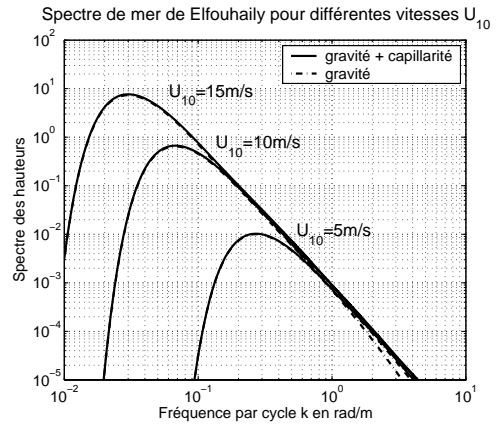
Etudions tout d'abord le spectre des hauteurs. Nous avons représenté sur la figure 1.28, le spectre d'Elfouhaily des hauteurs pour une vitesse  $U_{10} = 5 \text{ m/s}$ , en incluant ou non le spectre de capillarité. Comme on le constate sur la figure 1.28, le maximum est bien atteint pour la valeur théorique [23]

$$k_{pic} = \frac{\Omega^2 g}{U_{10}^2} = 0.2769 \text{ rad/m} \quad (1.88)$$

On voit sur cet exemple que le spectre de gravité des hauteurs est prédominant par rapport au spectre de capillarité, c'est-à-dire que  $S_L + S_H \simeq S_L$ . Ceci reste vrai pour des vitesses  $U_{10}$  plus élevées, comme on le constate sur la figure 1.29.



**Fig.1.28** – Spectres de gravité et de capillarité de Elfouhaily, exemple obtenu pour  $U_{10} = 5 \text{ m/s}$ .

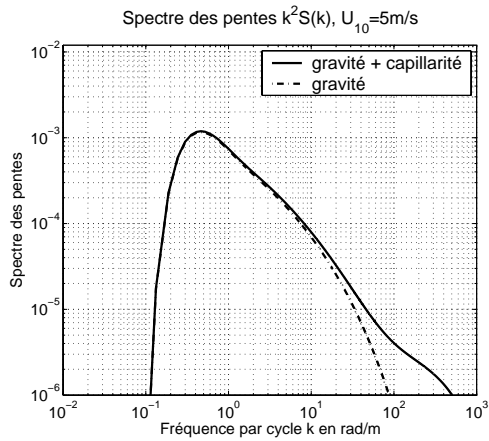


**Fig.1.29** – Spectres de gravité et de capillarité de Elfouhaily, exemple obtenu pour  $U_{10} = 5, 10 \text{ et } 15 \text{ m/s}$ .

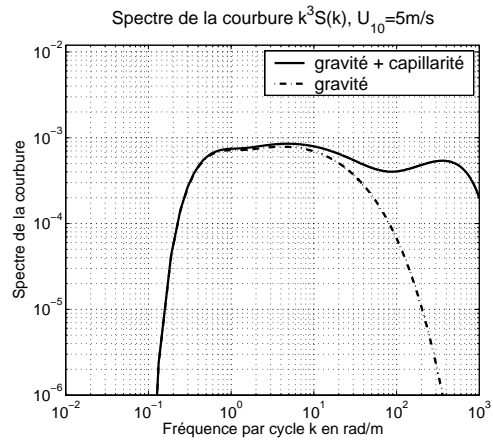
Nous avons représenté ensuite sur la figure 1.30 et (1.31) les spectres des pentes et de la courbure de la surface.

Cette fois, la contribution de la capillarité n'est pas négligeable : le spectre de gravité des pentes n'est pas prédominant par rapport au spectre de capillarité des pentes,  $k^2(S_L + S_H) \neq k^2 S_L$ . Si on considère le spectre des courbures, la contribution de la capillarité est encore augmentée. Pour des fréquences  $k$  supérieures à  $10 \text{ rad/m}$ , le spectre de capillarité est prédominant, c'est-à-dire que  $k^3(S_L + S_H) \simeq k^3 S_H$ .

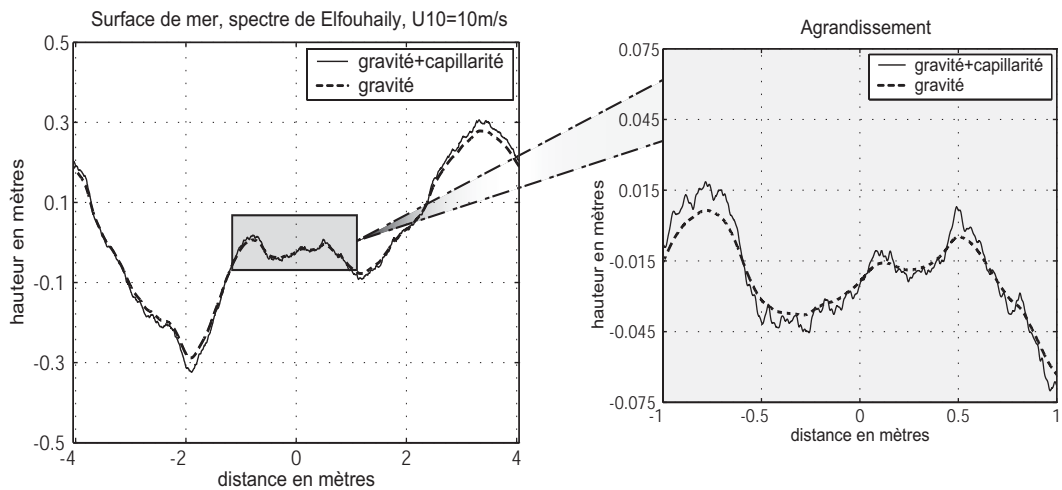
Sur la figure 1.32, nous avons représenté deux profils de mer, l'un (courbe en trait discontinu) obtenu à partir du spectre de gravité, l'autre (courbe en trait plein) à partir du spectre de gravité et de capillarité de Elfouhaily. Sur ce dernier profil, on voit que la prise en compte de la capillarité se traduit par la présence de vaguelettes. Ces vaguelettes peuvent être interprétées comme une agitation locale de la surface autour de la position d'équilibre, agitation qui fait que l'écart-type des pentes, ainsi que l'écart-type de la courbure, augmentent.



**Fig.1.30** – Spectres des pentes,  $U_{10} = 5 \text{ m/s}$ .



**Fig.1.31** – Spectres de la courbure,  $U_{10} = 5 \text{ m/s}$ .



**Fig.1.32** – Profils de mer obtenus en prenant en compte ou non la capillarité; dans cet exemple,  $U_{10} = 10 \text{ m/s}$ .



## 1.8 Conclusion

Nous avons précisé dans ce chapitre les données physiques du problème de diffusion, que sont la surface rugueuse et l'onde incidente. Par ailleurs, en supposant le champ diffusé connu, nous avons défini le coefficient de diffusion. Il reste à établir le lien, ce que nous ferons dans le chapitre suivant, entre le champ diffusé et les données du problème ; c'est un domaine scientifique où les avancées ont été spectaculaires en quelques dizaines d'années. Nous étudierons en particulier des méthodes très récentes de résolution numérique ; l'onde de Thorsos, d'étendue spatiale finie, et la méthode de génération numérique de surfaces rugueuses, introduites précédemment, nous seront d'une grande utilité.



## Chapitre 2

# Diffusion par une seule interface rugueuse

Nous allons exposer dans ce chapitre quelques méthodes numériques parmi les plus récentes pour déterminer le champ diffusé par une surface rugueuse. Le problème de la diffusion d'ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses a intéressé physiciens, ingénieurs et mathématiciens appliqués depuis de nombreuses années à cause du grand nombre d'applications en optique, en acoustique, en radio, et en radar. Ce problème est important, par exemple, dans l'étude de traitements optiques de surface, et, à une autre échelle de longueur d'onde, dans l'étude de la propagation des ondes radio au-dessus du sol ou de la mer. Tant le problème direct, où le champ diffusé doit être déterminé pour une surface rugueuse donnée, que le problème inverse, où la surface doit être reconstruite à partir de mesures du champ diffusé, sont d'une grande importance en pratique. Le problème inverse est posé, par exemple, lors de la détection d'objets enfouis (par exemple des mines, des canalisations ou des couches de sédiments) en utilisant le GPR (Ground Penetrating Radar) [80], lors de mesures non destructives en milieu industriel, en imagerie radar SAR [34] et en microscopie en champ proche [118]. Nous étudierons le problème direct dans cette thèse, sachant que le problème inverse peut être résolu à l'aide du problème direct.

Ce deuxième chapitre expose le problème de diffusion par une seule interface rugueuse; nous étudierons ce cas en détail puisque nous ferons le lien, dans le troisième chapitre, entre le problème à une seule interface et celui à deux interfaces superposées. Ce deuxième chapitre s'articule comme suit : dans un premier temps, nous poserons le problème de façon rigoureuse; puis nous donnerons un panorama des méthodes de résolution. Dans ce panorama, nous présenterons aussi bien les modèles approchés que les modèles rigoureux, et nous nous intéresserons plus particulièrement, dans la suite du chapitre, à ces derniers. Nous justifierons notre choix des méthodes intégrales, bien adaptées aux problèmes mettant en jeu des milieux homogènes. Ensuite, nous ferons un résumé des méthodes intégrales et présenterons les équations intégrales qui en découlent. Ces équations, discrétisées par la méthode des moments (MoM), se mettront sous la forme d'une équation matricielle.

Nous exposerons les différentes méthodes qui existent pour résoudre cette équation, notamment des méthodes rapides qui sont adaptées à des problèmes ayant un grand nombre d'inconnues. Puis nous présenterons des résultats comparatifs nous permettant de choisir la méthode la plus performante.

## 2.1 Définition rigoureuse du problème

Dans cette thèse, nous nous focalisons sur le problème 2D de diffusion par une surface invariante selon une direction, que nous avons introduit dans le premier chapitre (§1.5.2).

Considérons une surface rugueuse  $S$  définie par  $x \mapsto z = \zeta(x)$ , délimitant un milieu supérieur  $\Omega_0$  et un milieu inférieur  $\Omega_1$ . La surface est supposée de longueur finie  $L$ , centrée en abscisse en  $x = 0$  et en ordonnée en  $z = 0$ . Un point de l'espace est repéré par  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}}$ , et on note  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Posons par ailleurs  $\zeta_{max} = \sup_{-L/2 \leq x \leq L/2} \zeta(x)$ .

Dans le milieu supérieur  $\Omega_0$ , une onde incidente  $\psi_{inc}$  arrive sur la surface  $S$ . On nomme  $\psi = \psi_{inc} + \psi_s$  le champ total<sup>1</sup>. Le champ  $\psi_s$  diffusé par la surface est l'inconnue de notre problème. Avant de nous intéresser à la détermination du champ diffusé  $\psi_s$ , nous allons introduire les équations et les conditions qu'il doit vérifier (Fig. 2.1).

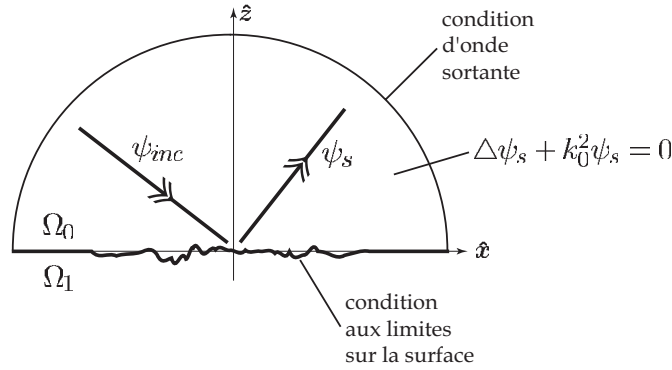


Fig.2.1 – Définition du problème; conditions que doit vérifier  $\psi_s$ .

- Tout d'abord, on suppose que le champ diffusé vérifie, tout comme le champ incident, l'équation de Helmholtz dans le milieu supérieur :

$$\Delta \psi_s + k_0^2 \psi_s = 0 \quad (2.1)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde de l'onde incidente.

- Par ailleurs, on suppose qu'il est relié au champ incident par une condition de frontière (ou condition aux limites) sur la surface. Cette condition de frontière dépend de la polarisation de l'onde incidente. Par exemple, si on suppose que

<sup>1</sup>On trouve aussi dans la littérature le champ total décomposé en somme de trois termes :  $\psi = \psi_{inc} + \psi'_s + \psi_{speculaire}$ . Par rapport à nos notations,  $\psi_s = \psi'_s + \psi_{speculaire}$ .

le milieu inférieur est parfaitement conducteur et que l'onde incidente est en polarisation Transverse Electrique, le champ total  $\psi$  est nul sur la surface  $S$ ; ceci revient à imposer  $\psi_s|_S = -\psi_{inc}|_S$ . Cette condition est connue sous le nom de condition de Dirichlet. Dans le cas Transverse Magnétique on a la condition de Neumann. Nous reviendrons sur ces conditions aux limites plus loin dans l'exposé.

- La formulation du problème n'est pas complète sans une condition de rayonnement adaptée. Physiquement, une telle condition assure que le champ diffusé se propage en s'éloignant de la surface (on parle alors d'onde sortante), tandis que mathématiquement, elle assure l'unicité de la solution, c'est-à-dire qu'elle caractérise un problème bien posé.

On a par exemple recours à la condition de rayonnement de Sommerfeld [161, 162], qui est donnée pour le problème plan par :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial r} - ik_0 \psi_s \right) = 0 \quad (2.2)$$

La condition (2.2) impose que l'onde diffusée se comporte à grande distance comme une onde sphérique de la forme  $\exp(ik_0 r)/r$  [163].

Cependant, en toute rigueur, cette condition n'est pas valable dans le cas général [30]. En effet, si nous choisissons comme onde incidente une onde plane, et que la surface est plane, alors l'onde réfléchie  $\psi_s$  est aussi une onde plane. Or une onde plane ne vérifie la condition de Sommerfeld que dans la direction de propagation, et non dans toutes les directions. La condition (2.2) n'est donc pas vérifiée dans ce cas  $\forall \mathbf{r}$  tel que  $\|\mathbf{r}\| = r \rightarrow \infty$ . Néanmoins, la condition de Sommerfeld est largement utilisée en pratique, et donc, à condition que la surface considérée ne soit pas plane, nous pouvons la choisir comme condition de rayonnement.

Nous détaillerons toutefois deux autres approches; en effet, la condition de Sommerfeld peut être exprimée, de façon équivalente, sous une forme plus pratique. Ces approches alternatives permettent d'éclaircir la relation entre la condition de Sommerfeld, la condition d'onde sortante et la fonction de Green; cette fonction jouera un rôle important dans la suite de ce chapitre.

Une première approche consiste à imposer au champ diffusé d'être une somme d'onde planes. Pour expliciter cette décomposition, plaçons nous dans le cas où  $\zeta_{max} < 0$ . Cette condition n'entraîne aucune perte de généralité de notre étude; pour nous y ramener nous pouvons toujours effectuer un changement de repère. Considérons alors le champ  $\psi_s$  dans le demi-plan  $P_0 = \{\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}} \mid z > 0\}$ , et prenons sa transformée de Fourier par rapport à la variable  $x$  :

$$\hat{\psi}_s(u, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_s(x, z) e^{-iux} dx \quad (2.3)$$

La condition (2.1) devient alors une équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_s}{\partial z^2}(u, z) + (k_0^2 - u^2) \hat{\psi}_s(u, z) = 0, \quad u \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

avec une condition initiale de la forme  $\hat{\psi}_s(u, 0) = \hat{\psi}_{ci}(u)$  pour  $\psi_s(x, 0) = \psi_{ci}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . En ne prenant, parmi les deux solutions, que celle qui est sortante, on obtient l'expression suivante pour  $\psi_s$  :

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_{ci}(u) \exp(iux + iz\sqrt{k_0^2 - u^2}) du \quad (2.5)$$

où on a choisi de lever l'indétermination sur la racine carrée complexe en prenant la valeur de partie imaginaire positive.

L'expression (2.5), appelée représentation en somme d'ondes planes, est souvent utilisée comme condition de rayonnement.  $\psi_s$  y est décomposée en une somme d'ondes planes se propageant vers les  $z$  positifs,  $\exp(iux + iz\sqrt{k_0^2 - u^2})$  pour  $|u| \leq k_0$ , ainsi qu'en ondes de champ proche évanescentes,  $\exp(iux - z\sqrt{u^2 - k_0^2})$  pour  $|u| > k_0$ . L'inconvénient de cette méthode est que l'interprétation de la fonction  $\psi_{ci}(u)$ , qui joue le rôle de condition initiale, est assez délicate.

Une dernière approche est la condition dite Upward Propagating Radiation Condition (UPRC). Elle a été introduite récemment dans [30] et étudiée en détail dans [32, 33]. Par exemple, dans le cas où le milieu inférieur est parfaitement conducteur et lorsque la polarisation de l'onde incidente est Transverse Magnétique, l'UPRC impose au champ  $\psi_s$  de satisfaire l'équation :

$$\psi_s(\mathbf{r}) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, (x', 0))}{\partial z'} \psi_s(x') dx', \quad \mathbf{r} \in P_0 \quad (2.6)$$

où

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (2.7)$$

est la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz et  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel du premier type d'ordre zéro. L'UPRC a été utilisée avec succès pour établir l'unicité des solutions de problèmes de diffusion par des surfaces rugueuses dans le cas d'un conducteur parfait en polarisation TE [11, 31]. Il a été démontré [11, 168] que les conditions de rayonnement (2.5) et (2.6) sont équivalentes sous certaines conditions sur le champ diffusé  $\psi_s$ .

Le problème peut donc se résumer aux conditions suivantes sur  $\psi_s$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \psi_s + k_0^2 \psi_s = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \text{Condition aux limites} & \text{sur } S \\ \text{Condition de rayonnement} & \text{pour } \|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Le problème étant posé rigoureusement, nous pouvons envisager plusieurs méthodes de résolution ; ces méthodes sont rassemblées dans le panorama présenté ci-après.

## 2.2 Panorama des méthodes existantes

Nous ne faisons, dans ce panorama, aucune hypothèse préalable ni sur le champ incident (ce pourra être une onde de Thorsos, un faisceau gaussien, une onde impulsionnelle,...) ni sur la surface étudiée (ce pourra être une surface dite rugueuse ou la carlingue d'un avion, la surface d'une antenne ou une forêt...).

Pour modéliser le problème défini ci-dessus, on peut adopter, soit des modèles asymptotiques (ou approchés), soit des modèles rigoureux (ou exacts). Les modèles asymptotiques s'appuient sur des hypothèses physiques simplificatrices tandis que, pour les modèles rigoureux, les hypothèses sont beaucoup moins restrictives, et leur domaine de validité est plus large.

Ces modèles peuvent être traités par des méthodes analytiques de résolution, si les hypothèses simplificatrices sont suffisamment fortes (modèles asymptotiques) ou si le problème à étudier est simple (modèles rigoureux). C'est cette démarche de résolution, asymptotique analytique, qu'adoptent les premiers scientifiques dans le domaine des surfaces rugueuses, tels que Rayleigh [141, 142], Sommerfeld [160–162] ou, plus tard, Rice [143]. Contemporain de Rayleigh et Sommerfeld, Mie parvient à modéliser rigoureusement et à résoudre analytiquement le problème de la diffusion par un cylindre et par une sphère [127], et il aboutit à une solution exacte. Toutefois le cas d'objets de formes plus compliquées ou de surfaces rugueuses reste problématique, et jusqu'à la moitié du siècle dernier, il est impossible de parvenir à une solution exacte faute de moyens de calculs adéquats.

Il faut attendre le développement de l'informatique dans les années 1950-1960, pour que les méthodes analytiques se voient complétées par des méthodes numériques. Celles-ci permettent d'obtenir des résultats à partir de modélisations rigoureuses : ce sont des méthodes numériques dites exactes ou rigoureuses. Conjointement, des méthodes numériques asymptotiques voient le jour ; approchées et plus rapides que les méthodes numériques rigoureuses, elles permettent d'affiner les méthodes asymptotiques analytiques classiques.

L'ensemble des méthodes existantes peut se répartir en fonction des deux catégories de modèles qu'elles utilisent. Nous avons rassemblé les modèles et les principales méthodes correspondantes dans le tableau 2.1 à double entrée. Des résumés de méthodes analytiques ou numériques, pour des modèles asymptotiques ou rigoureux peuvent être trouvés dans [35, 132, 151, 187, 192]. Les références [151, 192] contiennent aussi des chapitres sur le problème inverse, pour lequel moins de méthodes ont été développées.

### 2.2.1 Modèles asymptotiques

Pour les modèles dits *asymptotiques* ou *approchés*, des hypothèses physiques sont introduites pour simplifier et développer les calculs. L'hypothèse faite est qu'un des paramètres du problème est “grand” (ou “petit”) devant les autres ; souvent c'est le nombre d'onde qui est ce paramètre clé. En approximation haute-fréquence, il est supposé grand (la longueur d'onde est alors petite devant une dimension

Méthodes \ Modèles	asymptotiques	rigoureux
analytiques	<b>AK, OG, TUD, TGO, SPM, Rayleigh, CM, FWM, SSA, IEM, IE2M, OE, ...</b>	<b>Mie</b>
numériques	<b>AK, SPM, Rayleigh, SSA, lancé de rayon, ...</b>	<b>FDTD, FEM, MOT, IE+MoM</b>

**Tab.2.1** – Modèles et méthodes de résolution pour le problème de diffusion par un objet ou une surface rugueuse. Dans cette thèse, nous étudions plus particulièrement la méthode **IE+MoM**.

Formulations \ Domaines	temporel	fréquentiel
différentielle	<b>FDTD</b>	<b>FEM</b>
intégrale	<b>MOT</b>	<b>IE+MoM (MOMI, FB, BMIA, FMM)</b>

**Tab.2.2** – Méthodes numériques rigoureuses de résolution pour le problème de diffusion par un objet ou une surface rugueuse.

caractéristique de la surface). Parmi ces modèles nous trouvons l’approximation de Kirchhoff (**AK**); une autre approximation, celle de l’Optique Géométrique (**OG**), suppose de plus que l’onde incidente est de fréquence infinie. On trouve aussi d’autres méthodes haute-fréquence telles que la Théorie Uniforme de la Diffraction (**TUD**), la Théorie Géométrique de la Diffraction (**TGD**). Ces méthodes haute-fréquence sont peu coûteuses en temps de calcul et en stockage mémoire mais elles manquent de précision et ne s’appliquent correctement que lorsque la taille de l’objet diffusant est grande par rapport à la longueur d’onde. Pour plus de détails nous renvoyons aux références [19, 22, 85, 97, 102, 104]. Quant aux méthodes basse-fréquence, où le nombre d’onde est supposé petit et la longueur d’onde grande, on peut citer les plus connues, la méthode des petites perturbations (Small Perturbation Method ou **SPM**), développée par Rice [143], et celle de **Rayleigh** [18, 131, 141, 142, 163, 168]. Durant les deux dernières décennies, des méthodes analytiques asymptotiques qui ont pour but d’élargir le domaine de validité des méthodes haute-fréquence et basse-fréquence précédentes ont vu le jour : la méthode composite qui s’appuie sur un modèle à double échelle (Composit Model ou **CM**) [96, 180, 183], la Full Wave Method (**FWM**) [14, 40], la méthode des faibles pentes (Small Slope Approximation ou **SSA**) [172, 186, 187] et ses différentes variantes [56, 57, 124, 169], l’Integral Equation Model (**IEM**) [71] et sa version améliorée (**IE2M**) [12], la méthode de l’Operator Expansion (**OE**) [128]; ces quatre méthodes en particulier ont donné lieu à un grand nombre de publications, et existent pour le cas d’un milieu inférieur parfaitement conducteur ou diélectrique. Un grand nombre d’autres méthodes existent, et le lecteur pourra



consulter la référence [59] pour en avoir un recensement quasi-exhaustif.

Les modèles asymptotiques ont bénéficié du développement de l'informatique, et désormais, beaucoup de modèles asymptotiques sont combinés à des méthodes numériques de moyennage statistique de type Monte-Carlo. Parmi de telles méthodes mixtes, on trouve des méthodes dérivées du modèle de Rayleigh [153], et du modèle de Kirchhoff [171] notamment. D'autres méthodes approchées n'ont pu être développées uniquement qu'avec l'apport de l'outil informatique; les méthodes du lancé et du tracé de rayon [105], notamment.

### 2.2.2 Modèles rigoureux

Les modèles dits *rigoureux* ou *exacts* ont recours, à de rares exceptions près (comme la solution de Mie), à des méthodes de résolution numériques, dites elles aussi exactes. Ces méthodes numériques exactes sont utilisées pour cerner le domaine de validité des théories approchées, et pour étudier les problèmes de diffusion où les théories approchées sont encore peu développées (surface de forte rugosité, incidence rasante...). Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes classes très différentes (Tabl. 2.2).

- Les méthodes différentielles (encore appelées volumiques) où le problème à résoudre est mis sous forme d'équation aux dérivées partielles (EDP). Ces méthodes sont de type éléments finis (**FEM**, Finite Element Method [93, 111, 112]; **FDTD**, Finite-Difference Time-Domain [112, 197]) et résolvent le problème fréquentiel ou temporel, respectivement. Ces méthodes ont l'avantage de pouvoir traiter des milieux hétérogènes. En revanche, l'inconvénient principal est d'exiger le maillage d'un volume. En ce qui concerne la résolution de problèmes de diffraction dans un milieu infini, ces méthodes demandent de tronquer le domaine de calcul dans lequel se trouve l'obstacle. L'idéal est de considérer un domaine le plus petit possible pour éviter le problème de stockage mémoire et la performance des méthodes dépend alors de la traduction de la condition de rayonnement sur la frontière extérieure ou artificielle. Le développement des conditions aux limites absorbantes a ouvert d'autres perspectives et n'a connu que des progrès récents [20, 167].
- Les méthodes intégrales de frontière, qui ramènent le problème extérieur à une équation sur chaque interface lorsque le domaine est constitué de couches de matériaux homogènes. Les méthodes intégrales sont mieux adaptées aux problèmes de diffraction puisqu'elles tiennent compte exactement de la condition de rayonnement. Elles sont les seules à pouvoir être mises en oeuvre facilement quelque soit l'obstacle. Les méthodes intégrales partent d'Equations Intégrales (**IE**) qualifiées en anglais de "closed form", que l'on pourrait traduire par solution globale ou implicite. Ces équations sont formulées soit dans le domaine temporel (Marching-On-in-Time method (**MOT**) [146]) ou fréquentiel. Les équations intégrales du domaine fréquentiel peuvent être discrétisées par la Méthode des Moments (**MoM**), [86] ou une méthode de Nystrom [140]. Ces méthodes permettent de mettre le problème sous la forme d'un système matriciel. Par rapport aux méthodes volumiques, les matrices obtenues sont beaucoup plus petites mais pleines et leur taille

augmente avec la fréquence (pour un pas de discrétisation fixe par rapport à la longueur d'onde). Plus précisément, la complexité est en  $\mathcal{O}(k^4)$  où le nombre d'onde  $k$  est proportionnel à la fréquence. On peut résoudre le problème matriciel de façon directe (par décomposition LU puis par inversion par substitution, par exemple); cependant, devant le grand nombre d'inconnues souvent mis en jeu, on a recours quasi-systématiquement à des méthodes itératives. Parmi celles-ci on rencontre les méthodes **MOMI** (Method of Ordered Multiple Interactions, 1996) [3, 100, 176] **FB** (Forward-Backward, 1996) [37, 89], **BMIA/CAG** (Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid, 1995) [177] et **FMM** (Fast Multipole Method, 1990) [63, 92, 113, 144]. Une description plus précise de ces méthodes est donnée en deuxième partie de ce chapitre.

Les méthodes différentielles ou intégrales permettent d'obtenir une solution avec une précision arbitraire; de plus elles prennent en compte les phénomènes physiques difficilement modélisables par les méthodes asymptotiques (phénomène de diffusion multiple, excitation de plasmons de surface,...). Le pendant de ces méthodes rigoureuses est que, contrairement aux méthodes asymptotiques, elles ne font pas ressortir, dans la majorité des cas, les mécanismes physiques mis en jeu lors de la diffusion.

## 2.3 Méthodes intégrales

Face à cet ensemble considérable de modèles et de méthodes existants, nous avons pris en compte les particularités du problème à résoudre dans le but de choisir une méthode adéquate. Puisque nous cherchons à développer une méthode qui serve de méthode de référence pour des modèles asymptotiques, notre choix s'est porté sur un modèle exact. Plus particulièrement, comme nous le justifions ci-dessous, nous avons choisi une méthode par formulation intégrale. L'avantage de cette méthode, est qu'elle est facilement adaptable au cas de plusieurs interfaces; nous en aurons donc aussi l'utilité au troisième chapitre.

### 2.3.1 Choix d'une méthode intégrale

Il n'y a pas de méthode universelle capable de résoudre tous les problèmes électromagnétiques. Le choix optimal d'une méthode pour un problème donné est régi par de nombreux facteurs tels que la précision demandée, la facilité d'implémentation et les ressources informatiques disponibles. Cependant, lorsque les milieux sont homogènes, comme nous le supposerons dans cette thèse, les méthodes mettant en jeu des équations intégrales sont préférables aux méthodes s'appuyant sur la résolution d'équations différentielles. En effet, même si les matrices issues des équations intégrales sont pleines, contrairement à celles des méthodes volumiques, le nombre de degrés de liberté est largement moindre que dans le cas d'une méthode volumique. Autrement dit, même si les matrices sont pleines, elles sont de taille beaucoup plus petite. De plus, nous disposons de méthodes rapides qui permettent de résoudre très efficacement ce problème matriciel.

Toutefois, dans le cas général, si la géométrie est trop compliquée pour être résolue par des méthodes intégrales, il peut être préférable d'utiliser des méthodes par équations différentielles. Des méthodes asymptotiques peuvent être aussi intéressantes si les objets sont très grands devant la longueur d'onde. L'intérêt supplémentaire de l'étude des méthodes intégrales est que, si les méthodes asymptotiques ne sont pas assez précises ou ne peuvent pas être appliquées à des endroits spécifiques de l'objet, on peut inclure une méthode intégrale pour créer une méthode hybride.

Les méthodes intégrales reposent sur la résolution d'équations intégrales, équations qui sont facilement dérivées à partir de la formulation d'un problème du type (2.8). Cette formulation du problème comporte, entre autres, une condition de rayonnement à vérifier à l'infini. Or cette condition de rayonnement est automatiquement vérifiée pour une certaine classe de fonctions, les fonctions de Green. Ces fonctions jouent un rôle clé pour la résolution du problème de diffusion ; elles peuvent être considérées comme des solutions élémentaires qui ne demandent qu'à être assemblées correctement afin de correspondre au champ diffusé recherché. Nous allons détailler le processus de résolution (à l'aide de la fonction de Green) d'un problème général, avant de donner les équations intégrales et la fonction de Green correspondant au problème qui nous intéresse.

### 2.3.2 Fonction de Green

Considérons un opérateur intégral-différentiel linéaire  $\mathcal{L}$  et l'équation avec second membre suivante :

$$\mathcal{L}f(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

où  $f(\mathbf{r})$  et  $h(\mathbf{r})$  sont deux fonctions de la variable  $\mathbf{r}$ . Les équations intégrales du problème à résoudre peuvent se mettre sous cette forme. La fonction  $h(\mathbf{r})$  correspond à la donnée du champ incident,  $f(\mathbf{r})$  n'est autre que l'inconnue, c'est-à-dire pour nous le champ diffusé, et l'opérateur  $\mathcal{L}$  est construit à partir de la forme de la surface rugueuse, en prenant en compte les caractéristiques des milieux environnants (la permittivité notamment) et les propriétés du champ incident (la longueur d'onde). La fonction de Green  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  associée à cette équation est définie par :

$$\mathcal{L}g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.10)$$

Les fonctions de Green dépendent toujours de deux vecteurs position  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ , appelés point source et point d'observation respectivement. Elles sont connues pour un grand nombre d'opérateurs différentiels, et jouent un grand rôle en mathématiques pour la théorie des équations différentielles puisque leur connaissance suffit à résoudre toute forme de solution particulière associée à l'équation différentielle de départ. En effet,

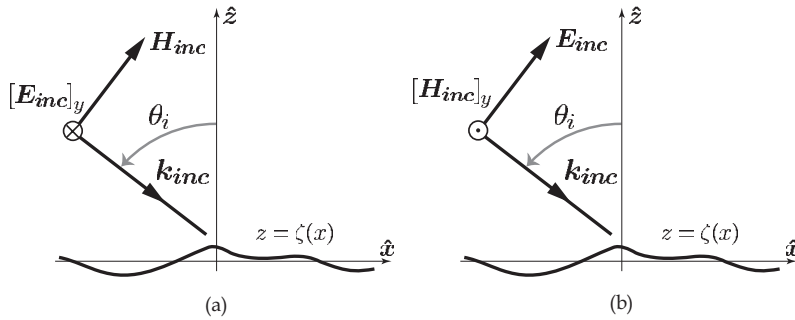
à partir de l'équation (2.9) on peut écrire [46] :

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r}) &= \mathcal{L}^{-1}h(\mathbf{r}) \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')h(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \\
 &= \int \mathcal{L}^{-1}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')h(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \\
 &= - \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')h(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

En résumé, la solution recherchée  $f(\mathbf{r})$  est formulée à l'aide de la fonction donnée  $h(\mathbf{r})$  et de la fonction de Green adaptée au problème étudié.

### 2.3.3 Equations intégrales

Un point essentiel des méthodes intégrales est que, dans le but d'obtenir le champ diffusé  $\psi_s$  dans  $\Omega_0$ , on cherche d'abord à déterminer une inconnue intermédiaire sur la surface  $S$  : le champ total  $\psi$  ou sa dérivée normale (ou les deux). Nous allons établir les équations intégrales qui mettent en relation le champ incident  $\psi_{inc}$  et le champ total sur la surface. Le champ total correspond à la composante selon la direction  $\hat{\mathbf{y}}$ , perpendiculaire au plan d'étude  $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$ , du champ électrique en polarisation TE et du champ magnétique en polarisation TM. Les notations pour les polarisations sont rappelées sur la figure 2.2.



**Fig.2.2** – Polarisation de l'onde incidente. (a) Cas TE ; l'inconnue est la composante  $\psi = E_y$  du champ total  $\mathbf{E}$ . (b) Cas TM ; l'inconnue est la composante  $\psi = H_y$  du champ total  $\mathbf{H}$ .

#### 2.3.3.1 Milieu inférieur parfaitement conducteur

Le champ total  $\psi$  vérifie l'équation de Helmholtz dans le milieu supérieur  $\Omega_0$  :

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + k_0^2\psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.12}$$

que l'on abrégera en  $(\Delta + k_0^2)\psi(\mathbf{r}) = 0$ . On introduit la fonction de Green en espace libre de dimension 2 associée à l'opérateur  $\mathcal{L}\bullet = (\Delta + k_0^2)\bullet$  :

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \tag{2.13}$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel du premier type, d'ordre zéro. Par construction, la fonction de Green définie ci-dessus vérifie l'équation :

$$(\Delta + k_0^2)g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14)$$

Le lecteur trouvera, dans l'annexe A, plus de détails sur la fonction de Green. Soit  $C_0$  le contour englobant le milieu supérieur  $\Omega_0$ . Il est constitué de deux contours ;  $S_\infty$ , qui est le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon infini, et  $S$ , la surface rugueuse (Fig. 2.3).

Appliquons le théorème de Green en dimension 2 (théorème aussi appelé deuxième

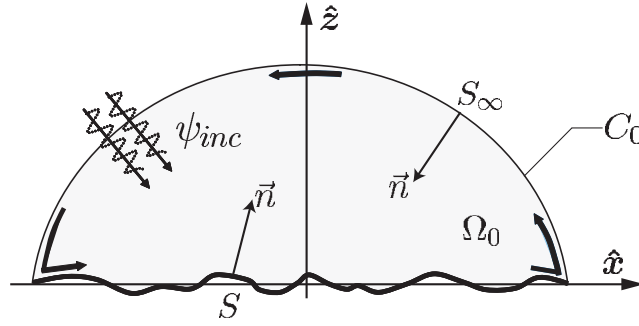


Fig.2.3 – Contour d'intégration  $C_0$ .

théorème de Green) :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} d\mathbf{r} [\psi(\mathbf{r})\Delta g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta\psi(\mathbf{r})] \\ &= - \int_{C_0} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \\ &= - \int_S ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \\ & \quad + \int_{S_\infty} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le signe  $-$  devant l'intégrale dans le terme de droite de l'équation (2.15) provient du fait que la normale est dirigée vers l'intérieur du milieu  $\Omega_0$ . Evaluons séparément les premier et dernier termes de l'équation ci-dessus.

Pour le premier terme, en utilisant (2.12) et (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} d\mathbf{r} [\psi(\mathbf{r})\Delta g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta\psi(\mathbf{r})] \\ &= \iint_{\Omega_0} d\mathbf{r} [\psi(\mathbf{r}) (-k_0^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') k_0^2 \psi(\mathbf{r})] \\ &= - \iint_{\Omega_0} d\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \\ &= \begin{cases} -\psi(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Alors que pour le dernier terme :

$$\int_{S_\infty} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] = -\psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad (2.17)$$

donc finalement :

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}') + \int_S ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

L'équation obtenue pour le cas  $\mathbf{r}' \notin \Omega_0$  porte le nom de Théorème d'extinction. Le lecteur peut trouver une autre démonstration de l'équation (??) dans [36, 103].

Lorsque le milieu inférieur  $\Omega_1$  est un conducteur parfait, le champ total  $\psi$  vérifie, dans le cas Transverse Electric (TE), la **condition de Dirichlet** :

$$\psi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = 0 \quad (2.19)$$

et, dans le cas Transverse Magnétique (TM), la **condition de Neumann** :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} |_{\mathbf{r} \in S} = 0 \quad (2.20)$$

*Remarque* :  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale à la surface, orientée vers les  $z$  positifs (Fig. 1.4). Elle s'exprime en un point de la surface  $(x, \zeta(x))$  par :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\zeta'(x)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x))^2}} \quad (2.21)$$

et la dérivée normale  $\frac{\partial \bullet}{\partial n}$  d'une grandeur scalaire, donnant comme résultat une grandeur également scalaire, est définie par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi \quad (2.22)$$

Dans le cas TE, on démontre à partir de la relation (2.18), que le champ résultant  $\psi$  est relié au champ incident  $\psi_{inc}$  par :

$$\text{EFIE TE} \quad \boxed{\psi_{inc}(\mathbf{r}') = \int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.23)$$

Cette relation porte le nom d'Equation Intégrale du Champ Electric ou encore EFIE (Electric Field Integral Equation) pour le cas TE; c'est une équation de Fredholm de première espèce.

On peut aussi déduire une équation de Fredholm de seconde espèce dans le cas TE en prenant la dérivée normale de l'équation précédente :

$$\text{MFIE TE} \quad \boxed{\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.24)$$

où le terme qui apparaît en  $1/2$  est dû à la singularité de la dérivée normale de la fonction de Green lorsque  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  [130]; l'intégrale  $\int_S$  est prise au sens de la valeur principale de Cauchy (cf. annexe C). Cette équation porte le nom d'Equation Intégrale du Champ Magnétique (ou Magnetic Field Integral Equation, MFIE) pour le cas TE [181].

Dans le cas TM, on a de même une équation de Fredholm de seconde espèce :

$$\text{MFIE TM} \quad \boxed{\psi_{inc}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r})} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.25)$$

et si l'on dérive par rapport à  $\hat{\mathbf{n}}$ , on obtient une équation de première espèce :

$$\text{EFIE TM} \quad \boxed{\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} = - \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \psi(\mathbf{r})} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.26)$$

Ces équations portent respectivement le nom de MFIE et de EFIE pour le cas TM. Dans (2.26), le noyau de l'intégrale en  $\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'}$  est hautement singulier en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ; un traitement rigoureux de ce noyau peut être trouvé dans [2]. Remarquons que les équations EFIE et MFIE correspondent respectivement (que l'on se place en polarisation TE ou TM) à une équation de Fredholm de première et de seconde espèce. Pour les équations de Fredholm de première espèce, l'inconnue est uniquement sous le signe intégral (cf. (2.23) et (2.26)) alors que pour les équations de Fredholm de seconde espèce, l'inconnue est à la fois sous le signe intégral et à l'extérieur de celui-ci (cf. (2.24) et (2.25)).

L'équation CFIE (Coupled Field Integral Equation) [122] est une combinaison linéaire des équations EFIE et MFIE; la CFIE a été développée pour éliminer les problèmes de chacune des deux équations (non-unicité des solutions, mauvais conditionnement, ...).

Dans le cas TE elle s'obtient en effectuant la combinaison linéaire des équations EFIE TE (2.23) et MFIE TE (2.24) [2, 188] :

$$\begin{aligned} \psi_{inc}(\mathbf{r}') + \alpha \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} &= \int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \\ &+ \alpha \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \alpha \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \end{aligned} \quad (2.27)$$

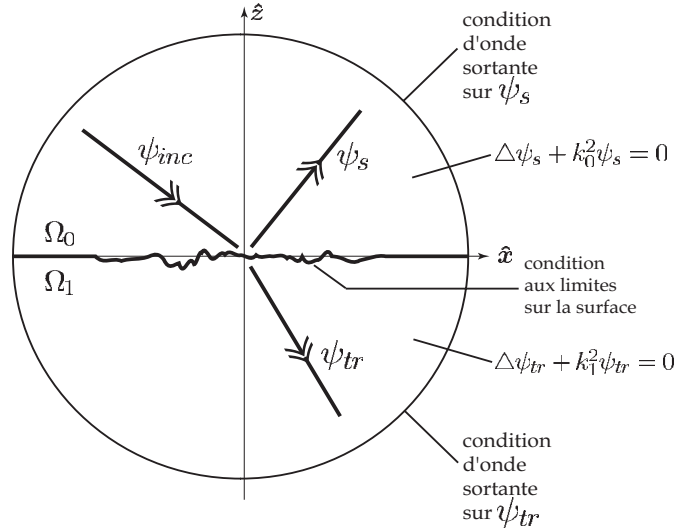
L'équation CFIE ci-dessus est assurée d'avoir une solution unique si  $\alpha$  n'a pas de partie imaginaire nulle [123]. Dans le cas TM, la CFIE s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi_{inc}(\mathbf{r}') + \alpha \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} &= + \frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) \\ &- \alpha \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \psi(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r}' \in S \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nous n'étudierons pas la CFIE dans cette thèse; elle est plutôt réservée à l'étude de la diffusion par des objets clos tels que des cylindres. Pour de tels objets la non-unicité des solutions –due à l'existence de résonances internes– est évitée par l'emploi

de la CFIE; un inconvénient de cette formulation est que le nombre d'inconnues surfaciques est doublé (on doit déterminer  $\psi$  ET  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ , au lieu de  $\psi$  OU  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ ).

### 2.3.3.2 Milieu inférieur diélectrique



**Fig.2.4** – Définition du problème lorsque le milieu inférieur est un diélectrique; conditions que doivent vérifier  $\psi_s$  et  $\psi_{tr}$ .

On étudie à présent le cas où le milieu inférieur est diélectrique; par abus de langage nous parlerons dans ce cas de *surface* diélectrique. Notons  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  les permittivités respectives des milieux supérieur et inférieur. On définit pour le milieu inférieur un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  de module  $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ . Nous supposons par la suite que  $\mu_1 = 1$ .

La formulation du problème de diffusion doit être alors modifiée par rapport au cas où le milieu inférieur est parfaitement conducteur; cette fois ci, le champ n'est pas nul au-dessous de la surface rugueuse. Le champ transmis devient aussi une inconnue du problème (Fig. 2.4). Notons que les champs diffusé et transmis font référence, respectivement, au champ diffusé dans le milieu supérieur et au champ diffusé dans le milieu inférieur.

La condition de rayonnement de l'onde diffusée reste la même que précédemment (2.2); par contre au dessous de la surface, il faut rajouter une condition de rayonnement similaire sur l'onde transmise :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \psi_{tr}}{\partial r} - ik_1 \psi_{tr} \right) = 0 \quad (2.29)$$

Ensuite, définissons par commodité les champs  $\psi_0$  et  $\psi_1$  comme étant, respectivement, le champ total dans le milieu supérieur  $\Omega_0$  (i.e.  $\psi_0 = \psi_{inc} + \psi_s$ ) et le champ transmis dans le milieu  $\Omega_1$  (i.e.  $\psi_1 = \psi_{tr}$ ). Les conditions aux limites



qu'ils vérifient  $\forall \mathbf{r} \in S$  s'écrivent :

$$\psi_0(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = \psi_1(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} \quad (2.30a)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r} \in S} = \frac{1}{\rho_{10}} \left. \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\mathbf{r} \in S} \quad (2.30b)$$

où  $\rho_{10} = 1$  dans le cas TE et  $\rho_{10} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$  dans le cas TM.

L'onde transmise vérifie l'équation de Helmholtz dans le demi-plan inférieur :

$$(\Delta + k_1^2)\psi_1 = 0 \quad (2.31)$$

la fonction de Green associée étant :

$$g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (2.32)$$

On démontre alors [181], en notant  $\psi = \psi_0$ , les relations suivantes, qui relient, sur la surface S, le champ total  $\psi$  du milieu supérieur au champ incident  $\psi_{inc}$  :

$$\forall \mathbf{r}' \in S, \quad \begin{cases} +\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} + \int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \\ -\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} + \rho_{10} \int_S ds g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

En dérivant les expressions précédentes par rapport à  $\hat{\mathbf{n}}$  on obtient :

$$\forall \mathbf{r}' \in S, \quad \begin{cases} +\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} + \rho_{10} \int_S ds \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Les deux variantes des équations intégrales couplées précédentes ont, chacune, pour inconnues, les grandeurs  $\psi(\mathbf{r})$  et  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  considérées sur la surface S. Nous utiliserons de préférence le système (2.33) ; cependant, le second système (2.34) sera aussi utile pour la méthode MOMI diélectrique.

### 2.3.3.3 Condition d'impédance sur la surface

Dans le cas où le milieu inférieur offre une forte atténuation, c'est-à-dire lorsque la partie imaginaire de la permittivité  $\varepsilon_1$  est élevée, chacun des systèmes précédents (2.33) ou (2.34) peut être approché par une seule équation intégrale. En effet, dans ce cas, la dérivée normale du champ au niveau de la surface est proportionnelle au champ ; cette hypothèse est aussi connue sous le nom d'Impedance Boundary Condition (IBC). D'après [94, 129], en polarisation TE :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r} \in S \quad (2.35)$$

et en polarisation TM :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \psi(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in S \quad (2.36)$$

Le système (2.33) par exemple, peut donc se simplifier dans le cas TE par :

$$\begin{aligned} \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \int_S ds \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right\} \\ + \int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \end{aligned} \quad (2.37)$$

et dans le cas TM, par :

$$\begin{aligned} + \frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \\ + \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \end{aligned} \quad (2.38)$$

Il faut noter que les deux intégrales ci-dessus ont respectivement pour inconnues  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  et  $\psi(\mathbf{r})$ . Ce choix n'est pas arbitraire; en effet, lorsque la permittivité du milieu inférieur est très élevée,  $\psi(\mathbf{r}) \simeq 0$  sur la surface dans le cas TE, ce qui est analogue à la condition de Dirichlet, et donc l'inconnue intéressante, celle qui "contient l'information", est  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ . De façon similaire, l'inconnue pertinente du cas TM est  $\psi(\mathbf{r})$ . Ce choix des inconnues permet une meilleure stabilité des méthodes numériques lorsque l'on utilise l'IBC.

### 2.3.4 Discrétisation par la Méthode des Moments

Nous allons d'abord présenter la méthode des moments (MoM) en général avant de l'appliquer au cas où le milieu inférieur est parfaitement conducteur, puis diélectrique.

#### 2.3.4.1 Méthode des Moments (MoM)

La MoM a été pour la première fois appliquée aux problèmes de diffraction électromagnétique par Harrington en 1968 [86]. Elle permet de résoudre un problème linéaire de la forme :

$$\mathcal{L}f = g \quad (2.39)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire,  $f$  l'inconnue et  $g$ , une fonction donnée. Dans notre cas, l'inconnue  $f$  est le champ ou/et le courant surfaciques, et  $g$ , le champ incident.

La méthode des moments est expliquée en détail dans l'annexe B. La méthodologie est la suivante : on projette la fonction recherchée  $f$  sur une base de fonctions, dites fonctions de projection, c'est-à-dire qu'on approche  $f$  par :

$$f \simeq \tilde{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (2.40)$$

Le problème revient donc à déterminer les coefficients  $a_n$ ; ce faisant on introduit une erreur  $\varepsilon_N$ . En remplaçant cette approximation dans (2.39), on obtient une nouvelle équation; cette équation est projetée sur une base de fonctions  $\{w_m\}_{m=1..M}$ , dites fonctions test, choisies de façon à minimiser l'influence de l'erreur  $\varepsilon_N$ . Le système obtenu peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle :

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.41)$$

La matrice  $\mathbf{Z}$  est dite matrice impédance.

Plusieurs choix sont possibles pour les fonctions  $f_n$  et  $w_m$ ; le choix optimal résulte d'un compromis entre un gain de temps (si les fonctions de projection sont bien adaptées au problème, le nombre  $N$  d'inconnues sera réduit), une précision suffisante et une simplicité de la mise en oeuvre. C'est pourquoi nous retenons par la suite la méthode classique des moments par collocation, c'est-à-dire que les fonctions  $w_m$  seront égales à des fonctions de Dirac; pour les fonctions  $f_n$ , nous choisirons des fonctions rectangles, appelées en anglais fonctions *pulse basis*.

Nous allons appliquer la Méthode des Moments aux équations intégrales que nous avons obtenues au paragraphe précédent (§2.3.3), lorsque le milieu inférieur est un conducteur parfait ou un diélectrique.

### 2.3.4.2 Milieu inférieur parfaitement conducteur

Dans le cas parfaitement conducteur, nous avons établi quatre équations intégrales ((2.23), (2.24), (2.25) et (2.26)), dénommées respectivement EFIE TE, MFIE TE, MFIE TM et EFIE TM. Nous allons discrétiser ces quatre équations intégrales selon la méthode des moments, en considérant d'abord les formulations EFIE TE et MFIE TM, qui seront employées pour la méthode BMIA, puis les équations MFIE TE et EFIE TM, qui seront utilisées pour développer la méthode MOMI.

Nous étudions en exemple le cas de l'EFIE pour la polarisation TE; les autres équations (2.24), (2.25) et (2.26) se traitent de façon similaire [181].

#### Discrétisation de l'EFIE pour le cas TE

Rappelons l'équation (2.23) correspondante, d'inconnue  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  sur la surface  $S$  :

$$\int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.42)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur pointant la portion élémentaire  $ds$ ,  $\mathbf{r}$  parcourant la surface d'une extrémité à l'autre. Il faut remarquer que les deux points courants  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  appartiennent à la surface  $S$  et donc que l'intégration doit être conduite avec soin lorsque  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , cas où la fonction de Green est singulière.

L'équation précédente s'écrit dans le cas d'une surface de longueur  $L$  :

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{1 + (\zeta'(x))^2} \left[ g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{z=\zeta(x)} \right] = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.43)$$

avec :

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + \zeta(x) \hat{\mathbf{z}} \quad (2.44)$$

Cette équation est de la forme :

$$\mathcal{L} \left( \left. \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{z=\zeta(x)} \right) = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.45)$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}$  est défini par :

$$\mathcal{L}\bullet = \int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{1 + (\zeta'(x))^2} \cdot [g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bullet] \quad (2.46)$$

Discretisons l'équation (2.43) par la méthode des moments. Pour donner une représentation explicite des fonctions de projection  $\{f_n\}$  et de test  $\{w_m\}$  nous discrétisons la surface en  $N$  échantillons équirépartis en abscisse, espacés de  $\Delta x = \frac{L}{N}$  (Fig. 2.5) :

$$\begin{cases} x_n = -\frac{L}{2} + (n - \frac{1}{2})\Delta x, & n = 1..N \\ \mathbf{r}_n = x_n \hat{\mathbf{x}} + \zeta(x_n) \hat{\mathbf{z}}, & n = 1..N \end{cases} \quad (2.47)$$

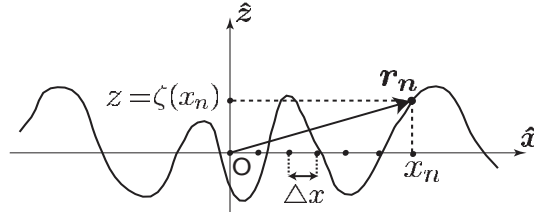


Fig.2.5 – Discrétisation du vecteur surface.

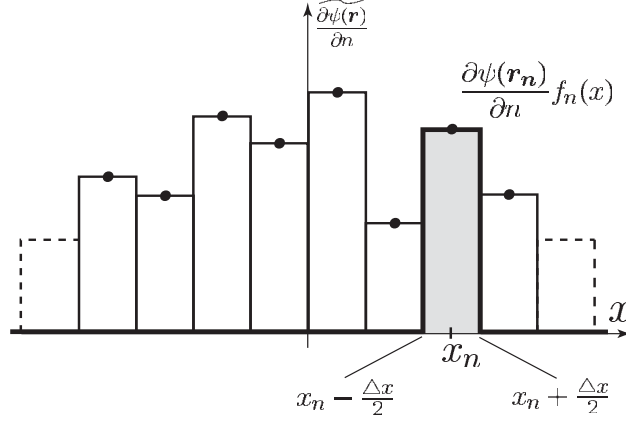
On pose :

$$\begin{cases} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_n - \frac{\Delta x}{2}, x_n + \frac{\Delta x}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & n = 1..N \\ w_m(x) = \delta(x - x_m) & m = 1..N \end{cases} \quad (2.48)$$

La fonction inconnue  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  est approchée par (Fig. 2.6) :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \simeq \widetilde{\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} f_n(x) \quad (2.49)$$

En toute rigueur les fonctions  $f_n$  devraient être indicées par  $f_n^N$  puisque pour  $N \neq N'$ ,  $f_n^N \neq f_n^{N'}$  ; en effet, le support  $[x_n - \frac{\Delta x}{2}, x_n + \frac{\Delta x}{2}]$  des fonctions de base  $f_n$  est dépendant de  $N$ . Cependant, par simplicité, nous ne garderons pas ce double



**Fig.2.6** – Approximation du courant  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  par morceaux à l'aide des fonctions de base  $\{f_n\}_n$ .

indice,  $N$  étant supposé fixé en amont. Le système (B.5) s'écrit dans notre cas, en supposant  $\langle w_m, \varepsilon_N \rangle = 0$  :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \langle \delta(x - x_m), \mathcal{L}f_n \rangle = \langle \delta(x - x_m), \psi_{inc} \rangle, \quad m = 1..N \quad (2.50)$$

On a, pour une fonction  $g$  quelconque :

$$\langle \delta(x - x_m), g \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} du \delta(u - x_m) g(u) = g(x_m), \quad m = 1..N \quad (2.51)$$

et l'approximation suivante est appliquée :

$$\int_{-L/2}^{L/2} du f_n(u) g(u) = \int_{x_n - \frac{\Delta x}{2}}^{x_n + \frac{\Delta x}{2}} dx f_n(u) g(u) \simeq \Delta x g(x_n), \quad n = 1..N \quad (2.52)$$

Le système (2.50) se simplifie alors en :

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \gamma_n g_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m) \\ + \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_m)}{\partial n} \gamma_m \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) = \psi_{inc}(\mathbf{r}_m), \quad m = 1..N \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\text{où } \gamma_n = \sqrt{1 + (\zeta'(x)_{x=x_n})^2} \quad (2.54)$$

et  $g_0$  est donnée par l'équation (2.13). On distingue le cas  $n = m$  dans l'équation (2.53), car  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)$  est singulière en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$ . On peut approcher l'intégrale du

terme  $m = n$  de (2.53) par [181] :

$$\int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \simeq \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{k\Delta x}{2e} \gamma_m \right) \quad (2.55)$$

$$\simeq \frac{i\Delta x}{4} \left[ 1 + i\frac{2}{\pi} \log \left( \frac{e^\gamma k\Delta x}{2} \frac{\gamma_m}{2e} \right) \right] \quad (2.56)$$

où  $\gamma \simeq 0.5772$  est la constante d'Euler, et  $e^\gamma \simeq 1.78107$ ;  $x \rightarrow \log(x)$  désigne le logarithme népérien. Finalement, (2.53) peut s'écrire matriciellement sous la forme [181] :

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} X_n = b_m \quad \forall m = 1, 2, \dots, N \quad (2.57)$$

avec :

$$Z_{mn} = \begin{cases} \gamma_n \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } m \neq n \\ \gamma_n \frac{i\Delta x}{4} \left[ 1 + i\frac{2}{\pi} \log \left( \frac{e^\gamma k_0 \Delta x}{2} \frac{\gamma_n}{2e} \right) \right] & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.58)$$

où  $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))^2}$ ,

$$\text{et} \quad \begin{aligned} X_n &= \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \\ b_m &= \psi_{inc}(\mathbf{r}_m) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$\mathbf{Z}$  est la matrice impédance, de dimension  $N \times N$ . Elle contient les informations sur la surface et sur l'onde incidente, à travers son nombre d'onde  $k_0$ . Nous noterons  $\mathbf{Z}_{N \times N}$  cette matrice, pour la différencier des matrices impédances suivantes, de dimensions plus grandes.

### Discretisation de la MFIE pour le cas TM

L'équation de Fredholm de deuxième espèce en polarisation TM est (2.25) :

$$\frac{1}{2} \psi(\mathbf{r}') - \oint_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.60)$$

En appliquant la méthode des moments de façon similaire, on obtient la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  correspondante (annexe C.1). L'expression des coefficients de  $\mathbf{Z}$  pour le cas MFIE TM est donnée par l'équation (C.14) :

$$Z_{mn} = \begin{cases} -\frac{i\Delta x k_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times \{ \zeta'(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m)) \} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.61)$$

**Discrétisation de la MFIE pour le cas TE**

L'équation intégrale s'écrit dans ce cas (2.24) :

$$\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.62)$$

Les coefficients de  $\mathbf{Z}$  pour le cas MFIE TE sont donnés par (C.20)

$$Z_{mn} = \begin{cases} -\frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4} \frac{\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}} \\ \quad \times \{\zeta'(x_m)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} + \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.63)$$

Cette matrice impédance ressemble à celle du cas MFIE TM (cf. (2.61)), cependant, il y a trois différences importantes par rapport à cette dernière :

- le terme supplémentaire  $\frac{\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}}$  qui apparaît dans le cas MFIE TE pour les éléments non-diagonaux ;
- la valeur de la dérivée dans l'expression  $\{\zeta'(x_m)(x_n - x_m) - \dots\}$ , qui est prise au point  $x_m$  dans le cas MFIE TE et au point  $x_n$  dans le cas MFIE TM ;
- le changement de signe devant le terme  $\frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2}$  sur la diagonale.

**Discrétisation de la EFIE pour le cas TM**

La méthodologie est la même que précédemment, la seule différence notable étant le terme diagonal de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Nous utiliserons l'approximation [2, 130] :

$$\int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n \partial n'} \simeq \frac{-2}{\gamma_m \pi \Delta x} + \frac{\Delta x}{24 \gamma_m^5 \pi} \{3\zeta''^2(x_m) - 3\zeta'^2(x_m)\zeta''^2(x_m) \quad (2.64)$$

$$+ 2\gamma_m^2 \zeta'(x_m)\zeta'''(x_m) + \zeta''^2(x_m)\} \quad (2.65)$$

où  $\gamma \simeq 0.5772$  est la constante d'Euler, et  $e^\gamma \simeq 1.78107$ .

Nous pouvons remarquer que les matrices impédances correspondant aux quatre équations intégrales considérées diffèrent. En particulier, les termes diagonaux se comportent différemment lorsque le pas de discrétisation  $\Delta x \rightarrow 0$ ; ceci est dû à la différence de singularité des noyaux discrétisés.

- pour l'EFIE TE, les termes diagonaux sont de la forme  $\Delta x \log \Delta x$  et donc tendent vers 0, lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$  ;
- pour l'MFIE TE et la MFIE TM, les termes diagonaux tendent vers 1/2, lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$  ;
- enfin, pour la EFIE TM, les termes diagonaux divergent vers l'infini lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$  ; c'est pourquoi nous préférons éviter l'emploi de l'équation EFIE TM.

### 2.3.4.3 Milieu inférieur diélectrique

On discrétise les deux équations intégrales couplées (2.33), obtenues lorsque le milieu inférieur est diélectrique, de façon analogue au cas précédent. Schématiquement, on obtient [181] une matrice impédance  $\mathbf{Z}_{4N \times 4N}$  regroupant quatre sous-matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ , de dimensions  $N \times N$ , et correspondant à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{+\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n}}_{\rightarrow \mathbf{A}} + \underbrace{\int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}}_{\rightarrow \mathbf{B}} = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S \\ \underbrace{-\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n}}_{\rightarrow \mathbf{C}} + \rho_{10} \underbrace{\int_S ds g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}}_{\rightarrow \mathbf{D}} = 0 \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Cette fois les fonctions inconnues sont  $\psi(\mathbf{r})$  et  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ , sur la surface  $S$ ; elles sont approchées par les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}) \simeq \widetilde{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \psi(\mathbf{r}_n) f_n(x) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \simeq \frac{\partial \widetilde{\psi}(\mathbf{r})}{\partial n} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} f_n(x) \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Les fonctions de projection et de test,  $f_n$  et  $w_m$ , sont définies comme précédemment (2.48).

En appliquant la méthode des moments à partir de chacun des termes de l'équation (2.66), on obtient l'expression des quatre sous-matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ .

On obtient premièrement la matrice  $\mathbf{A}$ , qui n'est autre que la matrice impédance  $\mathbf{Z}_{N \times N}$  obtenue pour le cas parfaitement conducteur, en polarisation TM, en partant de l'équation de Fredholm de deuxième espèce (MFIE) (2.25) :

$$A_{mn} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times \{\zeta'(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} \quad \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} \quad \text{pour } m = n \end{array} \right. \quad (2.68)$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est la matrice d'impédance  $\mathbf{Z}_{N \times N}$  trouvée précédemment dans le cas parfaitement conducteur, en polarisation TE, en utilisant l'équation de Fredholm de première espèce (EFIE) (2.23) :

$$B_{mn} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_n \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) \quad \text{pour } m \neq n \\ \gamma_m \frac{i\Delta x}{4} \left[ 1 + i\frac{2}{\pi} \log \left( \frac{e^\gamma k_0 \Delta x}{2e} \gamma_m \right) \right] \quad \text{pour } m = n \end{array} \right. \quad (2.69)$$



Quant aux matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ , la démarche est similaire, et on trouve :

$$C_{mn} = \begin{cases} -\frac{i\Delta x k_1 H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times \{\zeta'(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ -\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.70)$$

et

$$D_{mn} = \begin{cases} \gamma_n \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } m \neq n \\ \gamma_m \frac{i\Delta x}{4} \left[ 1 + i\frac{2}{\pi} \log\left(\frac{e^\gamma k_1 \Delta x}{2e} \gamma_m\right) \right] & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.71)$$

où les seules différences par rapport aux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont,  $k_0$  qui devient  $k_1$ , et le signe devant  $\frac{1}{2}$  qui change pour les éléments diagonaux de  $\mathbf{C}$ .

Le système (2.66), discrétisé par la méthode des moments, s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N A_{mn} \psi(\mathbf{r}_n) + \sum_{n=1}^N B_{mn} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} = b_m & m = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{n=1}^N C_{mn} \psi(\mathbf{r}_n) + \rho_{10} \sum_{n=1}^N D_{mn} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} = 0 & m = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.72)$$

avec  $b_m = \psi_{inc}(\mathbf{r}_m)$ .

Pratiquement, le système (2.72) est réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_{n=1}^{2N} Z_{mn} X_n = b_m \quad \forall m = 1, 2, \dots, 2N \quad (2.73)$$

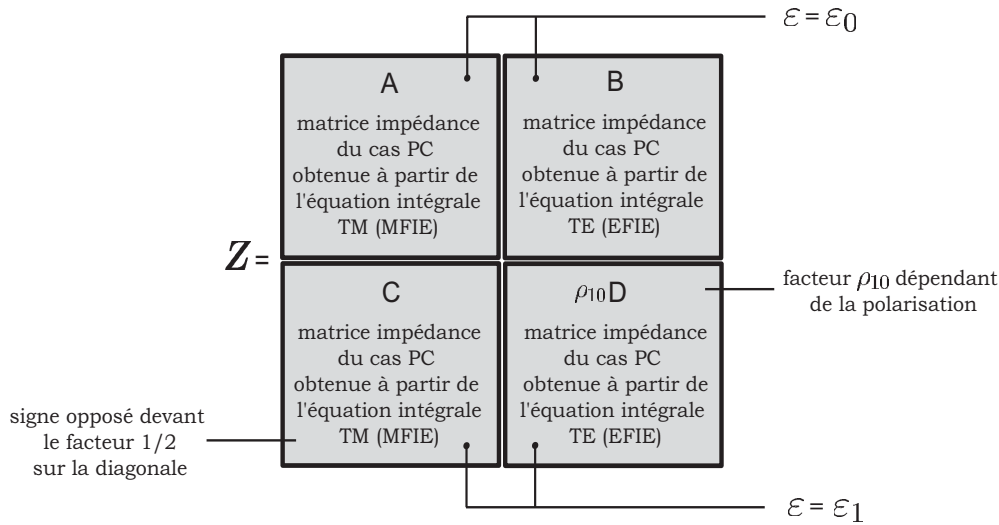
où on a posé la matrice impédance :

$$\mathbf{Z}_{2N \times 2N} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{N \times N} & \mathbf{B}_{N \times N} \\ \mathbf{C}_{N \times N} & \rho_{10} \mathbf{D}_{N \times N} \end{pmatrix}$$

ainsi que les inconnues et les données :

$$\mathbf{X}_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{r}_N) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_{inc}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \psi_{inc}(\mathbf{r}_N) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

En résumé, nous pouvons construire la matrice impédance du cas diélectrique à l'aide des matrices impédances calculées dans le cas parfaitement conducteur, en n'oubliant pas de prendre les permittivités  $\varepsilon$  correspondant à chaque milieu (Fig. 2.7). Seul le signe devant le facteur  $1/2$  des éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{C}$  est à changer ; il ne faut pas oublier non plus le facteur multiplicatif  $\rho_{10}$ , dépendant de la polarisation, devant la matrice  $\mathbf{D}$ .



**Fig.2.7** – Matrice impédance du cas diélectrique construite à partir des matrices impédances du cas parfaitement conducteur (PC).

### 2.3.5 Résolution du système linéaire

La méthode classique pour inverser un système linéaire tel que (2.57) ou (2.73) est de décomposer la matrice impédance en produit de deux matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$ , respectivement triangulaires inférieure et supérieure :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L} \times \mathbf{U} \quad (2.75)$$

Cette décomposition est appelée couramment “décomposition LU”. Ensuite, il suffit d’inverser par substitution ces deux matrices pour parvenir à la connaissance du vecteur inconnu  $\mathbf{X}$ . Rappelons que ce vecteur contient les inconnues surfaciques du champ  $\psi(\mathbf{r})$  et de sa dérivée normale  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ . En ne comptant que les multiplications, plus pénalisantes en temps de calcul que les additions, le nombre d’opérations de cette méthode est de l’ordre de  $\mathcal{O}(N^3)$ .

Nous verrons de façon détaillée (§2.4) les autres méthodes possibles d’inversion du système matriciel. Ces méthodes ont pour but de réduire le nombre d’opérations nécessaires.

### 2.3.6 Coefficient de diffusion

A partir de la détermination de  $\psi(\mathbf{r})$  et de  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  sur la surface, on déduit l'onde diffusée dans le demi-espace supérieur  $\Omega_0$  d'après le principe de Huygens [181] :

$$\psi_s(\mathbf{r}') = - \int_S ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \quad \forall \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (2.76)$$

qui traduit le fait que le champ diffusé dans le demi espace supérieur  $\Omega_0$  peut être déterminé à partir de la simple connaissance, en tout point, du champ total  $\psi(\mathbf{r})$  et du courant surfacique total  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  sur la surface  $S$ . On se place dans le cas général, où les champs  $\psi(\mathbf{r})$  et  $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  sont non nuls. Le théorème de Huyguens peut donc s'appliquer au cas TE ou TM, en considérant un milieu inférieur conducteur parfait ou non.

Pour obtenir le coefficient de diffusion (§1.6.4) [145] il faut connaître le champ diffusé en champ lointain, c'est-à-dire en des points d'observation  $\mathbf{r}'$ , tels que  $\|\mathbf{r}'\| \rightsquigarrow \infty$ . Introduisons cette hypothèse dans l'expression (2.76), pour trouver une approximation du champ diffusé en champ lointain.

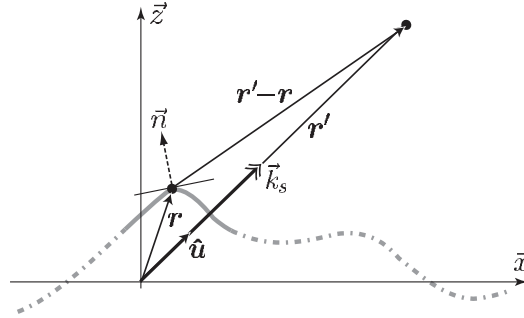


Fig.2.8 – Approximation en champ lointain.

En champ lointain ( $\|\mathbf{r}'\| \rightsquigarrow \infty$ ), on peut approcher l'argument de la fonction de Hankel, dans l'expression de la fonction de Green (2.13), par (Fig. 2.8) [181] :

$$k_0 \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| \simeq k_0 \|\mathbf{r}'\| - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} \quad (2.77)$$

où  $\mathbf{k}_s = k_0 (\sin \theta_s \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_s \hat{\mathbf{z}})$  est le vecteur d'onde dans la direction d'observation  $\theta_s$ . La fonction de Green se simplifie en [181] :

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik_0 r'} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \quad (2.78)$$

Le gradient de la fonction de Green par rapport à  $\mathbf{r}$ , pour  $\mathbf{r}'$  fixé, est :

$$\nabla_{\mathbf{r}} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik_0 r'} \left[ -i\mathbf{k}_s e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \right] \quad (2.79)$$

donc, d'après (2.22) :

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik_0 r'} \left[ -i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \right] \quad (2.80)$$

Finalement, (2.76) devient :

$$\psi_s(\mathbf{r}') = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik_0 r'} \psi_s^\infty(\theta_s) \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \psi_s^\infty(\theta_s) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{1 + (\zeta'(x))^2} \left[ -\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi(\mathbf{r}) i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \cdot e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\sqrt{1 + (\zeta'(x))^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} + \psi(\mathbf{r}) i k_0 (\zeta'(x) \sin \theta_s - \cos \theta_s) \right] \\ &\quad \times e^{-ik_0(x \sin \theta_s + \zeta(x) \cos \theta_s)} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Et, puisque en champ lointain le champ diffusé peut être approché par une onde plane, le vecteur de Poynting de l'onde diffusée, défini au premier chapitre, s'écrit :

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}') = -\frac{1}{2\eta k_0} \text{Im} (\psi_s(\mathbf{r}') \nabla \psi_s^*(\mathbf{r}')) \quad (2.83)$$

et en y introduisant l'expression (2.81), on trouve :

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}'}{2\eta} \frac{1}{8\pi k_0 r'^2} |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2 \quad (2.84)$$

Or comme la puissance totale diffusée est donnée par :

$$P_s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \mathbf{r}' \cdot \mathbf{S}_s(\mathbf{r}') = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \frac{1}{2\eta} \frac{1}{8\pi k_0} |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \sigma(\theta_s) P_{inc} \quad (2.85)$$

on en déduit l'expression du coefficient de diffusion [181] :

$$\sigma(\theta_s) = \frac{\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{1}{8\pi k_0} |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2}{P_{inc}} \quad (2.86)$$

$$\text{avec } P_{inc} = 8\pi k_0 g \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \theta_i \left[ 1 - \frac{1 + 2 \tan^2 \theta_i}{2k_0^2 g^2 \cos^2 \theta_i} \right] \quad (2.87)$$

calculée d'après (1.39), (1.40) et (1.29).

Dans l'expression (2.86) du coefficient de diffusion, l'évaluation de  $\psi_s^\infty(\theta_s)$  est le point clé; concrètement, cette grandeur est approchée de façon numérique d'après l'expression (2.82) par :

$$\begin{aligned} \psi_s^\infty(\theta_s) &\simeq - \sum_{m=1}^N \Delta x \left[ -\gamma_m \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_m)}{\partial n} + \psi(\mathbf{r}_m) i k_0 (\zeta'(x_m) \sin \theta_s - \cos \theta_s) \right] \\ &\quad \times e^{-ik_0(x_m \sin \theta_s + \zeta(x_m) \cos \theta_s)} \end{aligned} \quad (2.88)$$

où, rappelons-le,  $\gamma_m = \sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}$ .

### 2.3.6.1 Méthode de Monte-Carlo

On peut déduire le coefficient de diffusion en subdivisant le profil généré en portions de plus petite longueur ; en calculant le coefficient de diffusion de chaque portion puis en réalisant une moyenne de ces coefficients, on retrouve le même coefficient sous certaines conditions [73]. Cette méthode, largement répandue, est connue sous le nom de méthode de Monte-Carlo. L'avantage est que le temps de calcul pour chaque portion de surface est plus faible qu'avec une méthode globale et est moins gourmand en ressources mémoire. Pour appliquer cette méthode, il faut toutefois que les portions de surface soient suffisamment longues ; on considère qu'une longueur égale à dix longueurs de corrélations est suffisante [192] pour tenir compte des interactions multiples entre des éléments de surface éloignés. Cette longueur minimum doit cependant être augmentée dans le cas des incidences rasantes.

Ci-dessous sont représentés les résultats de la méthode de Monte-Carlo obtenus pour 1 et 100 réalisations, en appliquant la méthode des moments avec inversion par décomposition LU (Fig. 2.9 et 2.10). Nous avons choisi une surface de statistique gaussienne et de spectre gaussien, de longueur totale  $L = 25.6\lambda$ , un pas d'échantillonnage  $\Delta x = 0.1\lambda$ , un écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 0.1\lambda$ , et un écart-type des pentes  $\sigma_p = 0.1$ . Nous choisissons comme onde incidente l'onde atténuée de Thorsos, avec un angle d'incidence égal à  $\theta_i = 30^\circ$  et un paramètre d'atténuation  $g = L/4 = 6.4\lambda$ . On observe que plus le nombre de réalisations est grand, plus le coefficient est régulier, les irrégularités dues au comportement local du profil disparaissant par moyennage. De plus, on voit apparaître un pic pour  $\theta_s = 30^\circ$ , correspondant à la direction de la réflexion spéculaire dans le cas d'une surface plane parfaitement conductrice.

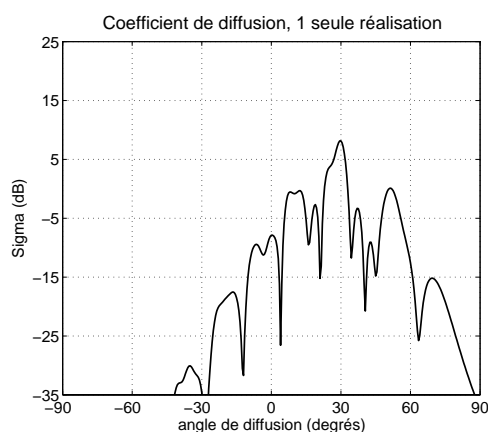


Fig.2.9 – 1 réalisation.

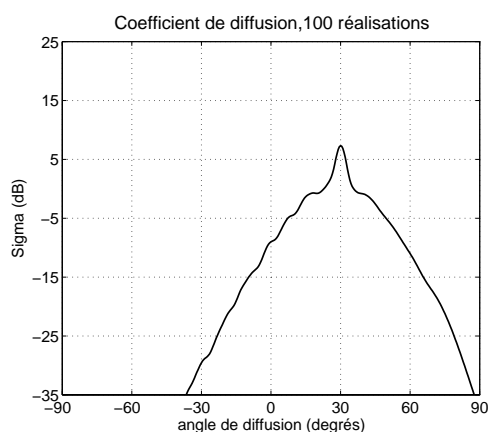


Fig.2.10 – 100 réalisations.

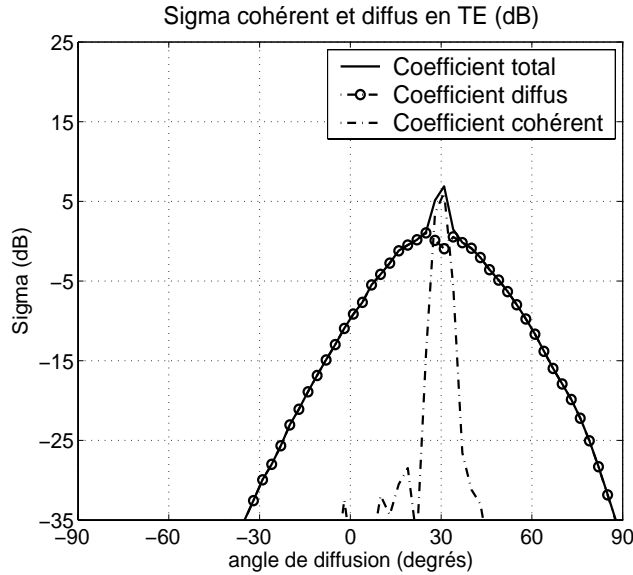
### 2.3.6.2 Coefficients cohérent et incohérent

Dans le cas d'une surface faiblement rugueuse, nous pouvons distinguer deux composantes du champ diffusé : une composante spéculaire (i.e. dans la direction spéculaire), qui est définie par analogie avec le champ réfléchi par une surface plane,

et une composante diffuse, qui est diffusée dans les autres directions à cause de la rugosité de la surface [192]. On les qualifie aussi de composantes cohérente et incohérente, respectivement. La composante spéculaire obtenue pour une surface rugueuse est atténuée par rapport à celle du cas plan. Si nous moyennons le champ total diffusé sur un grand nombre de réalisations, seule la composante spéculaire ne s'annule pas ; la composante diffuse s'annule, sa phase étant aléatoire par rapport à celle du champ incident. Si, au contraire, on moyenne l'intensité du champ, les deux composantes demeurent. Souvent, seule la composante diffuse est étudiée ; elle est obtenue en faisant la différence :

$$\text{Intensité diffuse} = \langle |\psi_s|^2 \rangle - |\langle \psi_s \rangle|^2 \quad (2.89)$$

entre le champ moyenné en intensité et la valeur au carré du champ total moyenné.



**Fig.2.11** – Exemple de coefficients total, diffus et cohérent.

Cela se traduit sur le coefficient de diffusion par

$$\sigma_{diffus}(\theta_s) = \frac{1}{P_{inc}} \frac{1}{2\eta \cdot 8\pi k} \{ \langle |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2 \rangle - |\langle \psi_s^\infty(\theta_s) \rangle|^2 \} \quad (2.90)$$

Nous avons représenté un exemple sur la figure 2.11 ; les paramètres de la simulation sont les mêmes que pour les figures 2.9 et 2.10. Nous avons réalisé un moyennage sur 100 réalisations.

## 2.4 Méthodes numériques intégrales rapides

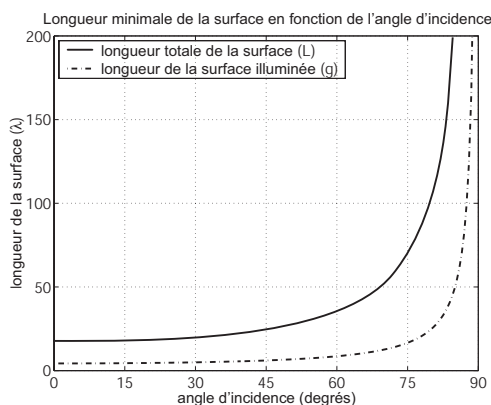
Nous sommes confrontés dans de nombreux cas à des problèmes possédant un grand nombre d'inconnues.

- Par exemple, pour des problèmes de diffusion en incidence rasante ( $\theta_i \rightsquigarrow 90^\circ$ ), la surface doit être de grandes dimensions afin d'inclure les effets de réflexions multiples. Pour être plus précis, on impose par exemple [173, 177] que le paramètre d'atténuation  $g$  de l'onde incidente (paramètre homogène à une longueur et de l'ordre de grandeur de la surface illuminée), vérifie (1.34) :

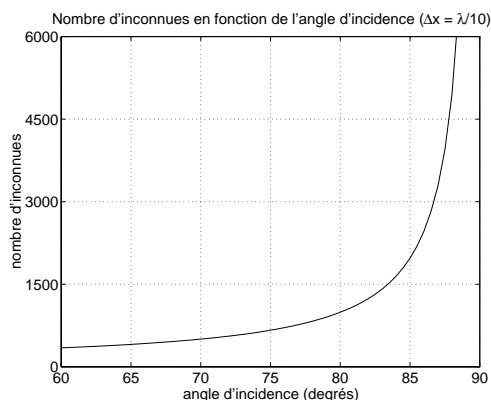
$$\frac{1}{kg \cos(\theta_i)} \leq 0.037 \quad \forall \theta_i \quad (2.91)$$

Autrement dit, la longueur totale  $L$  de la surface, qui est habituellement choisie quatre fois plus grande que la longueur  $g$ , doit vérifier :

$$L = g \times 4 \rightsquigarrow \infty \quad \text{lorsque } \theta_i \rightsquigarrow 90^\circ \quad (2.92)$$



**Fig.2.12** – Longueurs  $L$  et  $g = L/4$  en fonction de l'angle d'incidence.



**Fig.2.13** – Nombre d'inconnues en fonction de l'angle d'incidence.

Pour donner un ordre de grandeur du nombre d'inconnues du problème nous avons représenté sur les figures ci-dessus (Fig. 2.12 et 2.13) la longueur totale minimale de la surface (ainsi que le nombre d'inconnues correspondant) en fonction de l'angle d'incidence, en prenant un pas de discrétisation constant  $\Delta x = \lambda/10$ .

Rappelons que lors des simulations précédentes, nous avons considéré des surfaces de longueur totale  $L = 25.6\lambda$ , échantillonnées par  $\Delta x = \lambda/10$  et comptant 256 inconnues; or d'après la condition (2.91) imposée à  $g$ , si nous voulons étudier le problème de diffusion en incidence rasante, nous serons confrontés à des problèmes possédant 10000 inconnues si ce n'est plus! [109, 177, 181].

- De même, si l'on souhaite déterminer le coefficient de diffusion dans le cas de la mer, sachant que les motifs de la surface de mer vont de l'ordre de quelques

fractions de longueur d'onde à celui de plusieurs longueurs d'onde, on doit échantillonner finement la surface sur une longueur très grande. Cela implique aussi, dans ce cas, un nombre d'inconnues considérable.

- Un dernier exemple [109] est rencontré lors de l'étude de la diffusion au niveau de l'interface rugueuse entre l'air et un milieu inférieur très conducteur : ce milieu ayant une très grande permittivité relative (en module), la fonction de Green du milieu inférieur a des variations spatiales beaucoup plus rapides que celles du milieu supérieur. On est alors contraint d'effectuer une discrétisation très fine de l'interface (de l'ordre de  $\Delta x = \lambda/40$  où  $\lambda = \lambda_{vide}$ ) pour prendre en compte avec précision ces variations rapides. Par exemple, pour un sol humide, la permittivité relative est de l'ordre de  $17 + i2.0$  et pour la mer, elle peut même atteindre environ  $50 + i50$  à des fréquences de l'ordre de 10 GHz.

Ainsi, au vu de ces trois exemples, on est contraint d'employer des méthodes numériques nouvelles, adaptées à la taille de ces problèmes ; en effet, les possibilités actuelles d'un ordinateur de bureau ne permettent pas de stocker des matrices impédance complexes de  $10000 \times 10000$  termes, par exemple, ni encore moins de les inverser par la méthode de décomposition LU classique (une telle méthode réclamerait environ une semaine en temps de calcul..). Nous allons maintenant donner le principe général des méthodes itératives, qui permettent de réduire le temps de calcul, avant d'en présenter un certain nombre. En les modifiant légèrement, elles peuvent aussi demander moins de place mémoire utile, mais cela au détriment de la vitesse de calcul. A titre d'exemple, nous avons réussi à résoudre ainsi des systèmes de 64 000 inconnues, pour un temps de calcul de 10 mn, avec un ordinateur de bureau moyennement puissant (processeur 2GHz, 1 Go de mémoire vive).

Par ailleurs, dans le troisième chapitre nous utiliserons des méthodes rapides pour résoudre le problème de diffusion par deux interfaces superposées.

### 2.4.1 Principe général des méthodes

Toutes les méthodes rapides que nous étudions par la suite ont pour point de départ une des deux équations intégrales, électrique ou magnétique, qui relient les champs incident et total (et leur dérivées normales) sur l'interface rugueuse séparant deux milieux de permittivités différentes.

L'équation intégrale choisie est discrétisée par la méthode des moments, et l'on aboutit à un système matriciel de la forme :

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \tag{2.93}$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur inconnu,  $\mathbf{b}$  est le vecteur contenant des données sur l'onde incidente, et  $\mathbf{Z}$  est l'opérateur de propagation (i.e. la fonction de Green ou sa dérivée normale) discrétisé.

La démarche générale des méthodes *rapides* est d'accélérer la résolution de ce système en procédant de manière itérative. On peut distinguer deux familles de méthodes [17] :



- les méthodes stationnaires, pour lesquelles la procédure itérative peut se mettre sous la forme [196] :

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{G}\mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{b}' \quad (2.94)$$

avec

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Z} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.96)$$

où  $\mathbf{Q}$  est la matrice de décomposition et  $\mathbf{G}$  la matrice d'itération. Parmi de telles méthodes, on trouve la méthode de Jacobi (pour laquelle  $\mathbf{Q}$  est la matrice des éléments diagonaux de  $\mathbf{Z}$ ) et les méthodes de relaxation ;

- les méthodes non-stationnaires, où une matrice  $\mathbf{G}^{(n)}$  est construite à chaque itération ; de telles méthodes sont dérivées de la méthode du gradient conjugué [87] et ont été développées pour résoudre des systèmes d'équations asymétriques et/ou hermitiens. On peut citer en exemple la méthode “BIConjugate Gradient” (BICG) [64, 159], la méthode “BIConjugate Gradient-STABLE” (BICGSTAB) [84, 185], la méthode du “Generalized Conjugate Gradient” (GCG) [28], la “Quasi-Minimum Method” (QMR) [68], la “General Minimal RESidual” (GMRES) [147]. Nous retiendrons la méthode BICGSTAB qui est bien adaptée à notre problème. Elle présente une très bonne convergence, peu sensible aux paramètres statistiques de la surface rugueuse considérée [196].

Pour l'étude du problème de diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle, des méthodes particulières ont été développées [35, 181] :

- parmi les méthodes stationnaires, la “Method of Ordered Multiple Interactions” (MOMI) [2, 3, 100, 176], similaire à la méthode “Forward-Backward” (FB) [37, 89, 90], qui distingue, en un point de la surface, les contributions des éléments de surface situés à gauche et à droite de ce point ;
- la méthode “Banded Matrix Iterative Approach” (BMIA) [178, 179] et sa version améliorée, la BMIA/CAnonical Grid (BMIA/CAG) [95, 177], ainsi que la “Fast Multipole Method” (FMM) [63, 113, 144], utilisées en conjonction avec des méthodes non-stationnaires citées précédemment ; elles permettent de diminuer le nombre de calculs nécessaires lors de produits matrice-vecteurs. Elles distinguent les contributions du champ proche de celles du champ lointain en un point de la surface.

Un point important des méthodes itératives est le conditionnement de la matrice  $\mathbf{Z}$  à inverser [195]. Une méthode itérative converge d'autant plus vite que la matrice est bien conditionnée. C'est pourquoi une étape préliminaire de préconditionnement est souvent nécessaire.

Les méthodes numériques rapides ont, de même que les méthodes analytiques, des conditions de validité ; en effet, selon la rugosité de la surface et selon l'écart type de hauteurs de la surface par exemple, une méthode numérique, pour un nombre d'itérations maximal fixé ne peut dépasser une certaine précision. Mais en fonction d'une précision voulue on peut itérer simplement la méthode sans entraîner de complications supplémentaires dans l'algorithme, et sans rajouter un nombre trop

important de calculs.

Par ailleurs, en terme de complexité (nombre de multiplications), ces méthodes peuvent être ordonnées comme suit [37, 100, 181] :

Méthode	Complexité
Décomposition LU, pivot de Gauss	$\mathcal{O}(N^3)$
Forward-Backward	$\mathcal{O}(N^2)$
MOMI	$\mathcal{O}(N^2)$
FMM à un niveau	$\mathcal{O}(N^{(3/2)})$
BMIA/CAG	$\mathcal{O}(N \log N)$
FMM multilevel	$\mathcal{O}(N \log N)$
Forward-Backward avec accélération spectrale	$\mathcal{O}(N)$
SDFMM	$\mathcal{O}(N)$

Les méthodes Forward-Backward avec accélération spectrale [37, 38] et SDFMM (Steepest Descent Fast Multipole Method) [92, 181] sont les plus performantes actuellement mais sont délicates à programmer ; nous les mettons dans ce tableau à titre purement indicatif, et nous ne les étudierons pas en détail par la suite.

### 2.4.2 Method of Multiple Ordered Interactions (MOMI)

La méthode MOMI (Method of Ordered Multiple Interactions), présentée par D. A. Kapp et G. S. Brown en 1996 [100], est très similaire à la méthode Forward-Backward proposée par D. Holliday [88, 89] la même année.

Le principe fondamental des méthodes MOMI et FB est le même [100] : en orientant la surface de gauche à droite, en référence à l'onde incidente, on suppose d'abord que le champ créé en un point de la surface ne provient que de la gauche (ce qui se justifie intuitivement si l'onde incidence est rasante) puis on le corrige en prenant en compte le champ provenant de la droite. Cette approximation est itérée autant de fois que nécessaire, et ce d'autant plus si la surface est très rugueuse et que l'onde incidente n'est pas rasante. Les contributions provenant de gauche (*forward contribution*) et de droite (*backward contribution*) sont calculées à l'aide d'opérateurs calculés simplement, et inversibles aussi simplement, ce qui fait toute la puissance de cette méthode. Nous allons détailler la démarche de la méthode MOMI proposée à l'origine par [100] et améliorée, puis étendue au cas diélectrique, par [2].

#### 2.4.2.1 Cas parfaitement conducteur

On considère un champ incident en configuration TE (Transverse Electrique) ou TM (Transverse Magnétique), et une interface parfaitement conductrice.

L'équation de Fredholm de deuxième espèce dans le cas TE est donnée par (2.24), et rappelée ici

$$\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.97)$$

Dans le cas TM, elle est donnée par (2.25) et s'écrit

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (2.98)$$

Dans les deux cas, l'équation intégrale peut se mettre sous la forme

$$J(\mathbf{r}') = J_{inc}(\mathbf{r}') + \mathcal{L}J \quad (2.99)$$

où  $J$  est le courant de surface total et  $J_{inc}$  est le courant de surface créé par l'onde incidente ( $J_{inc}$  est aussi appelé courant de Kirchhoff).

Dans le cas TE,

$$J(\mathbf{r}') = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \quad (2.100a)$$

$$J_{inc}(\mathbf{r}') = 2 \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \quad (2.100b)$$

$$\mathcal{L}\bullet = -2 \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \bullet \quad (2.100c)$$

et dans le cas TM,

$$J(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}') \quad (2.101a)$$

$$J_{inc}(\mathbf{r}') = 2\psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad (2.101b)$$

$$\mathcal{L}\bullet = 2 \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \bullet \quad (2.101c)$$

En discrétisant l'équation (2.99) par la méthode des moments, on obtient les vecteurs colonnes

$$\mathbf{J}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} J(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ J(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{inc, N \times 1} = \begin{bmatrix} J_{inc}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ J_{inc}(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

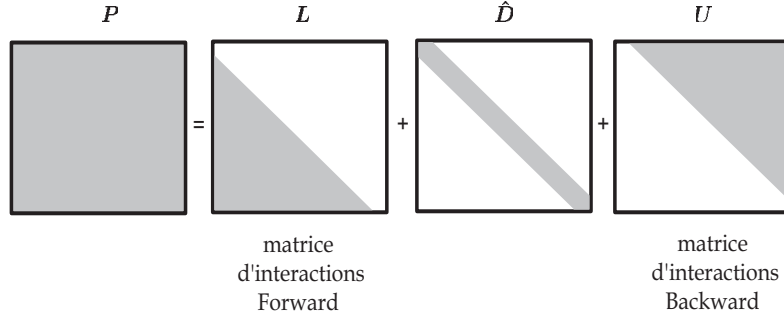
et en discrétisant l'opérateur  $\mathcal{L}$ , on obtient une matrice  $\mathbf{P}_{N \times N}$  que l'on décompose en une somme de trois matrices  $\mathbf{L}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}$  et  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{P} = \mathbf{L} + \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{U} \quad (2.103)$$

où  $\mathbf{L}$  est une matrice triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale,  $\mathbf{U}$  est une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale et  $\hat{\mathbf{D}}$  est une matrice diagonale telle que  $P_{ii} = \hat{D}_{ii}$ . Les expressions respectives de  $\mathbf{L}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}$  et  $\mathbf{U}$  dans le cas TE et TM s'obtiennent directement à partir de l'expression de  $\mathbf{P}$ .

Dans le cas TE

$$P_{mn} = \begin{cases} +2 \frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4} \frac{\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| \sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}} \\ \quad \times \{\zeta'(x_m)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ -2 \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.104)$$


 Fig.2.14 – Décomposition de la matrice  $P$ .

et dans le cas TM :

$$P_{mn} = \begin{cases} +2 \frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times \{\zeta'(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ +2 \frac{\Delta x \zeta''(x_m)}{4\pi 1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (2.105)$$

*Remarque* : Pour vérifier le changement de signe devant le facteur 2 dans chacune des expressions ci-dessus, le lecteur peut se référer à l'expression (2.63) dérivée de l'équation (C.15) et à l'expression (2.61) dérivée de l'équation (C.3); il faut tenir compte, de plus, du changement de signe devant les opérateurs introduit par la formulation (2.99).

On peut remarquer que  $L$  comprend toutes les interactions entre le point courant  $\mathbf{r}'$  et les points à sa gauche sur la surface et que  $U$  comprend toutes les interactions à droite de ce point (Fig. 2.15).  $L$  est dénommé opérateur *Forward* (vers l'*avant*), et  $U$ , opérateur *Backward* (vers l'*arrière*), en orientant la surface de gauche à droite, en référence à l'onde incidente. Les opérateurs  $L$  et  $U$  ne sont pas à confondre avec les opérateurs de la décomposition LU

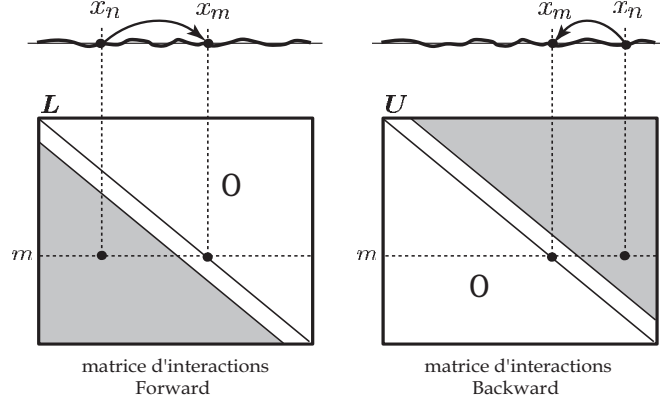
$$\mathbf{Z} = \mathbf{L} \times \mathbf{U} \quad (2.106)$$

utilisée lors de l'inversion directe de la matrice impédance  $\mathbf{Z}$ . Dans le cas de la méthode MOMI,  $L$  et  $U$  sont obtenues sans calculs, à partir de l'opérateur  $P$ .

Dans la méthode originale [100], les auteurs supposent que la matrice  $\hat{D}$  peut être négligée, et la choisissent nulle. Dans la référence [2], l'auteur se propose d'améliorer la méthode originale en ne négligeant pas la contribution des termes diagonaux de  $P$ , et en prenant la matrice  $\hat{D}$  sous la forme définie ci-dessus.

L'équation (2.99) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{inc} + [\mathbf{L} + \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{U}]\mathbf{J} \quad (2.107)$$


 Fig.2.15 – Interpretation physique des matrices  $L$  et  $U$ .

ou encore, en notant  $I$  la matrice identité

$$[I - L - \hat{D} - U]J = J_{inc} \quad (2.108)$$

soit

$$[D - L - U]J = J_{inc} \quad (2.109)$$

en posant  $D = I - \hat{D}$ . La matrice  $D$  est inversible; en effet, d'après (2.104) et (2.105),  $D_{mm} \simeq 1 + \frac{\Delta x}{2\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1+(\zeta'(x_m))^2}$ , et donc, pour  $\Delta x$  suffisamment petit,  $D_{mm} > 0$ . Par ailleurs, en pratique, les surfaces utilisées lors des simulations sont telles que  $\frac{1}{2\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1+(\zeta'(x_m))^2} \ll 1$ , donc pour un pas d'échantillonnage courant de  $\lambda/10$ ,  $D_{mm} \simeq 1$ . L'équation précédente peut ainsi se factoriser sous la forme

$$[D^{-1}(D - L)(D - U) - D^{-1}LU]J = J_{inc} \quad (2.110)$$

en supposant  $D^{-1}LD \simeq L$ , d'où

$$[D^{-1}(D - L)(D - U)]J = J_{inc} + D^{-1}LUJ \quad (2.111)$$

et donc

$$J = [D - U]^{-1}[D - L]^{-1}DJ_{inc} + [D - U]^{-1}[D - L]^{-1}LUJ \quad (2.112)$$

L'itération de l'expression précédente conduit par conséquent à

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} ([D - U]^{-1}[D - L]^{-1}LU)^k [D - U]^{-1}[D - L]^{-1}DJ_{inc} \quad (2.113)$$

qui peut aussi s'écrire

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [D - U]^{-1} ([D - L]^{-1}LU[D - U]^{-1})^k [D - L]^{-1}DJ_{inc} \quad (2.114)$$

On peut cependant simplifier le nombre d'opérations pour le calcul de chaque terme de la somme dans (2.114). En effet, puisque l'on a

$$[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}[\mathbf{L} - \mathbf{D}] = -\mathbf{I} \quad \rightsquigarrow \quad [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{L} = [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{I} \quad (2.115a)$$

$$[\mathbf{U} - \mathbf{D}][\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} = -\mathbf{I} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{U}[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} = \mathbf{D}[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} - \mathbf{I} \quad (2.115b)$$

l'expression de  $\mathbf{J}$  donnée par (2.114) devient

$$\mathbf{J} = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} ([[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{I}] [\mathbf{D}[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} - \mathbf{I}])^k [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc} \quad (2.116)$$

On constate que le terme  $[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1}[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U}$  élevé à la puissance  $k$  dans l'expression (2.114) comporte deux inversions de matrices triangulaires et deux multiplications par des matrices triangulaires; alors que le terme  $[[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{I}] [\mathbf{D}[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} - \mathbf{I}]$  élevé à la puissance  $k$  dans l'expression (2.116) ne comporte que deux inversions de matrices triangulaires et deux multiplications par des matrices diagonales.

En considérant uniquement le premier terme de la série (2.116), nous pouvons définir une solution d'ordre 0, par

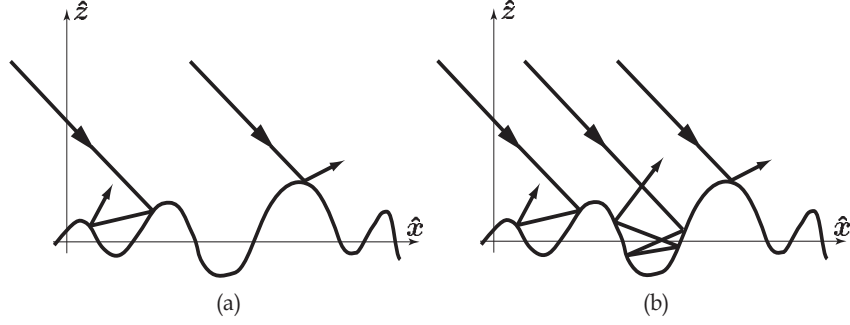
$$\mathbf{J}^{(0)} = [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1}[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc} \quad (2.117)$$

La solution approchée d'ordre  $n$  est donnée par

$$\mathbf{J}^{(n)} = \sum_{k=0}^n [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} ([[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{I}] [\mathbf{D}[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} - \mathbf{I}])^k [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc} \quad (2.118)$$

*Remarques :*

- $\mathbf{J}^{(0)}$  est une solution approchée qui demande peu de calculs : en effet, et ceci est le point fort de la méthode MOMI, les matrices  $[\mathbf{D} - \mathbf{L}]$  et  $[\mathbf{D} - \mathbf{U}]$  sont triangulaires supérieure et inférieure, respectivement. Ainsi, Les étapes  $\bullet = [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{D}\bullet$  et  $\bullet = [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1}\bullet$  sont effectuées rapidement par substitution, sans inversion matricielle directe;
- De plus, la solution d'ordre 0,  $\mathbf{J}^{(0)}$ , prend en compte une réflexion double (Fig. 2.16-a) de l'onde incidente sur la surface (terme  $[\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1}[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1}$ ) et est ainsi déjà une très bonne approximation du courant total  $\mathbf{J}$  lorsque la surface est peu rugueuse. Si la rugosité est plus importante, ou plus précisément, si l'écart-type des pentes est plus élevé, et donc si plusieurs réflexions multiples peuvent avoir lieu, on est obligé de prendre en compte des termes supplémentaires dans l'expression (2.116). Par exemple, les solutions d'ordre 1 et 2 prennent en compte, respectivement, deux (Fig. 2.16-b) et trois réflexions doubles.



**Fig.2.16** – Réflexions multiples prises en compte par la solution d'ordre 0,  $\mathbf{J}^{(0)}$  (cas a) et d'ordre 1,  $\mathbf{J}^{(1)}$  (cas b).

En s'inspirant de [100] nous proposons l'algorithme récursif suivant pour déterminer  $\mathbf{J}^{(n)}$  à tout ordre  $n$  :

- 1/ poser  $\mathbf{J} = \mathbf{0}_{N \times 1}$
- 2/ résoudre  $\mathbf{J}_1 = [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc}$
- 3/ résoudre  $\mathbf{J}_{2p} = [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{J}_1$
- 4/ poser  $\mathbf{J} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{2p}$
- si  $n = 0$ , stop ; si  $n > 0$ , répéter  $n$  fois :
- 5/ effectuer  $\mathbf{J}_2 = \mathbf{D} \mathbf{J}_{2p} - \mathbf{J}_1$
- 6/ résoudre  $\mathbf{J}_3 = [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_2$
- 7/ poser  $\mathbf{J}_1 \leftarrow \mathbf{J}_3$
- 8/ résoudre  $\mathbf{J}_{2p} = [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{J}_1$
- 9/ poser  $\mathbf{J} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{2p}$

Ainsi, pour  $n = 0$ , après avoir effectué les étapes 1/ à 4/ nous retrouvons

$$\mathbf{J}^{(0)} = [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc} \quad (2.120)$$

Pour  $n = 1$ , après avoir effectué les étapes 1/ à 9/ nous obtenons

$$\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{J}^{(0)} + [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} [[\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{I}] [\mathbf{D} [\mathbf{D} - \mathbf{U}]^{-1} - \mathbf{I}] [\mathbf{D} - \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc} \quad (2.121)$$

Et ainsi de suite.

Enfin, pour déterminer l'expression du champ diffusé en un point  $\mathbf{r}^l$  de  $\Omega_0$ , nous utilisons le principe de Huygens, donné en (2.76). Puis pour calculer le coefficient de diffusion à l'aide de la solution approchée  $\mathbf{J} \sim \mathbf{J}^{(n)}$  d'ordre  $n$ , nous reprenons l'équation (2.88), en substituant  $\psi(\mathbf{r}_m)$  et  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_m)}{\partial n}$  par 0 et  $J_m^{(n)}$ , respectivement, dans le cas TE, et par  $J_m^{(n)}$  et 0, respectivement, dans le cas TM, puis nous déduisons le coefficient de diffusion d'après (2.86).

#### 2.4.2.2 Cas diélectrique

La méthode MOMI a été développée à l'origine pour le cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur [100]. Pour cette configuration, la méthode MOMI a montré

une simplicité de programmation et une convergence qui, même si elle reste de complexité  $\mathcal{O}(N^2)$  relativement élevée, est rapide, autant en configuration TE que TM.

Le cas où le milieu inférieur est diélectrique a été abordé récemment dans [2] ; dans ce cas là, la méthode est plus difficile à mettre en oeuvre que dans le cas parfaitement conducteur ; cela provient de la forte singularité des noyaux des opérateurs mis en jeu. Pour obtenir une bonne convergence de la méthode, il faut cette fois optimiser au préalable des paramètres, et préconditionner la matrice impédance. La difficulté réside dans le choix des paramètres ; en effet, un choix inadapté de ceux-ci donne un algorithme peu convergent voire divergent. La démarche est donnée en annexe D.

### 2.4.2.3 méthode MOMI pour un grand nombre d'inconnues

Dans le cas où le nombre d'inconnues est très grand, on ne peut pas stocker les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  en mémoire ; une solution consiste alors à programmer soi-même l'inversion par substitution de ses matrices triangulaires. En effet, lors de l'inversion par substitution, il suffit de disposer, à chaque étape, d'une seule ligne de la matrice ; en générant cette ligne de coefficients au fur et à mesure, on peut donc inverser des matrices de très grandes dimensions. La méthode résultante, que nous appellerons MOMI OM (Optimisée en Mémoire) a, toutefois, l'inconvénient d'être plus lente que la méthode MOMI classique, puisque que les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  sont générées à chaque itération.

### 2.4.2.4 Conclusion

La méthode MOMI fait partie des méthodes stationnaires avec relaxation [196] ; de telles méthodes sont nombreuses, et on distingue en particulier les méthodes SSOR (Symmetric Successive Over-Relaxation) pour lesquelles la matrice de décomposition  $\mathbf{Q}$  s'écrit :

$$\mathbf{Q} = \frac{\omega}{2 - \omega} \left( \frac{1}{\omega} \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{L} \right) \hat{\mathbf{D}}^{-1} \left( \frac{1}{\omega} \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{U} \right) \quad (2.122)$$

où  $\omega$  est le paramètre de relaxation ( $0 < \omega < 2$ ). Pour la méthode MOMI,  $\omega = 1$ .

Les avantages de la méthode **MOMI** sont :

- la convergence de la méthode est très rapide dans le cas parfaitement conducteur. D'après les résultats fournis par la suite, la méthode atteint une très bonne précision en quelques itérations (très souvent moins de deux) ;
- la méthode a un large domaine de validité, et notamment, elle est adaptée aux surfaces d'écart-type des hauteurs grand par rapport à la longueur d'onde, telles que des surfaces de mer ;
- récemment, elle a été adaptée à des surfaces diélectriques de permittivité élevée ;
- la complexité est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^2)$  et la place mémoire requise est de l'ordre de  $\mathcal{O}(N)$  [2], ce qui en fait une méthode comparable, en temps de calcul, à une méthode itérative de type gradient conjugué ; cependant, la méthode MOMI converge en moins d'itérations qu'une méthode itérative de ce type.



L'inconvénient de la méthode MOMI est que, dans le cas diélectrique, la convergence est beaucoup moins rapide que dans le cas parfaitement conducteur [2]. De plus la discrétisation des opérateurs du cas diélectrique est assez problématique du fait du noyau hyper-singulier  $\frac{\partial^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'}$  qui diverge pour un pas de discrétisation de plus en plus fin.

Il existe une méthode équivalente, dite *Forward-Backward* (**FB**), qui repose aussi sur l'idée de découplage des modes *Forward* et *Backward*, qui a, quant à elle, les avantages suivants :

- elle est adaptée à des surfaces non forcément univoques, décrites par un couple de coordonnées  $(x(l), z(l))$ , où  $l$  désigne l'abscisse curviligne. Ainsi cette méthode ne se limite pas aux surfaces décrites par une fonction, et peut être appliquée directement au cas de surfaces de mer comportant des vagues déferlantes ;
- une version de la méthode FB pour des interfaces diélectriques existe [90, 91] ;
- récemment un nouvel algorithme [37], a été proposé afin d'accélérer la méthode FB en utilisant la représentation spectrale de la fonction de Green. La complexité de la méthode est alors ramenée de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^2)$  à celui de  $\mathcal{O}(N)$ . Les auteurs de ces articles ont aussi étendu la méthode FB accélérée au cas de surfaces ayant une forte permittivité [38] ; le cas d'une surface surmontée d'obstacles (par exemple un navire sur la mer), a été aussi étudié [138]. Une généralisation au cas d'une surface bidimensionnelle parfaitement conductrice a par ailleurs été faite [42, 175].

Cependant, la méthode FB avec accélération spectrale n'a pas été encore développée dans le cas général d'une surface diélectrique de permittivité quelconque ; dans ce cas là, on ne dispose pour l'instant que de la méthode FB classique de complexité en temps de calcul de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^2)$ .

En résumé, les méthodes MOMI et FB ont l'avantage d'être adaptées à des surfaces d'écart-type des hauteurs et de pentes grands (ceci provient de l'algorithme même qui traite de façon efficace les contributions des différentes réflexions multiples) ; de plus, elles sont relativement aisées à programmer. Quoique similaires en formulation, la méthode FB est aujourd'hui plus intéressante que la méthode MOMI, car on dispose d'une méthode FB accélérée, de complexité  $\mathcal{O}(N)$ . L'inconvénient de ces deux méthodes, qu'elles sont, dans le cas diélectrique, plus complexes à programmer et moins efficaces, avec une complexité de  $\mathcal{O}(N^2)$ .

Nous allons étudier ci-après une méthode concurrente, la méthode BMIA/CAG, qui a pour avantage d'être facilement transposable du cas parfaitement conducteur au cas diélectrique, et qui n'utilise que des formulations intégrales sans noyaux hypersinguliers. De plus, tant pour le cas parfaitement conducteur que pour le cas diélectrique, la méthode BMIA offre une complexité réduite à  $\mathcal{O}(N \log N)$ , très inférieure à celle des méthodes MOMI et FB.

### 2.4.3 Banded Matrix Iterative Approach (BMIA)

Cette méthode a été développée dès 1993 par L. Tsang et *al* [178, 179]. Elle a aussi donné lieu à une version améliorée, la Banded Matrix Iterative

Approach/Canonical Grid (**BMIA/CAG**) [95, 177], que nous allons présenter. Tout comme la méthode FMM, elle est utilisée conjointement avec une méthode de résolution itérative non-stationnaire dérivée de la méthode du Gradient Conjugué [181, 196], et a pour but d'accélérer les produits matrice-vecteur.

Dans la méthode BMIA originelle, la matrice pleine d'impédance  $\mathbf{Z}$ , obtenue après avoir appliqué la méthode des moments à partir d'une équation intégrale, est décomposée en une matrice bande qui représente les interactions fortes et une matrice restante qui prend en compte les interactions faibles; cette partition dépend du paramètre  $r_d$ , qui est choisi en fonction de la rugosité de la surface, et qui définit la limite entre les points situés en champ proche et champ lointain, par rapport à un point d'observation  $\mathbf{r}'$  donné. Le paramètre  $r_d$  dépend lui-même de l'angle d'incidence.

Dans la nouvelle méthode BMIA/CAG (CAnonical Grid), la matrice d'interactions faibles (construite à partir de la fonction de Green discrétisée) est décomposée en une somme de Taylor; ce développement étant effectué par rapport à la surface parfaitement plane située à la hauteur moyenne de la surface rugueuse étudiée. Le point fort de cette méthode est que le produit entre la matrice d'interactions faibles et un vecteur peut se faire à l'aide d'une transformation de Fourier rapide (FTT). L'inconvénient de la méthode BMIA/CAG est qu'elle ne converge rapidement que pour des surfaces dont l'écart type des hauteurs est relativement faible par rapport à la longueur d'onde. Nous reviendrons plus précisément sur ce dernier point.

### 2.4.3.1 Cas parfaitement conducteur

#### Cas Transverse Electrique

Nous envisageons premièrement le cas d'une onde incidente transverse électrique éclairant une surface rugueuse parfaitement conductrice.

L'équation intégrale électrique s'écrit alors, pour tout point  $\mathbf{r}'$  de la surface  $S$  :

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}') = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(x) \quad (2.123)$$

en posant

$$u(x) = \sqrt{1 + (\zeta'(x))^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (2.124)$$

Notons  $x_d = |x - x'|$  et  $z_d = |\zeta(x) - \zeta(x')|$ ;  $x_d$  représente la distance en abscisse entre le point d'observation  $\mathbf{r}'$  et un point source  $\mathbf{r}$ . Choisissons une distance  $r_d$  telle que  $r_d \gg \sigma_h$ , où  $\sigma_h$  est l'écart-type des hauteurs de la surface. (2.123) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi_{inc}(\mathbf{r}') &= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{x_d^2 + z_d^2} \right) u(x) \vartheta(r_d - x_d) \\ &+ \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{x_d^2 + z_d^2} \right) u(x) \vartheta(x_d - r_d) \end{aligned} \quad (2.125)$$

où  $\vartheta$  est la fonction de Heaviside :

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (2.126)$$

En discrétisant l'équation (2.125) par la méthode des moments, on obtient une matrice impédance  $Z$  qui est la somme de deux matrices, chacune de forme similaire à la matrice donnée en (2.58) :

$$Z = Z^{(s)} + Z^{(w)} \quad (2.127)$$

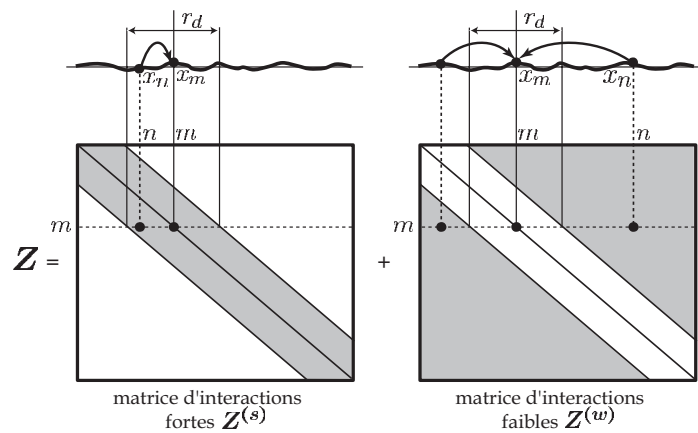
avec

$$Z_{mn}^{(s)} = \begin{cases} \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } |m - n| < R_d \\ \frac{i\Delta x}{4} \left[ 1 + i\frac{2}{\pi} \log\left(\frac{e^\gamma k_0 \Delta x}{2e} \gamma_m\right) \right] & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (2.128)$$

$$\text{et } Z_{mn}^{(w)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m - n| < R_d \\ \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (2.129)$$

en notant  $R_d$  la partie entière de  $r_d/\Delta x$ . En fait,  $R_d$  représente la largeur de bande de la matrice  $Z_{mn}^{(s)}$ .

Cette décomposition correspond à une considération physique :  $Z^{(s)}$  représente



**Fig.2.17** – Décomposition de la matrice  $Z$ ; interprétation physique des matrices  $Z^{(s)}$  et  $Z^{(w)}$ .

les interactions fortes (*strong*), alors que  $Z^{(w)}$  représente les interactions faibles (*weak*). Ce dernier terme correspond aux valeurs de  $x_d$  telles que  $x_d > r_d \gg \sigma_h$ ,

soit  $x_d \gg z_d = |\zeta(x) - \zeta(x')|$ . Ainsi, on peut, pour ce dernier terme, effectuer un développement de Taylor de la fonction de Green en  $x_d$ , pour  $r_d \leq x_d \leq L$  [177, 181] :

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{x_d^2 + z_d^2} \right) \simeq \sum_{m=0}^M a_m(x_d) \left( \frac{z_d^2}{x_d^2} \right)^m \quad (2.130)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0(x_d) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 x_d) \\ a_1(x_d) &= -\frac{i}{4} H_1^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0 x_d}{2} \\ a_2(x_d) &= \frac{i}{4} H_1^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0 x_d}{4} - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 x_d) \frac{(k_0 x_d)^2}{8} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Plus généralement, d'après [95],

$$a_m(x_d) = \frac{i}{4} \frac{H_m^{(1)}(k_0 x_d)}{m!} \left( \frac{-k_0 x_d}{2} \right)^m \quad (2.132)$$

Notons que les coefficients  $a_m(x_d)$  donnés par (2.131) sont tous exprimés à l'aide des fonctions de Hankel  $H_0^{(1)}$  et  $H_1^{(1)}$  et à partir de (2.132) en utilisant les relations qui existent entre les fonctions de Hankel de différents ordres (le lecteur pourra trouver ces relations en annexe A).

En choisissant une distance de voisinage  $r_d$  suffisamment grande, on peut alors faire une bonne approximation de (2.130) en tronquant la série de Taylor pour  $M = 3$ . Le terme représentant les interactions faibles s'écrit alors [177] :

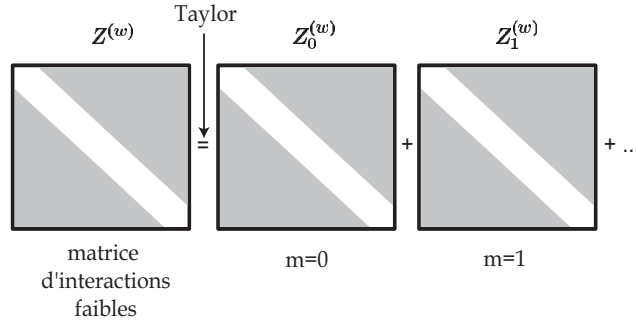
$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{x_d^2 + z_d^2} \right) u(x) \vartheta(x_d - r_d) \\ & \simeq \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_0(x_d) u(x) \vartheta(x_d - r_d) + \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_1(x_d) \frac{z_d^2}{x_d^2} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \\ & + \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_2(x_d) \frac{z_d^4}{x_d^4} u(x) \vartheta(x_d - r_d) + \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_3(x_d) \frac{z_d^6}{x_d^6} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \end{aligned} \quad (2.133)$$

En prenant toujours  $M = 3$ , la matrice d'interactions faibles  $\mathbf{Z}^{(w)}$  se décompose en :

$$\mathbf{Z}^{(w)} = \sum_{m=0}^3 \mathbf{Z}_m^{(w)} \quad (2.134)$$

- La matrice  $\mathbf{Z}_0^{(w)}$  correspond au premier terme de droite de (2.133) et est obtenue en discrétisant l'opérateur

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_0(x_d) \vartheta(x_d - r_d) \bullet = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 x_d) \vartheta(x_d - r_d) \bullet$$



**Fig.2.18** – Décomposition de la matrice d'interactions faibles  $Z^{(w)}$ .

d'où

$$Z_{0\ mn}^{(w)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m - n| < R_d \\ \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0|x_n - x_m|) & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (2.135)$$

$Z_0^{(w)}$  est une matrice de Toeplitz; c'est-à-dire que ses coefficients peuvent se mettre sous la forme :

$$Z_{0\ mn}^{(w)} = f(m - n) \quad \forall n, m \quad (2.136)$$

$$Z_0^{(w)} = \begin{pmatrix} f(0) & f(-1) & f(-2) & \dots & f(1 - N) \\ f(1) & f(0) & f(-1) & \dots & f(2 - N) \\ f(2) & f(1) & f(0) & \dots & f(3 - N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N - 1) & f(N - 2) & f(N - 3) & \dots & f(0) \end{pmatrix}$$

où  $f$  est une fonction adéquate. L'avantage de cette forme particulière de la matrice est que le produit  $Z_0^{(w)} \cdot \mathbf{X}$ , où  $\mathbf{X}$  est un vecteur donné, peut être optimisé en effectuant une FFT; le nombre d'opérations nécessaires est fortement réduit. Pour prendre un exemple, si la matrice  $Z_0^{(w)}$  était pleine, le produit  $Z_0^{(w)} \cdot \mathbf{X}$  nécessiterait  $N^2$  multiplications alors que, à l'aide d'une méthode employant la FFT, ce même produit ne mettrait en jeu que  $N \log N$  multiplications. Cette amélioration peut être très intéressante lorsque l'on utilise une méthode itérative.

Détaillons l'algorithme de multiplication matrice-vecteur par FFT [181]; c'est, en fait, un produit de convolution que l'on calcule dans le domaine de Fourier. Considérons le produit  $\mathbf{Y} = Z_0^{(w)} \cdot \mathbf{X}$ , où les composantes de  $\mathbf{Y}$  sont données par :

$$y(m) = \sum_{n=1}^N f(m - n)x(n) \quad 1 \leq m \leq N \quad (2.137)$$

Posons :

$$\tilde{x}_1(n) = \begin{cases} x(n) & 1 \leq n \leq N \\ 0 & N+1 \leq n \leq 2N \end{cases} \quad (2.138)$$

$$\tilde{x}_2(n) = \begin{cases} f(n-1) & 1 \leq n \leq N \\ 0 & n = N+1 \\ f(n-2N-1) & N+2 \leq n \leq 2N \end{cases} \quad (2.139)$$

et

$$W_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \quad (2.140)$$

$\tilde{x}_2(n)$  s'écrit  $\tilde{x}_2(n) = [f(0), f(1), \dots, f(N-1), 0, f(1-N), f(2-N), \dots, f(-1)]$ . Soient  $\tilde{X}_1$ ,  $\tilde{X}_2$  et  $\tilde{Y}$  les transformées de Fourier discrètes respectives de  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  et  $\tilde{y}$ . i.e., par exemple (rappelons que ce sont des vecteurs de longueur  $2N$ ) :

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{n=1}^{2N} \tilde{x}_1(n) W_{2N}^{(k-1)(n-1)} \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.141)$$

Alors, le vecteur produit est déterminé par multiplication dans le domaine de Fourier puis par transformée inverse :

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_2(k) \tilde{X}_1(k) \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.142)$$

$$y(m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \tilde{Y}(k) W_{2N}^{-(k-1)(m-1)} \quad 1 \leq m \leq N \quad (2.143)$$

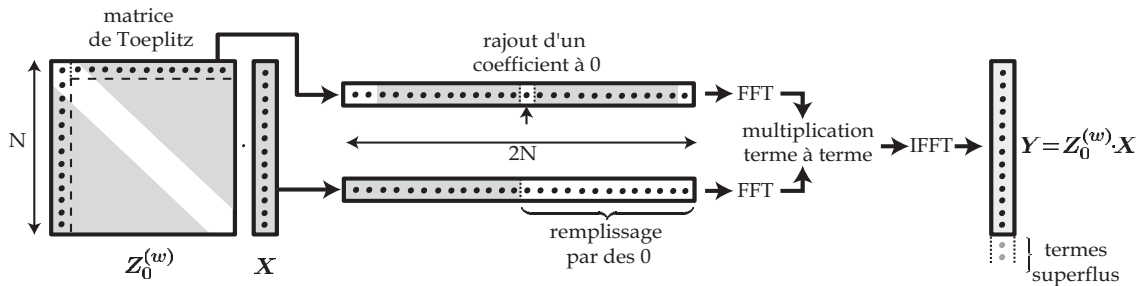


Fig.2.19 – Algorithme du produit par FFT d'une matrice de Toeplitz par un vecteur.

- On peut montrer que les autres termes  $Z_m^{(w)}$  de la matrice d'interactions faibles  $Z^{(w)}$  peuvent se factoriser en :

$$Z_m^{(w)} = \sum_k T_m^r(k) \cdot Z_m^d(k) \cdot T_m^s(k) \quad \forall m \geq 1 \quad (2.144)$$

où  $T_m^r(k)$  et  $T_m^s(k)$  sont des matrices de post- et de pré-multiplication, et  $Z_m^d(k)$  est une matrice de Toeplitz.

Par exemple, pour le cas  $m = 1$ ,  $Z_1^{(w)}$  correspond à la discrétisation par

la méthode des moments de l'opérateur suivant, qui correspond au deuxième terme de l'équation (2.133)

$$\left\{ \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_1(x_d) \frac{1}{x_d^2} \zeta(\mathbf{x})^2 \vartheta(x_d - r_d) \bullet \right. \quad (k=1) \quad (2.145)$$

$$- 2\zeta(\mathbf{x}') \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_1(x_d) \frac{1}{x_d^2} \zeta(\mathbf{x}) \vartheta(x_d - r_d) \bullet \quad (k=2) \quad (2.146)$$

$$\left. + \zeta(\mathbf{x}')^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_1(x_d) \frac{1}{x_d^2} \vartheta(x_d - r_d) \bullet \right\} \quad (k=3) \quad (2.147)$$

Dans l'expression ci-dessus, exceptionnellement, les symboles en gras ne représentent pas des vecteurs; nous les avons mis en valeur pour plus de clarté. Ils correspondent au développement du terme :  $z_d^2 = \zeta(\mathbf{x})^2 - 2\zeta(\mathbf{x}')\zeta(\mathbf{x}) + \zeta(\mathbf{x}')^2$ . Ainsi,  $\mathbf{Z}_1^{(w)}$  se décompose en

$$\mathbf{Z}_1^{(w)} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}_1^r{}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}_1^d{}^{(k)} \cdot \mathbf{T}_1^s{}^{(k)} \quad (2.148)$$

avec

$$T_{1\ mn}^s{}^{(k=1)} = \begin{cases} \zeta(x_m)^2 & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.149)$$

$$Z_{1\ mn}^d{}^{(k=1)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m - n| < R_d \\ \Delta x a_1(x_d) \frac{1}{x_d^2} = \\ -\frac{i\Delta x}{4} H_1^{(1)}(k_0|x_n - x_m|) \frac{k_0}{2|x_n - x_m|} & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (2.150)$$

$$T_{1\ mn}^r{}^{(k=1)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.151)$$

et

$$T_{1\ mn}^s{}^{(k=2)} = \begin{cases} \zeta(x_m) & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.152)$$

$$Z_{1\ mn}^d{}^{(k=2)} = Z_{1\ mn}^d{}^{(k=1)} \quad \forall m, n \quad (2.153)$$

$$T_{1\ mn}^r{}^{(k=2)} = \begin{cases} -2\zeta(x_m) & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.154)$$

ainsi que

$$T_{1\ mn}^s{}^{(k=3)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.155)$$

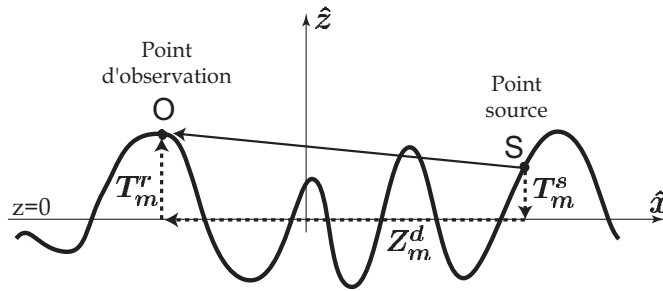
$$Z_{1\ mn}^d{}^{(k=3)} = Z_{1\ mn}^d{}^{(k=1)} \quad \forall m, n \quad (2.156)$$

$$T_{1\ mn}^r{}^{(k=3)} = \begin{cases} \zeta(x_m)^2 & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (2.157)$$

Lors du produit matrice-vecteur  $\mathbf{Z}_m^{(w)} \cdot \mathbf{X}$ , on effectue dans l'ordre [181]

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{T}_m^s \cdot \mathbf{X} && \text{en } N \text{ opérations} \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{Z}_m^d \cdot \mathbf{Y}_1 && \text{en } N \log N \text{ opérations (par FFT)} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{T}_m^r \cdot \mathbf{Y}_2 && \text{en } N \text{ opérations} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Physiquement, la différence de cette méthode par rapport au calcul direct du rayonnement d'un point source en un point d'observation est illustrée sur la figure 2.20. La pré-multiplication par  $\mathbf{T}_m^s$  consiste à translater le point source vers son projeté sur le plan  $z = 0$  de référence. Puis la multiplication par  $\mathbf{Z}_m^d$  translate ce point en un nouveau point, projeté du point d'observation sur le plan de référence. Enfin, la post-multiplication par  $\mathbf{T}_m^r$  translate ce dernier vers le point d'observation. Cette méthode est plus coûteuse qu'un calcul direct lorsqu'il s'agit de calculer l'interaction entre deux points de la surface. Mais pour un nombre important  $N$  de points, elle est plus avantageuse ( $\mathcal{O}(N \log N)$  versus  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations).



**Fig.2.20** – Calcul direct et indirect du rayonnement d'un point source au point d'observation.

Donc, finalement, le temps de calcul du produit  $\mathbf{Z}^{(w)} \cdot \mathbf{X}$  est proportionnel à  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

En conclusion, le temps de calcul matrice-vecteur de la méthode BMIA est proportionnel, pour  $N$  grand, à  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

### Cas Transverse Magnétique

Dans le cas TM, la méthodologie est similaire; cependant, nous détaillons les calculs en annexe E, puisqu'apparemment, ils ne sont pas donnés dans la littérature.

**Résolution itérative** La méthode BMIA est appliquée à une méthode de résolution itérative. Les auteurs [181] de la méthode en proposent trois, dont une méthode non-stationnaire du type gradient conjugué [87]. Nous retiendrons une méthode itérative simple et présenterons la méthode du gradient conjugué afin de préciser comment s'inclut, dans une méthode itérative non-stationnaire, l'accélération matrice-vecteur par la méthode BMIA.



- **Méthode itérative *simple***

A partir du système linéaire à résoudre

$$\left\{ \mathbf{Z}^{(s)} + \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \right\} . \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.159)$$

qui peut s'écrire encore

$$\mathbf{Z}^{(s)} . \mathbf{X} = \mathbf{b} - \left\{ \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \right\} . \mathbf{X} \quad (2.160)$$

on peut développer un système itératif de la forme

$$\mathbf{Z}^{(s)} . \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{b} \quad \rightsquigarrow \mathbf{X}^{(0)} \quad (2.161)$$

$$\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b} - \left\{ \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \right\} . \mathbf{X}^{(0)} \quad (2.162)$$

$$\mathbf{Z}^{(s)} . \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{b}^{(0)} \quad \rightsquigarrow \mathbf{X}^{(1)} \quad (2.163)$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{b} - \left\{ \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \right\} . \mathbf{X}^{(1)} \quad (2.164)$$

$$\dots \quad (2.165)$$

Le résidu est défini par

$$\mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{b} - \mathbf{Z} . \mathbf{X}^{(n)} \quad (2.166)$$

et peut être calculé efficacement par :

$$\mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{b} - \left\{ \mathbf{Z}^{(s)} + \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \right\} . \mathbf{X}^{(n)} \quad (2.167)$$

$$= \left( \mathbf{b} - \left\{ \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \right\} . \mathbf{X}^{(n)} \right) - \mathbf{Z}^{(s)} . \mathbf{X}^{(n)} \quad (2.168)$$

$$= \mathbf{b}^{(n)} - \mathbf{b}^{(n-1)} \quad (2.169)$$

Et nous arrêtons l'algorithme lorsque le critère d'arrêt

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(n)}\|}{\|\mathbf{b}\|} < \text{Crit} \quad (2.170)$$

est vérifié, avec, typiquement, Crit de l'ordre de 1%.

Il faut aussi considérer le temps d'inversion de la matrice bande  $\mathbf{Z}^{(s)}$ . Sa largeur de bande étant  $R_d$ , la méthode d'inversion par décomposition LU requiert  $\mathcal{O}(R_d^2 N/2)$  opérations; ce nombre d'opérations est très inférieur à celui d'une méthode directe en  $\mathcal{O}(N^3)$ .

- **Méthode du gradient conjugué**

A l'origine, l'algorithme du gradient conjugué [87] supposait que la matrice  $\mathbf{Z}$  du système

$$\mathbf{Z}.\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.171)$$

à résoudre était définie positive; or les matrices rencontrées dans le problème de diffusion sont complexes et ne sont pas toujours définies positives. Cependant le système linéaire précédent peut être remplacé par le problème équivalent

$$\mathbf{Z}^H \mathbf{Z} \mathbf{X} = \mathbf{Z}^H . \mathbf{b} \quad (2.172)$$

où  $\mathbf{Z}^H$  est la matrice transposée conjuguée de  $\mathbf{Z}$ . La matrice  $\mathbf{Z}^H \mathbf{Z}$  est hermitienne définie positive. A la vue de l'équation précédente, nous serions tentés de multiplier directement  $\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{Z}^H$ , puis d'appliquer un algorithme de gradient conjugué avec la matrice résultante. Cependant ce serait une très mauvaise idée, car le produit de deux matrices pleines nécessite  $N^3$  opérations, autant qu'une inversion directe de la matrice impédance! Il vaut mieux adapter l'algorithme du gradient conjugué sous la forme du CGNR (Conjugate Gradient on the Normal Equations) [181, 192] :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(0)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^{(0)} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{d}^{(1)} &= \mathbf{Z}^H \mathbf{b} \quad (\mathbf{Z}^H \mathbf{b} \rightsquigarrow \text{BMIA}) \\ \alpha^{(1)} &= \frac{\|\mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(0)}\|^2}{\|\mathbf{Z} \mathbf{d}^{(1)}\|^2} \quad (\mathbf{Z} \mathbf{d}^{(1)} \rightsquigarrow \text{BMIA}) \\ \mathbf{X}^{(1)} &= \mathbf{X}^{(0)} + \alpha^{(1)} \mathbf{d}^{(1)} \\ \mathbf{r}^{(1)} &= \mathbf{r}^{(0)} - \alpha^{(1)} \mathbf{Z} \mathbf{d}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.173)$$

et pour  $i = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \beta^{(i)} &= \frac{\|\mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(i-1)}\|^2}{\|\mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(i-2)}\|^2} \quad (\mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(i-1)}, \mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(i-2)} \rightsquigarrow \text{BMIA}) \\ \mathbf{d}^{(i)} &= \mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(i-1)} + \beta^{(i)} \mathbf{d}^{(i-1)} \\ \alpha^{(i)} &= \frac{\|\mathbf{Z}^H \mathbf{r}^{(i-1)}\|^2}{\|\mathbf{Z} \mathbf{d}^{(i)}\|^2} \quad (\mathbf{Z} \mathbf{d}^{(i)} \rightsquigarrow \text{BMIA}) \\ \mathbf{X}^{(i)} &= \mathbf{X}^{(i-1)} + \alpha^{(i)} \mathbf{d}^{(i)} \\ \mathbf{r}^{(i)} &= \mathbf{r}^{(i-1)} - \alpha^{(i)} \mathbf{Z} \mathbf{d}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.174)$$

La norme utilisée est  $\|\mathbf{X}\| = \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X} = \sum_i x_i^2$ , où  $\mathbf{X}^t$  est le transposé de  $\mathbf{X}$ .

- **Méthode BICGStab**

L'inconvénient de la méthode du gradient conjugué est qu'elle converge très lentement, et que, lorsque la matrice  $\mathbf{Z}$  est mal conditionnée,  $\mathbf{Z}^H \cdot \mathbf{Z}$  est encore plus mal conditionnée. Nous avons développé une méthode plus rapide utilisant la méthode BICGStab [17]; cette méthode a été choisie parmi d'autres telles que QMR ou GMRES et a montré un bon taux de convergence [196]. Par rapport à [196] nous proposons une étape de préconditionnement de type ILU (Incomplete LU decomposition), disponible sous MATLAB. Elle permet d'obtenir une factorisation LU approchée de la matrice  $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} \simeq \mathbf{L}_{approx} \cdot \mathbf{U}_{approx}$$

en donnant une valeur seuil positive de l'ordre de  $10^{-1}$  à  $10^{-6}$ , en dessous de laquelle les coefficients des matrices  $\mathbf{L}_{approx}$  et  $\mathbf{U}_{approx}$  sont tronqués, pendant l'algorithme ILU.

Lors de l'application de l'algorithme BMIA-BICGSTAB pour un très grand nombre d'inconnues, la matrice impédance est de taille considérable et ne peut être stockée. En revanche la matrice bande  $\mathbf{Z}^{(s)}$  peut être stockée en mémoire, et c'est à partir de cette matrice que nous opéreront la décomposition ILU; comme la matrice  $\mathbf{Z}^{(s)}$  contient les termes prédominants de la matrice impédance, nous sommes assurés d'avoir un préconditionnement efficace. Un récapitulatif de la méthode que nous avons mis en place est schématisé sur la figure 2.21.

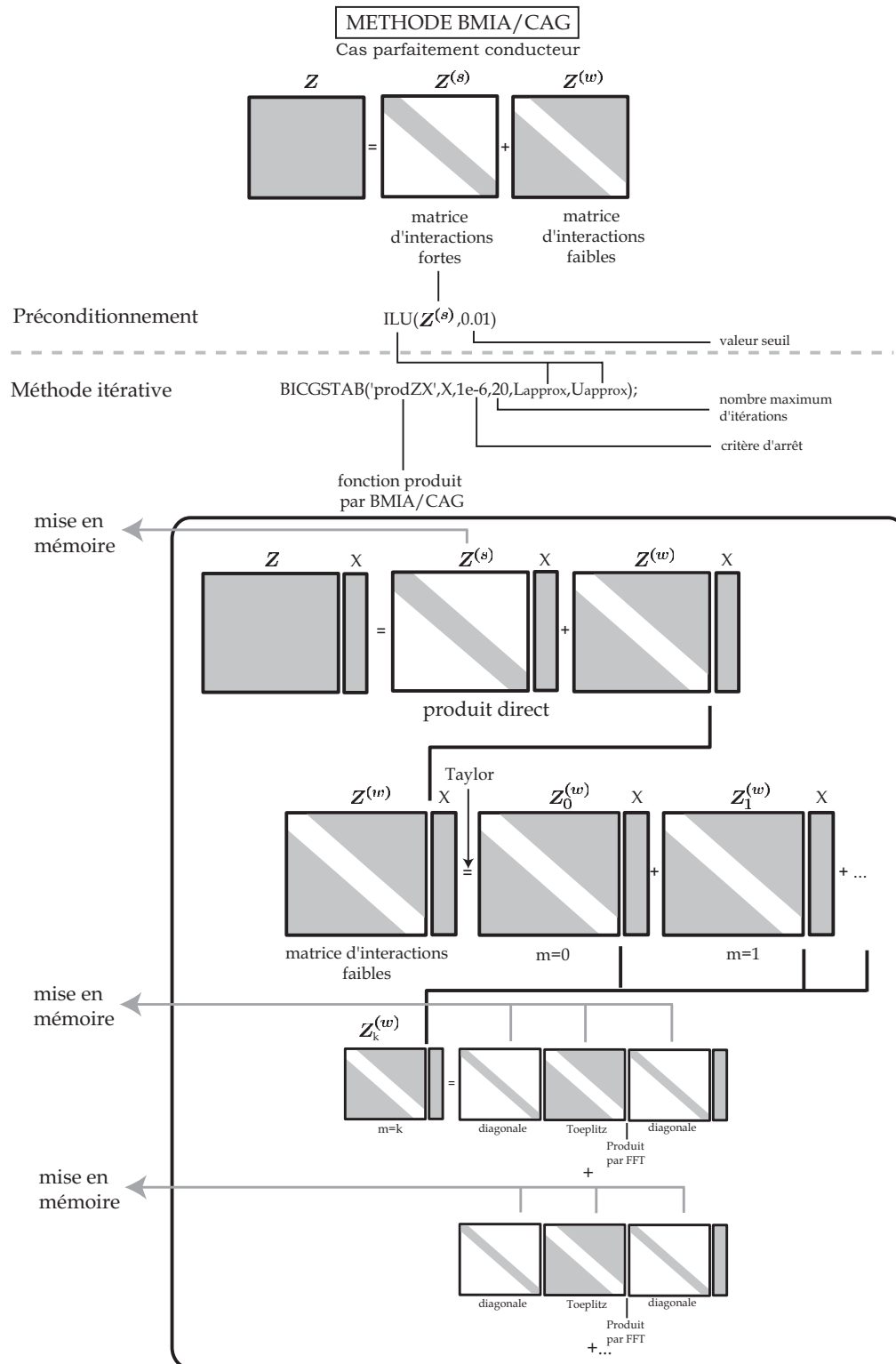
**Place mémoire** L'avantage d'une décomposition de la matrice impédance sous la forme

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{(s)} + \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \quad (2.175)$$

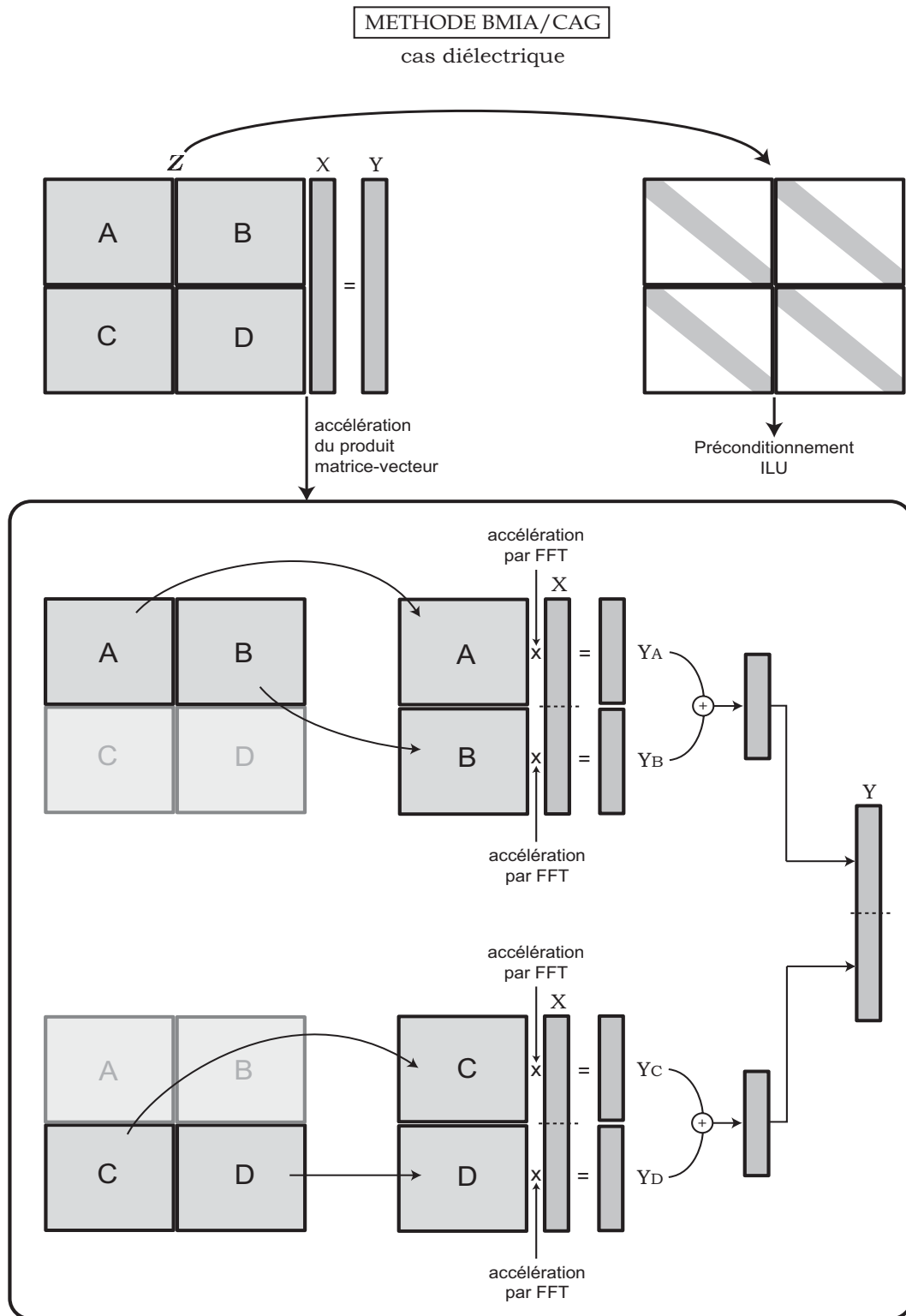
est le peu de place mémoire qu'elle réclame pour un ordre de troncation  $M$  suffisamment faible [177]. En effet, La matrice d'interactions fortes  $\mathbf{Z}^{(s)}$  est une matrice bande de largeur de bande  $R_d \ll N$ , et qui contient  $\mathcal{O}(R_d N)$  coefficients non nuls. Quant aux matrices d'interactions faibles,  $\mathbf{Z}_m^{(w)}$ , elles se décomposent en (cf. 2.148)

$$\mathbf{Z}_m^{(w)} = \sum_k \mathbf{T}_m^r(k) \cdot \mathbf{Z}_m^d(k) \cdot \mathbf{T}_m^s(k) \quad \forall m \geq 1$$

où les matrices  $\mathbf{T}_m^r(k)$  et  $\mathbf{T}_m^s(k)$  sont des matrices diagonales contenant chacune  $N$  coefficients non nuls et  $\mathbf{Z}_m^d(k)$  est une matrice de Toeplitz décrite par sa première colonne et sa première ligne, donc à l'aide de  $2N - 1$  coefficients. Une décomposition de la forme (2.175) ne requiert donc que  $\mathcal{O}(R_d N + 4MN)$  coefficients au lieu des  $N^2$  coefficients de la matrice pleine  $\mathbf{Z}$ .



**Fig.2.21** – Mise en oeuvre pour le cas parfaitement conducteur de la méthode BMIA/CAG au sein de la méthode itérative BICGSTAB, avec préconditionnement par décomposition LU incomplète (ILU).



**Fig.2.22** – Mise en oeuvre pour le cas diélectrique de la méthode BMIA/CAG au sein de la méthode itérative BICGSTAB, avec preconditionnement par décomposition LU incomplète (ILU). Les étapes d'accélération par FFT désignent le produit du cas parfaitement conducteur (Fig. 2.21)

### 2.4.3.2 Cas diélectrique

Dans le cas d'une surface de forte permittivité, la méthode *Physic-Based Two-Grid Method/BMIA/CAG*, [108–110], présentée en 1999, s'est montrée efficace. Avant de détailler son algorithme, rappelons que, lors de la discrétisation par la méthode des moments, le pas de discrétisation d'une surface délimitant deux milieux doit être choisi en fonction de la permittivité de ces milieux. Lorsque celle-ci n'est pas très élevée, on peut se contenter d'une discrétisation dite *grossière*. En revanche, dans le cas de forte permittivité du milieu inférieur, le pas de discrétisation de la surface doit être choisi très fin (*discrétisation fine*), pour prendre en compte les variations rapides de la fonction de Green du milieu. Le nombre d'inconnues est alors conséquent. Toutefois, dans ce cas là, la fonction de Green du même milieu s'atténue sur une distance beaucoup plus courte que celle du milieu supérieur, de permittivité plus faible. En combinant ces deux remarques, la méthode permet de déterminer, par interpolation, la valeur des champs sur la surface avec un niveau de précision correspondant à la grille de discrétisation fine, en autant de calculs que celle correspondant à la grille de discrétisation grossière. La méthode PTBG/BMIA/CAG réduit donc de façon importante le temps de calcul.

Cependant, nous avons préféré utiliser, dans le cas d'un milieu de forte permittivité, la condition d'impédance de surface, qui permet de réduire le nombre d'inconnues du problème, et qui permet d'utiliser une méthode BMIA/CAG classique; on évite ainsi la programmation fastidieuse de la méthode PBTG/BMIA/CAG.

Dans le cas de faible permittivité, la méthode PBTG/BMIA/CAG perd de son intérêt; nous utilisons alors la méthode BMIA/CAG présentée précédemment, adaptée simplement au cas diélectrique comme le montre le schéma de la figure 2.22. Comme nous le voyons sur le schéma, d'après la forme de la matrice impédance du cas diélectrique, le produit matrice-vecteur du cas diélectrique se ramène à quatre produits matrice-vecteurs, où les matrices en question correspondent au cas parfaitement conducteur.

### 2.4.3.3 Conclusion

La méthode BMIA/CAG permet de diminuer le temps de calcul par rapport à la méthode MOMI ( $\mathcal{O}(N \log N)$  au lieu de  $\mathcal{O}(N^2)$ ). Cependant la méthode BMIA/CAG n'est intéressante que lorsque la largeur de bande  $R_d$  ou encore la distance de voisinage  $r_d$  peut être prise suffisamment petite, ce qui n'est pas le cas lorsque l'écart-type des hauteurs est grand par rapport à la longueur d'onde. La méthode BMIA/CAG n'est intéressante que pour des surfaces dont l'écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde ou inférieur. Pour le cas où  $\sigma_h$  est plus grand que la longueur d'onde, une méthode plus générale, la BMIA/CAG Multilevel [29, 53], a été développée en 1998 pour une surface 1D, et en 2001 [108], pour une surface 2D.

Une méthode BMIA couplée à la méthode MOMI a aussi été proposée [176], mais sans amélioration notable de cette dernière.

#### 2.4.4 Fast Multipole Method (FMM)

Outre la méthode précédente qui utilise la FFT, une méthode efficace pour optimiser le produit matrice-vecteur est indéniablement la Fast Multipole Method (FMM). L'idée originale de Rokhlin dans le cas du problème de diffusion [144], résumée dans [39], a été reprise et améliorée considérablement, et fait encore aujourd'hui l'objet de nombreuses études en 2D ou 3D [25, 44, 45, 92, 189]. Elle est intégrée, par exemple, dans les codes de calcul développés pour le *projet CAIMAN* de l'INRIA [139]. La méthode multipôle rapide est un algorithme récursif et parallélisable qui permet d'accélérer les produits matrice-vecteur utilisés lors des inversions itératives de ces systèmes. Elle consiste à remplacer un produit matrice-vecteur "classique" par un produit matrice-vecteur approché. On sépare les interactions entre éléments en fonction de leur caractère proche ou lointain, les interactions lointaines étant regroupées afin d'être gérées collectivement. Une représentation élémentaire 1D de la méthode FMM tirée de [44] est donnée en Annexe F.

La méthode FMM est une méthode complexe à programmer, mais qui est très performante. Elle est couramment utilisée à présent, de même que la méthode BMIA/CAG, lorsque les problèmes sont de très grande taille (la FMM a été appliquée en aéronautique à des problèmes de l'ordre du million d'inconnues). On peut en outre améliorer la méthode pour ramener sa complexité de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^{3/2})$  à celui de  $\mathcal{O}(N \log N)$  [44]; c'est la méthode dite FMM multilevel. Il existe aussi une autre variante de la méthode FMM multilevel qui est la SDFMM (Steepest Descent FMM) [92, 181], qui a une complexité de  $\mathcal{O}(N)$ ; elle est aussi performante que la méthode FB/NSA (Forward-Backward with Novel Spectral Acceleration) [94].

La méthode FMM a été aussi adaptée pour des surfaces diélectriques, et a été utilisée conjointement à d'autres méthodes itératives telles que la méthode PBTG (Physic-Based Two-Grid) [181] et la méthode FB [94].

Une des raisons pour laquelle nous ne retenons pas la FMM dans notre thèse est que, malgré sa versatilité et son utilisation massive dans des codes de calculs industriels, elle n'est pas particulièrement adaptée au problème de diffusion par des interfaces rugueuses (du moins pour le cas monodimensionnel qui nous intéresse). En effet, la méthode FMM multilevel ou la SDFMM, seules versions de la FMM qui atteignent une complexité de calcul aussi faible (voire plus faible) que la BMIA/CAG, sont beaucoup plus complexes à programmer que cette dernière. Dans notre laboratoire, qui ne disposait pas il y a trois ans de méthodes numériques rapides, ce facteur a joué un rôle clé. Par ailleurs, les méthodes rapides développées spécifiquement pour la diffusion par des surfaces rugueuses ont été considérablement améliorées depuis quelques années (citons par exemple la méthode Forward-Backward avec accélération spectrale) et elles sont, pour une complexité de programmation plus faible, aussi efficaces que les méthodes multipôles de type FMM. Cette remarque ne diminue en rien l'intérêt des méthodes FMM; cependant la raison pour laquelle la FMM s'est si vite popularisée depuis son apparition au milieu des

années 80, est qu'elle est adaptable à tout type de problème où des interactions multiples sont en jeu, et le problème de diffusion électromagnétique (par une surface rugueuse ou par des objets de formes variables et complexes) n'est qu'un exemple de ceux-ci. En résumé, les méthodes rapides que nous utilisons dans cette thèse, sont plus intéressantes que les méthodes FMM mais elles sont plus spécifiques que celles-ci ; elles ne sont pas transposables à d'autres problèmes.

## 2.5 Mise en oeuvre des méthodes numériques intégrales

Nous devons choisir dans cette thèse une méthode numérique efficace : un critère important est que le méthode retenue permette de résoudre le problème de diffusion pour une vaste gamme de surfaces rugueuses. Le but est de pouvoir comparer les résultats de ces méthodes avec les résultats prédits par des méthodes analytiques approchées, afin de déterminer leur domaines de validité. Notre choix s'est porté sur les méthodes MOMI et BMIA/CAG ; nous les avons programmées, ainsi qu'une méthode exacte par décomposition LU suivie d'une inversion par substitution (nous l'appellerons "méthode LU"). Nous allons tester la précision et la convergence des méthodes itératives MOMI et BMIA/CAG par rapport aux résultats fournis par la méthode de référence LU ; nous comparerons ces méthodes en fonction des paramètres de la surface rugueuse discrétisée, tels que l'écart-type des hauteurs  $\sigma_h$ , l'écart-type des pentes  $\sigma_p$  et le pas de discrétisation  $\Delta x$ . Les méthodes seront présentées d'abord dans le cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur, puis d'un milieu inférieur diélectrique, ce qui sera intéressant pour l'étude de la superposition d'interfaces rugueuses. L'ordinateur utilisé est volontairement un simple ordinateur de bureau de puissance moyenne (processeur 2GHz, 1 Go de mémoire vive).

### 2.5.1 Conservation de l'énergie : MoM avec inversion LU

Nous allons mettre en oeuvre la méthode des moments avec une résolution du système par inversion LU, à partir des formulations intégrales EFIE et MFIE, dans les cas TE et TM. La résolution du système matriciel par inversion LU nous garantit une résolution exacte du système matriciel, contrairement aux méthodes rapides, qui ne sont que des solutions approchées.

Nous allons étudier les cas TE EFIE, TE MFIE et TM MFIE, en oubliant le cas TM EFIE qui est mal adapté au problème de diffusion ; c'est une formulation intégrale rarement utilisée en pratique du fait de son noyau hautement singulier (cf. MOMI pour le cas diélectrique). Nous allons comparer la robustesse de ces trois formulations intégrales en calculant la réflectivité  $R$  pour le cas d'une surface rugueuse séparant l'air d'un milieu parfaitement conducteur. En théorie, celle ci vaut dans ce cas

$$R = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_s \sigma(\theta_s) = 1 \quad (2.176)$$

La vérification de cette égalité est une condition nécessaire (mais non suffisante) de précision pour une méthode. Nous nous restreindrons à des surfaces de



distribution des hauteurs et de spectre gaussiens ; nous emploierons par commodité la dénomination “surface gaussienne” par la suite.

Nous allons tester tout d’abord la sensibilité des formulations intégrales en fonction de l’écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  pour un écart-type des pentes donné  $\sigma_p$ . Pour une surface gaussienne, connaissant  $\sigma_h$  et  $\sigma_p$ , la longueur de corrélation est donnée par

$$L_c = \frac{\sqrt{2}\sigma_h}{\sigma_p} \quad (2.177)$$

Comme il faut disposer d’une surface suffisamment grande afin de prendre pleinement en compte la statistique de la surface, nous choisirons des surfaces dépassant  $10L_c$ . De plus, nous choisissons un pas de discrétisation assez fin,  $\Delta x < L_c/10$ , pour inclure les détails de surface, détails caractérisés par la longueur de corrélation (ceci dans le cas de surfaces gaussiennes).

Dans le tableau 2.3 les valeurs de la réflectivité sont données en fonction de  $\sigma_h$  avec un  $\sigma_p = 0.1$  fixé, pour les trois formulations intégrales résolues par la MoM suivie d’une inversion par décomposition LU. Nous avons par ailleurs  $\Delta x = 0.1\lambda$  et  $L = 250\lambda$ , soit 2500 échantillons. L’angle d’incidence est pris égal à  $\theta_i = 30^\circ$  ; le paramètre d’atténuation  $g$  de l’onde de Thorsos utilisée est pris égal à  $g = L/10 = 25\lambda$ .

L’erreur sur la conservation de l’énergie est inférieure, dans tous les cas, à 0.03%.

Méthodes \ $\sigma_h$	$0.1\lambda$	$0.5\lambda$	$1\lambda$	$2\lambda$
TE EFIE	0.9999	1.0002	1.0001	1.0002
TE MFIE	1.0002	1.004	1.0002	1.0003
TM MFIE	1.0001	0.9998	1.0002	0.9997

**Tab.2.3** – Réflectivités comparées en fonction de l’écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  pour un écart-type des pentes fixé  $\sigma_p = 0.1$ . Surface rugueuse gaussienne,  $\Delta x = 0.1\lambda$  et  $L = 250\lambda$ .

Nous avons testé les trois méthodes pour des écarts types des pentes plus élevés (0.2 , 0.3) et il s’est avéré que les méthodes vérifiaient également la conservation de l’énergie. A priori, pour un écart-type des pentes faible (inférieur à 0.3), l’augmentation de la valeur de  $\sigma_h$  ne semble pas discriminer les méthodes.

Nous avons fait une autre série de tests en laissant cette fois  $\sigma_h$  fixe et en augmentant  $\sigma_p$ . Les résultats sont rassemblés pour les trois méthodes dans le tableau 2.4, en posant  $\sigma_h = 1\lambda$ ,  $\Delta x = 0.1\lambda$  et  $L = 250\lambda$ . On observe que pour un écart des pentes croissant, les trois équations intégrales se comportent différemment ; la méthode des MoM dérivée de la TE EFIE donne une meilleure conservation de l’énergie, pour  $\sigma_p$  élevé, que les autres formulations TE MFIE et TM MFIE. Ces dernières sont donc plus sensibles à une élévation des pentes.

Nous avons enfin testé la conservation de l’énergie face à la discrétisation de plus en plus fine de la surface (ce qui serait nécessaire si on diminuait la fréquence de l’onde incidente). Cette fois  $\Delta x$  varie et on fixe l’écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1\lambda$

Méthodes \ $\sigma_p$	0.2	0.5	1
TE EFIE	1.0001	1.0001	0.9997
TE MFIE	1.0003	1.0020	0.9911
TM MFIE	0.9998	0.9953	0.9896

**Tab.2.4** – Réflectivités comparées en fonction de l'écart-type des pentes  $\sigma_p$  pour un écart-type des hauteurs fixé  $\sigma_h = 1\lambda$ . Surface rugueuse gaussienne,  $\Delta x = 0.1\lambda$  et  $L = 250\lambda$ .

ainsi que l'écart-type des pentes  $\sigma_p = 0.1$ . On a choisi une surface de longueur  $L = 70\lambda$ . Les résultats sont présentés dans le tableau 2.5. Cette fois la résolution de

Méthodes \ $\Delta x$	0.2 $\lambda$	0.1 $\lambda$	0.05 $\lambda$	0.02 $\lambda$
TE EFIE	0.9997	1.0003	0.9977	0.9658
TE MFIE	0.9998	1.0002	0.9995	0.9967
TM MFIE	1.0001	1.0002	1.0007	0.9987

**Tab.2.5** – Réflectivités comparées en fonction du pas de discrétisation  $\Delta x$  pour  $\sigma_h = 1\lambda$  et  $\sigma_p = 0.1$  fixés;  $L = 70\lambda$ .

la TE EFIE conduit à une mauvaise conservation de l'énergie lorsque  $\Delta x$  diminue, alors que les méthodes dérivées des équations MFIE donnent de bons résultats.

Devant ces premiers résultats, il est toutefois difficile de conclure sur le domaine de validité des méthodes numériques et sur le choix de la formulation intégrale la plus robuste pour le cas TE (pour le cas TM il n'y en a qu'une). Une telle démarche empirique montre juste des "tendances" qu'il faut étayer par une analyse plus rigoureuse. Nous effectuons donc maintenant une étude du conditionnement des matrices issues des équations intégrales TE EFIE, TE MFIE et TM MFIE.

### 2.5.2 Analyse de l'erreur

Nous allons rappeler brièvement la définition du conditionnement d'une matrice et comment celui-ci intervient sur l'erreur du résultat. Puis nous étudierons si les équations intégrales précédentes donnent des matrices bien conditionnées pour une large gamme de paramètres des surfaces : une matrice bien conditionnée est en effet un gage d'exactitude lors de l'inversion.

On a introduit précédemment, en appliquant la méthode des moments, une approximation  $\tilde{f}$  de la fonction inconnue  $f$  (2.40). La MoM consiste alors à déterminer cette fonction approchée  $\tilde{f}$  en discrétisant des équations intégrales, puis en résolvant le système linéaire obtenu. Ces équations intégrales mettent en jeu des opérateurs  $\mathcal{L}$  intégraux ou intégro-différentiels. L'inconvénient est que, pour les opérateurs et les fonctions de base  $f_n$  et  $w_n$  rencontrés en électromagnétisme, il est généralement impossible de montrer que  $\tilde{f}$  converge vers  $f$  lorsque le nombre d'inconnues  $N$  tend vers l'infini. Par exemple, dans le cas de la MFIE, qui est une

équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce, il n'est possible de prouver la convergence que si les fonctions de projection et de test forment des bases orthonormées et complètes. Cependant c'est rarement le cas pour les fonctions utilisées pour la MoM. Le problème est encore plus délicat pour la EFIE qui est une équation intégrale de Fredholm de première espèce. Il n'est pas possible de montrer la convergence de la MoM pour ce type d'équation. Cependant, la MoM est utilisée depuis de nombreuses années et la convergence de la méthode a été démontrée par la pratique.

Le nombre de conditionnement d'une matrice est une grandeur importante quand on doit inverser un système linéaire. Il est défini par

$$\text{cond}(\mathbf{Z}) = \|\mathbf{Z}\| \cdot \|\mathbf{Z}^{-1}\| \quad (2.178)$$

où la norme utilisée est la norme  $\|\cdot\|_2$  ou  $\|\cdot\|_\infty$ . Pour le cas particulier de la norme  $\|\cdot\|_2$ , le nombre de conditionnement est aussi donné par :

$$\text{cond}_2(\mathbf{Z}) = \sqrt{\frac{|\Lambda_{max}|}{|\Lambda_{min}|}} \quad (2.179)$$

où  $\Lambda_{max}$  et  $\Lambda_{min}$  sont, respectivement, les plus grande et plus petite valeurs propres de la matrice  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H$ , où  $\mathbf{Z}^H$  dénote la matrice transposée conjuguée de  $\mathbf{Z}$ .

Considérons l'équation matricielle

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.180)$$

et supposons que l'on commet une erreur  $\delta\mathbf{b}$  sur le vecteur  $\mathbf{b}$ . L'erreur relative commise sur la solution peut alors être estimée par

$$\frac{\|\delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{Z}) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2.181)$$

En d'autres mots, dans le pire des cas, l'erreur relative commise sur  $\mathbf{b}$  est amplifiée par le nombre de conditionnement et donne lieu à une grande erreur relative sur  $\mathbf{X}$ . Similairement, si on commet une erreur  $\delta\mathbf{Z}$  sur le calcul de la matrice  $\mathbf{Z}$ , l'erreur sur la solution peut être estimée par

$$\frac{\|\delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{Z}) \frac{\|\delta\mathbf{Z}\|}{\|\mathbf{Z}\|} \quad (2.182)$$

A nouveau, l'erreur est amplifiée par le nombre de conditionnement. Pour la méthode des moments,  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{b}$  sont déterminés à l'aide d'une intégration numérique et parfois le champ utilisé pour déterminer  $\mathbf{b}$  repose sur des mesures. Dans tous les cas, les faibles erreurs présentes sur  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{b}$  peuvent être amplifiées par le nombre de conditionnement de la matrice. Précisément, le nombre d'itérations pour résoudre (2.180) par une méthode itérative est proportionnel au nombre de conditionnement de la matrice. Ceci explique pourquoi tout doit être fait pour que le nombre de conditionnement de la matrice soit aussi faible que possible. Et inversement, si le nombre de conditionnement est élevé, les résultats numériques seront très imprécis.

Une méthode de préconditionnement consiste à remplacer un système

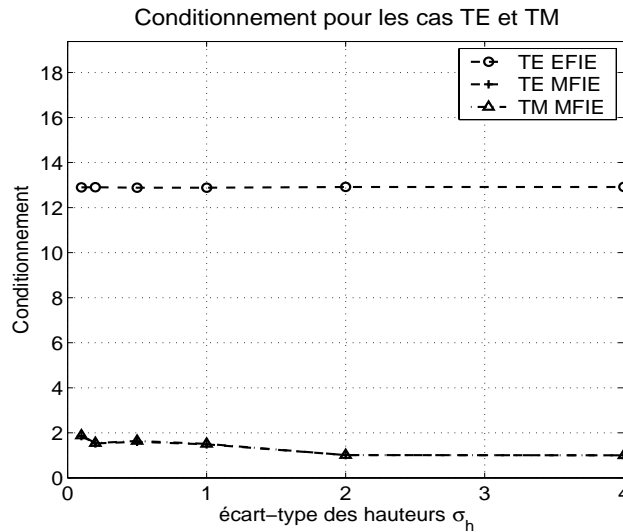
$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (2.183)$$

par

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.184)$$

où  $\mathbf{C}$  est une matrice de préconditionnement, c'est-à-dire telle que  $\mathbf{C}^{-1}$  est une "bonne" approximation de  $\mathbf{Z}^{-1}$ , et obtenue simplement. Généralement, les matrices du problème de diffusion ont leurs éléments de plus grand module sur la diagonale  $\mathbf{D}$ , donc  $\mathbf{C} = \mathbf{D}$  est une matrice possible pour un préconditionnement. Cependant, pour obtenir une matrice de préconditionnement plus efficace, on peut considérer une matrice bande  $\mathbf{B}$ , prenant en compte les éléments de la matrice proche de la diagonale.

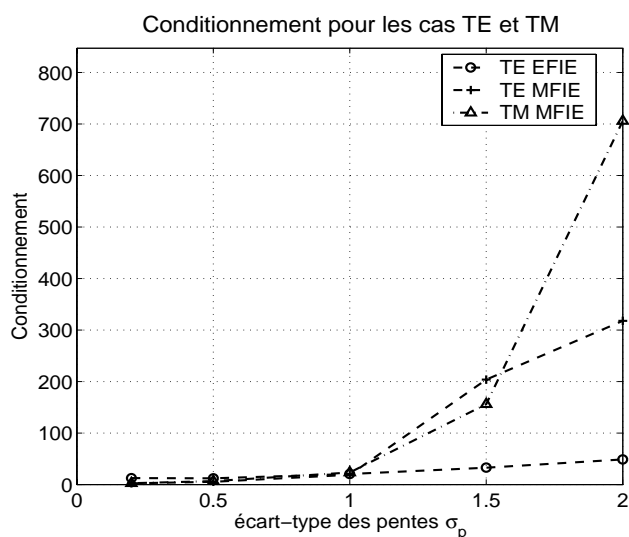
Il est intéressant, après ces considérations, d'étudier le conditionnement des matrices issues de la discrétisation des équations TE EFIE, TE MFIE et TM MFIE. Nous pouvons étudier ce conditionnement en fonction de chacun des paramètres  $\sigma_h$ ,  $\sigma_p$  et  $\Delta x$ , en fixant deux des trois paramètres. Les résultats sont présentés sur les figures 2.23, 2.24 et 2.25. A la vue de ces résultats, on peut conclure que les



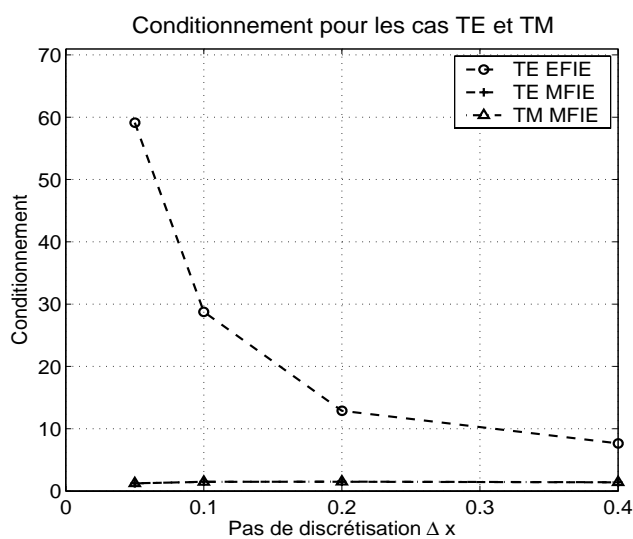
**Fig. 2.23** – Conditionnement des matrices issues des équations TE EFIE, TM EFIE et TM MFIE, en fonction de  $\sigma_h/\lambda$ ; les autres paramètres sont fixés :  $\sigma_p = 0.1$ ,  $\Delta x = 0.1\lambda$ .

résultats des pages précédentes sur la conservation de l'énergie reflètent ni plus ni moins la qualité du conditionnement des matrices issues de la discrétisation des équations TE EFIE, TE MFIE et TM MFIE.

En conclusion, on pourra, en polarisation TE, préférer l'équation intégrale TE EFIE à l'équation TE MFIE lorsque l'écart-type des pentes est supérieur à 1, et inversement, on choisira plutôt l'équation intégrale TE MFIE lorsque le pas de



**Fig.2.24** – Conditionnement des matrices issues des équations TE EFIE, TM EFIE et TM MFIE, en fonction de  $\sigma_p$ ; les autres paramètres sont fixés :  $\sigma_h = 1\lambda$ ,  $\Delta x = 0.1\lambda$ .



**Fig.2.25** – Conditionnement des matrices issues des équations TE EFIE, TM EFIE et TM MFIE, en fonction de  $\Delta x$ ; les autres paramètres sont fixés :  $\sigma_h = 1\lambda$ ,  $\sigma_p = 0.1$ .

discrétisation est très petit par rapport à la longueur d'onde (cas qui se présente quand les détails de la surface sont petits devant la longueur d'onde). En revanche, en polarisation TM, on n'a pas le choix : la seule équation utilisable en pratique est la TM MFIE, et elle est sensible aux fortes pentes.

Il peut arriver en même temps que l'écart-type des pentes soit élevé et que le pas de discrétisation nécessaire soit très fin ; dans ce cas, il n'y a pas de critère qui pourrait départager les deux équations intégrales TE EFIE et TM MFIE.

Il est intéressant par contre, lorsque pour une certaine configuration une des deux équations intégrales (TE EFIE ou TM EFIE) est préférable, de choisir une méthode rapide qui s'appuie sur l'équation intégrale en question : par exemple, la méthode MOMI dans le cas de la TE MFIE, la méthode BMIA/CAG dans le cas de la TE EFIE. Nous allons étudier les résultats de convergence pour ces méthodes ci-après.

### 2.5.3 Méthode MOMI

Nous envisageons premièrement la polarisation TM. Nous avons comparé la méthode MOMI et la méthode d'inversion par décomposition LU ( $MFIE + MoM$ ), où la méthode ( $MFIE + MoM$ ) est prise comme référence, puisqu'aucune approximation n'est faite dans ce cas. Nous avons choisi une surface gaussienne de longueur totale  $L = 80\lambda$ , un pas d'échantillonnage  $\Delta x = \lambda/10$ , un écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 0.707\lambda$ , et un écart-type des pentes relativement élevé,  $\sigma_p = 1$ , correspondant à un angle  $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ . L'angle d'incidence est pris égal à  $\theta_i = 75^\circ$ , ce qui est assez proche de l'incidence rasante ; le paramètre d'atténuation  $g$  a été pris égal à  $g = L/4 = 20\lambda$ . Avec ce choix pour  $g$ , la condition (2.91) est vérifiée, puisque :

$$\frac{1}{kg \cos(75^\circ)} = 0.0307 < 0.037 \quad (2.185)$$

Sur la figure (2.26) nous avons comparé les coefficients de diffusion obtenus pour *une seule réalisation* ; la méthode MOMI a été appliquée en choisissant une approximation d'ordre 1 (i.e. une itérée) de  $J$ , soit  $J_{MOMI} \sim J^{(1)}$  (avec  $J^{(1)}$  calculé en tronquant la somme (2.116) pour  $n = 1$ ). Sur la figure 2.27 nous avons appliqué la méthode de Monte-Carlo (100 réalisations) à un ensemble de surfaces de mêmes caractéristiques statistiques que celles de la figure (2.26).

On remarque sur les figures (2.26) et (2.27), que l'approximation d'ordre 1 obtenue par la méthode MOMI est très proche du coefficient exact calculé par la Méthode de Moments (avec inversion directe de la matrice d'impédance). On peut conclure que la méthode MOMI converge très rapidement, et cela même dans le cas défavorable que nous avons choisi, où les surfaces considérées ont un écart-type des pentes élevé (rappelons que dans ce cas, comme nous l'avons vu précédemment, la matrice impédance est mal conditionnée et qu'une méthode itérative classique, de type gradient conjugué, converge alors lentement).

D'ailleurs la rapidité de convergence de la méthode MOMI peut être confirmée graphiquement en observant les figures 2.28 et 2.29. Nous y avons représenté l'erreur absolue entre les courants calculés par les deux méthodes ( $MFIE + MoM$ , dite exacte, et MOMI), en choisissant pour la méthode MOMI deux ordres

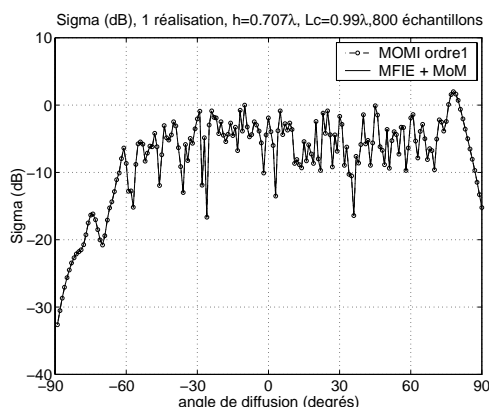


Fig.2.26 – 1 réalisation.

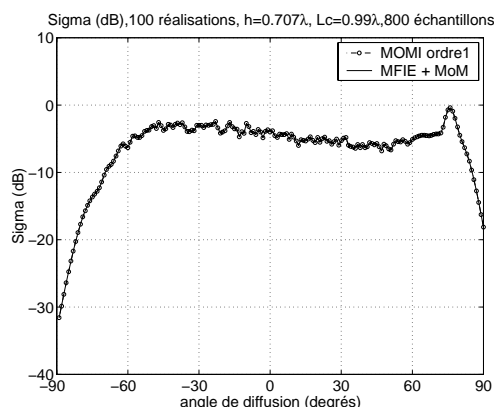


Fig.2.27 – 100 réalisations.

Comparaison des coefficients de diffusion obtenus par les méthodes (*MFIE + MoM*) et MOMI d'ordre 1.

successifs, soit les itérées d'ordre 1 et 2. Nous pouvons constater l'atténuation

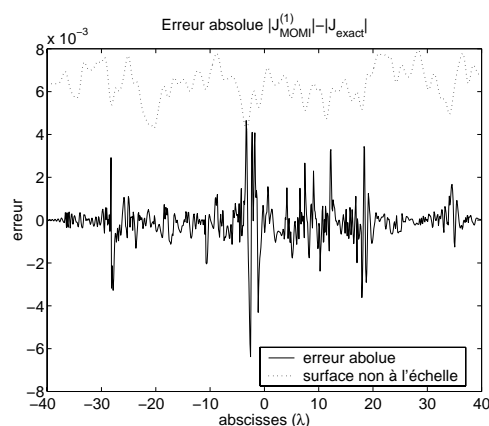


Fig.2.28 – Erreur absolue entre le courant  $J$  exact et celui d'ordre 1 obtenu par la méthode MOMI.

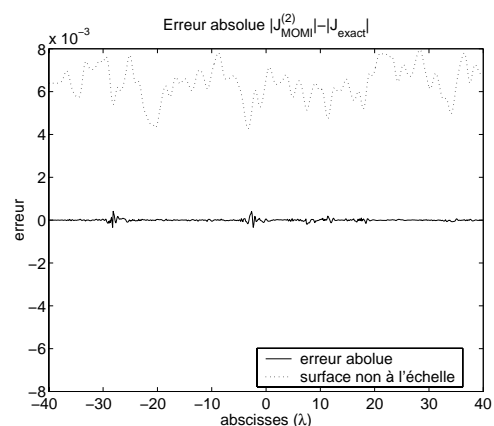


Fig.2.29 – Erreur absolue entre le courant  $J$  exact et celui d'ordre 2 obtenu par la méthode MOMI.

rapide de l'erreur absolue entre le courant de surface, dit exact, et celui obtenu par la méthode MOMI (d'un facteur dix entre les deux itérations successives). On remarque de plus, en superposant sur ces deux graphiques la surface (avec des unités arbitraires en ordonnée) ainsi que la courbe d'erreur, que le maximum de l'erreur apparaît lors des variations rapides de grande amplitude des hauteurs. Ceci vient du fait que l'approximation d'ordre 0 prend en compte une réflexion *double*, et chaque approximation d'ordre supérieur en prend en compte une de plus. Ainsi, l'approximation d'ordre 1 prend en compte 2 réflexions doubles et celle d'ordre 2, en prend 3. Pour des surfaces de faible pente, donc générant peu de réflexions doubles, l'approximation MOMI est ainsi très rapide et précise.

$\sigma_h \backslash \sigma_p$	0.5	0.7	1	1.5	2
0.5 $\lambda$	0	0	0	0	0
0.7 $\lambda$	0	1	1	0	0
1 $\lambda$	1	1	1	1	1
1.5 $\lambda$	3	3	2	2	2
2 $\lambda$	5	4	4	3	3

**Tab.2.6** – Cas TE.

$\sigma_h \backslash \sigma_p$	0.5	0.7	1	1.5	2
0.5 $\lambda$	0	0	0	0	0
0.7 $\lambda$	1	1	1	0	0
1 $\lambda$	1	1	1	1	1
1.5 $\lambda$	2	2	2	1	1
2 $\lambda$	4	3	3	2	2

**Tab.2.7** – Cas TM.

Ordre minimum de la méthode MOMI pour atteindre une précision relative de 1% sur le courant de surface;  $\Delta x = 0.025\lambda$ .

Nous avons étudié plus généralement le nombre d'itérations nécessaires –ou encore l'ordre minimum– de la méthode MOMI pour obtenir une précision relative de 1% sur le courant de surface, en fonction des paramètres  $\sigma_h$ ,  $\sigma_p$ , pour une surface gaussienne. Si on note  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{J}_{MOMI}^{(n)}$  respectivement, les vecteurs courants discrétisés exact et approché à l'ordre  $n$ , on cherche donc  $n$  tel que

$$\frac{\|\mathbf{J} - \mathbf{J}_{MOMI}^{(n)}\|}{\|\mathbf{J}\|} < 1\% \quad (2.186)$$

où  $\|\mathbf{J}\| = \sqrt{\sum_k |J_k|^2}$ . Le résultat est présenté dans le tableau 2.6 pour la polarisation TE et dans le tableau 2.7 pour la polarisation TM. La méthode MOMI permet donc de converger rapidement pour une vaste gamme de paramètres, tant en polarisation TE que TM.

### 2.5.4 Méthode BMIA/CAG

La méthode BMIA/CAG dépend de nombreux paramètres tels que : le choix de la distance limite  $r_d$  entre interactions faibles et fortes, le nombre de termes retenus après troncature de la série de Taylor, le choix de la méthode itérative.

Le choix de la distance  $r_d$  résulte d'un compromis : pour un  $r_d$  petit, la matrice d'interactions faibles ne contient que peu d'éléments et occupe une faible place mémoire; cependant, la matrice bande fournit alors un préconditionneur peu efficace et la méthode itérative converge lentement. Si  $r_d$  est choisi grand, le préconditionnement est plus efficace et la méthode converge plus vite, cependant la place mémoire qu'occupe la matrice bande est plus grande, et le temps de remplissage de celle-ci est, lui aussi, augmenté.

Nous avons représenté dans les tableaux 2.8 et 2.9 le nombre d'itérations et le temps de résolution par la méthode BMIA d'ordre 3, pour atteindre la précision relative de 0.1% sur le courant de surface, en fonction du rayon d'interactions  $r_d$ . La surface est choisie faiblement rugueuse.

D'après la lecture de ces tableaux, nous pouvons conclure qu'un rayon d'interaction  $r_d$  compris entre 7 et  $10\sigma_h$  est un bon compromis entre une



$r_d$	$3\sigma_h$	$5\sigma_h$	$7\sigma_h$	<b><math>10\sigma_h</math></b>	$15\sigma_h$	$30\sigma_h$	$50\sigma_h$	$100\sigma_h$
$N_{iter}$	27	23	21	<b>18</b>	15	12	9	6
temps (s)	11.5	11.1	10.7	<b>10.2</b>	10.4	10.7	11.0	13.0

**Tab.2.8** – Nombre d’itérations et temps de résolution par la méthode BMIA d’ordre 3, pour atteindre la précision relative de 0.1% sur le courant de surface, en fonction du rayon d’interactions  $r_d$ . Pour la surface gaussienne,  $\Delta x = 0.1\lambda$ ,  $L = 200\lambda$ ,  $\sigma_h = 0.1\lambda$ ,  $\sigma_p = 0.1$ .  $\theta_i = 30^\circ$ . Cas TE.

$r_d$	$3\sigma_h$	$5\sigma_h$	$6\sigma_h$	<b><math>7\sigma_h</math></b>	$10\sigma_h$	$20\sigma_h$
$N_{iter}$	-	-	29	<b>14</b>	12	9
temps (s)	-	-	19	<b>11.9</b>	12.6	15.7

**Tab.2.9** – Même configuration que pour le tableau 2.8 où  $\sigma_h = 0.5\lambda$  et  $\sigma_p = 0.5$ .

convergence en peu d’itérations et une taille de la matrice bande faible.

Par ailleurs, un ordre de troncature élevé permet à la méthode de converger pour des surfaces dont l’écart-type des hauteurs est relativement élevé, pour une distance  $r_d$  fixée. Réciproquement, pour un ordre de troncature donné, la méthode converge pour des écarts types des hauteurs d’autant plus grands que la distance  $r_d$  est grande.

Ainsi, la méthode BMIA/CAG converge rapidement pour des surfaces d’écart-type des hauteurs faible, et lentement dans le cas contraire. Nous montrons sur la figure 2.30 une étude de la convergence de la méthode BMIA en fonction du rayon d’interaction et de l’ordre; la figure est tirée de [53].

Enfin, il est apparu que la méthode itérative simple et la méthode du gradient conjugué généralisée présentée dans [181] ne convergent que relativement lentement, alors que la méthode BICGSTAB avec un préconditionnement par une factorisation incomplète ILU permet une convergence plus rapide, avec, en plus, la possibilité de traiter des problèmes avec un grand nombre d’inconnues.

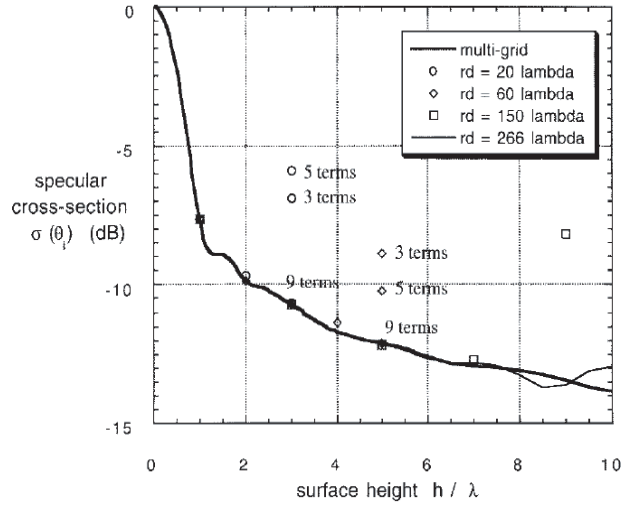
### 2.5.5 Approximation IBC

Nous avons étudié la validité de l’approximation d’impédance (IBC) pour une interface air/mer et pétrole/mer. En effet la permittivité relative de la mer est élevée par rapport à celles de l’air et du pétrole, avec pour ratio respectifs

$$\frac{|\varepsilon_r^{mer}|}{|\varepsilon_r^{air}|} \simeq 47 \quad \text{et} \quad \frac{|\varepsilon_r^{mer}|}{|\varepsilon_r^{pétrole}|} \simeq 18 \quad (2.187)$$

où la permittivité de la mer à une fréquence de 10 GHz est  $\varepsilon_r = 29 + 37i$ , et celle du pétrole,  $\varepsilon_r = 2.5 + 0.01i$ .

Nous avons étudié en premier la validité de l’IBC pour une interface air/mer. Nous avons représenté sur les figures 2.31 et 2.32, les coefficients de diffusion en échelle



**Fig.2.30** – Précision de la méthode BMIA en fonction de l'ordre, pour un écart-type des hauteurs de la surface variant de 0 à  $10\lambda$ . La surface est une sinusoïde de période  $32.7\lambda$ , de longueur  $L = 327\lambda$  avec  $\Delta x = 0.04\lambda$ . Figure extraite de [53].

linéaire  $\sigma_{lin}(\theta_s)$ , en polarisations TE et TM, obtenus en appliquant la méthode des moments suivie d'une inversion exacte par décomposition LU, à partir de trois formulations intégrales. Précisons que ces résultats sont obtenus pour une seule réalisation.

En polarisation TE, celles-ci sont : l'EFIE/TE pour un conducteur parfait (TE PC), l'IBC/TE (cf. (2.37)) pour un diélectrique (TE IBC) et les équations intégrales exactes pour un diélectrique (TE DI), (cf (2.33)). En polarisation TM, ce sont : la MFIE/TM pour un conducteur parfait (TM PC), l'IBC/TM (cf. (2.38)) pour un diélectrique (TM IBC) et les équations intégrales exactes pour un diélectrique (TM DI), (cf (2.33)).

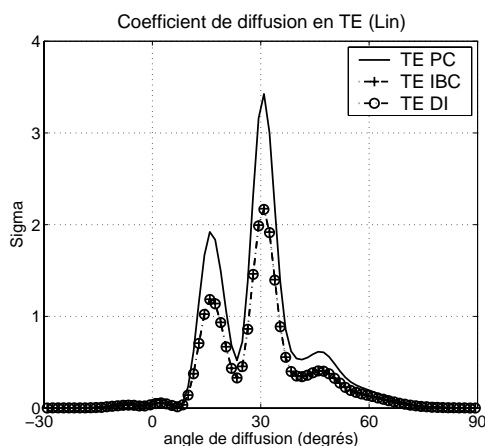
La surface a une distribution des hauteurs et une fonction d'autocorrélation gaussiennes ; sa longueur totale est  $L = 12\lambda$ , l'écart-type des hauteurs est  $\sigma_h = 0.1\lambda$ , l'écart-type des pentes est  $\sigma_p = 0.1$ , le pas d'échantillonnage est de  $\Delta x = \lambda/60$ . L'angle d'incidence est pris égal à  $\theta_i = 30^\circ$ , le paramètre d'atténuation est  $g = L/4 = 3\lambda$ .

Le pas d'échantillonnage doit être choisi aussi petit comparativement aux simulations pour une diélectrique moins conducteur, car, pour une permittivité élevée comme celle de la mer, les variations spatiales de la fonction de Green du milieu inférieur sont très rapides.

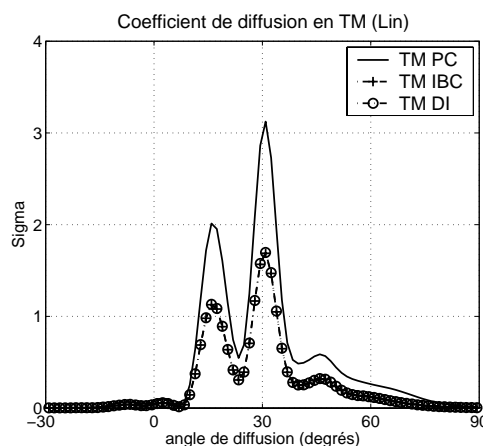
Les coefficients de diffusion sont confondus en échelle linéaire, et l'erreur relative

$$\frac{\|\sigma_{lin}^{DI}(\theta_s) - \sigma_{lin}^{IBC}(\theta_s)\|}{\|\sigma_{lin}^{DI}(\theta_s)\|} \quad (2.188)$$

est inférieure à 0.5 % pour les deux polarisations, dans cette configuration. Pour le calcul de l'erreur relative,  $\|\sigma_{lin}(\theta_s)\| = \Delta\theta \sum_n \sigma_{lin}(\theta_s^{(n)})$  où le pas angulaire est de



**Fig.2.31** – Coefficient de diffusion en échelle linéaire en polarisation TE. Interface air/mer.



**Fig.2.32** – Coefficient de diffusion en échelle linéaire en polarisation TM. Interface air/mer.

$\Delta\theta = 0.1^\circ$  et  $\theta_s^{(n)}$  est défini par  $\theta_s^{(n)} = -90^\circ + n\Delta\theta$ .

Nous avons étudié l'influence de paramètres tels que l'écart-type des hauteurs, l'écart-type des pentes et l'angle d'incidence, sur l'erreur relative. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux 2.10 et 2.11.

Dans le cas d'une interface pétrole/mer, les résultats sont similaires et l'erreur

$\sigma_h, \sigma_p$	Erreur relative (%)	
	TE	TM
$0.1\lambda, 0.1$	0.3	0.5
$0.5\lambda, 0.1$	0.3	0.5
$0.1\lambda, 0.5$	0.7	0.7
$0.5\lambda, 0.5$	0.7	0.7

**Tab.2.10** –  $\theta_i = 30^\circ$ .

$\sigma_h, \sigma_p$	Erreur relative (%)	
	TE	TM
$0.1\lambda, 0.1$	0.2	0.7
$0.5\lambda, 0.1$	0.2	0.8
$0.1\lambda, 0.5$	0.9	0.9
$0.5\lambda, 0.5$	0.9	0.9

**Tab.2.11** –  $\theta_i = 60^\circ$ .

relative est, dans tous les cas, inférieure à 1.3%

L'approximation d'impédance IBC permet de déterminer le coefficient de diffusion avec une grande précision lorsque le milieu inférieur a une permittivité élevée, comme c'est le cas de la mer, pour une large gamme de fréquences radar de l'ordre du GHz ou plus. De plus, l'IBC donne de bons résultats pour une large gamme de paramètres statistiques de la surface.

Puisque l'IBC permet de réduire le nombre d'inconnues du problème de moitié, l'emploi de l'IBC permet donc un gain de temps certain, pour une précision finale très satisfaisante.

## 2.5.6 Méthodes pour des problèmes à grand nombre d'inconnues

Pour le cas parfaitement conducteur, nous avons comparé les durées de calcul des méthodes MOMI (optimisée en mémoire pour un grand nombre d'inconnues ou

non) et BMIA/CAG, avec la méthode de décomposition LU. Dans le tableau 2.12, nous donnons les durées de calcul en fonction du nombre  $N$  d'échantillons de la surface, donc, pour le cas parfaitement conducteur, du nombre d'inconnues.

Méthodes \ N	800	1600	2400	5000	10000	16000	32000	64000
LU	12 s	77 s	3 mn	-	-	-	-	-
MOMI	4.6 s	19 s	46 s	-	-	-	-	-
MOMI OM	7 s	35 s	89 s	6 mn	24 mn	70 mn	-	-
BMIA/CAG	3 s	6 s	12 s	25 s	1 mn 20 s	2 mn	4 mn	10 mn

**Tab.2.12** – Durées de calcul de différentes méthodes en fonction du nombre d'échantillons  $N$ ; cas parfaitement conducteur. MOMI et MOMI OM à l'ordre 1, BMIA/CAG avec 3 termes de la décomposition de Taylor et  $R_d = 50$ . La surface rugueuse est gaussienne, avec  $\sigma_h = 0.1\lambda$ ,  $\sigma_p = 0.1$  et  $\Delta x = 0.1\lambda$ .

Pour le cas diélectrique, nous avons uniquement comparé les méthodes BMIA/CAG et LU, en prenant un milieu inférieur de permittivité  $\varepsilon_r = 2.5 + 0.01 * i$ . Dans le tableau 2.13, nous donnons les durées de calcul en fonction du nombre  $N$  d'échantillons de la surface; pour le cas diélectrique, le nombre d'inconnues est le double de  $N$ .

Méthodes \ N	400	800	1600	2400	5000
LU	12 s	80 s	3 mn	-	-
BMIA/CAG	4 s	9 s	20 s	45 s	1 mn 52 s

**Tab.2.13** – Durées de calcul de deux méthodes en fonction du nombre d'échantillons  $N$ ; cas diélectrique. BMIA/CAG avec 3 termes de la décomposition de Taylor et  $R_d = 50$ . La surface rugueuse est gaussienne, avec  $\sigma_h = 0.1\lambda$ ,  $\sigma_p = 0.1$  et  $\Delta x = 0.1\lambda$ .

### 2.5.7 Conclusion

Nous avons rassemblé sur le tableau ci-dessous les méthodes dérivées de la Méthode des Moments. Elles sont classées en fonction de l'Equation Intégrale de départ qu'elles résolvent (de type Electrique ou Magnétique), en fonction de leur universalité (interfaces parfaitement conductrices (PEC) ou non) ainsi que de leur rapidité (dans chaque case du tableau, les méthodes les plus rapides, celles demandant moins de calculs, sont situées en bas).

Rappelons les définitions des acronymes :

- LU : Décomposition LU; c'est une résolution classique directe donnant une solution de référence;
- BMIA/CAG : Banded Matrix Iterative Approach/Canonical Grid, qui existe sous le nom SMFSIA (Sparse Matrix-Flat Surface Iterative Approach) pour le problème

formulation \ milieu inférieur	Conducteur parfait	Diélectrique
EFIE	LU* BMIA/CAG*, FMM FB/NSA, SDFMM	LU* DMOMI*, FB PBTG-BMIA/CAG*, FMM PBTG/SDFMM
MFIE	LU* MOMI*, FB FMM SDFMM	

**Tab.2.14** – Méthodes numériques classées selon la formulation intégrale et le type de milieu inférieur. Les fonctions dénotées par un astérisque ont été programmées. Dans chaque colonne, les méthodes étant sur la même ligne sont de même complexité en nombre d’opérations; les méthodes les plus rapides sont situés en bas.

- 3D; existe en version multiniveaux (*multilevel*);
- FMM : Fast Multipole Method; existe en version *multilevel*;
  - FB : Forward-Backward;
  - FB/NSA : Forward-Backward with Novel Spectral Acceleration;
  - MOMI : Method of Ordered Multiple Interactions;
  - DMOMI : Dielectric-Method of Ordered Multiple Interactions;
  - PBTG + ... : Physic-Based Two-Grid method.

Pour conclure, parmi les deux méthodes que nous avons programmées, la méthode MOMI est la plus simple et la BMIA/CAG la plus rapide; La méthode MOMI a une complexité de temps de calcul en  $\mathcal{O}(N^2)$  contre  $\mathcal{O}(N \log N)$  pour la méthode BMIA/CAG. La relative lenteur de la méthode MOMI est toutefois compensée par le petit nombre d’itérations nécessaires, et, sur un autre plan, par sa facilité de programmation. La méthode BMIA/CAG est plus sophistiquée et demande le réglage de quelques paramètres afin de converger de façon optimale. En revanche, la méthode BMIA/CAG est aussi rapide pour le cas diélectrique, contrairement à la méthode MOMI (sous sa version DMOMI). Toutefois, la méthode BMIA/CAG à l’inconvénient de ne pas être performante pour des surfaces d’écart-type des hauteurs grand par rapport à la longueur d’onde.

Par la suite, nous retiendrons la méthode BMIA/CAG et l’adapterons au cas d’une double interface. Le choix de cette méthode vient du fait que c’est la seule méthode efficace présentée adaptée au cas diélectrique. Nous aurons donc comme contrainte de ne pouvoir utiliser que des surfaces avec un écart-type des hauteurs peu élevé; cependant, dans la littérature traitant de deux surfaces superposées, les surfaces remplissent très souvent cette condition.



## Chapitre 3

# Diffusion par deux interfaces rugueuses superposées

### 3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la diffusion par une seule interface rugueuse est étudiée depuis longtemps, et de nombreux modèles asymptotiques ou rigoureux ont été développés. Pour le cas de deux interfaces rugueuses superposées (que nous dénommerons aussi *couche* rugueuse), les travaux sont plus récents et moins nombreux. Les domaines d'application sont, par exemple, l'optimisation de revêtements anti-reflets en optique [6–8, 76, 99, 133], ou, dans le cadre de la télédétection, l'étude de la structure géologique des surfaces sondées [69, 70, 184]. Une grande partie de la littérature sur ce sujet porte sur des méthodes analytiques [55, 62, 134] qui visent à déterminer les phénomènes complexes mis en jeu dans la couche rugueuse. Toutefois, les calculs analytiques développés pour une couche rugueuse sont beaucoup plus compliqués que pour une simple interface et leur domaine de validité reste difficile à déterminer. Il est donc intéressant de les comparer à des résultats exacts.

Les méthodes analytiques ont ainsi été comparées à des résultats expérimentaux [4, 13, 61, 77, 78, 81, 83, 116, 120]. Or les résultats sont parfois en désaccord avec des théories analytiques, pourtant utilisées dans leur domaine de validité. Par exemple, un désaccord a été constaté entre mesures et prédiction par une méthode perturbative dans [98]. Ces différences peuvent toutefois provenir des résultats expérimentaux, qui restent délicats à obtenir, notamment parce que des surfaces rugueuses sont difficiles à créer.

Une alternative consiste à se tourner vers des méthodes numériques exactes. Nous n'avons recensé que des méthodes intégrales [65, 82, 114, 152] ; cependant elles sont encore peu utilisées du fait du grand nombre d'inconnues du problème et du manque de méthodes performantes adaptées.

Nous proposons dans ce chapitre une méthode numérique exacte et performante, pour l'étude de la diffusion électromagnétique par une couche rugueuse. L'intérêt de cette méthode est qu'elle est rigoureuse, de formulation simple, et qu'elle a une interprétation physique intuitive. Elle permet, de plus, d'employer des méthodes

rapides développées pour le cas d'une simple interface, méthodes très répandues aujourd'hui. Un autre intérêt, et non des moindres, est qu'à notre connaissance, c'est la seule méthode qui permette de traiter des problèmes à grand nombre d'inconnues.

Nous présentons d'abord les modèles asymptotiques (§3.2), et donnons un résumé d'une méthode numérique asymptotique que nous avons développée (§3.2.2). Puis, nous abordons les modèles rigoureux en présentant les méthodes de résolution intégrales (§3.3). Le corps du chapitre est la méthode numérique rigoureuse performante que nous avons développée (§3.4).

## 3.2 Modèles asymptotiques pour une double interface

### 3.2.1 Panorama

Nous présentons en premier un certain nombre de méthodes asymptotiques développées pour une couche rugueuse; un résumé peut être trouvé dans [133] et [70]. Nous comparons, en fin de chapitre, quelques unes de ces méthodes à la méthode rigoureuse proposée.

Parmi ces méthodes asymptotiques, on trouve par exemple des méthodes perturbatives [143], qui ont été utilisées depuis plusieurs décennies pour déterminer la lumière diffusée par des revêtements optiques. En particulier, J. M. Elson a étudié la diffusion par une surface recouverte d'une seule couche de revêtement [60] ou de plusieurs couches [62]. Par la suite, d'autres auteurs ont poursuivi ces travaux [21, 69, 70, 74, 75, 125]. Le cas 1D [15, 65, 76, 120, 153, 154, 191], et le cas 2D ont été étudiés, au premier ordre perturbatif [69, 70] et au deuxième ordre [101]. Une alternative aux méthodes perturbatives classiques développées par Rice [143] consiste à utiliser les équations réduites de Rayleigh [24, 158, 163] et la théorie du champ moyen (Mean Field Theory) [26, 156, 157]. Il existe encore d'autres méthodes, telles que la méthode du plan tangent (dite approximation de l'Optique Géométrique) [202], ainsi que la méthode Full-Wave [16, 202]. Des méthodes analytiques existent aussi pour le cas particulier où les surfaces de la couche rugueuse sont périodiques dans le sens de la longueur [106, 107].

A l'aide de méthodes analytiques, l'effet de la corrélation entre surfaces rugueuses a été étudié [9], ainsi que la structure de films rugueux [5, 198]. En effet, les mesures de la réflectivité et de la transmissivité se sont révélées être des moyens efficaces pour déterminer l'indice optique et l'épaisseur de couches minces [164, 165]. Yin [198] a notamment développé une méthode pour extraire l'indice optique et l'écart-type des hauteurs des interfaces d'une couche rugueuse de diamant. Il a constaté que la rugosité avait une grande influence sur la précision de la détermination de ces caractéristiques.

Par ailleurs, quelques auteurs ont étudié le champ diffusé transmis par une couche rugueuse ou un empilement de couches rugueuses [55, 134]. Les phénomènes de *enhanced backscattering* (réhaussement de l'énergie diffusée dans la direction anti-spéculaire) et de *enhanced transmission* ont pu être prédits analytiquement pour une couche rugueuse [114, 125, 163]. Ils ont été observés depuis expérimentalement [83, 120]. Des travaux récents ont aussi révélé la présence de pics additionnels du coefficient de diffusion lorsque la couche rugueuse est



suffisamment fine pour ne véhiculer qu'un nombre réduit de modes [153, 154, 158]. Ces pics de diffusion avaient été à l'origine prédits pour des films plans inhomogènes particuliers [66, 67]. Plus généralement, d'autres auteurs traitent aussi de façon analytique le problème d'un film rugueux inhomogène [121, 163].

En résumé, les différents auteurs mettent en évidence des phénomènes différents selon la théorie utilisée; ces phénomènes sont souvent traduits par l'apparition de pics de diffusion dans le coefficient de diffusion en réflexion ou en transmission. Ils ne font que révéler la complexité des phénomènes d'excitation mis en jeu, qui peuvent influencer la diffusion d'ondes électromagnétiques par la couche rugueuse. On peut citer par exemple, les plasmons de volume, les plasmons de surface, les ondes guidées, les modes d'interférence de Fabry-Perot,... etc.

Avant de nous consacrer à l'étude de méthodes numériques exactes, nous avons envisagé une méthode asymptotique numérique. La méthode de ce type que nous avons développée est présentée brièvement ci-après.

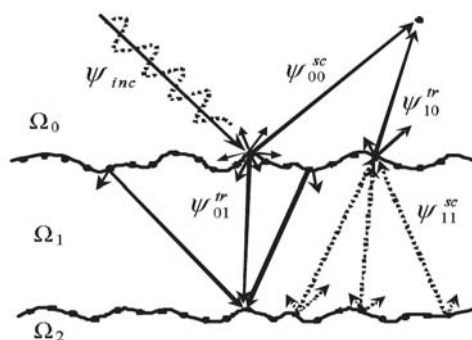
### 3.2.2 Approximation de Kirchhoff et des éléments rayonnants

Nous avons développé une méthode s'appuyant sur l'approximation de Kirchhoff et mettant en jeu des éléments rayonnants. Cette méthode a fait l'objet de deux présentations orales [47, 48]. Une représentation schématique de la méthode est faite en figure 3.1. Les notations utilisées sont détaillées dans [48].

Le principe de la méthode est le suivant : d'après la connaissance de l'onde incidente, le champ et sa dérivée normale sont d'abord calculés par l'approximation de Kirchhoff sur la surface supérieure de la couche. Puis, en considérant chaque élément de cette surface comme un élément rayonnant, nous faisons propager le champ sur la surface inférieure et calculons le champ réfléchi à la surface de celle-ci, avant de le faire propager à nouveau, vers la surface supérieure. La démarche est itérée ; ainsi nous prenons en compte les réflexions multiples dans la couche. Les champs transmis et réfléchi au niveau de chaque interface sont calculés, d'après l'approximation de Kirchhoff, à l'aide des coefficients de Fresnel en transmission et en réflexion.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est plus rapide qu'une méthode intégrale numérique classique, qui demande un temps de calcul important lors de l'inversion la matrice impédance du système.

Dans les résultats que nous avons présentés, cette méthode asymptotique donne de bons résultats pour des angles d'incidence faibles (proches de l'incidence normale), tant que l'angle d'observation reste aussi faible. Cependant, la méthode offre de



**Fig.3.1** – Schéma de la méthode; représentation des éléments rayonnants.

moins bons résultats aux angles d'incidence et d'observation rasants ( $|\theta| \simeq 90^\circ$ ); ceci provient du fait que nous négligeons les réflexions multiples au niveau de chaque interface. Face à la tâche complexe d'améliorer la méthode pour de tels angles, nous avons préféré nous consacrer au développement d'une méthode numérique exacte.

### 3.3 Méthodes Intégrales pour une double interface

En parallèle avec des mesures expérimentales, souvent délicates à mettre en oeuvre, et pour valider les méthodes analytiques, il est intéressant de développer des méthodes numériques exactes. Or, comme nous l'avons justifié dans le chapitre précédent, les méthodes intégrales de surface sont des solutions adéquates lorsque les milieux sont homogènes.

Notre travail s'inspire des méthodes intégrales adaptées au problème d'objets enfouis sous une surface rugueuse [118, 135, 152, 155, 182, 190, 199–201]. Rappelons aussi que des méthodes intégrales numériques rigoureuses ont été développées spécifiquement pour le cas d'une couche rugueuse il y a une dizaine d'années [82, 114, 152] mais ont été relativement peu utilisées depuis [65, 79, 153]. La raison en est que le problème a un grand nombre d'inconnues; ce qui fait que bon nombre d'utilisations des méthodes étaient faites pour le cas d'un milieu inférieur conducteur parfait, ceci pour réduire le nombre d'inconnues. De plus, l'incidence était choisie proche de la normale pour avoir une surface totale minimale [65, 114, 152]. En effet, pour traiter le cas d'un angle d'incidence plus prononcé il faut prendre des surfaces considérablement longues ce qui engendre un plus grand nombre d'inconnues. Par ailleurs, le cas de deux interfaces diélectriques a été abordé, mais souvent le pas d'échantillonnage n'était pas assez fin pour modéliser convenablement la surface (Lu [114] ne prend que 2 échantillons par longueur de corrélation!).

C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de développer une méthode performante, capable de résoudre des problèmes de grande taille. Afin d'introduire cette méthode, nous présentons d'abord les équations intégrales du problème à deux interface et leur discrétisation par la méthode des moments.

#### 3.3.1 Etablissement des Equations Intégrales pour une couche

Considérons deux surfaces rugueuses superposées,  $S^+$  et  $S^-$ , dont les moyennes des hauteurs sont, respectivement,  $z = 0$  et  $z = -h$  avec  $h > 0$ .  $S^+$  sera ainsi dénommée surface supérieure, et  $S^-$ , surface inférieure.  $S^+$  et  $S^-$  pourront être choisies identiques ou non, et dans ce dernier cas, on supposera qu'elles ne se coupent pas.

Supposons que  $S^+$  et  $S^-$  délimitent trois milieux homogènes,  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , de permittivités respectives  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . On note les permittivités relatives correspondantes  $\varepsilon_{r0}$ ,  $\varepsilon_{r1}$  et  $\varepsilon_{r2}$ .  $\Omega_0$  et  $\Omega_2$  correspondent, respectivement, aux milieux semi-infinis supérieur et inférieur et  $\Omega_1$  est le milieu contenu entre les deux interfaces superposées. C'est pourquoi nous parlerons aussi de couche rugueuse pour faire référence à  $\Omega_1$ .  $\Omega_1$  pourra être, par exemple, une couche de pétrole recouvrant la surface de la mer.

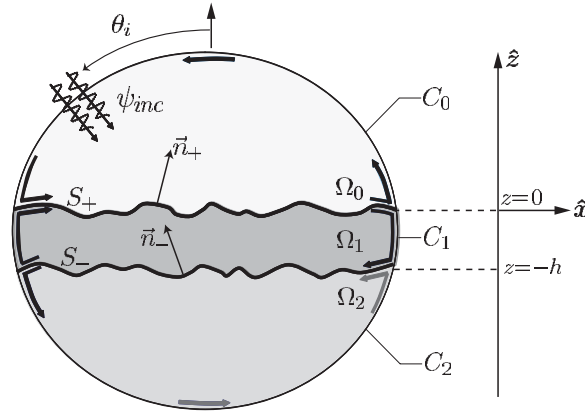


Fig.3.2 – Géométrie du problème et contours d'intégration.

En considérant trois contours d'intégration  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$ , représentés en figure 3.2, et en appliquant le théorème de Green [43, 166], nous obtenons quatre équations intégrales couplées; nous faisons pour cela l'hypothèse que les champs s'annulent aux extrémités de la couche rugueuse. Le détail de cette démonstration est proposé ci-après.

Soit  $C_0$  le contour englobant le milieu supérieur semi-infini  $\Omega_0$ . Il est constitué de deux contours;  $S_\infty^+$ , qui est le demi-cercle de centre  $O^+$  (le milieu de la surface rugueuse  $S^+$ , d'ordonnée  $z = 0$ ) et de rayon infini, et  $S^+$ , la surface rugueuse supérieure;

soit  $C_1$  le contour englobant le milieu intermédiaire  $\Omega_1$ . Il est constitué de quatre contours;  $S_+$ ,  $S_-$ ,  $C_{1g}$  et  $C_{1d}$ . Ces deux derniers contours correspondent, respectivement, aux contours verticaux reliant  $S_+$  à  $S_-$ , à gauche (en s'orientant par rapport aux  $x$  positifs) ( $x \rightarrow -\infty$ ) et à droite ( $x \rightarrow +\infty$ );

enfin, soit  $C_2$  le contour englobant le milieu inférieur semi-infini  $\Omega_2$ . Il est constitué de deux contours;  $S_\infty^-$ , qui est le demi-cercle de centre  $O^-$  (le milieu de la surface rugueuse  $S^-$ , d'ordonnée  $z = -h$ ) et de rayon infini, et  $S^-$ , la surface rugueuse inférieure.

Soient  $g_0$ ,  $g_1$  et  $g_2$  les fonctions de Green des régions  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , respectivement. Elles sont données par

$$g_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)$$

où  $k_j$  est le nombre d'onde dans le milieu  $\Omega_j$ . Appliquons le théorème de Green en dimension 2 aux trois milieux  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , délimités, respectivement, par  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$ . On oriente dans un premier temps, pour chacun des trois contours, les normales

aux contours vers l'intérieur du volume d'intégration.

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega_0} d\mathbf{r} [\psi(\mathbf{r})\Delta g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta\psi(\mathbf{r})] \\
 &= - \int_{C_0} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \\
 &= - \int_{S^+} ds^+ \left[ \psi(\mathbf{r}^+) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}')}{\partial n^+} - g_0(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^+)}{\partial n^+} \right] \\
 &+ \int_{S_\infty^+} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega_1} d\mathbf{r} [\psi(\mathbf{r})\Delta g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta\psi(\mathbf{r})] \\
 &= - \int_{C_1} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \\
 &= + \int_{S^+} ds^+ \left[ \psi(\mathbf{r}^+) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}')}{\partial n^+} - g_1(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^+)}{\partial n^+} \right] \\
 &- \int_{S^-} ds^- \left[ \psi(\mathbf{r}^-) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}')}{\partial n^-} - g_1(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^-)}{\partial n^-} \right] \\
 &+ \int_{C_{1g}} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \\
 &+ \int_{C_{1d}} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega_2} d\mathbf{r} [\psi(\mathbf{r})\Delta g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta\psi(\mathbf{r})] \\
 &= - \int_{C_2} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \\
 &= - \int_{S^-} ds^- \left[ \psi(\mathbf{r}^-) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}')}{\partial n^-} - g_2(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^-)}{\partial n^-} \right] \\
 &+ \int_{S_\infty^-} ds \left[ \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Le signe  $-$  devant les intégrales des trois équations précédentes vient de ce que la normale est dirigée vers l'intérieur de chacun des trois milieux.

Pour développer les calculs qui suivent, nous faisons l'hypothèse que les surfaces sont d'étendue suffisante pour que le champ s'annule sur les bords à gauche ( $C_{1g}$ ) et à droite ( $C_{1d}$ ) du milieu  $\Omega_1$ . Ce faisant nous pouvons annuler les contributions des intégrales

$$\int_{C_{1g}} \dots = 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_{1d}} \dots = 0 \tag{3.4}$$

Nous évaluons ensuite séparément les termes de gauche et de droite de chacune des trois équations précédentes en utilisant les conditions de rayonnement et l'équation

de Helmholtz dans chacun des milieux. Cette démarche est similaire à celle suivie pour obtenir l'équation (2.18). Nous obtenons trois équations :

$$\begin{aligned} \psi_{inc}(\mathbf{r}') + \int_{S^+} ds^+ \left[ \psi(\mathbf{r}^+) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}')}{\partial n^+} - g_0(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^+)}{\partial n^+} \right] \\ = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S^+} ds^+ \left[ \psi(\mathbf{r}^+) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}')}{\partial n^+} - g_1(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^+)}{\partial n^+} \right] \\ - \int_{S^-} ds^- \left[ \psi(\mathbf{r}^-) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}')}{\partial n^-} - g_1(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^-)}{\partial n^-} \right] \\ = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in \Omega_1 \\ 0 & \mathbf{r}' \notin \Omega_1 \end{cases} \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S^-} ds^- \left[ \psi(\mathbf{r}^-) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}')}{\partial n^-} - g_2(\mathbf{r}^-, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}^-)}{\partial n^-} \right] \\ = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in \Omega_2 \\ 0 & \mathbf{r}' \notin \Omega_2 \end{cases} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Afin d'obtenir les équations intégrales, faisons tendre alors  $\mathbf{r}' \rightarrow S^+$  dans les équations (3.5) et (3.6), et faisons tendre  $\mathbf{r}' \rightarrow S^-$  dans les équations (3.6) et (3.7). Par commodité, nous réorientons la normale de chacune des surfaces vers les  $z$  positifs ; i.e. la normale  $\mathbf{n}^\pm$  à la surface  $S^\pm$  est alors

$$\mathbf{n}^\pm(x) = \frac{-\zeta'^{\pm}(x)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + (\zeta'^{\pm}(x))^2}}$$

comme présenté sur la figure 3.2. En notant  $\psi_j$  le champ total dans le milieu  $\Omega_j$  et utilisant par ailleurs les conditions aux limites que les champs totaux  $\psi_0$  et  $\psi_1$  vérifient sur  $S^+$  et que les champs totaux  $\psi_1$  et  $\psi_2$  vérifient sur  $S^-$

$$\psi_0(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S^+} = \psi_1(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S^+} \quad (3.8a)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+} \right|_{\mathbf{r} \in S^+} = \frac{1}{\rho_{10}} \left. \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_+} \right|_{\mathbf{r} \in S^+} \quad (3.8b)$$

$$\psi_1(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S^-} = \psi_2(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S^-} \quad (3.8c)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \right|_{\mathbf{r} \in S^-} = \frac{1}{\rho_{21}} \left. \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial n_-} \right|_{\mathbf{r} \in S^-} \quad (3.8d)$$

(où  $\rho_{10} = \rho_{21} = 1$  dans le cas TE, et  $\rho_{10} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$ ,  $\rho_{21} = \varepsilon_2/\varepsilon_1$  dans le cas TM ), on obtient les quatre équations couplées suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_{S^+} ds \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_+} + \int_{S^+} ds g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+} \\ = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \mathbf{r}' \in S_+ \quad (3.9a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_{S_+} ds \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_+} + \int_{S_+} ds g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+} \rho_{10} \\
 + \int_{S_-} ds \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \right] = 0 \quad \mathbf{r}' \in S_+ \quad (3.9b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{S_+} ds \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_+} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+} \rho_{10} \right] \\
 + \frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_-} ds \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} + \int_{S_-} ds g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} = 0 \quad \mathbf{r}' \in S_- \quad (3.9c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_-} ds \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} + \int_{S_-} ds g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \rho_{21} = 0 \quad \mathbf{r}' \in S_- \\
 (3.9d)
 \end{aligned}$$

Cette formulation correspond aux équations données par [114] et [65].

### 3.3.2 Discrétisation par la Méthode des Moments

Nous appliquons la méthode des moments comme dans le chapitre précédent, en définissant les mêmes fonctions de projection et de test. Les deux surfaces sont discrétisées avec le même pas d'échantillonnage.

#### 3.3.2.1 Surface inférieure diélectrique

A partir du système (3.9) nous obtenons un système linéaire de la forme  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$ , où le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  est égal à

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_+ \\ \mathbf{X}_- \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{X}_+$  et  $\mathbf{X}_-$  contiennent les inconnues surfaciques des champs  $\psi$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  sur les surfaces supérieure et inférieure, respectivement.  $\mathbf{X}_+$  et  $\mathbf{X}_-$  ont la forme suivante :

$$\mathbf{X}_+^t = \left[ \psi_0(\mathbf{r}_1^+) \dots \psi_0(\mathbf{r}_N^+) \quad \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}_1^+)}{\partial n_+} \dots \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r}_N^+)}{\partial n_+} \right]^t \quad (3.11)$$

$$\mathbf{X}_-^t = \left[ \psi_1(\mathbf{r}_1^-) \dots \psi_1(\mathbf{r}_N^-) \quad \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_1^-)}{\partial n_-} \dots \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}_N^-)}{\partial n_-} \right]^t \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{r}_n^\pm = x_n \hat{\mathbf{x}} + \zeta^\pm(x_n) \hat{\mathbf{z}}$  et  $\mathbf{X}^t$  désigne le transposé de  $\mathbf{X}$ .

Le terme  $\mathbf{b}$  contient l'information sur le champ incident

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_+ \\ \mathbf{b}_- \end{bmatrix} = \underbrace{[\psi_{inc}(\mathbf{r}_1^+) \dots \psi_{inc}(\mathbf{r}_N^+) \quad 0 \dots 0]}_{\mathbf{b}_+^t} \underbrace{[0 \dots 0 \quad 0 \dots 0]}_{\mathbf{b}_-^t} \quad (3.13)$$

La matrice impédance peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^+ & \rho_{10}\mathbf{D}^+ & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \rho_{10}\mathbf{H} & \mathbf{A}^- & \mathbf{B}^- \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^- & \rho_{21}\mathbf{D}^- \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

où les sous-matrices qui la composent sont obtenues à partir des opérateurs

$$\underbrace{\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_{S_+} ds \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_+}}_{\mathbf{A}^+} + \underbrace{\int_{S_+} ds g_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+}}_{\mathbf{B}^+} = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \mathbf{r}' \in S_+ \quad (3.15a)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\psi_0(\mathbf{r}') - \int_{S_+} ds \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_+}}_{\mathbf{C}^+} + \underbrace{\int_{S_+} ds g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+}}_{\rho_{10}\mathbf{D}^+} \rho_{10} + \underbrace{\int_{S_-} ds \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \right]}_{\mathbf{E}} = 0 \quad \mathbf{r}' \in S_+ \quad (3.15b)$$

$$\underbrace{\int_{S_+} ds \left[ \psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_+} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n_+} \right]}_{\mathbf{G}} \underbrace{\rho_{10}\mathbf{H}}_{\rho_{10}\mathbf{H}} + \underbrace{\frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_-} ds \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-}}_{\mathbf{A}^-} + \underbrace{\int_{S_-} ds g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-}}_{\mathbf{B}^-} = 0 \quad \mathbf{r}' \in S_- \quad (3.15c)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_-} ds \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-}}_{\mathbf{C}^-} + \underbrace{\int_{S_-} ds g_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-}}_{\rho_{21}\mathbf{D}^-} \rho_{21} = 0 \quad \mathbf{r}' \in S_- \quad (3.15d)$$

Les matrices  $\mathbf{A}^\pm$ ,  $\mathbf{B}^\pm$ ,  $\mathbf{C}^\pm$ ,  $\mathbf{D}^\pm$  ont la forme des matrices obtenues dans le chapitre précédent pour le cas diélectrique. Plus précisément, elles correspondent aux matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  données respectivement par (2.68), (2.69), (2.70) et (2.71) pour  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^\pm$  et  $\zeta = \zeta^\pm$ . De plus, il faut prendre en compte les permittivités des milieux respectifs; ainsi les matrices  $\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{B}^+$  sont calculées pour  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mathbf{C}^+$ ,  $\mathbf{D}^+$ ,  $\mathbf{A}^-$  et  $\mathbf{B}^-$  pour  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , et, enfin,  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{D}^-$  pour  $\varepsilon = \varepsilon_2$ .

Par exemple, (cf. (2.68) et (2.69))

$$A_{mn}^+ = \begin{cases} -\frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n^+ - \mathbf{r}_m^+\|)}{4 \|\mathbf{r}_n^+ - \mathbf{r}_m^+\|} \\ \quad \times \{\zeta^{+'}(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta^+(x_n) - \zeta^+(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta^{+''}(x_m)}{1 + (\zeta^{+'}(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (3.16)$$

et

$$B_{mn}^+ = \begin{cases} \gamma_n^+ \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n^+ - \mathbf{r}_m^+\|) & \text{pour } m \neq n \\ \gamma_m^+ \frac{i\Delta x}{4} \left[ 1 + i\frac{2}{\pi} \log \left( \frac{e^\gamma k_0 \Delta x}{2} \frac{\gamma_m^+}{2e} \right) \right] & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (3.17)$$

avec  $\gamma_n^+ = \sqrt{1 + (\zeta^{+'}(x_n))^2}$  et  $e^\gamma \simeq 1.78107$ .

Les matrices  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  ont les expressions suivantes

$$E_{mn} = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{i\Delta x k_1 H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|)}{4 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|} \\ \quad \times \{\zeta^{-'}(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m))\} \end{array} \right\} \forall m, n \quad (3.18)$$

$$F_{mn} = -\gamma_n^- \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_m^+ - \mathbf{r}_n^-\|) \quad \forall m, n \quad (3.19)$$

$$G_{mn} = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{i\Delta x k_1 H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n^+ - \mathbf{r}_m^-\|)}{4 \|\mathbf{r}_n^+ - \mathbf{r}_m^-\|} \\ \quad \times \{\zeta^{+'}(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta^+(x_n) - \zeta^-(x_m))\} \end{array} \right\} \forall m, n \quad (3.20)$$

$$H_{mn} = -\gamma_n^+ \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_m^- - \mathbf{r}_n^+\|) \quad \forall m, n \quad (3.21)$$

$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{G}$  sont très similaires à la matrice  $\mathbf{A}^+$ ; de même,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{H}$  ressemblent fortement à la matrice  $\mathbf{B}^+$ . Cependant, à la différence de celles-ci, puisque les points  $\mathbf{r}_n^+$  et  $\mathbf{r}_m^-$  ne sont jamais confondus lors du calcul des termes de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ , nous n'avons pas besoin de faire une approximation de leur noyau aux points singuliers, comme c'est le cas pour les termes diagonaux des matrices  $\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{B}^+$ .

Les matrices blocs de  $\mathbf{Z}$  ont toutes pour dimension  $N \times N$ , donc la taille de  $\mathbf{Z}$  est  $4N \times 4N$ .



### 3.3.2.2 Surface inférieure parfaitement conductrice

On peut obtenir simplement la matrice impédance dans le cas où la surface inférieure est parfaitement conductrice, à partir de la forme de la matrice du cas diélectrique. En effet, il suffit d'appliquer la condition de Dirichlet dans le cas TE, et celle de Neumann dans le cas TM, sur l'interface inférieure. Ainsi, le champ  $\psi_1$  sur  $S^-$  est nul dans le cas TE, ce qui annule la matrice  $\mathbf{E}$ ; de même dans le cas TM,  $\frac{\partial \psi_1}{\partial n_-}$  est nul sur  $S^-$ , ce qui annule la matrice  $\mathbf{F}$ .

De plus, nous avons vu dans le chapitre précédent que la matrice impédance pour une seule interface diélectrique s'écrivait

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \rho_{10} \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

et se ramenait, dans le cas d'une interface parfaitement conductrice, à la matrice  $\mathbf{B}$  dans le cas TE, et à la matrice  $\mathbf{A}$  dans le cas TM. En prenant en compte ces remarques on en déduit la matrice impédance dans le cas TE :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^+ & \rho_{10} \mathbf{D}^+ & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \rho_{10} \mathbf{H} & \mathbf{B}^- \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

et dans le cas TM :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^+ & \rho_{10} \mathbf{D}^+ & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} & \rho_{10} \mathbf{H} & \mathbf{A}^- \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Elles sont toutes deux de dimensions  $3N \times 3N$ , et le problème a pour inconnues surfaciques des champs  $[\psi_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n_+}, \frac{\partial \psi_1}{\partial n_-}]$  dans le cas TE, et  $[\psi_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n_+}, \psi_1]$  dans le cas TM.

### 3.3.2.3 Condition d'impédance sur la surface

Dans le cas où le milieu inférieur offre une atténuation beaucoup plus forte que celle de la couche, i.e. lorsque

$$\frac{|\Im m(\varepsilon_{r2})|}{|\Im m(\varepsilon_{r1})|} \gg 1 \quad (3.24)$$

la matrice impédance du cas diélectrique peut être simplifiée par une matrice de dimension  $3N \times 3N$ , c'est à dire de même dimension que pour le cas d'une surface inférieure parfaitement conductrice.

En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, dans ce cas de forte atténuation, la dérivée normale du champ sur la surface inférieure est proportionnelle au champ. D'après [129] [94],

$$\text{(TE)} \quad \psi_1(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-}, \quad \text{(TM)} \quad \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} = \frac{k_1}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \psi_1(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in S^- \quad (3.25)$$

Dans le cas TE, nous pouvons alors approcher les termes de l'équation (3.9b) correspondant à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ , par :

$$\begin{aligned} & \int_{S_-} ds \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \right] \\ &= \int_{S_-} ds \left[ \frac{i}{k_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \quad \forall \mathbf{r}' \in S^+ \end{aligned} \quad (3.26)$$

et nous définissons la matrice

$$\mathbf{C}_{IBC}^{TE} = \left[ \frac{i}{k_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \mathbf{E} + \mathbf{F} \right] \quad (3.27)$$

Par ailleurs les termes correspondant à  $\mathbf{A}^-$  et  $\mathbf{B}^-$  dans (3.9c)

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \psi_1(\mathbf{r}') - \int_{S_-} ds \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-}}_{\mathbf{A}^-} + \underbrace{\int_{S_-} ds g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-}}_{\mathbf{B}^-}$$

peuvent se simplifier de la même façon en introduisant les relations (3.25), et nous définissons la matrice correspondante

$$\mathbf{Z}_{IBC}^{b TE} = \left[ \frac{i}{k_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \mathbf{A}^- + \mathbf{B}^- \right] \quad (3.28)$$

où le caractère  $b$  en exposant désigne la matrice impédance du *bas*, correspondant à  $S^-$ .

De même, dans le cas TM, on opère dans (3.9c) la simplification :

$$\begin{aligned} & \int_{S_-} ds \left[ \psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} - g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n_-} \right] \\ &= \int_{S_-} ds \left[ \frac{\partial g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_-} - \frac{k_1}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} g_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right] \psi_1(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r}' \in S^+ \end{aligned} \quad (3.29)$$

et on pose

$$\mathbf{C}_{IBC}^{TM} = \left[ \mathbf{E} + \frac{k_1}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \mathbf{F} \right] \quad (3.30)$$

$$\mathbf{Z}_{IBC}^{b TM} = \left[ \mathbf{A}^- + \frac{k_1}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \mathbf{B}^- \right] \quad (3.31)$$

$\mathbf{C}_{IBC}^{TE}$ ,  $\mathbf{Z}_{IBC}^{b TE}$ ,  $\mathbf{C}_{IBC}^{TM}$  et  $\mathbf{Z}_{IBC}^{b TM}$  sont des matrices de dimension  $N \times N$ . En prenant en compte ces remarques on en déduit la matrice impédance dans le cas TE :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^+ & \rho_{10} \mathbf{D}^+ & \mathbf{C}_{IBC}^{TE} \\ \mathbf{G} & \rho_{10} \mathbf{H} & \mathbf{Z}_{IBC}^{b TE} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

et dans le cas TM :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{B}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^+ & \rho_{10} \mathbf{D}^+ & \mathbf{C}_{IBC}^{TM} \\ \mathbf{G} & \rho_{10} \mathbf{H} & \mathbf{Z}_{IBC}^{b TM} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Elles sont toutes deux de dimensions  $3N \times 3N$ , et le problème a pour inconnues surfaciques  $[\psi_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n_+}, \frac{\partial \psi_1}{\partial n_-}]$  dans le cas TE, et  $[\psi_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n_+}, \psi_1]$  dans le cas TM.

### 3.3.3 Interprétation physique de la matrice impédance

#### 3.3.3.1 Surface inférieure diélectrique

Considérons la matrice impédance du cas d'une double interface diélectrique. Les matrices  $\mathbf{A}^+$ ,  $\mathbf{B}^+$ ,  $\mathbf{C}^+$ , et  $\mathbf{D}^+$  peuvent se grouper sous forme d'une matrice impédance

$$\mathbf{Z}_{2N \times 2N}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{B}^+ \\ \mathbf{C}^+ & \rho_{10} \mathbf{D}^+ \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Cette matrice correspond exactement à la matrice impédance du problème simple interface (Fig. 2.7), dans le cas diélectrique, l'interface considérée étant  $S^+$ , séparant un milieu supérieur de permittivité  $\varepsilon_0$  d'un milieu inférieur de permittivité  $\varepsilon_1$ .

Nous pouvons faire la même remarque pour la matrice impédance

$$\mathbf{Z}_{2N \times 2N}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^- & \mathbf{B}^- \\ \mathbf{C}^- & \rho_{21} \mathbf{D}^- \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

l'interface étant cette fois  $S^-$ , séparant un milieu supérieur de permittivité  $\varepsilon_1$  d'un milieu inférieur de permittivité  $\varepsilon_2$ .

Les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ , ainsi que les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  peuvent être vues comme des matrices de couplage entre les deux interfaces. Plus précisément, nous pouvons voir d'après l'équation intégrale (3.9b), que les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  multipliées respectivement à  $\psi_1$  et à  $\frac{\partial \psi_1}{\partial n_+}$  donnent une grandeur homogène à un champ, ce champ étant situé sur l'interface supérieure. Autrement dit,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  font propager l'information du champ de l'interface inférieure vers l'interface supérieure ( $S^- \rightsquigarrow S^+$ ). Nous noterons ainsi

$$\mathbf{C}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

la matrice de couplage de l'interface  $S^-$  vers l'interface  $S^+$  (vers le *haut*). Par symétrie, nous pouvons faire la même remarque pour les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ ; nous poserons

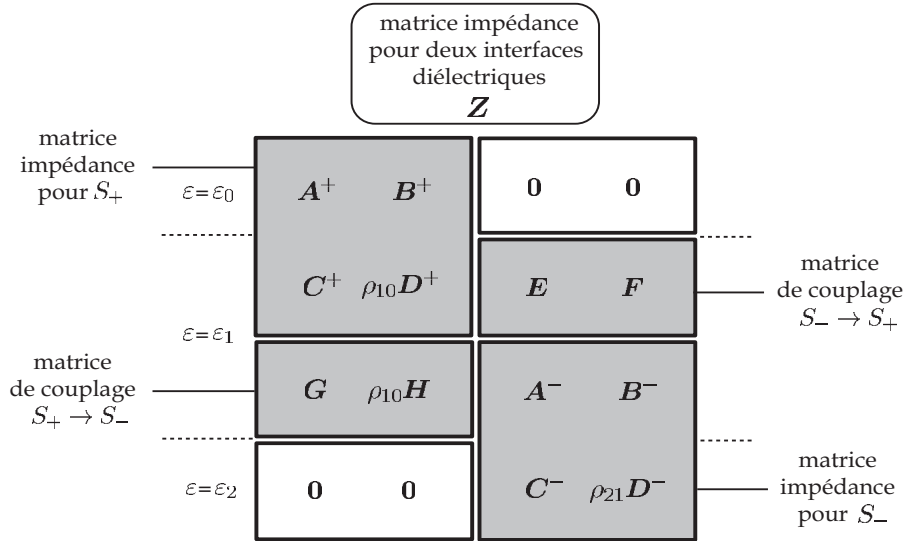
$$\mathbf{C}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \rho_{10} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

C'est la matrice de couplage de la surface supérieure vers la surface inférieure ( $S^+ \rightsquigarrow S^-$ ) ou encore, vers le *bas*. Les matrices  $\mathbf{C}^h$  et  $\mathbf{C}^b$  sont de dimension  $2N \times 2N$ .

En résumé, nous pouvons mettre la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  des deux interfaces diélectriques sous la forme

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^h & \mathbf{C}^h \\ \mathbf{C}^b & \mathbf{Z}^b \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

où  $\mathbf{Z}^h$ ,  $\mathbf{Z}^b$ ,  $\mathbf{C}^h$ ,  $\mathbf{C}^b$  sont des matrices carrées de taille  $2N \times 2N$ . Une représentation de la matrice impédance est faite en figure (3.3).



**Fig.3.3** – Interprétation physique des matrices blocs de la matrice impédance pour le cas de deux interfaces rugueuses diélectriques superposées.

### 3.3.3.2 Surface inférieure parfaitement conductrice

Pour le cas d'une interface inférieure parfaitement conductrice, la matrice impédance est une sous-matrice de la matrice  $\mathbf{Z}$  pour deux interfaces diélectriques. En polarisation TE,

$$\mathbf{Z}_{N \times N}^b = \mathbf{B}^- \quad (3.39)$$

$$\mathbf{C}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^b = [ \mathbf{G} \quad \rho_{10} \mathbf{H} ] \quad (3.40)$$

et en polarisation TM

$$\mathbf{Z}_{N \times N}^b = \mathbf{A}^- \quad (3.41)$$

$$\mathbf{C}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^b = [ \mathbf{G} \quad \rho_{10} \mathbf{H} ] \quad (3.42)$$

### 3.3.4 Coefficient de diffusion

Une fois le problème  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$  résolu et l'inconnue  $\mathbf{X}$  déterminée, nous pouvons calculer, dans le milieu supérieur  $\Omega_0$ , le champ diffusé par l'ensemble des deux interfaces ainsi que le coefficient de diffusion, à partir de la composante  $\mathbf{X}_+ = [\psi_0, \frac{\partial \psi_0}{\partial n_+}]$  du vecteur des inconnues. La méthode est la même que dans le chapitre précédent (§2.3.6), en partant du théorème de Huygens, appliqué au milieu supérieur  $\Omega_0$ . Le coefficient de diffusion dans le milieu supérieur s'écrit d'après (2.86)

$$\sigma(\theta_s) = \frac{\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{1}{8\pi k_0} |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2}{P_{inc}} \quad (3.43)$$

avec

$$P_{inc} = 8\pi k_0 g \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \theta_i \left[ 1 - \frac{1+2 \tan^2 \theta_i}{2k_0^2 g^2 \cos^2 \theta_i} \right] \quad (3.44)$$

et

$$\psi_s^\infty(\theta_s) = \int_{S^+} dx \left[ \sqrt{1 + (\zeta^{+'}(x))^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial n^+}(x) - ik_0 \psi_0(x) (\zeta^{+'}(x) \sin \theta_s - \cos \theta_s) \right] e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\tau}^+} \quad (3.45)$$

avec  $\mathbf{k}_s = k_0 (\sin \theta_s \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_s \hat{\mathbf{z}})$ .

### 3.4 Méthode performante pour une double interface

Dans ce chapitre nous exposons plus particulièrement notre contribution personnelle. Au préalable, rappelons les limitations des méthodes intégrales actuelles.

Jusqu'à présent, les auteurs qui obtiennent une matrice impédance  $\mathbf{Z}$  de la forme (3.14) dans le cas de deux interfaces diélectriques, ou de la forme (3.32) et (3.33) dans le cas d'une surface inférieure parfaitement conductrice, réalisent une inversion directe.

Or nous avons vu que dans le cas de deux interfaces diélectriques le nombre d'inconnues surfaciques, qui est de  $4N$ , augmente significativement par rapport au problème simple interface parfaitement conducteur ( $N$  inconnues) ou diélectrique ( $2N$  inconnues). Dans le cas où l'interface inférieure est parfaitement conductrice, ce nombre est ramené à  $3N$  ; mais il reste encore grand par rapport au cas d'une interface parfaitement conductrice.

Une conséquence est que, si nous pouvons stocker en mémoire une matrice de taille maximale  $2500 \times 2500$ , nous sommes limités pour le cas d'une seule interface parfaitement conductrice à une surface de 2500 échantillons, et pour deux interfaces juxtaposées à 625 échantillons par interface, ce qui est très peu. Réciproquement, si nous avons assez de mémoire pour traiter un problème double interface de 2500 échantillons par interface, le temps de calcul par inversion LU est  $4^3 = 64$  fois plus long que pour le cas simple interface ; d'autant plus que nous disposons de méthodes rapides pour réduire le temps de résolution pour ce dernier cas, méthodes qui n'existent pas encore pour le cas d'une double interface. Ceci montre l'intérêt de développer des méthodes rapides et performantes, nécessitant peu de place mémoire pour la résolution du problème  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$  pour le cas d'une double interface.

Notre démarche s'appuie sur la décomposition par blocs de la matrice impédance ; l'inverse par blocs de cette matrice fait apparaître une matrice caractéristique du système formé par les deux interfaces. Après une étude du domaine de validité de la méthode, nous comparons nos résultats à quelques exemples récents trouvés dans la littérature. La méthode développée dans ce chapitre a fait l'objet de deux présentations à des colloques [49, 50].

### 3.4.1 Algorithme itératif proposé

Supposons d'abord que les deux interfaces sont diélectriques. En introduisant une hypothèse sur le couplage entre les deux interfaces nous pouvons simplifier l'inversion de la matrice impédance. Décomposons par blocs la matrice  $\mathbf{Z}^{-1}$  à déterminer :

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Les matrices carrées  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ , de taille  $2N \times 2N$ , peuvent être déterminées à partir de  $\mathbf{Z}^{-1}$  après inversion de la matrice  $\mathbf{Z}$  de taille  $4N \times 4N$ . Cependant cette inversion est gourmande en temps de calcul et il n'est pas toujours possible de stocker la matrice à inverser  $\mathbf{Z}$ , si elle est de trop grandes dimensions. Une solution est de déterminer séparément les blocs  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  de la matrice  $\mathbf{Z}^{-1}$ . En effet, à partir de [140], nous obtenons les expressions des quatre blocs de la matrice  $\mathbf{Z}^{-1}$  à partir des quatre blocs  $\mathbf{Z}^h$ ,  $\mathbf{C}^h$ ,  $\mathbf{Z}^b$  et  $\mathbf{C}^b$  de la matrice  $\mathbf{Z}$  (3.38) :

$$\mathbf{T} = \left[ \mathbf{Z}^h - \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \right]^{-1} \quad (3.47a)$$

$$\mathbf{U} = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \quad (3.47b)$$

$$\mathbf{V} = -(\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \cdot \mathbf{T} \quad (3.47c)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{Z}^b)^{-1} - (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \quad (3.47d)$$

En procédant ainsi, il est possible d'obtenir la matrice inverse en n'inversant que des matrices de dimension  $2N \times 2N$  ; cependant, le temps de calcul n'est pas réduit pour autant : la complexité de cette inversion reste de l'ordre de grandeur de  $\mathcal{O}((4N)^3)$ . Pour optimiser le temps de calcul, nous pouvons utiliser les propriétés du problème que nous avons à résoudre. Supposons ainsi que l'inversion soit effectuée et que nous ayons déterminé les matrices  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  ; les inconnues  $\mathbf{X}$  sont alors données par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_+ \\ \mathbf{X}_- \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_+ \\ \mathbf{b}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_+ + \mathbf{U} \cdot \mathbf{b}_- \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{b}_+ + \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}_- \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

#### 3.4.1.1 Détermination du champ $\mathbf{X}_+$ sur la surface supérieure

Nous pouvons remarquer que nous n'avons besoin que des valeurs de  $\mathbf{X}_+$  pour obtenir le champ diffusé dans le milieu supérieur et le coefficient de diffusion. Par conséquent, d'après (3.48), il est seulement nécessaire de résoudre  $\mathbf{X}_+ = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_+ + \mathbf{U} \cdot \mathbf{b}_-$ . Puisque  $\mathbf{b}_- = \mathbf{0}$  (3.13), cela équivaut à résoudre, d'après (3.47a)

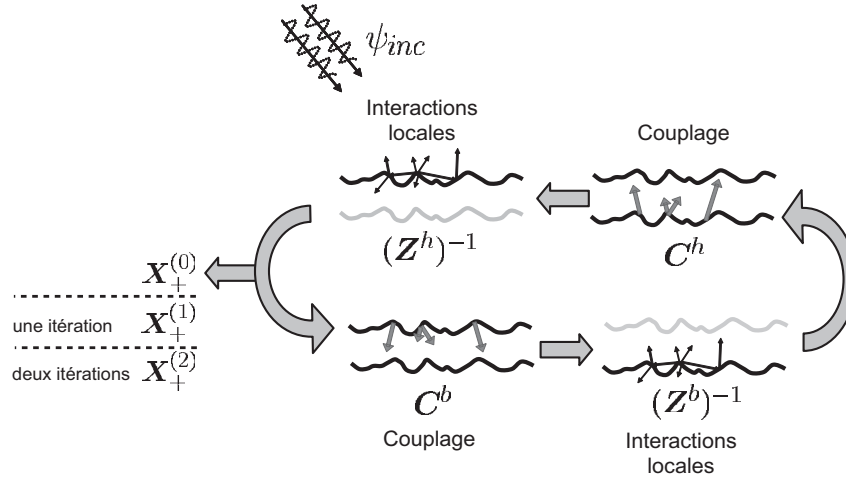
$$\mathbf{X}_+ = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_+ = \left[ \mathbf{Z}^h - \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \right]^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \quad (3.49)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{X}_+ = \left[ \mathbf{I} - (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \right]^{-1} \cdot (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \quad (3.50)$$

Dans cette expression, nous voyons apparaître une matrice que nous utiliserons beaucoup ; notons  $\mathbf{M}_c$  cette matrice que nous appellerons "matrice caractéristique de la couche", soit

$$\mathbf{M}_c = (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \quad (3.51)$$



**Fig.3.4** – Interprétation physique du développement en série (3.55).

Donc (3.50) devient

$$\mathbf{X}_+ = [\mathbf{I} - \mathbf{M}_c]^{-1} \cdot (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \quad (3.52)$$

Si nous choisissons comme d'une matrice complexe,  $\|\cdot\|_{vp}$ , la norme donnée par son rayon spectral, i.e. le module de sa valeur propre de plus grand module, on peut développer en série  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_c)^{-1}$  si :

$$\|\mathbf{M}_c\|_{vp} = \|(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b\|_{vp} < 1 \quad (3.53)$$

par analogie avec la décomposition en série

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots \quad \text{si } |a| < 1 \quad (3.54)$$

Nous étudions en (§3.4.4) le domaine de validité de la condition (3.53), mais nous pouvons dire dès maintenant qu'elle sera vérifiée dans la majorité des configurations que nous avons rencontrées dans la littérature.

Lorsque (3.53) est vérifiée, le champ sur la surface supérieure  $S^+$  peut être approché par

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+ &= \left[ \sum_{m=0}^M \mathbf{M}_c^m \right] \cdot (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \\ &= \left[ \sum_{m=0}^M \left( (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \right)^m \right] \cdot (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \end{aligned} \quad (3.55)$$

qui admet une interprétation physique simple (Fig. 3.4) : La matrice  $(\mathbf{Z}^h)^{-1}$ , multipliée par le vecteur  $\mathbf{b}_+$  dans l'expression (3.55), prend en compte les interactions locales sur la surface  $S^+$ ,  $\mathbf{C}^b$  fait alors propager l'information du champ sur  $S^+$  vers  $S^-$ ,  $(\mathbf{Z}^b)^{-1}$  permet de déterminer les interactions sur la surface inférieure et  $\mathbf{C}^h$  propage à nouveau l'information du champ résultant vers la surface supérieure et  $(\mathbf{Z}^h)^{-1}$  actualise ce champ sur la surface supérieure. Le champ total sur la surface

supérieure est finalement la somme des contributions des champs réfléchis dans la couche plusieurs fois, à différents ordres

$$\mathbf{X}_+ = \mathbf{X}_+^{(0)} + \mathbf{X}_+^{(1)} + \mathbf{X}_+^{(2)} + \dots \quad (3.56)$$

$$\text{avec } \mathbf{X}_+^{(0)} = (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \quad (3.57a)$$

$$\mathbf{X}_+^{(1)} = \mathbf{M}_c \cdot \mathbf{X}_+^{(0)} \quad (3.57b)$$

$$\mathbf{X}_+^{(2)} = \mathbf{M}_c \cdot \mathbf{X}_+^{(1)} \quad (3.57c)$$

D'après l'expression du premier terme  $\mathbf{X}_+^{(0)}$ , on déduit qu'il correspond au champ du milieu supérieur et à sa dérivée normale, pris tous deux sur la surface, pour le problème d'une simple interface, en l'occurrence  $S^+$ . Le terme  $\mathbf{X}_+^{(0)}$  est donc une bonne approximation de la solution exacte si la contribution de la surface inférieure est négligeable. Lorsque ce n'est pas le cas, les termes d'ordres supérieurs,  $\mathbf{X}_+^{(1)}, \mathbf{X}_+^{(2)}, \dots$  correspondant aux réflexions multiples successives de l'onde électromagnétique dans la couche. On est, d'ailleurs, assuré que la somme (3.55) converge si (3.53) est vérifiée, d'après les propriétés du développement de Taylor.

Pour le cas où l'interface inférieure est parfaitement conductrice, le raisonnement est le même, en prenant pour la matrice  $\mathbf{Z}$  la forme donnée en (3.32) pour le cas TE, et la forme (3.33), pour le cas TM. Les matrices carrées  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ , de la décomposition de  $\mathbf{Z}^{-1}$ , ont la même taille que les matrices  $\mathbf{Z}^h$ ,  $\mathbf{C}^h$ ,  $\mathbf{C}^b$  et  $\mathbf{Z}^b$ , respectivement, soit une taille de  $2N \times 2N$ ,  $2N \times N$ ,  $N \times 2N$  et  $N \times N$ , respectivement. La décomposition (3.55) est encore valable dans le cas parfaitement conducteur [140].

### 3.4.1.2 Détermination du champ $\mathbf{X}_-$ sur la surface inférieure

Si nous voulons étudier le champ transmis par deux interfaces rugueuses, nous devons obtenir les valeurs  $\mathbf{X}_-$  du champ sur la surface inférieure. Or d'après (3.48),  $\mathbf{X}_- = \mathbf{V} \cdot \mathbf{b}_+ + \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}_-$ . En utilisant le fait que  $\mathbf{b}_- = \mathbf{0}$ , et les expressions de l'inverse par blocs données par (3.47), nous avons la relation

$$\mathbf{X}_- = \mathbf{V} \cdot \mathbf{b}_+ = - \left[ (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \right] \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_+ \quad (3.58)$$

Et comme, d'après (3.49),  $\mathbf{X}_+ = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_+$ , finalement,  $\mathbf{X}_-$  est donné simplement par

$$\mathbf{X}_- = - \left[ (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \right] \cdot \mathbf{X}_+ \quad (3.59)$$

L'interprétation physique de cette relation peut être déduite à l'aide de la figure 3.4.

### 3.4.2 Couplage avec des méthodes rapides pour une seule interface

Pour bénéficier de tout le potentiel de l'expression (3.55) nous devons aller plus loin dans notre quête d'accélération.



En effet, dans le cas de deux interfaces diélectriques par exemple, le calcul direct du produit matrice-vecteur  $\mathbf{M}_c \cdot \mathbf{v}$  (où  $\mathbf{v}$  est un vecteur donné) est de complexité  $\mathcal{O}((2N)^3)$  pour les opérations  $(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{v}$  et  $(\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{v}$  et de complexité  $\mathcal{O}((2N)^2)$  pour les produits  $\mathbf{C}^h \cdot \mathbf{v}$  et  $\mathbf{C}^b \cdot \mathbf{v}$ . Les opérations les plus pénalisantes en nombre d'opérations sont donc les étapes d'inversion.

Cependant, l'avantage de considérer l'expression (3.55) plutôt que (3.49), est que, pour effectuer les opérations  $(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{v}$  et  $(\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{v}$ , nous pouvons utiliser les méthodes rapides qui existent pour une simple interface diélectrique (§2.4). Ces méthodes permettent de ramener le nombre de calculs nécessaires aux étapes d'inversion au-dessous de  $\mathcal{O}((2N)^2)$ .

Nous pouvons recourir par exemple aux méthodes Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid(BMIA/CAG) [95, 177], Method of Ordered Multiple Interactions (MOMI) [2, 3, 100, 176], Forward-Backward (FB) [37, 89, 90], ou Fast Multipole Method (FMM) [63, 113, 144].

Nous utiliserons par la suite la méthode BMIA/CAG, étudiée dans le chapitre précédent (§2.4.3), puisque, des méthodes présentées, c'est la seule que nous ayons programmée qui soit applicable au cas diélectrique.

### 3.4.3 Complexité

Nous allons donner ici la complexité de l'algorithme que nous avons proposé (calcul des différents ordres successifs, couplé avec une méthode rapide mono-interface).

Pour le terme d'ordre 0,  $\mathbf{X}_+^{(0)}$ , nous devons d'abord résoudre  $\mathbf{X}_+^{(0)} = (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+$  (3.57a); en appliquant par exemple la méthode BMIA/CAG, cette étape est de complexité  $\mathcal{O}(2N \log 2N)$ . Pour les termes d'ordre supérieurs  $\mathbf{X}_+^{(1)}, \mathbf{X}_+^{(2)}, \dots$  la complexité par itération est détaillée ci-dessous, où  $\mathbf{v} = \mathbf{X}_+^{(0)}, \mathbf{X}_+^{(1)}, \dots$  :

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \underbrace{\mathbf{C}^b \cdot \mathbf{v}}_{\mathcal{O}(2N^2) \text{ (a)}}}_{\mathcal{O}(2N \log 2N) \text{ (b)}}}_{\mathcal{O}(2N^2) \text{ (c)}}}_{\mathcal{O}(2N \log 2N) \text{ (d)}} \quad (3.60)$$

où les opérations (a) et (c) sont des multiplications matrice-vecteur, et (b) et (d) sont des inversions rapides, effectuées à l'aide de la méthode BMIA/CAG. Les étapes (a) et (c) ont une complexité inférieure à  $\mathcal{O}((2N)^2)$  puisque  $\mathbf{C}^b$  et  $\mathbf{C}^h$  sont des matrices dont la moitié des coefficients sont nuls :

$$\mathbf{C}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \rho_{01} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

En résumé, pour obtenir une approximation à l'ordre  $M_{approx}$ , cette méthode est de complexité  $\mathcal{O}(M_{approx} \cdot 4N^2 + (1 + 2M_{approx}) \cdot 2N \log 2N)$ , qui est de l'ordre de  $\mathcal{O}(M_{approx} \cdot 4N^2)$  pour  $N \gg 1$ . Si on suppose que le nombre d'itérations  $M_{approx}$  nécessaires pour obtenir une précision satisfaisante vérifie  $M_{approx} \ll N$ , alors cette

méthode rapide a une complexité très inférieure à  $\mathcal{O}((4N)^3)$  que nous avons en procédant à une inversion par décomposition LU de la matrice impédance  $\mathbf{Z}$ .

Pour le cas où l'interface inférieure est parfaitement conductrice, la complexité est calculée de façon similaire :

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \underbrace{\mathbf{C}^b \cdot \mathbf{v}}_{\mathcal{O}(2N^2) \text{ (a)}}}_{\mathcal{O}(N \log N) \text{ (b)}}}_{\mathcal{O}(N^2) \text{ (c)}}}_{\mathcal{O}(2N \log 2N) \text{ (d)}} \quad (3.61)$$

D'où une complexité de calcul pour une approximation à l'ordre  $M_{approx}$  de  $\mathcal{O}(M_{approx} \cdot 3N^2 + N[(3M_{approx} + 2) \cdot \log N + 2(M_{approx} + 1) \cdot \log 2])$ ; soit, pour  $N \gg 1$ , une complexité de l'ordre de  $\mathcal{O}(M_{approx} \cdot 3N^2)$ .

### 3.4.4 Domaine de validité

La convergence de cette méthode rapide repose sur la condition (3.53), que nous rappelons ici :

$$\|\mathbf{M}_c\|_{vp} = \|(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b\|_{vp} < 1 \quad (3.62)$$

Dans la formulation de cette condition interviennent les quatre sous-matrices  $\mathbf{Z}^h$ ,  $\mathbf{Z}^b$ ,  $\mathbf{C}^h$  et  $\mathbf{C}^b$ , de la matrice impédance du problème. La validité de cette condition dépend donc des nombreux paramètres du système étudié, tels que la statistique des deux interfaces, leur éloignement, mais aussi la permittivité des trois milieux.

Nous étudierons en premier le cas de trois milieux diélectriques. Nous aborderons dans l'ordre,

- le cas de deux interfaces planes;
- le cas d'une interface rugueuse placée au dessus ou au-dessous d'une interface plane;
- le cas de deux interfaces rugueuses.

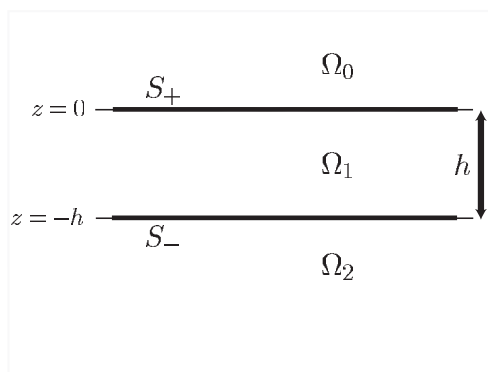
Le cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur sera étudié ensuite.

#### 3.4.4.1 Deux interfaces planes superposées

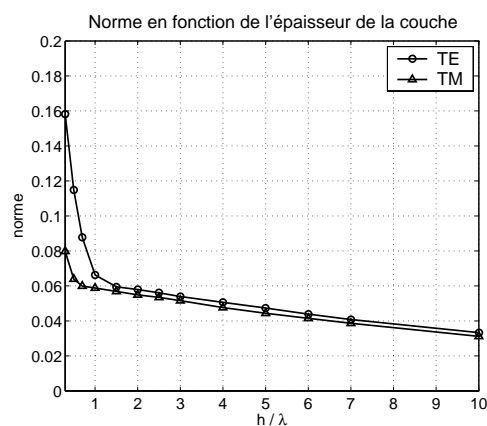
Considérons en premier le cas de deux interfaces planes. Ces deux interfaces délimitent trois milieux  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de permittivités relatives respectives choisies égales à  $\varepsilon_{r0} = 1$ ,  $\varepsilon_{r1} = 2.5 + 0.01i$  et  $\varepsilon_{r2} = 8$  (Fig. 3.5). L'épaisseur de peau du milieu  $\Omega_1$  est environ égale à  $\delta = 50\lambda$ . Ces paramètres sont pris égaux à ceux de [152], et correspondent au cas d'une couche de sable étendue sur du granit. La couche est choisie avec pertes, ceci étant plus réaliste, et, par ailleurs, de nombreuses autres références considèrent une permittivité de la couche de cet ordre de grandeur [117, 153, 158].

Nous choisissons, pour les deux interfaces et pour l'ensemble des configurations, le pas de discrétisation le plus contraignant; pour les permittivités choisies, il est donné d'après l'étude de l'interface du bas, soit  $\Delta x = 0.03\lambda$ . Ce pas peut

sembler excessivement fin, mais le milieu inférieur étant de permittivité élevée, il faut choisir une discrétisation suffisamment fine pour prendre en compte les variations rapides de la fonction de Green du milieu inférieur [181]. Précisément, si  $\lambda_0$  et  $\lambda_2$  désignent les longueurs d'onde dans les milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_2$ , elles sont reliées par  $\lambda_2 = \lambda_0 / \text{Re}\sqrt{\epsilon_{r2}}$  avec  $\sqrt{\epsilon_{r2}} \simeq 2.8$ . Il faut donc discrétiser l'interface inférieure environ 3 fois plus finement que l'interface supérieure, soit à  $\lambda/30 \simeq 0.03\lambda$ .



**Fig.3.5** – Schéma de la couche pour deux valeurs de l'épaisseur  $h$ .



**Fig.3.6** –  $\|\mathbf{M}_c\|_{vp}$  en fonction de  $h$ .  $L = 3\lambda$  et  $\Delta x = 0.03\lambda$ .

Nous avons représenté sur la figure (3.6) la norme  $\|\mathbf{M}_c\|_{vp}$  en fonction de l'épaisseur  $h$  de la couche, pour  $h > 0.3\lambda$  (nous avons pris cette limite inférieure de façon arbitraire); les valeurs de la norme inférieures à 1 correspondent à une valeur de  $h$  telle que la condition de validité est satisfaite, donc telle que la méthode rapide proposée converge. Sur cette figure, la longueur des surfaces est  $L = 3\lambda$ . Pour une telle configuration, on observe que la condition de validité (3.53) est toujours remplie en polarisation TE et TM; cependant la norme est plus élevée en polarisation TE que TM. Par ailleurs, la norme diminue lorsque l'épaisseur de la couche augmente, et dans la configuration la moins favorable que nous avons étudié,  $h = 0.3\lambda$ , elle reste très inférieure à 1.

Etudions le comportement de  $\mathbf{M}_c$  lorsque la longueur de la surface augmente. Nous avons vu au chapitre précédent que le conditionnement des matrices était sensible à la longueur  $L$  de la surface. Sur les figures (3.7) et (3.9), nous avons représenté la courbe précédente pour plusieurs longueurs  $L$ .

On peut constater d'après ces figures que la norme de  $\mathbf{M}_c$  est sensible à l'augmentation de la longueur de la surface, tant en polarisation TE qu'en polarisation TM. En passant d'une longueur de  $L = 3\lambda$  à  $L = 12\lambda$ , la norme passe de 0.25 à 0.37 en TE, et de 0.105 à 0.14 en TM, comme on peut le voir sur les agrandissements, sur les figures (3.8) et (3.10). Une longueur de surface de plus en plus grande est donc pénalisante pour la méthode; et même si les normes que l'on a relevé pour l'instant sont largement inférieures à 1, pour des problèmes de plus grande taille, donc pour des surfaces plus longues, on ne peut pas, a priori, appliquer la méthode rapide sans savoir si la condition de validité est remplie; ceci

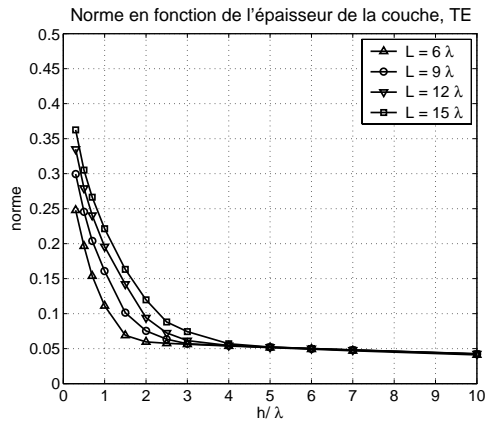


Fig.3.7 – Polarisation TE.

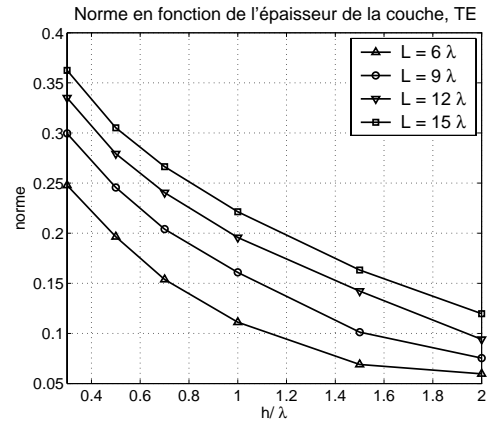


Fig.3.8 – Agrandissement.

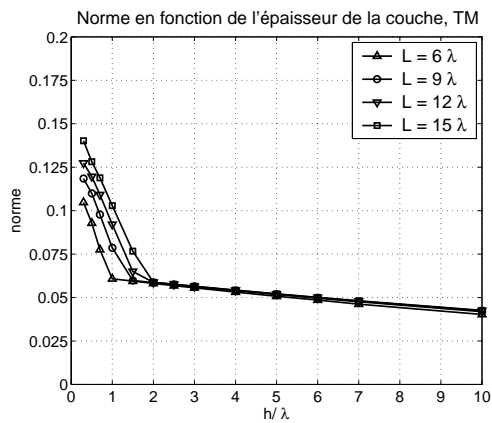


Fig.3.9 – Polarisation TM.

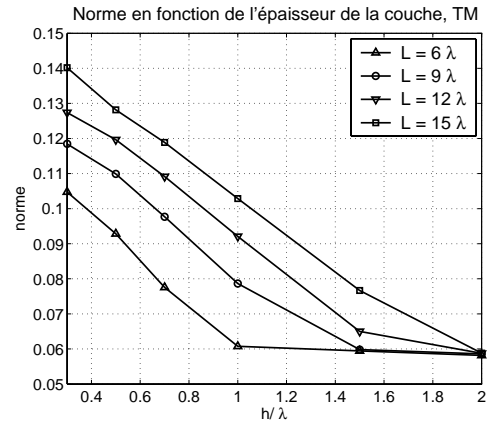
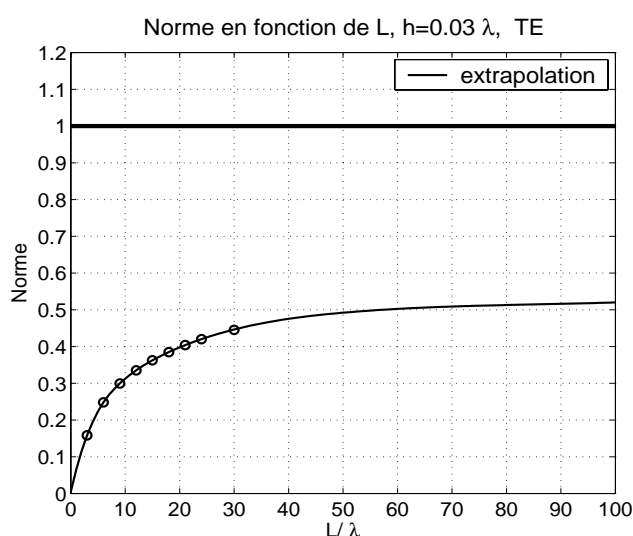


Fig.3.10 – Agrandissement.

est en contradiction avec le principe même d'une méthode rapide. En effet, le calcul des valeurs propres, nécessaire à la détermination de la norme, est très coûteux en nombre d'opérations.

La solution que nous avons retenue est d'étudier, par extrapolation, le comportement de la norme en fonction de la longueur de la surface, pour différentes configurations possibles (par exemple, en considérant des surfaces rugueuses ou non). Munis de ces courbes de référence, nous pourrions déterminer, par extrapolation, si notre méthode converge pour une configuration donnée.



**Fig.3.11** –  $\|M_c\|_{vp}$  en fonction de  $L$ .  $h = 0.3\lambda$  et  $\Delta x = 0.03\lambda$ . Polarisation TE.

Par exemple, un point intéressant est de déterminer si la norme dépasse 1 pour des longueurs  $L$  de plus en plus grandes, dans le cas de deux interfaces planes superposées. Pour cela, nous nous sommes mis dans la configuration la plus défavorable de notre étude, celle où la norme prend la plus grande valeur, c'est-à-dire pour une épaisseur de  $h = 0.3\lambda$ . Nous avons calculé la norme pour des longueurs  $L$  allant jusqu'à  $30\lambda$ , puis nous avons extrapolé les résultats au delà (Fig. 3.11). Le point  $L = 30\lambda$  correspond, pour le pas de discrétisation choisi, au problème de taille maximum que l'on peut traiter par inversion LU. La norme semble converger vers une valeur de 0.52 pour une longueur de  $100\lambda$ , ce qui indique que pour des valeurs de l'épaisseur  $h$  supérieures à  $0.3\lambda$ , la méthode converge pour une longueur  $L$  quelconque.

### Etude rigoureuse de la norme

Nous nous livrons ici à une étude rigoureuse de la norme, puisque les premières figures que nous avons obtenues dans le cas plan laissent présager une diminution de celle-ci lorsque l'épaisseur  $h$  de la couche augmente; les remarques que nous

faisons ici pourront aussi s'appliquer aussi au cas d'interfaces rugueuses; d'ailleurs, les résultats numériques qui suivront amèneront aux mêmes conclusions; cependant l'intérêt d'une telle étude rigoureuse est d'élargir la portée de ces résultats numériques à d'autres configurations que nous n'avons pas traitées (permittivités différentes, rugosités différentes plus élevées,...).

On peut prédire mathématiquement et physiquement le comportement de la norme en fonction de l'épaisseur  $h$ . Il suffit pour cela d'étudier les sous-matrices de la matrice impédance dans lesquelles intervient ce paramètre. Ce sont les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  composant  $\mathbf{C}^h$  (3.36), et les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  incluses dans  $\mathbf{C}^b$  (3.37). Etudions premièrement l'influence de  $h$  sur les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ ; le module de leurs coefficients (3.18) et (3.19) s'écrit, pour les deux polarisations,

$$|F_{mn}| = |\gamma_n^-| \cdot \left| \frac{\Delta x}{4} \right| \cdot \left| H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_m^+ - \mathbf{r}_n^-\|) \right| \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} |E_{mn}| &= \left| \frac{\Delta x}{4} \right| \cdot \left| k_1 H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|) \right| \\ &\quad \times \frac{\left| \zeta^{-'}(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m)) \right|}{\|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pour  $n$  et  $m$  fixés, lorsque  $h \rightarrow \infty$  on a  $\|\mathbf{r}_m^+ - \mathbf{r}_n^-\| \rightarrow \infty$ . Et pour un milieu  $\Omega_1$  à pertes,  $\Im m(k_1) > 0$ , donc  $\left| H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_m^+ - \mathbf{r}_n^-\|) \right| \rightarrow 0$  et  $\left| H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_m^+ - \mathbf{r}_n^-\|) \right| \rightarrow 0$ .

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\left| \zeta^{-'}(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m)) \right|}{\|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|} &\leq |\zeta^{-'}(x_n)| \frac{|x_n - x_m|}{\|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|} + \frac{|\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m)|}{\|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|} \\ &\leq |\zeta^{-'}(x_n)| \times 1 + 1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

et  $|\zeta^{-'}(x_n)| + 1$  reste borné  $\forall h$ .

En conclusion  $|E_{mn}|$  et  $|F_{mn}| \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow \infty$ ,  $\forall m, n$ .

Si l'on prend comme norme de matrice

$$\|\mathbf{M}\|_1 = \sup_{m,n} |M_{mn}| \quad (3.66)$$

on vient donc de prouver que  $\|\mathbf{E}\|_1$  et  $\|\mathbf{F}\|_1 \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow \infty$ . Ainsi  $\|\mathbf{C}^h\|_1 \rightarrow 0$ . Un raisonnement similaire pour  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ , données par (3.20) et (3.21), conduit à  $\|\mathbf{C}^b\|_1 \rightarrow 0$ .

Par ailleurs, deux normes sont équivalentes sur l'espace vectoriel complexe de dimension finie formé par les matrices complexes de dimension  $N \times N$ . Ainsi, il existe des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\alpha \|\mathbf{C}^h\|_1 \leq \|\mathbf{C}^h\|_{vp} \leq \beta \|\mathbf{C}^h\|_1 \quad (3.67)$$

Donc,  $\|\mathbf{C}^h\|_{vp} \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow \infty$ . On parvient à la même conclusion pour  $\|\mathbf{C}^b\|_{vp}$ .

Puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_c\|_{vp} &= \|(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b\|_{vp} \\ &\leq \|(\mathbf{Z}^h)^{-1}\|_{vp} \cdot \|\mathbf{C}^h\|_{vp} \cdot \|(\mathbf{Z}^b)^{-1}\|_{vp} \cdot \|\mathbf{C}^b\|_{vp} \end{aligned} \quad (3.68)$$

et comme  $\mathbf{Z}^{h,b}$  ne dépendent pas de  $h$ , finalement,  $\|\mathbf{M}_c\|_{vp} \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow \infty$ .

On peut interpréter physiquement ce résultat en remarquant que, pour une épaisseur  $h$  croissante, le chemin parcouru par l'onde dans la couche augmente au cours de ses aller-retours entre les deux interfaces, et, pour un milieu à pertes, l'énergie qu'elle véhicule diminue en conséquence. Les réflexions multiples entre les deux interfaces seront donc moins importantes en amplitude et notre méthode convergera donc en moins d'itérations; d'où une norme  $\|(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b\|_{vp}$  qui diminue lorsque  $h$  augmente.

#### 3.4.4.2 Prise en compte de la rugosité des interfaces

Etudions à présent, l'influence de la rugosité des surfaces. Nous pouvons considérer trois cas, qui sont par ailleurs souvent étudiés dans la littérature. Premièrement, on supposera qu'une seule interface est rugueuse : la surface supérieure (cas (a) de la figure 3.12) ou la surface inférieure (cas (b)); puis on choisira les deux surfaces rugueuses et identiques mais simplement décalées en hauteur (Fig. 3.15); finalement on étudiera deux surfaces rugueuses décorréelées (Fig. 3.16). On supposera que les surfaces rugueuses sont de distribution des hauteurs et de fonction d'autocorrélation, gaussiennes.

#### Cas où une seule des deux surfaces est rugueuse

La figure 3.13 correspond au cas (a) de la figure 3.12, soit le cas où l'interface supérieure est rugueuse; nous y avons représenté la norme de  $\mathbf{M}_c$  en fonction de l'écart-type des hauteurs  $\sigma_h^+$  de l'interface supérieure, la longueur de corrélation  $L_c^+$  étant choisie fixe,  $L_c^+ = \lambda$ . Dans le cas où l'autocorrélation des hauteurs est supposée gaussienne,  $\sigma_h^+$  est lié à  $\sigma_p^+$  d'après  $\sigma_p^+ = \sqrt{2} \sigma_h^+ / L_c^+ = \sqrt{2} \sigma_h^+$ . Pour les

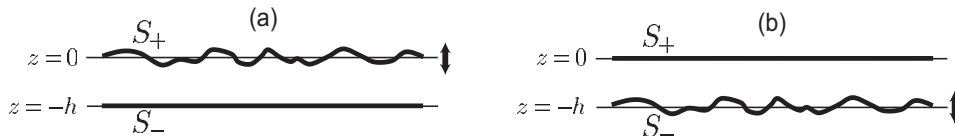


Fig.3.12 – Les deux cas étudiés.

deux surfaces, la longueur est  $L = 12\lambda$ , le pas de discrétisation est  $\Delta x = 0.03\lambda$  et  $N = 400$ ; l'épaisseur moyenne de la couche est  $h = 1.5\lambda$ . Les autres paramètres,

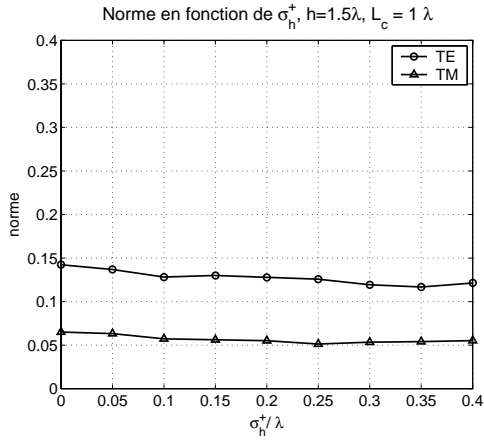


Fig.3.13 – Norme dans le cas (a) de 3.12.

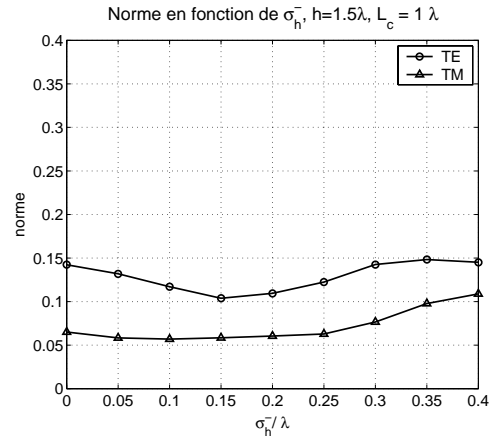


Fig.3.14 – Norme dans le cas (b) de 3.12.

tels que la permittivité des milieux, sont les mêmes que pour les figures (3.7) et (3.9). Nous avons choisi un écart-type des hauteurs maximal  $\sigma_{h,max}^+ = 0.4\lambda$ , afin que  $3\sigma_{h,max}^+ = 1.2\lambda$  soit inférieur à  $h$ , ceci pour que la surface supérieure n'intercepte pas la surface plane inférieure.

La figure 3.14 correspond au cas (b) de la figure 3.12, soit le cas où l'interface inférieure est rugueuse; les paramètres,  $\sigma_h^-$  et  $L_c^-$ , de l'interface inférieure sont choisis égaux aux paramètres,  $\sigma_h^+$  et  $L_c^+$ , du cas (a).

On voit d'après les figures 3.13 et 3.14 que la rugosité des interfaces intervient peu dans la norme de la matrice d'itération. Autrement dit, pour de faibles rugosités, i.e. un écart-type des hauteurs inférieur à  $0.4\lambda$  avec un écart-type des pentes inférieur à  $\sqrt{2} \times 0.4 \simeq 0.57$ , la norme correspondant au cas d'une interface rugueuse dessus ou dessous d'une interface plane reste à peu près identique au cas de deux interfaces planes superposées. La figure 3.11 permet donc de prédire avec une bonne approximation, dans ce cas encore, la valeur de la norme pour de grandes longueurs  $L$  des surfaces.

### Cas de deux interfaces rugueuses superposées

Les figures 3.15 et 3.16 représentent le cas où les deux interfaces sont rugueuses. Sur la figure 3.15, les surfaces sont supposées identiques (cas (c)), alors que sur la figure 3.16, elles sont choisies décorréelées (cas (d)), autrement dit, à variations indépendantes. Les figures 3.17 et 3.18 représentent la norme de la matrice itération  $\mathbf{M}_c$  en fonction de  $\sigma_h$  ( $\sigma_h^+ = \sigma_h^-$ ). La longueur de corrélation  $L_c = \lambda$  est choisie égale pour les deux interfaces, et est identique à celle des cas (a) et (b) précédents; l'épaisseur est aussi identique,  $h = 1.5\lambda$ . Cependant, nous nous sommes restreints à un écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  inférieur à  $0.3\lambda$ .

On peut remarquer que dans les deux cas, surfaces identiques ou décorréelées, la norme est peu sensible à la variation de la rugosité; pour une plage de variation de  $\sigma_h$  comprise entre 0 et  $0.3\lambda$ , elle reste comprise dans une plage de  $\pm 0.1$  par rapport



à la norme du cas plan (que l'on retrouve pour  $\sigma_h = 0$ ).

Dans le cas intermédiaire de surfaces corrélées mais non identiques, cas que nous n'avons pas étudié ici, les résultats précédents laissent penser que la norme est peu sensible à la rugosité des interfaces, tant que cette rugosité reste faible.

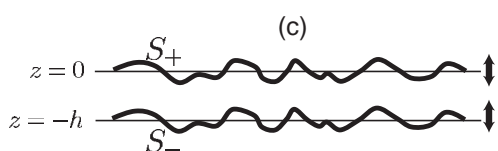


Fig.3.15 – Surfaces identiques.

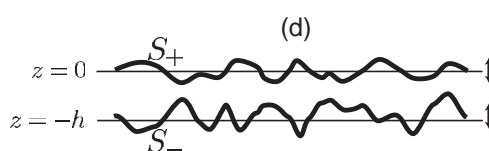


Fig.3.16 – Surfaces décorréelées.

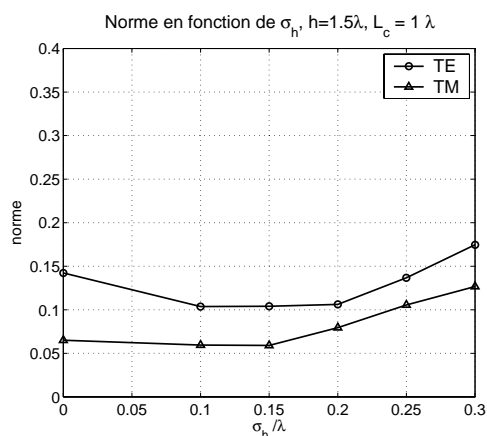


Fig.3.17 – Norme en fonction de  $\sigma_h$  pour des surfaces identiques.

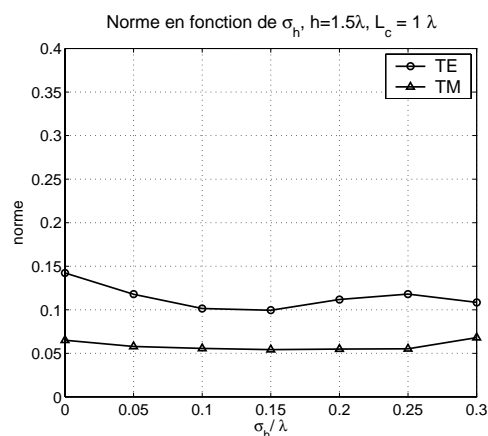


Fig.3.18 – Norme en fonction de  $\sigma_h$  pour des surfaces décorréelées.

### 3.4.4.3 Milieu inférieur parfaitement conducteur

Nous avons étudié, jusqu'ici, le cas de deux interfaces diélectriques, la permittivité relative du milieu inférieur étant  $\epsilon_{r2} = 8$ . On suppose à présent que le milieu inférieur est un conducteur parfait; nous parlons aussi de surface inférieure parfaitement conductrice, ou de cas parfaitement conducteur. Dans ce cas là, la norme est plus élevée, autrement dit, notre méthode converge moins rapidement. Afin de faciliter les comparaisons entre ce cas et le cas diélectrique étudié précédemment, nous reprenons pour les figures les mêmes paramètres que ceux utilisés dans les figures précédentes. Nous avons d'abord étudié le cas de deux interfaces planes; sur les figures 3.19, 3.20, 3.21 et 3.22, nous avons représenté la norme en fonction de l'épaisseur de la couche  $h$ , pour différentes longueurs  $L$ . Les paramètres correspondants sont identiques à ceux du cas diélectrique (figures respectives 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10).

On constate que dans le cas d'une interface inférieure parfaitement conductrice, la norme est à peu près similaire en polarisation TE ou TM. Par ailleurs, elle est plus élevée que dans le cas diélectrique. Par exemple, en polarisation TE, pour

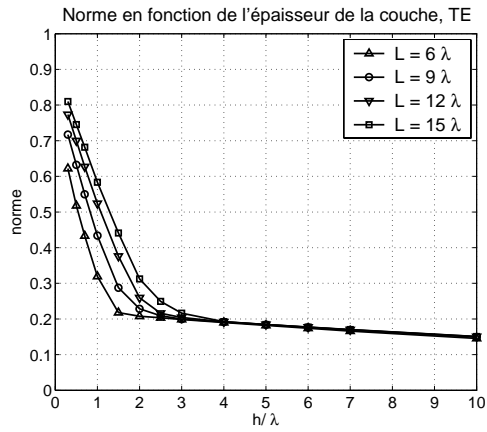


Fig.3.19 – Cas parfaitement conducteur, polarisation TE ; deux surfaces planes.

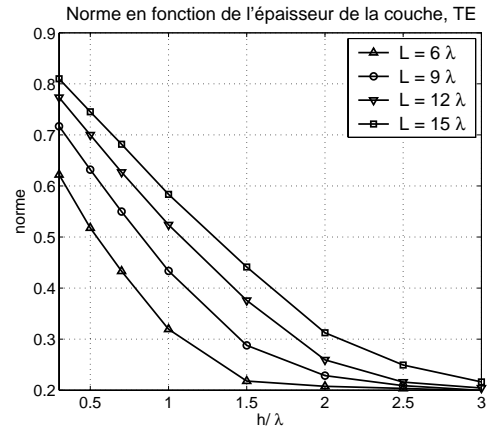


Fig.3.20 – Agrandissement de la figure (3.19) ; deux surfaces planes.

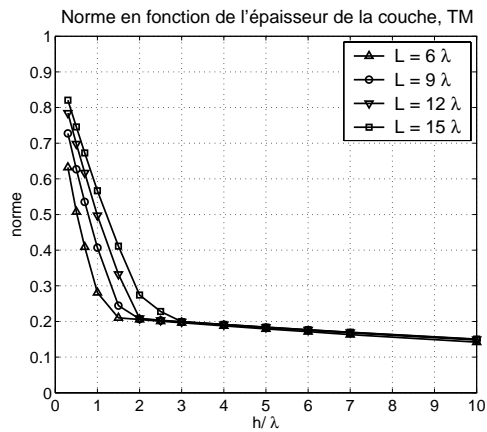


Fig.3.21 – Cas parfaitement conducteur, polarisation TM ; deux surfaces planes.

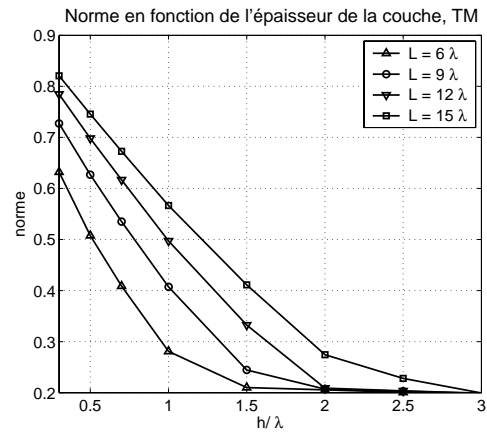
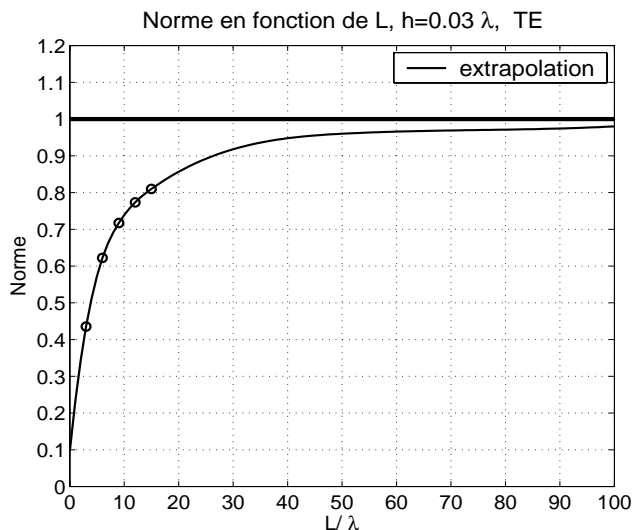


Fig.3.22 – Agrandissement de la figure (3.21) ; deux surfaces planes.

des longueurs allant de  $L = 6\lambda$  à  $15\lambda$ , elle variait entre 0.25 et 0.37 pour le cas diélectrique, pour une épaisseur  $h = 0.03\lambda$ , alors que pour la même épaisseur, elle varie de 0.6 à 0.8 dans le cas parfaitement conducteur. Cette augmentation est d'autant plus sensible en polarisation TM.

Nous avons extrapolé la norme pour des longueurs allant jusqu'à  $100\lambda$  en figure (Fig. 3.23); la figure est à comparer à la figure (Fig. 3.11) du cas diélectrique. L'épaisseur est la même,  $h = 0.3\lambda$ , et correspond au cas le plus défavorable des figures 3.19 et 3.21. On remarque, d'après la figure 3.23, que la norme semble converger par extrapolation vers une valeur de 0.95 pour une longueur de  $100\lambda$ , ce qui est très supérieur à la valeur 0.52 trouvée dans le cas diélectrique. Pour une valeur de la norme de 0.95, la méthode converge très lentement, d'où la nécessité d'une étape de préconditionnement de la matrice d'itération dans ce cas-là, afin d'accélérer la convergence.

Nous ne détaillerons pas l'étude de la rugosité des surfaces sur la norme; les



**Fig.3.23** –  $\|M_c\|_{vp}$  en fonction de  $L$  ( $h = 0.3\lambda$  et  $\Delta x = 0.03\lambda$ ). Polarisation TE.

conclusion sont similaires à celles obtenues pour le cas diélectrique. Pour résumer, la rugosité, tant qu'elle reste faible, agit peu sur la norme; ceci est vrai pour le cas d'une interface rugueuse placée au-dessus ou au-dessous d'une interface plane, ainsi que dans le cas où les deux interfaces sont rugueuses.

### 3.4.5 Préconditionnement

Nous avons vu que dans le cas où la surface inférieure est parfaitement conductrice, la norme de la matrice d'itération est plus élevée que dans le cas diélectrique et tend vers 1 pour des longueurs importantes des deux interfaces. Il est donc intéressant d'adapter notre méthode en y incluant une étape de préconditionnement. En effet, un bon préconditionnement permet de diminuer la

valeur de cette norme, et donc d'accélérer la convergence de l'algorithme. De plus, une méthode rapidement convergente a l'avantage d'être plus précise; en effet, lors de l'inversion des matrices impédance  $\mathbf{Z}^h$  et  $\mathbf{Z}^b$ , on effectue une approximation, et l'erreur introduite par cette approximation se propage à chaque itération. L'erreur relative est donc moins importante si la matrice d'itération est plus contractante (i.e. si le module de ces valeurs propres est plus petit par rapport à 1), ce qui implique que la méthode est plus rapidement convergente.

Nous avons vu que la méthode proposée utilise la décomposition en série de l'inverse de la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_c)^{-1}$ , par analogie avec la décomposition en série du cas scalaire (3.54)

$$x = \frac{1}{1-a} \Rightarrow x = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots \quad \text{si } |a| < 1 \quad (3.69)$$

Or cette série donne une approximation de  $x$ , pour un ordre donné, d'autant meilleure que  $a$  est petit.

Par exemple,

- pour  $a = 0.05$ ,  $x \simeq 1.05263$  et  $1 + a + a^2 = 1.0525$ , soit une erreur relative de  $(x - (1 + a + a^2))/x \simeq 0.0125\%$ .
- Si, par contre  $a = 0.8$ ,  $x = 5$  et  $1 + a + a^2 = 2.44$ , soit une erreur relative de  $(x - (1 + a + a^2))/x \simeq 51.2\%$ .

L'étape du préconditionnement consiste à trouver une série plus rapidement convergente, en connaissant à l'avance une approximation  $x_0$  de  $(1 - a)^{-1}$ . Cela revient à connaître une approximation  $(1 - a_0)^{-1} = x_0$  de  $(1 - a)^{-1}$ .

Par exemple, dans le cas  $a = 0.8$ , supposons que l'on utilise l'approximation  $a_0 = 0.79$ ; à ce moment, là, on peut modifier la série précédente en :

$$x = \frac{1}{1-0.8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-(0.79+0.01)} \quad (3.70)$$

que l'on transforme en

$$x = \frac{1}{1-0.79} \cdot \frac{1}{1-\frac{0.01}{1-0.79}} \simeq x_0 \frac{1}{1-0.0476} \quad \text{avec } x_0 \simeq 4.76 \quad (3.71)$$

La série obtenue en (3.71) est alors plus rapidement convergente que celle de (3.70) puisque 0.0476 est petit devant 0.8.

Nous pouvons appliquer la même démarche pour préconditionner notre méthode. Nous cherchons à développer  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_c)^{-1}$  en une série plus rapidement convergente que  $\mathbf{I} + \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_c^2 + \mathbf{M}_c^3 + \dots$  lorsque  $\|\mathbf{M}_c\|_{vp}$  est proche de 1. Pour cela, supposons que l'on puisse inverser plus facilement (en moins de calculs)  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}$ , où  $\mathbf{M}_0$  désigne une matrice "proche" de  $\mathbf{M}_c$ . A ce moment-là,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M}_c)^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0 - (\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0))^{-1} \quad (3.72)$$

$$= [(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0))]^{-1} \quad (3.73)$$

$$= [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1} \quad (3.74)$$

Le terme  $[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)]^{-1}$  peut être développé en série par analogie avec le cas scalaire (3.69) si

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)\|_{vp} < 1 \quad (3.75)$$

Mais ce qui est intéressant de remarquer, c'est que par un "bon" choix de  $\mathbf{M}_0$ , nous pouvons obtenir

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)\|_{vp} < \|\mathbf{M}_c\|_{vp} < 1 \quad (3.76)$$

et avoir ainsi une série

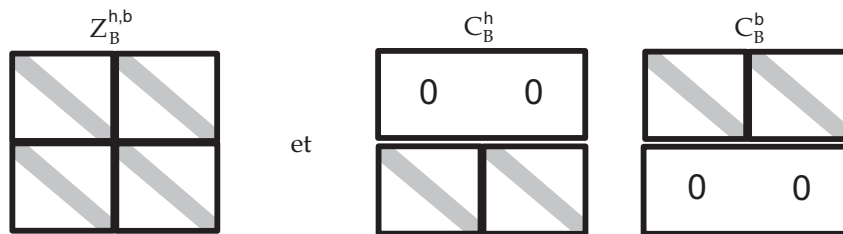
$$\mathbf{I} + [(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)] + [(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)]^2 + \dots \quad (3.77)$$

plus rapidement convergente que  $\mathbf{I} + \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_c^2 + \mathbf{M}_c^3 + \dots$

Dans le cas limite, en choisissant  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_c$ , nous avons

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0)\|_{vp} = 0 \ll \|\mathbf{M}_c\|_{vp} < 1 \quad (3.78)$$

L'efficacité du préconditionnement repose donc complètement sur le choix de  $\mathbf{M}_0$ ; il faut prendre pour  $\mathbf{M}_0$ , une matrice "proche" de  $\mathbf{M}_c = (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b$ , tout en faisant en sorte que  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}$  soit beaucoup plus facile à calculer que  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_c)^{-1}$ . Par proche, nous entendons, une matrice ayant ses valeurs propres "proches" de celles de  $\mathbf{M}_c$ . Ceci peut s'obtenir assez facilement, en remarquant que les matrices que l'on considère sont un assemblage de matrices blocs carrées ayant des diagonales dominantes. Or les matrices à diagonale dominante ont à peu près les mêmes valeurs propres que leur matrice bande associée. Par ailleurs, l'inverse d'une matrice bande est une matrice bande ainsi que le produit de deux matrices bandes (la largeur de bande des matrices résultantes étant toutefois différente). Par conséquent un choix intéressant pour  $\mathbf{M}_0$  est la matrice  $\mathbf{M}_0 = (\mathbf{Z}_B^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}_B^h \cdot (\mathbf{Z}_B^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}_B^b$  où les matrices  $(\mathbf{Z}_B^h)^{-1}$ ,  $\mathbf{C}_B^h$ ,  $(\mathbf{Z}_B^b)^{-1}$  et  $\mathbf{C}_B^b$  sont un assemblage de matrices bandes (de même largeur de bande), que nous avons représenté, pour le cas diélectrique, sur la figure 3.24.



**Fig.3.24** – Forme des matrices bandes  $(\mathbf{Z}_B^h)^{-1}$ ,  $\mathbf{C}_B^h$ ,  $(\mathbf{Z}_B^b)^{-1}$  et  $\mathbf{C}_B^b$ , pour le cas diélectrique.

La matrice  $\mathbf{M}_0$  ainsi choisie a la forme d'une matrice bande par blocs de dimension  $2N \times 2N$ , de forme similaire aux matrices  $\mathbf{Z}_B^h$  et  $\mathbf{Z}_B^b$ . Cette forme est

conservée pour la matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{M}_0$ , et on calcule  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}$  par décomposition LU incomplète (LUINC), qui demande peu de calculs.

Notre méthode avec préconditionnement s'écrit finalement comme une variante de (3.55) :

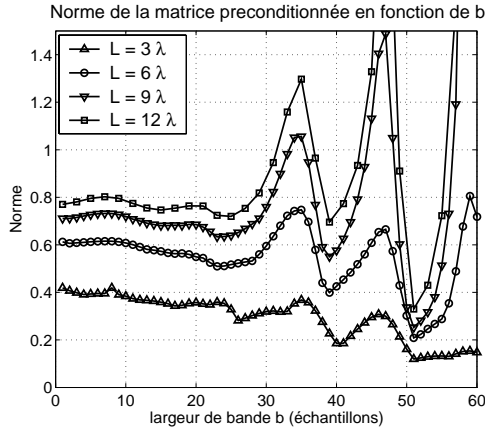
$$\mathbf{X}_+ = \left[ \sum_{m=0}^M ((\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1}(\mathbf{M}_c - \mathbf{M}_0))^m \right] (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1} \cdot (\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_+ \quad (3.79)$$

Le choix de la largeur de bande reste encore à déterminer. On pourrait penser intuitivement que pour une configuration donnée, plus la largeur de bande  $b$  est grande, plus la matrice approchée  $\mathbf{M}_0$  aura des valeurs similaires à celles de la matrice originale  $\mathbf{M}_c$ . Cependant, il nous a semblé intéressant de représenter en figure (3.25), la norme de la matrice préconditionnée en fonction de la largeur de bande choisie.

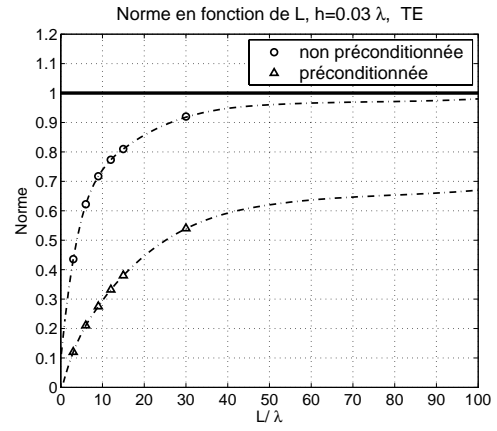
Théoriquement, pour une largeur de bande maximale,  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_c$ , et donc, d'après (3.78), la matrice préconditionnée aura une norme idéale de 0. Cependant, un choix intermédiaire de la largeur de bande peut amener à des résultats très médiocres. Comme on peut le constater sur la figure 3.25, la norme de la matrice préconditionnée ne diminue pas régulièrement vers cette valeur idéale nulle pour des valeurs de  $b$  croissantes. Au contraire, elle présente des oscillations d'autant plus grandes que la norme initiale de la matrice non préconditionnée  $\mathbf{M}_c$  est grande. On peut d'ailleurs retrouver la norme de cette matrice  $\mathbf{M}_c$  en prenant  $b = 0$  sur la figure 3.25. Pour deux valeurs proches de  $b$ , on constate que la norme de  $\mathbf{M}_0$  peut varier fortement : pour  $L = 12\lambda$ , en choisissant  $b = 47$  coefficients, la norme est de 1.7, ce qui donne une méthode préconditionnée divergente, alors qu'en choisissant  $b = 51$ , elle est seulement égale à 0.33.

La présence de fortes oscillations, pour une largeur de bande constante, lorsque  $L$  augmente, ne veut pas dire pour autant que les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}_0$  sont moins bien approchées que dans le cas d'une longueur plus faible. Ces oscillations traduisent plutôt la plus faible tolérance du préconditionnement sur la précision des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}_0$ , lorsque la matrice de départ  $\mathbf{M}_c$  a une norme élevée. Autrement dit, si on désire préconditionner une matrice  $\mathbf{M}_c$  de norme très inférieure à 1, on est assez libre quant au choix de  $b$ . En revanche, si la matrice  $\mathbf{M}_c$  a une norme proche de 1, i.e. quant il est d'autant plus intéressant d'utiliser un préconditionneur, il faut sélectionner très finement la largeur de bande sous peine d'obtenir une matrice préconditionnée  $\mathbf{M}_0$  de norme plus élevée que la matrice non préconditionnée.

Cependant le problème est résolu si l'on regarde de plus près la figure 3.25. En effet, tout les autres paramètres étant fixés, le choix d'une largeur de bande  $b$ , résultant d'un compromis entre une faible norme et une largeur  $b$  la plus petite possible, conduit au même choix de  $b$  indépendamment de la longueur  $L$  de la surface. Concrètement, pour la configuration étudiée, le choix  $b = 51$  est intéressant lorsque  $L = 3, 6, 9$  ou  $12\lambda$ . Pour une configuration donnée, une méthode pour choisir cette valeur  $b$  optimale est donc d'étudier au préalable la norme de  $\mathbf{M}_0$  en fonction de  $b$ , et de garder cette valeur de  $b$  pour construire la matrice  $\mathbf{M}_0$  pour une longueur plus



**Fig.3.25** – Norme de la matrice  $\|(I - M_0)^{-1}(M_c - M_0)\|_{vp}$  en fonction de la largeur de bande  $b$  des sous matrices de  $(Z_B^{h,b})^{-1}$  et  $C_B^{h,b}$ .



**Fig.3.26** – Norme de la matrice  $\|(I - M_0)^{-1}(M_c - M_0)\|_{vp}$  par rapport à la matrice non preconditionnée  $\|M_c\|_{vp}$ , pour  $b = 51$ , en fonction de  $L$ .

élevée.

En procédant ainsi, nous avons choisi  $b = 51$  coefficients pour tracer la figure (3.26) ; nous avons représenté l'effet du preconditionnement, en comparant la norme de la matrice d'itération preconditionnée et non preconditionnée. On peut constater que l'effet du preconditionnement est notable, et il en est de même pour les autres configurations (surface inférieure diélectrique, surfaces supérieure et inférieure rugueuses ou non).

Après avoir détaillé notre méthode, nous allons la valider en la comparant à différents résultats de la littérature.

### 3.5 Résultats numériques

Nous appliquons notre méthode à différentes configurations rencontrées dans la littérature [27, 152, 158]. Les résultats des articles étudiés ont été obtenus à partir de modèles asymptotiques [27, 158] et de modèles rigoureux [152].

Les paramètres des différentes configurations étudiées sont représentés dans le tableau 3.1.

Nous noterons les différents ordres de notre méthode,  $I_0, I_1, I_2, \dots$  comme étant :

$$\begin{aligned}
 I_+^{(0)} &= X_+^{(0)} \\
 I_+^{(1)} &= X_+^{(0)} + X_+^{(1)} \\
 I_+^{(2)} &= X_+^{(0)} + X_+^{(1)} + X_+^{(2)} \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

et  $I_-^{(k)} = -[(Z^b)^{-1} \cdot C^b] \cdot I_+^{(k)}$ .

Par ailleurs, les représentations du module du champ dans la couche et dans le milieu

Fig.	Param. onde			Paramètres des surfaces						permittivités relatives ( $\varepsilon_{r0} = 1$ )
	pol.	$\theta_i$	$g$	$S(k)$	$\sigma_h$ ( $\lambda$ )	$\sigma_p$	$h$ ( $\lambda$ )	$L$ ( $\lambda$ )	$\Delta x$ ( $\lambda$ )	
3.27 ↓ 3.29	TE	$60^\circ$	$L/10$	+ : P - : P	0 0	0 0	10	100	0.1	$\varepsilon_{r1} = 2$ $\varepsilon_{r2} = 4$
3.30 ↓ 3.37	TE	$30^\circ$	$L/6$	+ : G - : G	0.01 0.35	0.014 0.49	1.5	70	0.03	$\varepsilon_{r1} = 2.5 + 0.01i$ $\varepsilon_{r2} = 8$
3.38	TE	$0^\circ$	$L/10$	+ : G - : G	0.35 0.35	0.49 0.49	1.5	70	0.03	$\varepsilon_{r1} = 2.5 + 0.01i$ $\varepsilon_{r2} = 8$
3.39	TM	$0^\circ$	$L/10$	+ : G - : G	0.35 0.35	0.49 0.49	1.5	70	0.03	$\varepsilon_{r1} = 2.5 + 0.01i$ $\varepsilon_{r2} = 8$
3.40 ↓ 3.42	TE	$0^\circ$	$L/10$	+ : P - : WO	0 0.047	0 0.42	0.79	160	0.05	$\varepsilon_{r1} : 2.69 + 0.01i$ $\varepsilon_{r2} = i\infty$
3.45	TE	$18^\circ$	$L/10$	+ : G - : P	0.016 0	0.054 0	9.49	100	0.05	$\varepsilon_{r1} = 2.69 + 0.075i$ $\varepsilon_{r2} = i\infty$

**Tab.3.1** – Paramètres des figures tracées.  $S(k)$  désigne le spectre des hauteurs des surfaces  $S^+$  et  $S^-$ ; il est nul dans le cas plan (P), gaussien dans le cas (G) et de West-O'Donnell dans le cas (WO).

inférieur (lorsque celui-ci n'est pas conducteur parfait) seront obtenues d'après les équations (3.6) et (3.7), respectivement.

### 3.5.1 Cas plan

Considérons, en premier, le cas d'une couche plane délimitant un milieu supérieur  $\Omega_0$ , assimilé au vide, et des milieux intermédiaire  $\Omega_1$  et inférieur  $\Omega_2$ , tous deux diélectriques sans pertes. En figure 3.27, nous avons représenté le module du champ transmis dans la couche ainsi que dans le milieu inférieur, les champs ayant été obtenus en appliquant notre méthode à l'ordre 5. Les paramètres de la configuration sont donnés dans le tableau 3.1. Nous avons aussi représenté le module du champ (et de sa dérivée normale), sur les surfaces supérieure et inférieure, en figure 3.28 (respectivement, 3.29); ces valeurs des champs et de leur dérivée normale sont extraits des vecteurs d'ordre 5,  $\mathbf{I}_+^{(5)}$  et  $\mathbf{I}_-^{(5)}$ , donnés par (3.80).

Nous avons représenté sur la figure 3.27, les directions des vecteurs d'onde pour les différentes réflexions visibles (i.e. pour lesquelles le champ a un module supérieur à  $1/256 \simeq 0.004$ , la figure étant représentée en 256 couleurs, les valeurs en couleur noir correspondant aux valeurs du module du champ inférieures à 0.004). Comme on peut le constater sur ces figures, le champ déterminé par notre méthode correspond au champ prédit par la théorie [22]. En effet, le champ incident est d'abord réfléchi partiellement par la surface supérieure dans la direction spéculaire (Fig. 3.27 et



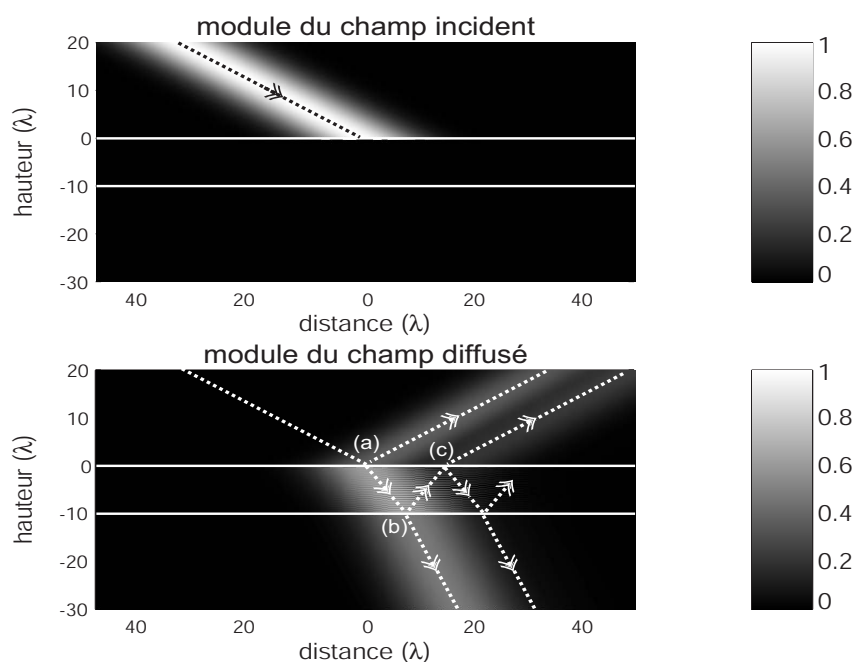


Fig.3.27 – Modules des champs incident et diffusé, pour le cas plan.

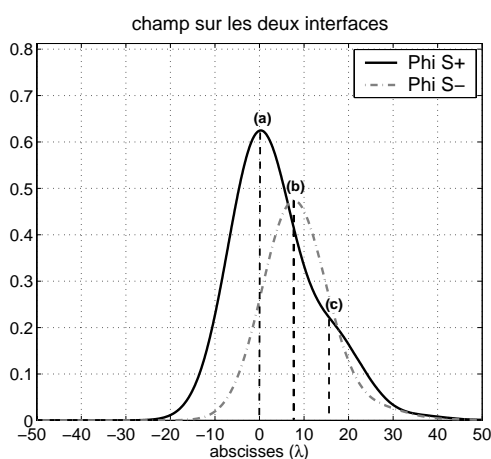


Fig.3.28 – Module du champ sur chaque interface.

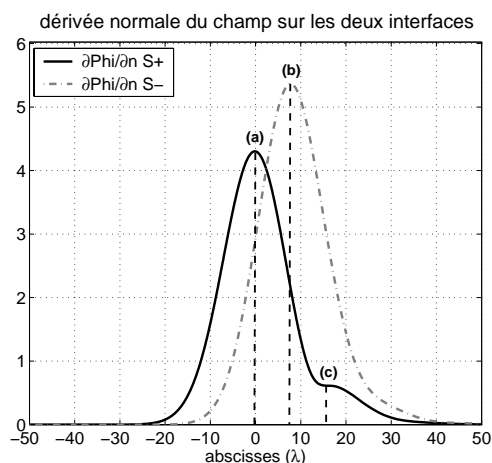


Fig.3.29 – Module de la dérivée normale du champ sur chaque interface.

point (a) des figures 3.28 et 3.29), ainsi qu'il est transmis dans la couche; il a alors subi une deuxième réflexion partielle sur la surface inférieure (Fig. 3.27 et point (b) des figures 3.28 et 3.29); le faisceau réfléchi rencontre la surface supérieure au point (c) des figures 3.28 et 3.29, alors que le champ transmis se propage dans le milieu inférieur. En revanche, du fait de l'atténuation du champ après chaque réflexion et transmission, les réflexions multiples suivantes ne sont pas visibles sur les figures 3.28 et 3.29. Cette remarque concorde avec la condition de champ nul sur les bords

de la couche, condition nécessaire lors de l'établissement des équations intégrales (3.4).

Comme on vient de le voir, le point (a) correspond au maximum d'amplitude de l'onde incidente. On peut prédire, par ailleurs, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  des faisceaux transmis dans la couche et dans le milieu inférieur, respectivement, ainsi que la position des maxima locaux (b) et (c). En effet, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont liés à l'angle d'incidence  $\theta_i$  et aux permittivités relatives  $\varepsilon_{r0}$ ,  $\varepsilon_{r1}$  et  $\varepsilon_{r2}$ , par :

$$\sqrt{\varepsilon_{r0}} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_{r1}} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_{r2}} \sin \beta \quad (3.81)$$

Avec les valeurs  $\varepsilon_{r0} = 1$ ,  $\varepsilon_{r1} = 2$  et  $\varepsilon_{r2} = 4$ , on obtient  $\alpha \simeq 37.76^\circ$  et  $\beta \simeq 25.60^\circ$ . Si on note  $x_b$  et  $x_c$  les abscisses des points (b) et (c), on a alors, théoriquement,  $x_b = h \tan \alpha \simeq 7.75\lambda$  et  $x_c = 2h \tan \alpha = 2x_b \simeq 15.50\lambda$ , ce qui correspond aux valeurs obtenues en figures 3.28 et 3.29.

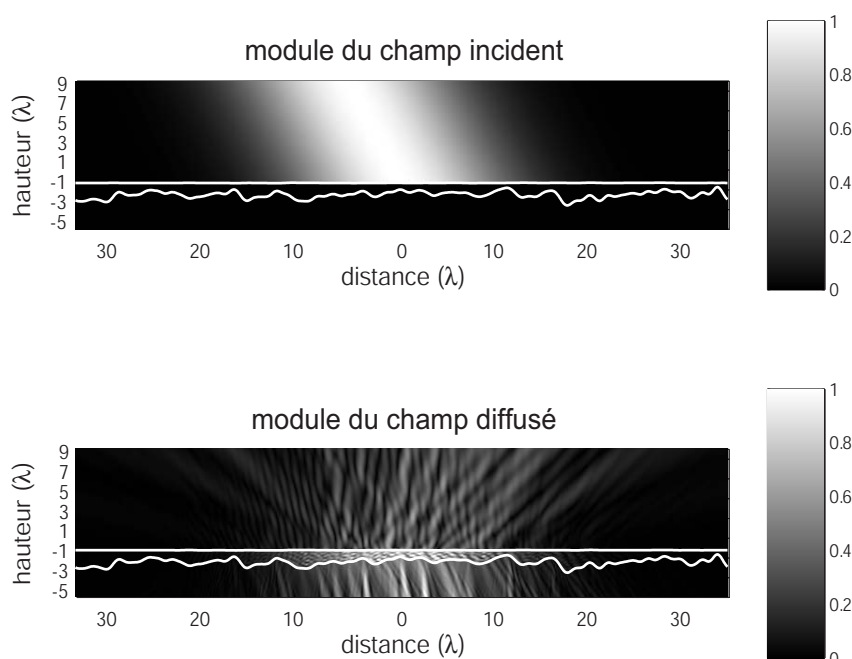
### 3.5.2 Article de M. Saillard et G. Toso, *Radio Science*, 1997 [152]

En premier exemple, nous comparons notre méthode à la méthode intégrale développée dans [152]. Leur méthode repose sur une formulation intégrale différente de la notre; ils considèrent comme inconnues surfaciques, non pas les composantes tangentielles du champ électromagnétique, mais des courants de surface fictifs, qui rayonnent le véritable champ diffusé. Le champ diffusé est alors décrit à l'aide de potentiels de simple et de double couche [122]. Cette méthode a été appliquée précédemment dans le cas d'une seule surface diélectrique [150]. L'avantage de leur méthode par rapport à la notre, est que le nombre d'inconnues surfaciques est divisé par deux. En revanche, l'inconvénient est que la matrice impédance réclame plus de calculs du fait des noyaux de forme plus compliquée. Un autre inconvénient est que la formulation compacte de leur matrice impédance rend plus compliqué le développement d'algorithmes rapides.

Par ailleurs, les auteurs de [152] utilisent la méthode dite *beam simulation* [149], qui consiste à décomposer une onde incidente plane en somme de faisceaux gaussiens d'étendue spatiale réduite.

Nous avons étudié premièrement la configuration de la figure 9 de [152]; les paramètres de la configuration sont donnés dans le tableau 3.1. Il s'agit d'une couche de sable étendue sur du granit; cette configuration est intéressante car elle fait intervenir deux interfaces de rugosités très différentes. En effet, la surface supérieure satisfait les conditions d'application de la méthode des petites perturbations ( $\sigma_h^+ = 0.01\lambda$ ,  $\sigma_p^+ = 0.014$ ), alors que la surface inférieure satisfait l'hypothèse de Kirchhoff ( $\sigma_h^- = 0.35\lambda$ ,  $\sigma_p^- = 0.49$ ). La détermination du champ diffusé de façon analytique poserait problème pour cette configuration, du fait des deux domaines de validité mis en jeu. Néanmoins, nous pouvons apporter une réponse exacte de façon numérique; la méthode présentée en [152] ainsi que la nôtre, sont applicables dans ce cas là.

Avant de chercher à obtenir le coefficient de diffusion en appliquant la méthode de Monte-Carlo, nous avons étudié la condition d'énergie nulle sur les bords de la couche, ainsi que la convergence de notre méthode, pour une réalisation des deux



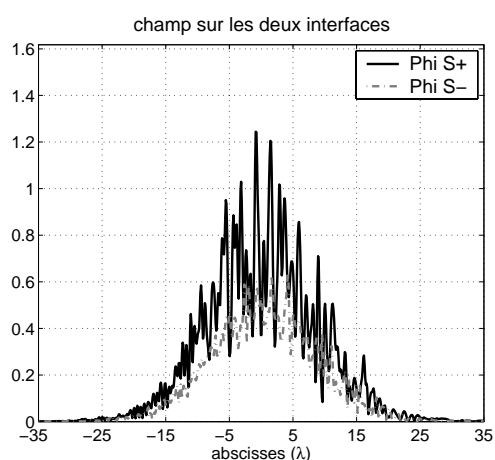
**Fig.3.30** – Modules des champs incident et diffusé, pour la configuration de la figure 9 de [152].

surfaces. Nous avons représenté sur la figure 3.30 le module du champ transmis dans la couche ainsi que dans le milieu inférieur, où les champs ont été obtenus en appliquant notre méthode à l'ordre 5.

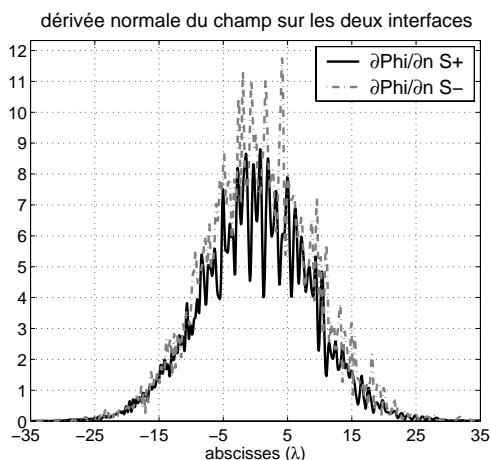
D'après cette figure, pour un angle d'incidence de  $\theta_i = 30^\circ$  et un paramètre d'atténuation  $g$  de l'onde incidente choisi égal à  $g = L/6 \simeq 11.7\lambda$ , le champ diffusé dans la couche est très faible à ses extrémités. On arrive à la même conclusion en observant les figures 3.31 et 3.32, où sont représentés le module du champ et de sa dérivée normale, respectivement, sur les surfaces supérieure et inférieure. Nous avons alors tracé sur les figures 3.33 et 3.34 les coefficients de diffusion en échelle linéaire, obtenus pour les ordres 0 et 5 (à partir, respectivement, de  $\mathbf{I}_+^{(0)}$  et de  $\mathbf{I}_+^{(5)}$ ). Nous les avons comparés à la solution exacte obtenue par l'inversion par blocs exacte de la matrice impédance, en utilisant les formules (3.47).

On retrouve en figure 3.33 que la solution d'ordre 0 correspond à la diffusion par une seule interface, en l'occurrence ici, l'interface quasi-plane air/sable. On y observe un maximum de puissance dans la direction spéculaire, et le coefficient de diffusion ressemble dans ce cas là à celui que l'on obtiendrait pour une surface plane. En figure 3.34 on constate que notre méthode converge rapidement, et à l'ordre 5, le coefficient de diffusion que l'on obtient est très proche du coefficient exact.

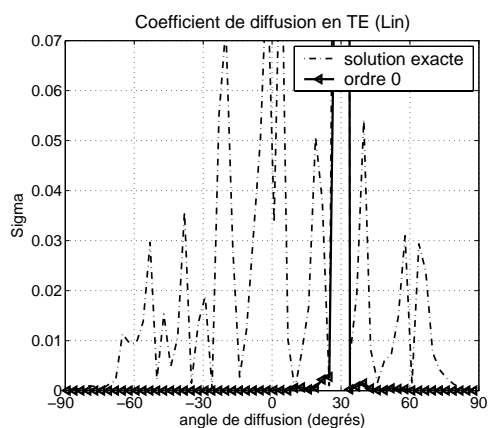
On peut voir par ailleurs la convergence rapide de notre méthode en figure 3.35, où on a représenté un agrandissement d'un détail de la figure 3.34, avec, en plus, une



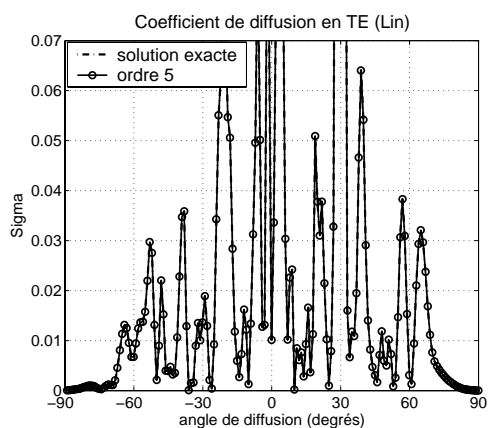
**Fig.3.31** – Module du champ sur chaque interface.



**Fig.3.32** – Module de la dérivée normale du champ sur chaque interface.



**Fig.3.33** – Coefficient de diffusion correspondant à la solution d'ordre 0.

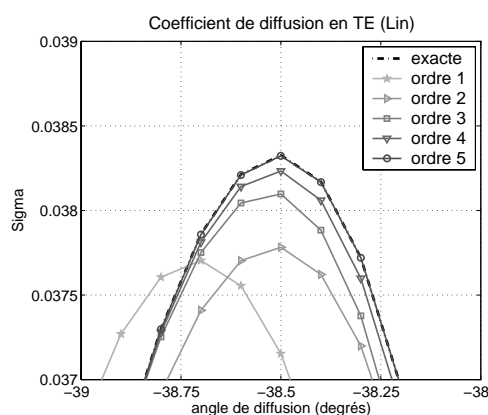


**Fig.3.34** – Coefficient de diffusion correspondant à la solution d'ordre 5.

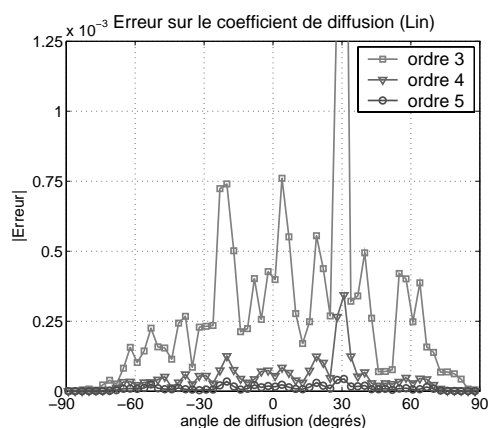
représentation des ordres 2, 3, et 4. Nous avons représenté en figure 3.36, l'évolution de la valeur absolue de l'erreur entre les solutions d'ordre 3, 4 et 5 et le coefficient de diffusion exact. On relève, pour la solution d'ordre 5 une erreur moyenne de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Nous avons réalisé par la suite un moyennage du coefficient de diffusion par la méthode de Monte-Carlo. Nous avons utilisé pour cela notre méthode à l'ordre 5 ; nous avons représenté sur la figure 3.37 le moyennage obtenu pour 300 réalisations. Nos résultats concordent de façon précise avec la solution présentée en figure 9 dans [152] ; nous avons dénommé cette dernière, solution de référence.

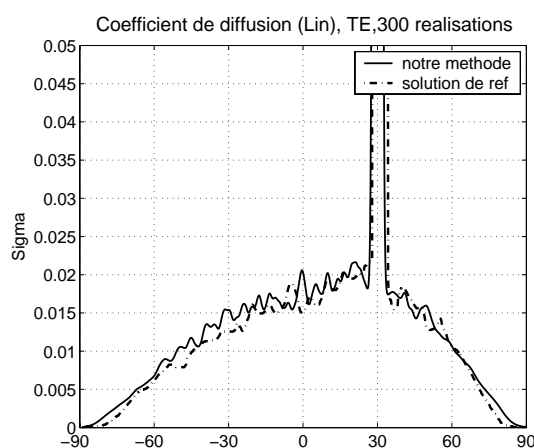
Nous avons également appliqué notre méthode pour la configuration de la figure 11 de [152] ; les coefficients de diffusion correspondants sont représentés en figures



**Fig.3.35** – Détail de la convergence de la méthode; comparaison avec la solution exacte.



**Fig.3.36** – Valeur absolue de l'erreur par rapport au coefficient exact pour les solutions d'ordre 3, 4 et 5.



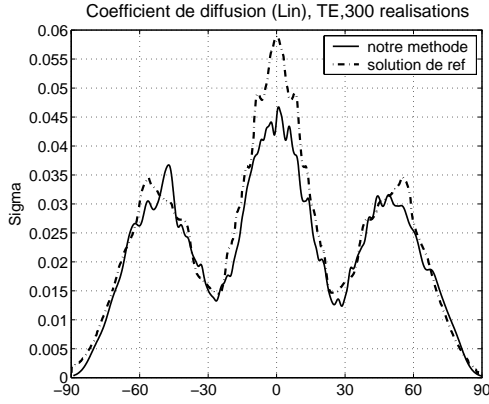
**Fig.3.37** – Coefficient de diffusion total; configuration de la figure 9 de [152].

3.38 et 3.39 ; ils sont comparés à la solution de référence donnée par [152]. On constate que les coefficients que l'on obtient sont d'une bonne précision, sachant qu'on est en échelle linéaire; en échelle logarithmique (résultats non représentés ici), les faibles différences disparaissent.

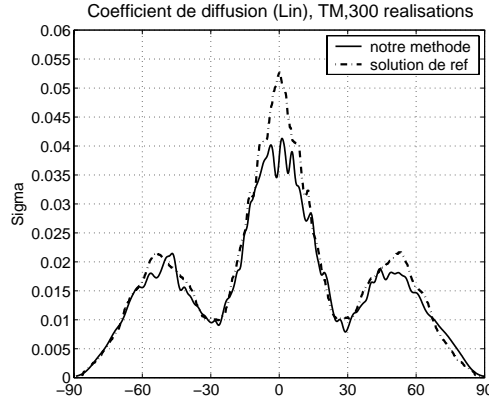
### 3.5.3 Article de Simonsen et Maradudin, *Opt. Comm.*, 1999 [158]

Nous avons, dans un troisième exemple, appliqué notre méthode à la configuration étudiée en figure 3(a) par Simonsen et Maradudin dans [158]. La différence notable par rapport aux deux exemples précédents est que le milieu inférieur est, cette fois, parfaitement conducteur. La surface supérieure est plane, et la surface inférieure a un spectre des hauteurs de type West O'Donnell; ce spectre est étudié dans le premier chapitre.

Les auteurs de [158] prédisent à l'aide de la méthode de Rayleigh les pics qui



**Fig.3.38** – Polarisation TE; configuration de la figure 11 de [152].



**Fig.3.39** – Polarisation TM; configuration de la figure 11 de [152].

apparaissent dans le coefficient de diffusion correspondant à cette configuration. Outre le pic principal, qui correspond à la direction spéculaire, les auteurs observent des pics secondaires d'amplitude moindre. Selon eux, ces pics sont dus à des ondes guidées qui se propagent dans la couche. Ces ondes guidées sont couplées à l'onde incidente par la rugosité de la surface inférieure, qui diffuse, dans la couche, l'énergie incidente dans toutes les directions.

De manière générale, si la couche peut véhiculer  $n$  ondes guidées, et si on note  $q_n$  le nombre d'onde de chacune de ces ondes, on montre [153, 163] que les pics de diffusion devraient être observés dans les directions  $\theta_{(m,n)}^\pm$  données par

$$\sin \theta_{(m,n)}^\pm = -\sin \theta_i \pm \frac{1}{k_0} [q_m - q_n] \quad (3.82)$$

Cependant, les pics de diffusion ne sont pas tous visibles; ceci est le cas pour les couples  $(m, n)$  où le terme de droite est supérieur à 1.

Dans les simulations effectuées, l'angle d'incidence est choisi nul. Pour la configuration considérée, seuls deux modes se propagent en polarisation TE [153]. Leur nombre d'onde est  $q_1 = 1.2423 k_0$  et  $q_2 = 1.5466 k_0$ . D'après (3.82), on doit observer un pic dans les directions  $\theta_{(1,2)}^\pm \simeq \pm 17.7^\circ$ .

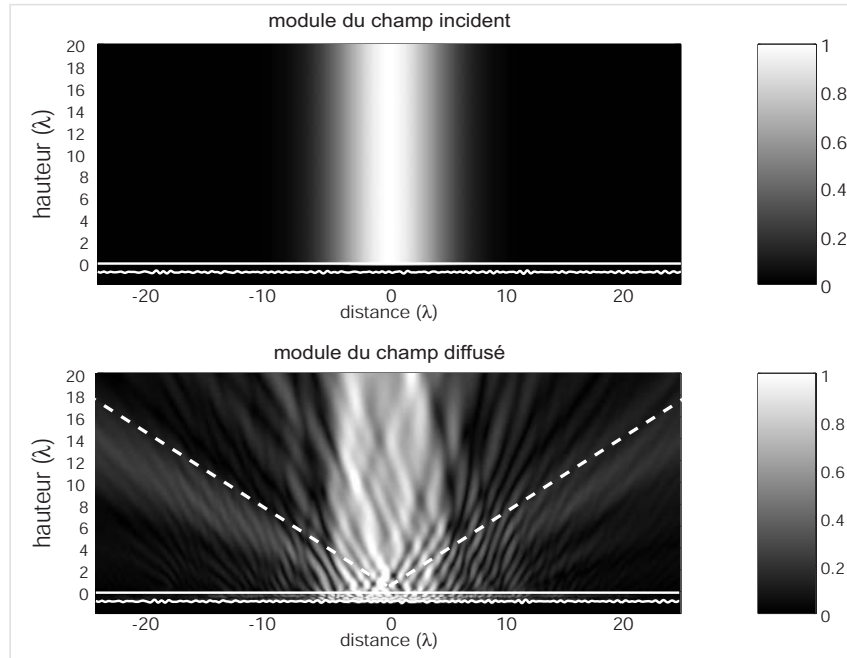
Par ailleurs, les auteurs utilisent une surface inférieure de type West O'Donnell afin d'exciter de façon précise et efficace les ondes guidées de la couche. Rappelons que le spectre WO est défini à l'aide de deux nombre d'onde de coupure  $k_-$  et  $k_+$ , définis dans le premier chapitre; en choisissant ces nombre d'ondes tels que

$$k_- < q_n < k_+ \quad \forall n \quad (3.83)$$

la surface inférieure renvoie la plus grande partie de l'énergie de l'onde incidente dans les directions excitant les ondes guidées. A titre de comparaison, si la surface inférieure avait un spectre gaussien, l'énergie de l'onde incidente serait renvoyée majoritairement dans la direction spéculaire ( $\theta_s = 0^\circ$ ) et, comparativement avec la surface WO, peu d'énergie aurait servi à exciter les ondes guidées dans la couche. Comme nous l'avons expliqué dans le premier chapitre, l'emploi d'un spectre WO

est aussi plus intéressant que celui d'un spectre gaussien par le fait qu'il permet d'observer plus aisément des variations du coefficient de diffusion dans des directions proches de la direction spéculaire.

Nous avons employé notre méthode pour réaliser des représentations graphiques des champs où les phénomènes mis en jeu sont mis en évidence de façon claire. Sur la figure 3.40, nous avons représenté le module du champ diffusé dans la couche et dans le milieu supérieur, en appliquant notre méthode à l'ordre 3.



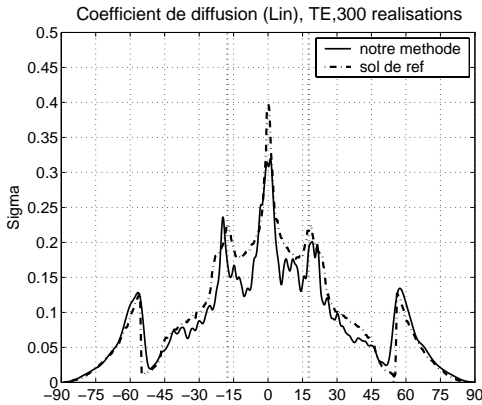
**Fig.3.40** – Modules des champs incident et diffusé, pour la configuration de la figure 3(a) de [158].

Les traits en pointillés représentent les angles limites  $\theta_L^\pm$  au delà desquels l'énergie due aux réflexions simples est renvoyée, après diffusion par la couche du bas. Ces angles limites  $\theta_L^\pm$  ont été calculés dans le premier chapitre, où nous avons considéré une surface WO de même caractéristiques statistiques que celle de la figure 3.40, avec  $k_- = 0.82k_0$  et  $k_+ = 1.92k_0$ . Ces valeurs sont choisies telles que  $k_- < q_1 < q_2 < k_+$ . Il faut noter que ces angles limites prédits pour le cas d'une seule interface, restent inchangés pour le cas de deux interfaces lorsque l'interface supérieure est plane. En effet, dans ce cas-là, les angles limites  $\theta_{L,c}^\pm$  dans la couche, sont donnés par

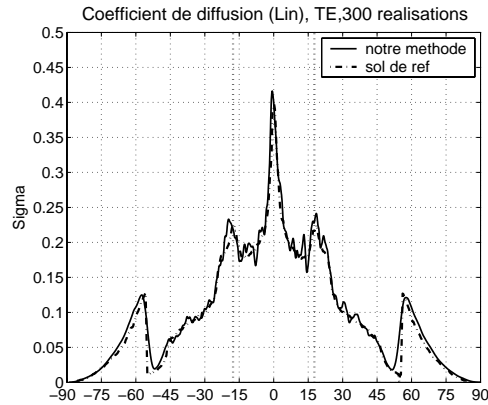
$$|k_1 \sin \theta_{L,c}^\pm| = k_- \quad (3.84)$$

Or, d'après les lois de Snell-Descartes,  $k_1 \sin \theta_{L,c}^\pm = k_0 \sin \theta_L^\pm$ , donc la relation (3.84) est équivalente à la relation pour le cas simple interface  $|k_0 \sin \theta_L^\pm| = k_-$ . D'après le calcul donné dans le premier chapitre, on trouve  $|\theta_L^\pm| \simeq 55.1^\circ$ .

Nous retrouvons cette valeur particulière en observant les figures 3.41 et 3.42, où nous avons tracé le coefficient de diffusion en échelle linéaire, après moyennage, par la méthode de Monte-Carlo, de 300 réalisations. En figure 3.41, la solution est celle d'ordre 5, alors qu'en figure 3.42, elle a été obtenue à l'ordre 15. Nous avons dénommé "solution de référence" la solution fournie par [158], et obtenue d'après la méthode approchée de Rayleigh. Les paramètres de la configuration sont les mêmes que ceux de la configuration précédente, et sont rappelés dans le tableau 3.1.



**Fig.3.41** – Coefficient de diffusion incohérent. Méthode à l'ordre 5. Configuration de la figure 3 de [158].



**Fig.3.42** – Coefficient de diffusion incohérent. Méthode à l'ordre 15. Configuration de la figure 3 de [158].

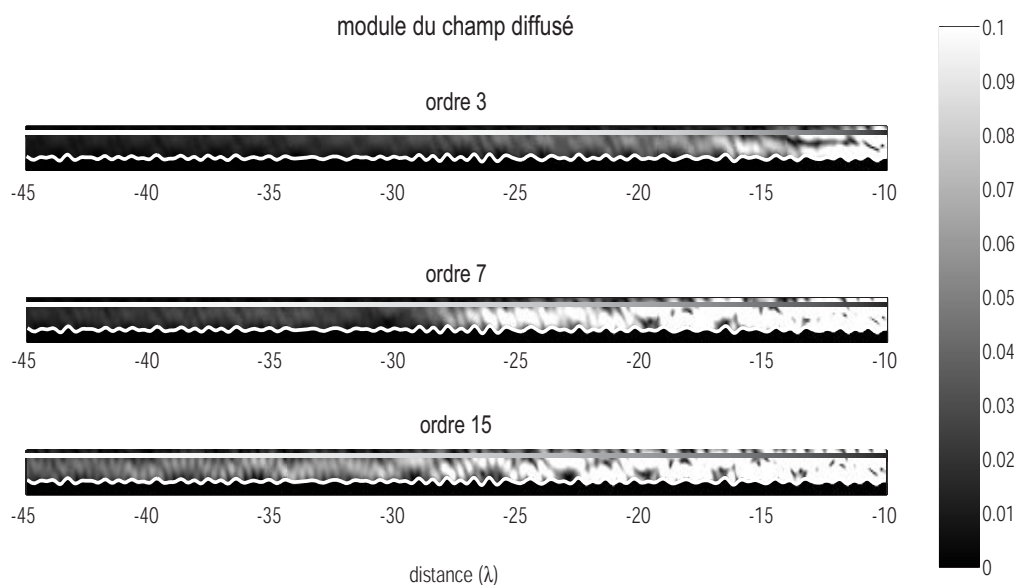
Nous retrouvons sur ces figures la valeur prédite  $|\theta_L^\pm| \simeq 55.1^\circ$ , qui délimite la brusque augmentation du coefficient de diffusion pour des angles d'observation  $|\theta_s| > 55.1^\circ$ . Pour de tels angles, l'énergie principale correspond à l'énergie diffusée après réflexion simple sur l'interface inférieure de la couche. Par ailleurs, nous observons les pics de diffusion dûs aux ondes guidées aux environs des angles  $\theta_{(1,2)}^\pm \simeq \pm 17.7^\circ$ . Le léger écart angulaire entre la position théorique et celle effectivement trouvée provient du fait que ces angles théoriques correspondent au cas parfait d'une couche plane; or les simulations numériques rigoureuses intègrent la rugosité de la surface inférieure.

Nous remarquons que notre méthode ne converge pas aussi rapidement vers la solution de référence que dans la configuration précédente (celle de l'article de M. Saillard et G. Toso). Cependant, après une étape de préconditionnement, nous obtenons (résultats non présentés ici), en seulement 5 itérations environ, un coefficient de diffusion aussi précis que celui obtenu sans préconditionnement à l'ordre 15.

La différence de niveau observée sur la figure 3.41, entre le coefficient de diffusion de référence et le nôtre, obtenu à l'ordre 5, peut être expliquée à l'aide de la figure 3.43. Nous y avons représenté le module du champ diffusé dans la couche à partir des solutions d'ordre 3, 7 et 15.

Cette représentation graphique permet de mieux appréhender la propagation





**Fig.3.43** – Modules du champ diffusé dans la couche, pour la configuration de la figure 3 de [158]. Comparaison des solutions d'ordre 3, 7 et 15.

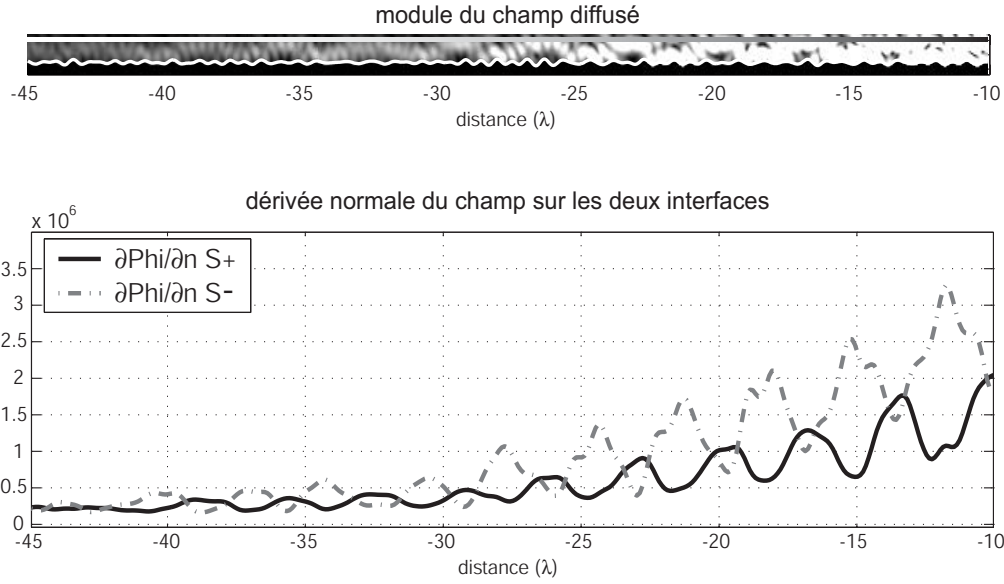
des deux ondes guidées dans la couche. Ces ondes ayant des nombre d'onde  $q_1$  et  $q_2$  proches, le champ total résultant semble montrer la propagation d'une seule onde guidée, à la différence près que l'onde résultante présente des battements dus à la somme cohérente des deux modes.

D'autre part, nous pouvons constater clairement, sur ces figures, que les réflexions multiples dans la couche sont d'autant mieux prises en compte que la méthode est appliquée à un ordre élevé. Nous pensons que la méthode converge plus lentement que dans la configuration précédente (Fig. 3.34), car, ici, des ondes guidées se propagent dans la couche; ces ondes s'atténuant très lentement en amplitude, les réflexions multiples d'ordre élevé contribuent donc de façon importante au coefficient de diffusion.

Une façon de constater le lent amortissement en amplitude de ces ondes guidées est d'observer le module de la dérivée normale du champ, sur les surfaces supérieure et inférieure, représenté en figure 3.44. Ces courbes sont obtenues à partir de la solution d'ordre 15, et elles ont été lissées.

### 3.5.4 Article de O. Calvo-Perez, J. J. Greffet et A. Sentenac, *Journ. Opt. A*, 1999 [27]

En dernier exemple, nous avons étudié la configuration utilisée dans [27]. Les auteurs utilisent la méthode analytique approchée du champ moyen (Mean Field Theory) [26, 156, 157]. Le principe de cette méthode est de considérer une diffusion en volume au lieu d'une diffusion surfacique, en décrivant la surface comme une couche de permittivité variable. Une approche perturbative est alors menée en prenant,



**Fig.3.44** – Module du champ diffusé dans la couche, et module de la dérivée normale du champ sur les deux interfaces, pour la configuration de la figure 3 de [158]. La figure est obtenue à partir de la solution d’ordre 15.

comme paramètre, le contraste diélectrique. Cette méthode est donc adaptée à des surfaces délimitant des milieux de permittivités proches.

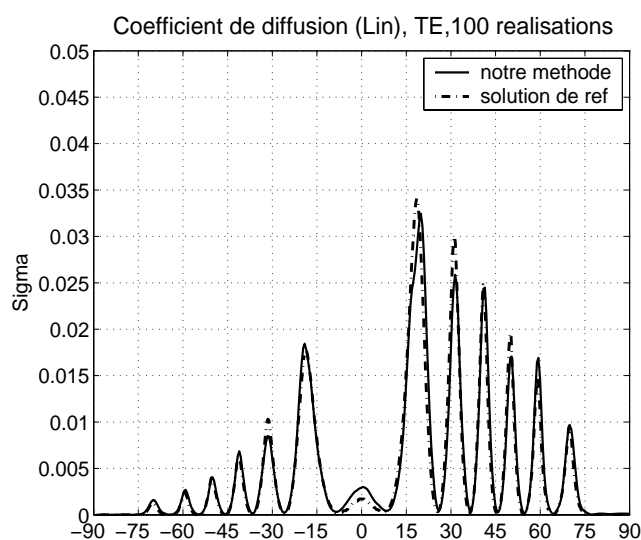
La configuration de [27] consiste en une couche rugueuse où la surface supérieure est rugueuse et la surface inférieure est plane, parfaitement conductrice. Les paramètres sont donnés en détail dans le tableau 3.1.

Les auteurs étudient en détail les franges que l’on observe sur le coefficient de diffusion ; ces franges correspondent aux franges de Selényi, décrites précédemment par [115]. Ces franges ont de particulier que leur emplacement angulaire ne varie pas lorsque l’angle d’incidence varie ; ce phénomène a lieu uniquement lorsque l’écart-type des hauteurs de la surface supérieur est très faible (dans la configuration étudiée  $\sigma_h^+ = 0.0158\lambda$ ). Une explication rigoureuse du phénomène est donnée dans [163], p. 106.

Notre méthode numérique rigoureuse permet de prédire ces franges. Nous avons comparé en figure 3.45 nos résultats avec ceux de [27], que nous avons qualifiés de “solution de référence”. Ces résultats sont extraits de la figure 2(b) de [27], en prenant comme angle d’incidence  $\theta_i = 18^\circ$ . Pour les résultats de cette figure, notre méthode a été itérée à l’ordre 10 ; nous observons encore une fois une bonne concordance avec la solution de référence.

### 3.5.5 Temps de calcul

Dans le tableau (3.2), nous donnons les durées de calcul en fonction du nombre  $N$  d’échantillons de la surface pour quelques figures représentées précédemment ; lorsque le milieu inférieur est diélectrique (Fig. 3.37 et Fig. 3.38), le nombre



**Fig.3.45** – Coefficient de diffusion incohérent ; configuration de la figure 2(b) de [27].

d'inconnues est de  $4N$ , alors que dans le cas parfaitement conducteur (Fig. 3.42 et Fig. 3.45), il est égal à  $3N$ .

Figures	N	nombre d'inconnues	temps par itération	nombre d'itérations (ordre)	temps par réalisation
3.37	2300	9200	1 mn 40 s	5	8 mn 20 s
3.38	2300	9200	2 mn	5	10 mn
3.42	3200	9600	2 mn	15	30 mn
3.45	2000	6000	1 mn 20 s	10	12 mn

**Tab.3.2** – Durées de calcul des simulations en fonction du nombre d'échantillons  $N$  par interface (processeur 2GHz, 1 Go de mémoire vive).

## 3.6 Amélioration envisagée pour la méthode

### 3.6.1 Accélération du produit matrice de couplage-vecteur

Nous avons vu que la méthode présentée est plus rapide qu'une inversion directe en  $\mathcal{O}(N^3)$  (§3.4.2). Notre méthode est aussi plus rapide que les méthodes itératives de type gradient conjugué, qui remplacent une inversion directe par une série convergente de multiplications matrice-vecteur, sans tenir compte de la particularité du système à résoudre. En effet, de telles méthodes effectuent le produit de la matrice impédance par un vecteur ; or la matrice impédance du cas diélectrique compte  $12N^2$  termes non nuls, la complexité du produit matrice-vecteur est donc de  $12N^2$ . Si on note  $M'_{approx}$  le nombre d'itérations nécessaires à la convergence

de la méthode de type gradient conjugué, la complexité de cette méthode est alors  $\mathcal{O}(M'_{approx} \cdot 12N^2)$ . En revanche, comme nous l'avons vu précédemment, notre méthode a une complexité  $\mathcal{O}(M_{approx} \cdot 4N^2 + (1 + 2M_{approx}) \cdot 2N \log 2N)$ , où  $M_{approx}$  est l'ordre de la méthode; cette complexité est de l'ordre de  $\mathcal{O}(M_{approx} \cdot 4N^2)$  pour  $N \gg 1$ . Et comme nous l'avons constaté lors des simulations, notre méthode converge très rapidement, même dans les cas "difficiles" où nous pouvons utiliser une étape préalable de préconditionnement. Donc, de plus,  $M_{approx} < M'_{approx}$ .

Cependant, notre méthode reste une méthode en  $\mathcal{O}(N^2)$  (§3.4.2); nous allons voir qu'il est possible, sous certaines hypothèses, d'obtenir une méthode plus rapide, en  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Pour cela, nous nous intéressons plus particulièrement à l'accélération du produit "matrice de couplage"-vecteur.

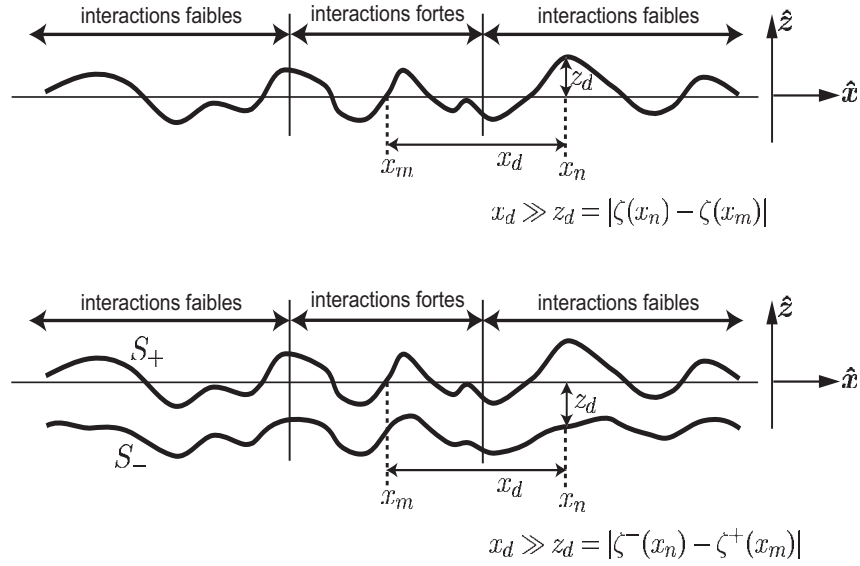
### 3.6.1.1 Méthodologie

Nous avons vu, lors de l'étude de la complexité de notre méthode (§3.4.3), que lors du calcul  $(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{C}^h \cdot (\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \cdot \mathbf{v}$  où  $\mathbf{v}$  est un vecteur donné, les opérations les plus pénalisantes en temps de calcul étaient les multiplications  $\mathbf{C}^b \cdot \mathbf{v}$  et  $\mathbf{C}^h \cdot \mathbf{v}$ . Si nous arrivions à ramener la complexité de ses multiplications à l'ordre  $\mathcal{O}(N \log N)$ , nous obtiendrions une méthode en  $\mathcal{O}(N \log N)$ , puisqu'alors, les quatre produits  $(\mathbf{Z}^h)^{-1} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{C}^h \cdot \mathbf{v}$ ,  $(\mathbf{Z}^b)^{-1} \cdot \mathbf{v}$  et  $\mathbf{C}^b \cdot \mathbf{v}$  auraient chacun cette complexité.

Nous allons utiliser la ressemblance qu'ont les matrices de couplage  $\mathbf{C}^b$  et  $\mathbf{C}^h$  avec les matrices impédances  $\mathbf{Z}^h$  et  $\mathbf{Z}^b$  du cas simple interface. Sachant qu'il existe, pour ces dernières, des méthodes rapides pour accélérer le produit matrice-vecteur, il semble envisageable d'adapter ces mêmes méthodes à notre problème. Nous allons présenter la méthodologie de l'accélération matrice-vecteur sur la matrice  $\mathbf{F}$  issue de la matrice de couplage  $\mathbf{C}^h$ . Cette même méthode pourra s'appliquer aussi bien sur l'autre matrice  $\mathbf{E}$  issue de  $\mathbf{C}^b$ , et, par symétrie, sur les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  de la matrice de couplage  $\mathbf{C}^b$ .

Sur la figure 3.46 nous avons représenté la séparation entre interactions fortes et interactions faibles dans le cas d'une simple interface, en un point fixé de l'interface d'abscisse  $x_m$ . Cette considération physique est le point de départ de la méthode BMIA/CAG, étudiée au chapitre précédent. En notant  $r_d$  la distance limite entre interactions fortes et faibles, nous avons effectué, rappelons-le, un développement de Taylor des hauteurs de la surface pour les points tels que  $x_d = |x_m - x_n| > r_d \gg z_d = |\zeta(x_m) - \zeta(x_n)|$ ; à partir de ce développement nous avons pu accélérer le produit de la matrice d'interaction faibles par un vecteur donné.

Nous pouvons procéder de même, par analogie, dans le cas de deux interfaces superposées. Sur la même figure nous avons représenté, en-dessous, le schéma correspondant.  $x_d = |x_n - x_m|$  est défini comme précédemment, alors que  $z_d$  dépend des hauteurs des deux interfaces :  $z_d = |\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m)|$ . Nous définissons, par ailleurs, une nouvelle distance limite  $r_d$ ; pour un point fixé  $\mathbf{r}_{\mathbf{m}}^+$ , d'abscisse  $x_m$ ,



**Fig.3.46** – Délimitation des interactions faibles et fortes pour le cas de deux interfaces, par analogie avec le cas simpl interface. Sur la figure,  $x_d = |x_m - x_n|$  varie en fonction de  $n$ , alors que  $r_d$  est fixé à l’avance.

de la surface supérieure  $S^+$ ,  $r_d$  délimite les points interactions faibles et fortes, entre le point  $\mathbf{r}_m^+$  et les points  $\mathbf{r}_n^-$  de l’interface inférieure.  $r_d$  dépend de l’épaisseur de la couche, comme nous le verrons plus loin. On note  $R_d$ , la partie entière de  $(r_d/\Delta x)$ .

D’après la figure 3.46,  $\mathbf{F}$  peut être décomposée en somme de deux matrices :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{F}^{(w)} \quad (3.85)$$

avec la matrice d’interactions fortes donnée par

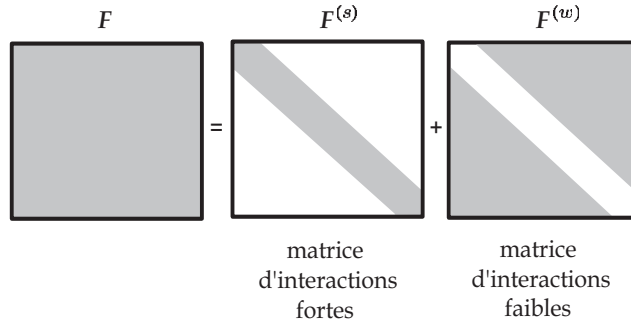
$$F_{mn}^{(s)} = \begin{cases} \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|) & \text{pour } |m - n| < R_d \\ 0 & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (3.86)$$

et la matrice d’interactions faibles, qui s’écrit

$$F_{mn}^{(w)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m - n| < R_d \\ \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|) & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (3.87)$$

$R_d$  représente la largeur de bande de la matrice  $F_{mn}^{(s)}$ .

Nous pouvons, pour les coefficients  $F_{mn}^{(w)}$  de la matrice d’interactions faibles, effectuer un développement de Taylor de la fonction de Green en  $x_d$ , pour


**Fig.3.47** – Décomposition de la matrice  $\mathbf{F}$ .

$r_d \leq x_d \leq L$ , en s'inspirant de la méthode BMIA du cas simple interface [95,177,181],

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_1 \sqrt{x_d^2 + z_d^2} \right) = \sum_{m=0}^M \underbrace{\frac{i}{4} \frac{H_m^{(1)}(k_1 x_d)}{m!} \left( \frac{-k_1 x_d}{2} \right)^m}_{a_m(x_d)} \left( \frac{z_d^2}{x_d^2} \right)^m \quad (3.88)$$

Cependant, à la différence du cas simple interface, les valeurs des hauteurs des deux interfaces interviennent dans cette décomposition, dans le terme  $z_d = |\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m)|$ .

De même, nous pouvons décomposer la matrice  $\mathbf{E}$ , en somme de deux matrices d'interactions faibles et fortes; les coefficients de la matrice d'interactions faibles sont de la forme

$$E_{mn}^{(w)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m - n| < R_d \\ -\frac{i \Delta x k_1 H_1^{(1)}(k_1 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|)}{4 \|\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_m^+\|} \times \{\zeta^-(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta^-(x_n) - \zeta^+(x_m))\} & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (3.89)$$

Et les coefficients de cette matrice peuvent être développés en une série de Taylor, pour  $r_d \leq x_d \leq L$

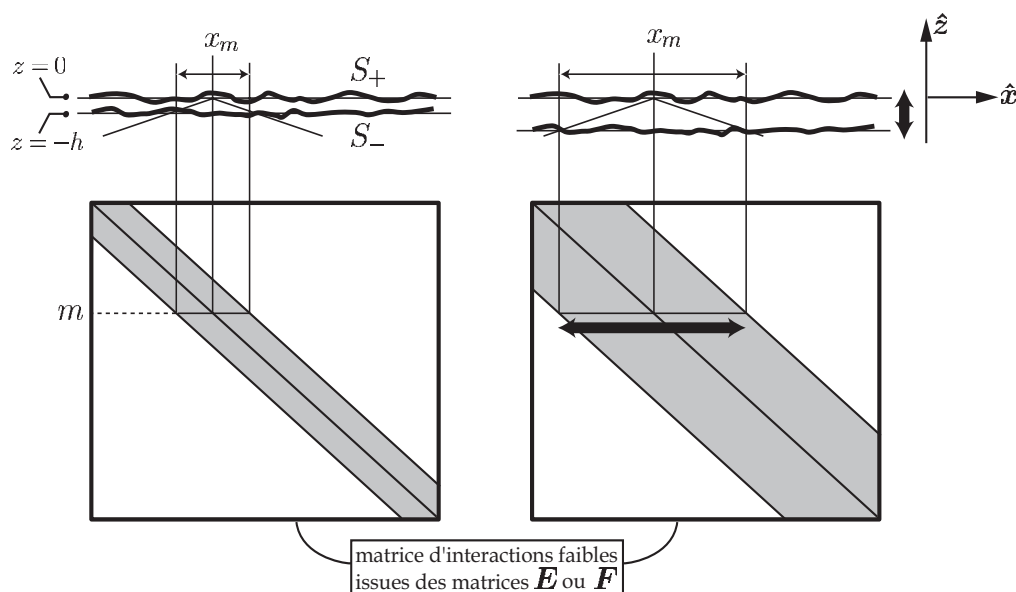
$$\frac{ik_1 H_1^{(1)} \left( k_1 \sqrt{x_d^2 + z_d^2} \right)}{4 \sqrt{x_d^2 + z_d^2}} = \sum_{m=0}^M \underbrace{\frac{ik_1 H_{m+1}^{(1)}(k_1 x_d)}{4 m! x_d} \left( \frac{-k_1 x_d}{2} \right)^m}_{a_m(x_d)} \left( \frac{z_d^2}{x_d^2} \right)^m \quad (3.90)$$

Puis nous pouvons développer, comme pour la méthode BMIA, un algorithme de multiplication matrice-vecteur par FFT.

### 3.6.1.2 Choix du rayon d'interaction $r_d$

Le choix du rayon d'interactions repose sur les qualités de convergence de la méthode BMIA du cas simple interface. Pour un écart-type des pentes  $\sigma_p$  peu élevé, la méthode convergeait pour des valeurs de  $\sigma_h$  relativement élevées (de l'ordre de  $\lambda$

à  $2\lambda$ ). Nous pouvons définir ainsi un cône défini par un angle correspondant à un  $\sigma_p$  donné, comme on peut le voir en figure 3.48. Cependant, lorsque l'épaisseur de la couche augmente, la largeur de bande de la matrice d'interactions proches augmente aussi. La méthode d'accélération du produit des matrices de couplage par un vecteur est donc mieux adaptée au cas d'une couche de faible épaisseur (inférieure à  $\lambda$ ).



**Fig.3.48** – Augmentation de la largeur de bande des matrices d'interactions faibles issues des matrices de couplage  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ , en fonction de l'épaisseur moyenne  $h$  de la couche.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle méthode numérique rigoureuse pour l'étude de la diffusion par deux interfaces rugueuses superposées. Cette nouvelle méthode, qui repose sur une formulation intégrale du problème, exploite la forme particulière des matrices blocs de la matrice impédance. L'originalité de la méthode vient du fait que l'inversion par blocs utilisée pour aboutir à une formulation itérative, fait apparaître une matrice d'itération qui admet une interprétation physique simple; ainsi les itérées de la méthode prennent en compte les réflexions multiples de l'onde dans la couche. Sans doute en conséquence de cela, le domaine de validité de la méthode est grand, et la convergence rapide dans la plupart des cas. Par ailleurs, nous avons développé une méthode de préconditionnement qui permet d'accélérer la convergence dans les cas les plus défavorables.

Un autre avantage de notre méthode est qu'elle permet de mettre en oeuvre les méthodes rapides développées pour le cas d'une simple interface. De plus, c'est la seule méthode connue à ce jour qui soit adaptée à des problèmes ayant un grand nombre d'inconnues; or c'était jusqu'à présent le facteur limitant lors de l'étude de

la diffusion par une double interface.

Un résumé de la démarche suivie est la suivante (Fig. 3.49) :

- d'après la forme de la matrice impédance  $\mathbf{Z}$ , nous exprimons le problème  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$  à l'aide de l'inverse par blocs de  $\mathbf{Z}$  ;
- d'après la particularité du problème, nous réduisons le nombre d'équations nécessaires ;
- puis, lorsqu'une condition de validité est vérifiée,
- nous effectuons un développement en série,
- ce qui nous permet d'utiliser les méthodes rapides développées dans le chapitre précédent.

En conclusion, à travers les différentes configurations étudiées, nous avons démontré que notre méthode permet de retrouver des résultats prédits théoriquement, quelques soient les mécanismes physiques mis en jeu. En ce sens, elle peut servir dorénavant de méthode de référence à de futures investigations théoriques.

Concernant le cas d'une couche sur la mer, la méthode actuelle est limitée sur deux points :

- Au niveau de chaque interface, notre méthode repose sur l'utilisation de méthodes rapides pour une interface (§3.4.2). Or nous avons vu dans le §2.4 que la plupart de ces méthodes (BMIA/CAG, FMM) ne sont valables que pour des surfaces de faible écart-type des hauteurs (inférieur ou égal à une ou deux longueurs d'onde). Les écarts-types des hauteurs de surfaces de mer sont généralement supérieurs à 10 cm (valeur moyenne pour un vent de force 3, Tab. 1.2), à comparer à une longueur d'onde radar de 3 cm pour 10 GHz. Il est donc nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes rapides adaptées aux surfaces de mer, la BMIA/CAG Multilevel [29, 53], par exemple.
- Au niveau du couplage entre les deux interfaces, le domaine de validité, déterminé par la norme de la matrice caractéristique  $\mathbf{M}_c$  (§3.4.4), exclut les épaisseurs  $h$  trop faibles de la couche. En effet, on voit, sur la figure 3.6, que la norme de la matrice augmente très rapidement lorsque  $h/\lambda < 0.3$ . Une solution pourrait être d'étudier plus en détail le préconditionnement (§3.4.5) dans le cas où la norme de  $\mathbf{M}_c$  est supérieure à 1.



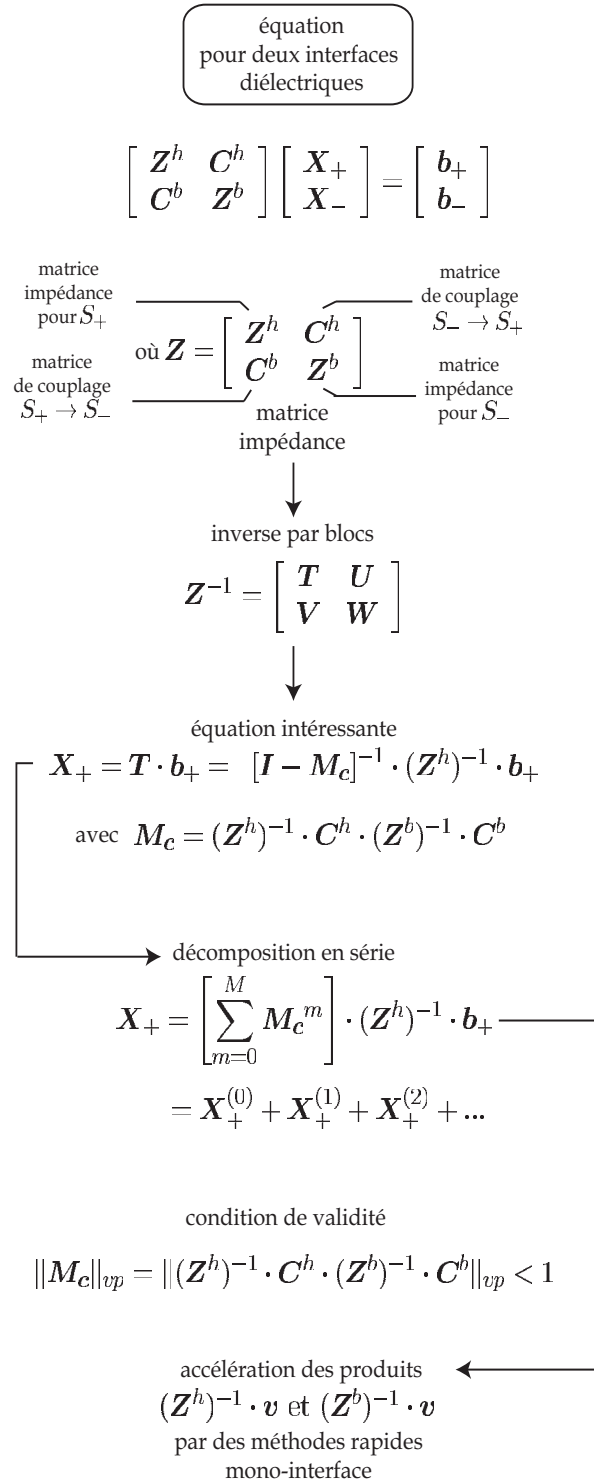


Fig.3.49 – Organigramme de la méthode proposée.



# Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire quelques aspects de la diffusion d'une onde électromagnétique par une ou deux surfaces rugueuses superposées.

Le premier chapitre nous a permis d'introduire les notions d'électromagnétisme suffisantes pour appréhender simplement l'effet de la rugosité d'une surface sur le coefficient de diffusion. Dans le cadre d'une résolution du problème de diffusion de façon numérique, nous avons présenté l'onde incidente de Thorsos en précisant son domaine de validité. Par ailleurs, nous avons donné une méthode spectrale, qui permet de générer numériquement des surfaces rugueuses de distribution des hauteurs gaussienne ayant un spectre désiré. Nous avons ensuite donné trois exemples de spectres ainsi que des réalisations de surfaces associées; nous avons présenté le spectre gaussien, et ceux, plus récents de West-O'Donnell – développé dans le cadre d'une étude sur les plasmons de surface – et de Elfouhaily, ce dernier permettant de générer des surfaces de type mer.

Dans un deuxième chapitre, nous nous sommes focalisés sur les méthodes de résolution du problème de diffusion par une seule interface rugueuse. Après avoir recensé les méthodes existantes et cherchant une méthode numérique exacte, nous avons choisi les méthodes intégrales; nous avons montré que celles-ci sont intéressantes lorsque nous considérons des milieux homogènes. En appliquant la méthode de moments, nous avons obtenu un système linéaire; nous avons détaillé l'obtention de la matrice de ce système, encore appelée matrice impédance. Les expressions de ses coefficients ont été données pour les deux polarisations de l'onde incidente, en considérant le cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur et celui où il est diélectrique. Nous avons insisté sur la représentation sous forme de blocs de la matrice impédance du cas diélectrique, car cette représentation a l'avantage de faciliter la compréhension ainsi que la programmation des méthodes intégrales. C'est cette représentation sous forme de blocs que nous avons utilisée dans le troisième chapitre.

Nous avons donné dans la suite du second chapitre quelques méthodes intégrales itératives pour le cas d'une seule interface, aussi dénommées méthodes rapides dans la littérature; elles permettent non seulement de diminuer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système linéaire, mais aussi de résoudre des problèmes avec un nombre d'inconnues accru. Nous avons détaillé la méthode MOMI (Method of Ordered Multiple Interactions), similaire à la méthode FB (Forward-Backward), la méthode BMIA/CAG (Banded Matrix Iterative Approach/Canonical Grid), et présenté brièvement la méthode FMM (Fast Multipole Method). La méthode MOMI, facile à programmer, a pour inconvénients d'être mal adaptée au cas

d'une surface diélectrique, et d'être relativement lente par rapport aux autres méthodes. La méthode FMM, performante et très répandue, a cependant pour inconvénient d'être fastidieuse à programmer. Nous avons finalement retenu la méthode BMIA/CAG qui, tout en étant relativement facile de programmation, est aussi performante que la méthode FMM; elle est, de plus, bien adaptée au cas diélectrique.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le cas de deux surfaces rugueuses superposées. Après avoir rappelé les équations intégrales pour cette configuration, nous les avons discrétisées par la méthode des moments, cette démarche étant similaire à celle donnée au deuxième chapitre. Nous avons alors montré que la matrice impédance du système linéaire correspondant peut s'interpréter physiquement de façon simple, à l'aide d'une décomposition sous forme de quatre matrices blocs. Parmi ces matrices blocs nous retrouvons les matrices impédance écrites précédemment pour le cas d'une seule interface, ainsi que des matrices que nous interprétons comme des matrices de couplage.

En procédant à une inversion par blocs et en réduisant la taille du problème en ne gardant que les inconnues pertinentes, nous avons obtenu une équation qui fait intervenir une matrice caractéristique du système formé par les deux interfaces. L'équation obtenue peut se résoudre en développant la solution sous forme d'une série, qui converge vers la solution exacte lorsque la matrice caractéristique satisfait une condition de validité. Un premier avantage de cette méthode est que la condition est vérifiée pour de très nombreuses configurations; un deuxième avantage est que la convergence est très souvent rapide. Les termes du développement en série peuvent, en outre, s'interpréter physiquement : il correspondent aux différentes réflexions multiples de l'onde diffusée dans la couche. Afin d'améliorer la méthode que nous proposons, nous avons développé une méthode de préconditionnement, qui accélère la convergence lorsque la condition de validité est remplie.

En fin de chapitre, nous avons validé notre méthode en comparant les résultats issus de sa mise en oeuvre à ceux obtenus dans trois articles récents. Les résultats ont été concordants pour toutes les configurations rencontrées. Nous avons par ailleurs représenté le module du champ dans la couche, ce qui nous a permis donner une illustration claire des mécanismes mis en jeu, tels que la propagation d'ondes guidées.

Nous avons finalement présenté en détail des améliorations envisageables de la méthode proposée, notamment en accélérant les produits des matrices de couplage par des vecteurs lorsque l'épaisseur de la couche est suffisamment fine.

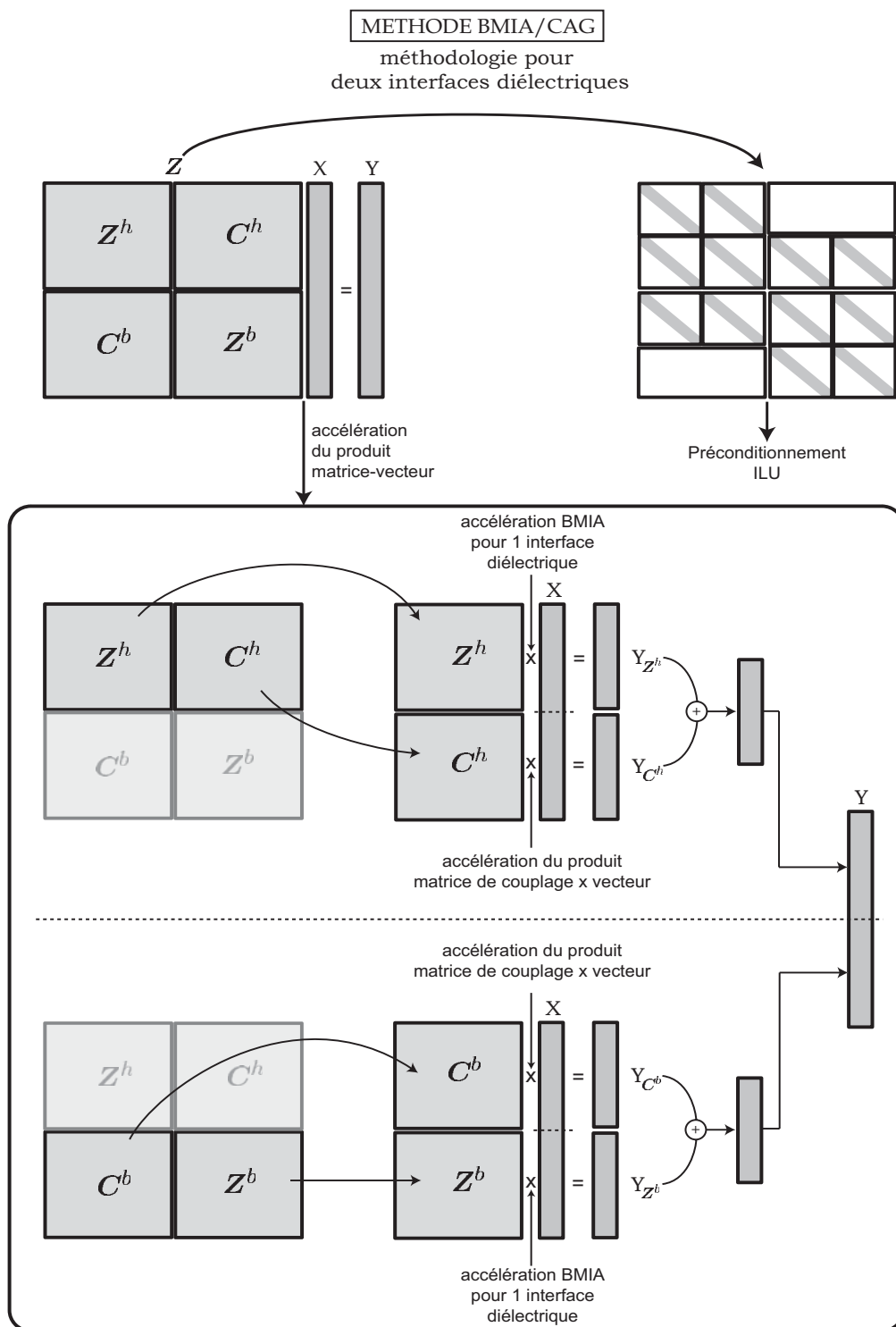
En conclusion, nous pouvons espérer prétendre que notre méthode, après avoir subi l'étape de validation avec succès, peut dorénavant servir de méthode de référence pour de nombreuses configurations faisant intervenir deux interfaces rugueuses superposées. De plus, d'après l'expression simple et modulable de notre méthode, nous pensons qu'elle ouvre des perspectives, qui n'ont, à notre connaissance, jamais été exploitées.

Ainsi, il semble possible d'étendre la méthode proposée au cas de plusieurs interfaces superposées; en effet, la matrice impédance de ce cas peut s'écrire de façon similaire à la forme par blocs donnée par (3.38). De même, cette méthode peut aussi s'appliquer au cas d'un objet enfoui sous une surface rugueuse, d'après la forme des

matrices impédances données dans [182, 190, 199–201].

Une autre perspective est d’exploiter l’accélération, présentée en (§3.6.1), des produits des matrices de couplage par un vecteur. Nous pensons qu’il est possible ainsi d’élargir le domaine d’application de la méthode BMIA/CAG au cas d’une double interface, lorsque l’épaisseur moyenne de la couche est suffisamment fine. Sans entrer dans les détails, nous avons présenté la méthodologie envisageable pour deux interfaces sur la figure 3.50. La méthode correspondante serait une méthode de complexité  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

Une perspective à plus long terme concerne l’étude du cas d’une couche de pétrole sur la mer. Nous avons vu qu’il y a alors plusieurs difficultés à surmonter pour mettre en oeuvre notre méthode. Une solution potentiellement intéressante serait d’utiliser la méthode BMIA/CAG envisagée pour une double interface, notamment dans le cas d’une couche d’épaisseur très fine.



**Fig.3.50** – Méthodologie de l'accélération matrice-vecteur par la méthode BMIA pour le cas de deux interfaces diélectriques; matrice de preconditionnement par décomposition LU incomplète (ILU). Les étapes d'accélération BMIA pour une interface diélectrique font référence à la figure 2.22.

## Annexe A

# Fonctions de Green et fonctions de Hankel

### A.1 Fonctions de Green

Historiquement, les fonctions de Hankel ont été utilisées en électromagnétisme par Mie lors de la résolution du problème de diffusion par un cylindre. Elles sont construites par combinaisons linéaires de fonctions de Bessel et de Neumann. Par construction, la fonction de Green du cas 2D vérifie l'équation :

$$(\Delta + k_0^2)g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{A.1})$$

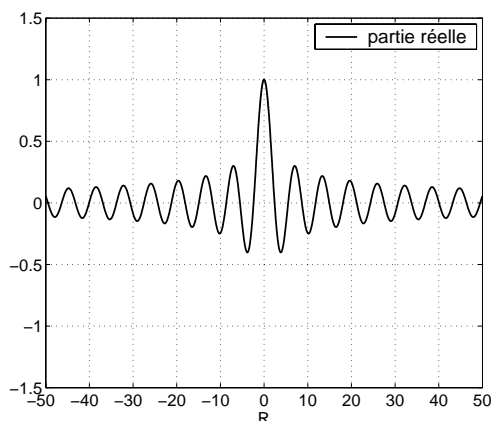


Fig.A.1 – Partie réelle de  $H_0^{(1)}(|R|)$ .

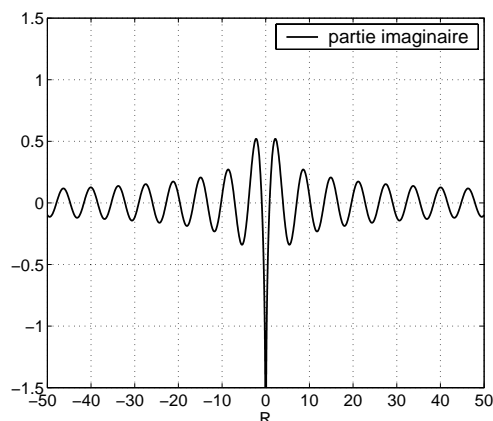


Fig.A.2 – Partie imaginaire.

*Remarque* : on rencontre aussi, dans la littérature, la fonction de Green définie à l'aide de la fonction de Hankel du deuxième type d'ordre zéro  $H_0^{(2)}$ , qui est la conjuguée de  $H_0^{(1)}$ . Par ailleurs, la fonction de Green pour le problème électromagnétique 3D général est donnée par :

$$g_0^{3D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik_0\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Fonctions de Hankel

Les fonctions de Hankel satisfont une propriétés de récurrence : En effet, en utilisant la formule [1]

$$z^2 \frac{d^2 H_m^{(1)}(z)}{dz^2} + z \frac{dH_m^{(1)}(z)}{dz} + (z^2 - m^2)H_m^{(1)}(z) = 0 \quad (\text{A.3})$$

et la relation

$$\frac{d^n H_0^{(1)}(z)}{dz^n} = (-1)^n H_n^{(1)}(z) \quad (\text{A.4})$$

nous pouvons relier toutes les fonction de Hankel du premier type entre elles. Par exemple à partir de

$$\frac{dH_0^{(1)}(z)}{dz} = -H_1^{(1)}(z) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 H_0^{(1)}(z)}{dz^2} = H_2^{(1)}(z) \quad (\text{A.5})$$

et de (A.3) nous obtenons

$$H_2^{(1)}(z) = \frac{1}{z}H_1^{(1)}(z) - H_0^{(1)}(z) \quad (\text{A.6})$$



## Annexe B

# Méthode des moments

La MoM a été pour la première fois appliquée aux problèmes de diffraction électromagnétique par Harrington en 1968 [86]. Elle permet de résoudre un problème linéaire de la forme :

$$\mathcal{L}f = g \quad (\text{B.1})$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire,  $f$  l'inconnue et  $g$ , une fonction donnée. Dans notre cas, l'inconnue  $f$  est le champ ou/et le courant surfaciques, et  $g$ , le champ incident.

En premier, on projette la fonction recherchée  $f$  sur une base complète  $\{f_n\}_{n=1..N}$  ; c'est-à-dire qu'on approche  $f$  par

$$f \simeq \tilde{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (\text{B.2})$$

et  $\tilde{f}$  vérifie  $\lim_{N \rightarrow +\infty} |f - \tilde{f}| = 0$ . Le problème revient donc à déterminer les coefficients  $a_n$ . En remplaçant cette approximation dans (B.1), on obtient

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L} \left( \sum_{n=1}^N a_n f_n \right) + \epsilon_N = g \quad (\text{B.3})$$

où  $\epsilon_N$  est l'erreur d'approximation, encore appelée résidu. Par linéarité, on a finalement

$$\mathcal{L}f = \sum_{n=1}^N a_n (\mathcal{L}f_n) + \epsilon_N = g \quad (\text{B.4})$$

On projette alors l'égalité précédente sur une base de fonctions  $\{w_m\}_{m=1..M}$ , dites fonctions test, choisies de façon à de minimiser l'influence de l'erreur  $\epsilon_N$ .

$$\begin{aligned} & \langle w_m, \sum_{n=1}^N a_n (\mathcal{L}f_n) + \epsilon_N \rangle \\ &= \sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle + \langle w_m, \epsilon_N \rangle = \langle w_m, g \rangle, \quad m = 1..M \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où  $\langle, \rangle$  représente le produit scalaire. Par la suite nous supposons  $\langle \epsilon_N, w_m \rangle = 0 \forall m$ , mais nous reviendrons sur cette approximation.

Sous cette hypothèse le système (B.5) peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle [103]

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (\text{B.6})$$

où

$$\mathbf{Z} = (Z_{mn})_{m,n} \quad \text{avec} \quad Z_{mn} = \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle \quad (\text{B.7a})$$

$$\mathbf{X} = (X_m)_m \quad \text{avec} \quad X_m = a_m \quad (\text{B.7b})$$

$$\mathbf{b} = (b_m)_m \quad \text{avec} \quad b_m = \langle w_m, g \rangle \quad (\text{B.7c})$$

La matrice  $\mathbf{Z}$  est dite matrice d'impédance. Le système précédent a une solution si  $\det(\mathbf{Z}) \neq 0$  et si  $N \leq M$ . Si  $N < M$ , nous pouvons le résoudre par la méthode des moindres carrés ; si  $N = M$ , et ce sera le cas ensuite, nous pouvons le résoudre par différentes méthodes, itératives ou non. Comme nous considérerons des problèmes avec un grand nombre d'inconnues, le choix de la méthode est important pour accélérer la résolution du système. Ce point constitue le coeur des chapitres suivants. Pour les fonctions  $f_n$  et  $w_m$ , plusieurs choix existent et donnent lieu à des méthodes plus ou moins différentes. La méthode de Galerkin, par exemple, consiste à choisir  $f_n = w_n$  ; la méthode de collocation (*point matching* en anglais) (cf [86]) consiste à prendre pour les  $w_m$ , des fonctions de Dirac  $\delta$ . Si, cette fois, on pose  $w_n = \mathcal{L}f_n$ ,  $n = 1..N$ , on applique une méthode des moindres carrés. L'intérêt est que l'on minimise alors  $|\epsilon_N|^2 = \langle g - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}f_n, g - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}f_n \rangle$ . Il peut être aussi intéressant de choisir les fonctions  $f_n$  et  $w_m$  de façon à minimiser le nombre de coefficients  $a_n$  à déterminer et, par conséquent, à réduire la taille de la matrice impédance, qui est à inverser ; ce problème est un domaine de recherche à part entière, et le lecteur pourra se reporter à la lecture de [130] pour plus d'informations. Une autre façon de minimiser le nombre de coefficients est d'appliquer la méthode des moments dans le domaine spectral [18, 54], ou de choisir l'espace de Fourier pour les fonctions de projection et le domaine spatial pour les fonctions test [148]. Finalement, le choix de  $f_n$  et de  $w_m$  résulte d'un compromis entre un gain de temps (nombre d'inconnues N minimum), une précision suffisante et une simplicité dans la mise en oeuvre. C'est pourquoi nous retenons par la suite la méthode classique des moments par collocation, c'est-à-dire que les fonctions  $w_m$  seront égales à des fonctions de Dirac ; pour les fonctions  $f_n$ , nous choisirons des fonctions rectangle, encore appelées fonctions *pulse basis*.

*Remarque* : La discrétisation des équations intégrales peut se faire aussi selon la méthode de Nystrom, plutôt répandue dans la communauté des mathématiciens. La méthode de Nystrom n'emploie pas de projection sur des fonctions de base mais utilise une règle de quadrature de la forme [140]

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

pour discrétiser les équations intégrales directement ; les coefficients  $\{w_i\}$  sont les poids de la règle de quadrature et les  $\{x_i\}$ , les abscisses. Les règles de quadratures doivent être corrigées localement afin de tenir compte de la singularité du noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Les deux méthodes, MoM et Nystrom, aboutissent à une équation matricielle ; à nombre d'inconnues égal, la méthode de Nystrom donne lieu à un remplissage matriciel plus rapide que la MoM ne le permet ; cependant, la MoM est plus précise.



## Annexe C

# Discrétisation de quelques équations intégrales

### C.1 Intégrales impropres

Avant de discrétiser les équations intégrales, il convient de faire quelques remarques sur leur forme générale. En effet, rappelons que la fonction de Green  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et ses dérivées normales sont divergentes lorsque  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ . Ainsi, les intégrales de la forme  $\int_S ds \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r})$  ou  $\int_S ds g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$  ne peuvent pas être calculées simplement avec la théorie d'intégration de Riemann, théorie valable uniquement lorsque les fonctions à intégrer sont *bornées* sur un interval *borné*.

Une solution consiste à définir, pour une fonction  $f$  non bornée au voisinage de  $c$ , avec  $a < c < b$ , et telle que  $f$  soit intégrable sur tout  $[a, c - \varepsilon]$  et  $[c + \varepsilon', b]$  :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx \right] \quad (\text{C.1})$$

L'intégrale est dite :

- convergente si la limite existe,
- absolument convergente si elle converge pour  $|f|$ ,
- divergente si la limite n'existe pas.

Cependant, l'intégrale peut ne pas être convergente mais la limite exister pour  $\varepsilon = \varepsilon'$ .

On définit, dans ce cas, la valeur principale de Cauchy par :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right] \quad (\text{C.2})$$

### C.2 Discrétisation de la MFIE pour le cas TM

L'équation de Fredholm du second type en polarisation TM est

$$\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (\text{C.3})$$

Cette fois la fonction inconnue est  $\psi(\mathbf{r})$  sur la surface  $S$ ; elle est approchée par

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \widetilde{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \psi(\mathbf{r}_n) f_n(x) \quad (\text{C.4})$$

où les fonctions de projection et de test,  $f_n$  et  $w_m$ , comme précédemment (cf. (2.48)). En appliquant la méthode des moments, on obtient la matrice impédance  $\mathbf{Z}$ , en suivant les étapes

$$\begin{aligned} & +\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \\ & \quad \downarrow \\ & +\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}_m) - \Delta x \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \gamma_n \psi(\mathbf{r}_n) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m)}{\partial n} - \gamma_m \psi(\mathbf{r}_m) \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n} \\ & \quad \downarrow \\ \mathbf{Z} = (Z_{mn}) = & \begin{cases} -\gamma_n \Delta x \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m)}{\partial n} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} - \gamma_m \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

où  $\gamma_n$  est définie en (2.54). La dérivée normale  $\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n}$  est donnée par :

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad (\text{C.6})$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est définie au point  $\mathbf{r}$  par (2.21) et  $\nabla_{\mathbf{r}} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$  est le gradient de la fonction de Green  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  par rapport à la variable  $\mathbf{r}$  en laissant la variable  $\mathbf{r}'$  fixe. La fonction de Green s'écrit

$$\frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}\right) \quad (\text{C.7})$$

et la dérivée de la fonction de Hankel est

$$\frac{dH_0^{(1)}(z)}{dz} = -H_1^{(1)}(z) \quad (\text{C.8})$$

ce qui conduit à

$$\nabla_{\mathbf{r}} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}} \cdot \{(x-x')\hat{\mathbf{x}} + (\zeta(x) - \zeta(x'))\hat{\mathbf{z}}\} \quad (\text{C.9})$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \\ & -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}} \cdot \frac{\{-\zeta'(x)(x-x') + (\zeta(x) - \zeta(x'))\}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x))^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Les termes hors diagonale de  $\mathbf{Z}$  sont calculés à partir de (C.5) et de l'expression ci-dessus, en prenant  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n$  et  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_m$ , puis en multipliant l'expression obtenue par  $-\gamma_n \Delta x = -\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2} \Delta x$ . Le terme en  $\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}$  se simplifie avec le terme similaire du dénominateur de (C.10). L'expression finale de  $Z_{mn}$  pour  $m \neq n$  est donnée en (2.61).

L'expression (C.10) permet aussi de déterminer une expression approchée des termes diagonaux de  $\mathbf{Z}$ , qui sont donnés par :

$$\frac{1}{2} - \gamma_m \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n}$$

En effet le terme de droite peut être simplifié en sachant que, pour  $\xi$  proche de zéro,

$$H_1^{(1)}(\xi) \simeq -\frac{2i}{\pi\xi} \quad (\text{C.11})$$

Par ailleurs,  $\gamma_m$  se simplifie avec un des termes du dénominateur de  $\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n}$ . D'où

$$\gamma_m \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n} \simeq \frac{-1}{2\pi} \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\{-\zeta'(x)(x - x_m) + (\zeta(x) - \zeta(x_m))\}}{(x - x_m)^2 + (\zeta(x) - \zeta(x_m))^2} \quad (\text{C.12})$$

Qui se simplifie encore en utilisant un développement de Taylor de  $\zeta$  en  $x_m$  :

$$\begin{aligned} \gamma_m \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n} &\simeq \frac{+1}{2\pi} \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\frac{\zeta''(x_m)}{2}(x - x_m)^2}{(x - x_m)^2 + (\zeta'(x_m)(x - x_m))^2} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi} \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Finalement, on obtient l'expression des coefficients de  $\mathbf{Z}$  pour le cas MFIE TM :

$$Z_{mn} = \begin{cases} -\frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times \{\zeta'(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

### C.3 Discrétisation de la MFIE pour le cas TE

L'équation intégrale s'écrit dans ce cas

$$\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \forall \mathbf{r}' \in S \quad (\text{C.15})$$

Les fonctions de projection et de test,  $f_n$  et  $w_m$ , sont définies comme précédemment (cf. (2.48)). Les étapes suivies pour obtenir la matrice impédance sont

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_m)}{\partial n'} + \Delta x \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \gamma_n \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m)}{\partial n'} + \gamma_m \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_m)}{\partial n'} \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n'} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \mathbf{Z} = (Z_{mn}) = \begin{cases} +\gamma_n \Delta x \frac{\partial g_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m)}{\partial n'} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} + \gamma_m \int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n'} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (\text{C.16})
 \end{aligned}$$

où  $\gamma_n$  est définie en (2.54). Dans la décomposition ci-dessus, la dérivée normale de la fonction  $\psi$  s'exprime au point  $\mathbf{r}_n$  par  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n}$  et au point  $\mathbf{r}_m$  par  $\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_m)}{\partial n'}$ .

La dérivée normale  $\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}$  est donnée par :

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad (\text{C.17})$$

où  $\hat{\mathbf{n}}'$  est définie au point  $\mathbf{r}'$  par (2.21) et  $\nabla_{\mathbf{r}'} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$  est le gradient de la fonction de Green  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  par rapport à la variable  $\mathbf{r}'$  en laissant la variable  $\mathbf{r}$  fixe. Par analogie avec l'équation (C.9) du cas MFIE TM,

$$\nabla_{\mathbf{r}'} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)} \left( k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2} \right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}} \cdot \{(x'-x)\hat{\mathbf{x}} + (\zeta(x') - \zeta(x))\hat{\mathbf{z}}\} \quad (\text{C.18})$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = \\
 & -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)} \left( k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2} \right)}{\sqrt{(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2}} \cdot \frac{\{-\zeta'(x')(x'-x) + (\zeta(x') - \zeta(x))\}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x'))^2}} \quad (\text{C.19})
 \end{aligned}$$

Les termes hors diagonale de  $\mathbf{Z}$  sont calculés à partir de (C.16) et de l'expression ci-dessus, en prenant  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n$  et  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_m$ , puis en multipliant l'expression obtenue par  $\gamma_n \Delta x = \sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2} \Delta x$ . Contrairement au cas MFIE TM, Le terme en  $\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}$  ne se simplifie pas puisque le terme similaire du dénominateur de (C.19) est  $\sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}$ . L'expression finale de  $Z_{mn}$  pour  $m \neq n$  est donnée en (2.63).



L'expression (C.19) permet aussi de déterminer une expression approchée des termes diagonaux de  $\mathbf{Z}$ , de la même manière que pour le cas MFIE TM. Finalement, on obtient l'expression des coefficients de  $\mathbf{Z}$  pour le cas MFIE TE :

$$Z_{mn} = \begin{cases} -\frac{i\Delta x k_0 H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4} \frac{\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| \sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}} \\ \quad \times \{\zeta'(x_m)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} + \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Cette matrice impédance ressemble à celle du cas MFIE TM (cf. (2.61)), cependant, il y a trois différences importantes par rapport à cette dernière :

- le terme supplémentaire  $\frac{\sqrt{1 + (\zeta'(x_n))^2}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x_m))^2}}$  qui apparaît dans le cas MFIE TE pour les éléments non-diagonaux ;
- la valeur de la dérivée dans l'expression  $\{\zeta'(x_m)(x_n - x_m) - \dots\}$ , qui est prise au point  $x_m$  dans le cas MFIE TE et au point  $x_n$  dans le cas MFIE TM ;
- le changement de signe devant le terme  $\frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\zeta''(x_m)}{1 + (\zeta'(x_m))^2}$  sur la diagonale.

## C.4 Discrétisation de la EFIE pour le cas TM

La méthodologie est la même que précédemment, la seule différence notable étant le terme diagonal de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Nous utiliserons l'approximation [2] [130] :

$$\int_{x_m - \frac{\Delta x}{2}}^{x_m + \frac{\Delta x}{2}} dx \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)}{\partial n \partial n'} \simeq \frac{-2}{\gamma_m \pi \Delta x} + \frac{\Delta x}{24 \gamma_m^5 \pi} \{3\zeta'''(x_m) - 3\zeta''(x_m)\zeta''(x_m) \quad (\text{C.21})$$

$$+ 2\gamma_m^2 \zeta'(x_m)\zeta'''(x_m) + \zeta''(x_m)\} \quad (\text{C.22})$$

où  $\gamma \simeq 0.5772$  est la constante d'Euler, et  $e^\gamma \simeq 1.78107$ .



## Annexe D

# Méthode MOMI : cas diélectrique

Dans le cas diélectrique nous avons écrit deux systèmes d'équations intégrales couplées, (2.33) et (2.34). Nous les rappelons ici pour plus de clarté.  $\psi$  désigne le champ total du milieu  $\Omega_0$ . Le premier système s'écrit

$$\forall \mathbf{r}' \in S, \begin{cases} +\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} + \int_S ds g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_{inc}(\mathbf{r}') \\ -\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} + \rho_{10} \int_S ds g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (D.1)$$

et le système équivalent s'écrit

$$\forall \mathbf{r}' \in S, \begin{cases} +\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} + \int_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} + \rho_{10} \int_S ds \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (D.2)$$

En effectuant une combinaison linéaire de la première équation de (D.1) avec la seconde équation de (D.1), nous obtenons une seule équation, paramétrée par le coefficient  $R_1$  de la combinaison linéaire. En procédant de même avec les deux équations du système (D.2), nous obtenons une seconde équation, paramétrée par le coefficient  $R_2$ . Finalement, nous déduisons le système suivant de deux équations à deux inconnues [2]

$$\forall \mathbf{r}' \in S, \left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}') = R_1 \psi_{inc}(\mathbf{r}') + R_1 \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - \alpha_1 \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) \\ \quad - R_1 \int_S ds \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \rho_{10} \alpha_1 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} = R_2 \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} + R_2 \int_S ds \psi(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\alpha_2}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \right) \\ \quad - R_2 \int_S ds \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \left( \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \alpha_2 \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \end{array} \right. \quad (D.3)$$

en posant

$$\alpha_k = \frac{2 - R_k}{R_k} \quad (D.4)$$

et  $\rho_{10} = 1$  dans le cas TE et  $\rho_{10} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$  dans le cas TM. Le système précédent peut se réécrire plus simplement sous la forme

$$\forall \mathbf{r}' \in S, \left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}') = R_1 \psi_{inc}(\mathbf{r}') + \mathcal{L}_1 \psi(\mathbf{r}) - \mathcal{L}_2 \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} = R_2 \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}')}{\partial n'} + \mathcal{L}_3 \psi(\mathbf{r}) - \mathcal{L}_4 \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \end{array} \right. \quad (D.5)$$

en posant

$$\mathcal{L}_1 \bullet = R_1 \int_S ds \left( \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - \alpha_1 \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) \bullet \quad (D.6)$$

$$\mathcal{L}_2 \bullet = R_1 \int_S ds (g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \rho_{10} \alpha_1 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \bullet \quad (D.7)$$

$$\mathcal{L}_3 \bullet = R_2 \int_S ds \left( \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\alpha_2}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \right) \bullet \quad (D.8)$$

$$\mathcal{L}_4 \bullet = R_2 \int_S ds \left( \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \alpha_2 \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \bullet \quad (D.9)$$

Ensuite, de façon à pouvoir appliquer l'algorithme MOMI utilisé dans le cas parfaitement conducteur, il nous faut mettre le système (D.5) sous la forme (2.107), donnée par

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}_{inc}(\mathbf{r}') + \mathcal{L}\mathbf{J} \quad (D.10)$$

où sous la forme équivalente, discrétisée par la méthode des moments,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{inc} + \mathbf{P}\mathbf{J} \quad (D.11)$$

Notons  $\mathbf{P}_i$  la matrice de dimension  $N \times N$ , obtenue en discrétisant l'opérateur  $\mathcal{L}_i$ . Une des représentations possibles de  $\mathbf{P}$  est donnée par [2]

$$\mathbf{P}_{2N \times 2N} = \begin{pmatrix} P_{1,11} & P_{2,11} & P_{1,12} & P_{2,12} & \dots & P_{1,1N} & P_{2,1N} \\ P_{3,11} & P_{4,11} & P_{3,12} & P_{4,12} & \dots & P_{3,1N} & P_{4,1N} \\ P_{1,21} & P_{2,21} & P_{1,22} & P_{2,22} & \dots & P_{1,2N} & P_{2,2N} \\ P_{3,21} & P_{4,21} & P_{3,22} & P_{4,22} & \dots & P_{3,2N} & P_{4,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{1,N1} & P_{2,N1} & P_{1,N2} & P_{2,N2} & \dots & P_{1,NN} & P_{2,NN} \\ P_{3,N1} & P_{4,N1} & P_{3,N2} & P_{4,N2} & \dots & P_{3,NN} & P_{4,NN} \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

En posant

$$\mathbf{J}_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{r}_1) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \psi(\mathbf{r}_2) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{r}_N) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{inc2N \times 1} = \begin{bmatrix} R_1 \psi_{inc}(\mathbf{r}_1) \\ R_2 \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ R_1 \psi_{inc}(\mathbf{r}_2) \\ R_2 \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}_2)}{\partial n} \\ \vdots \\ R_1 \psi_{inc}(\mathbf{r}_N) \\ R_2 \frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

et où les normales intervenant dans les termes  $\frac{\partial \bullet(\mathbf{r}_k)}{\partial n}$  sont calculées au point  $\mathbf{r}_k = x_k \hat{\mathbf{x}} + \zeta(x_k) \hat{\mathbf{z}}$  de la surface  $S$ . On peut remarquer que la représentation de  $\mathbf{P}$  donnée en (D.12) est assez compliquée et qu'une représentation de la forme

$$\mathbf{P}_{2N \times 2N} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{1N \times N} & \mathbf{P}_{2N \times N} \\ \mathbf{P}_{3N \times N} & \mathbf{P}_{4N \times N} \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

aurait pu aussi correspondre à une formulation du type (D.11). Cependant, dans le but d'obtenir un algorithme rapidement convergent, il est préférable d'avoir une matrice  $\mathbf{P}$  à diagonale dominante, notamment afin de faciliter son préconditionnement; or si la forme (D.14) est plus simple que celle de (D.12), elle n'offre malheureusement pas cette caractéristique, contrairement à cette dernière.

On peut dès lors procéder à la décomposition (2.103) de la matrice  $\mathbf{P}$  donnée par (D.12) et programmer un algorithme du type (2.119). La difficulté réside dans le choix des paramètres  $R_1$  et  $R_2$ ; en effet, un choix inadapté de ceux-ci donne un algorithme peu convergent voir divergent. Cela provient de la forte singularité du noyau

$$\left( \frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\alpha_2}{\rho_{10}} \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \right)$$

de l'opérateur  $\mathcal{L}_3$ ; c'est cet opérateur qui a le noyau le plus singulier des quatre. En effet, lors de l'application de l'algorithme MOMI on calcule successivement les contributions Forward (provenant de la gauche du point courant) puis Backward

(provenant de la droite) en considérant par exemple, dans le cas Forward, que les contributions des éléments de droite sont négligeables. Ce n'est pas le cas lorsqu'au point courant les interactions locales sont fortes au point courant, ce qui se traduit par une diagonale dominante de la matrice impédance, conséquence d'une forte singularité du noyau de l'opérateur. Donc dans le cas d'une forte singularité du noyau, la méthode MOMI diverge. Une solution consiste à annuler le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_3$  en choisissant  $R_2$  tel que  $\frac{\alpha_2}{\rho_{10}} = 1$ . Quant au choix de  $R_1$ , il est relativement sans conséquence sur la convergence de la méthode. Toutefois ce choix de  $R_2$  n'est pas vraiment optimal et ne suffit pas à réduire toutes les singularités des opérateurs ; on doit envisager une méthode de préconditionnement. La méthode de préconditionnement consiste à remplacer un système

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (\text{D.15})$$

par

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{D.16})$$

où  $\mathbf{C}$  est une matrice de préconditionnement, c'est-à-dire telle que  $\mathbf{C}^{-1}$  est une "bonne" approximation de  $\mathbf{Z}^{-1}$ , et obtenue simplement. Généralement, les matrices du problème de diffusion sont à diagonale dominante, donc  $\mathbf{C} = \mathbf{D}$  est une matrice possible pour un préconditionnement. Cependant, pour obtenir une matrice de préconditionnement plus efficace, on peut considérer une matrice bande  $\mathbf{B}$ , prenant en compte les éléments de la matrice proche de la diagonale. Dans le cas de la méthode MOMI, cette étape de conditionnement à l'aide de la matrice  $\mathbf{B}$  s'introduit en écrivant l'équation (D.11) sous la forme

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{inc} + (\mathbf{P} - \mathbf{B})\mathbf{J} + \mathbf{B}\mathbf{J} \quad (\text{D.17})$$

soit

$$\mathbf{J} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{J}_{inc} + (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B})\mathbf{J} \quad (\text{D.18})$$

Cependant l'étape d'inversion de la matrice bande  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$  est relativement gourmande en temps de calcul. Ce problème est résolu élégamment dans la référence [Adams1998], où l'auteur remarque qu'avec une matrice  $\mathbf{B}$  de la forme

$$\mathbf{B}_{2N \times 2N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3,11} & 0 & P_{3,12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3,21} & 0 & P_{3,22} & 0 & P_{3,23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{3,32} & 0 & P_{3,33} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{3,N(N-1)} & 0 & P_{3,NN} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

qui est construite à partir des contributions proches de la diagonale de la matrice  $\mathbf{P}_3$ , nous avons l'égalité  $\mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{0}$  ce qui permet de déduire

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (\text{D.20})$$

soit encore

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \quad (\text{D.21})$$

En posant  $\mathbf{X}_{inc} = (\mathbf{I} + \mathbf{B})\mathbf{J}_{inc}$  et opérant la décomposition suivante

$$(\mathbf{I} + \mathbf{B})(\mathbf{P} - \mathbf{B}) = \mathbf{L}_B + \hat{\mathbf{D}}_B + \mathbf{U}_B \quad (\text{D.22})$$

puis en posant  $\mathbf{D}_B = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{D}}_B$ , on aboutit, par analogie avec (2.116) à

$$\mathbf{J} = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{D}_B - \mathbf{U}_B]^{-1} \left( [[\mathbf{D}_B - \mathbf{L}_B]^{-1} \mathbf{D}_B - \mathbf{I}] [\mathbf{D}_B [\mathbf{D}_B - \mathbf{U}_B]^{-1} - \mathbf{I}] \right)^n [\mathbf{D}_B - \mathbf{L}_B]^{-1} \mathbf{D}_B \mathbf{X}_{inc} \quad (\text{D.23})$$

qui est l'expression de la décomposition par la méthode MOMI avec préconditionnement, pour le cas diélectrique. L'algorithme de calcul correspondant est identique à (2.119).





## Annexe E

# Méthode BMIA : polarisation TM

Rappelons que nous nous plaçons dans le cas parfaitement conducteur. L'équation intégrale de départ est la MFIE TM, qui s'écrit

$$\forall \mathbf{r}' \in S$$

$$\begin{aligned} \psi_{inc}(\mathbf{r}') &= \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \oint_S ds \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \psi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \\ &\quad \times \{\zeta'(x)(x - x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}u(x) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

en posant

$$u(x) = \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{E.2})$$

Il convient de remarquer que l'inconnue  $u(x)$  du cas TE est différente de celle du cas TM.

En appliquant la méthode des moments, on obtient un système linéaire  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$  où la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  correspond à la matrice  $\mathbf{A}$  donnée en (2.68).  $\mathbf{Z}$  peut se décomposer en une somme de matrices d'interactions fortes et faibles de même qu'en (3.85), et les coefficients de la matrice d'interactions faibles sont de la forme

$$Z_{mn}^{(w)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m - n| < R_d \\ -\frac{i\Delta x k_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \times \{\zeta'(x_n)(x_n - x_m) - (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\} & \text{pour } |m - n| \geq R_d \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

où  $R_d = \text{Partie entière}\{r_d/\Delta x\}$  et  $r_d$  est une distance de voisinage telle que  $r_d \gg \sigma_h$ . Contrairement au cas TE, la matrice d'interactions faibles du cas TM n'est pas symétrique; en effet, le terme  $\{-\zeta'(x_n)(x_n - x_m) + (\zeta(x_n) - \zeta(x_m))\}$  n'est pas symétrique par rapport aux variables  $x_m$  et  $x_n$ . Cependant, on peut développer

comme précédemment un algorithme par FFT. D'après [95], pour  $r_d \leq x_d \leq L$

$$\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}\left(k_0 \sqrt{x_d^2 + z_d^2}\right)}{\sqrt{x_d^2 + z_d^2}} = \sum_{m=0}^M \underbrace{\frac{ik_0}{4} \frac{H_{m+1}^{(1)}(k_0 x_d)}{m! x_d} \left(\frac{-k_0 x_d}{2}\right)^m}_{a_m(x_d)} \left(\frac{z_d^2}{x_d^2}\right)^m \quad (\text{E.4})$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0(x_d) &= +\frac{ik_0}{4} H_1^{(1)}(k_0 x_d) \frac{1}{x_d} \\ a_1(x_d) &= -\frac{ik_0}{4} H_2^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0}{2} \\ a_2(x_d) &= +\frac{ik_0}{4} H_3^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0^2 x_d}{8} \\ a_3(x_d) &= -\frac{ik_0}{4} H_4^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0^3 x_d^2}{48} \\ a_4(x_d) &= +\frac{ik_0}{4} H_5^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0^4 x_d^3}{384} \\ a_5(x_d) &= -\frac{ik_0}{4} H_6^{(1)}(k_0 x_d) \frac{k_0^5 x_d^4}{3840} \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Le terme représentant les interactions faibles s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}\left(k_0 \sqrt{x_d^2 + z_d^2}\right)}{\sqrt{x_d^2 + z_d^2}} \{\zeta'(x)(x - x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \\ & \simeq - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_0(x_d) \{\zeta'(x)(x - x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \\ & - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_1(x_d) \frac{z_d^2}{x_d^2} \{\zeta'(x)(x - x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \\ & - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_2(x_d) \frac{z_d^4}{x_d^4} \{\zeta'(x)(x - x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \\ & - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx a_3(x_d) \frac{z_d^6}{x_d^6} \{\zeta'(x)(x - x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\} u(x) \vartheta(x_d - r_d) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Cette décomposition est légèrement plus compliquée que celle donnée en (2.133), dans le cas TE, du fait de la présence du terme  $\{-\zeta'(x)(x - x') + (\zeta(x) - \zeta(x'))\}$ . Ensuite, afin de déterminer les matrices diagonales et les matrices Toeplitz  $T^s(k)$ ,  $Z^d(k)$  et  $T^r(k)$ , intervenant dans la factorisation des matrices  $\mathbf{Z}_m^{(w)}$ , il faut

développer les termes :

$$-\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\} = -\zeta'(x)x + x'\zeta'(x) + \zeta(x) - \zeta(x') \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} & -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}z_d^2 \\ & = -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}(\zeta(x) - \zeta(x'))^2 \\ & = -\zeta'(x)x\zeta(x)^2 + x'\zeta'(x)\zeta(x)^2 + \zeta(x)^3 - \zeta(x')\zeta(x)^2 \\ & \quad + 2\zeta(x')\zeta'(x)x\zeta(x) - 2x'\zeta(x')\zeta'(x)\zeta(x) - 2\zeta(x')\zeta(x)^2 + 2\zeta(x')^2\zeta(x) \\ & \quad - \zeta(x')^2\zeta'(x)x + x'\zeta(x')^2\zeta'(x) + \zeta(x')^2\zeta(x) - \zeta(x')^3 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} & -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}z_d^4 \\ & = -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}(\zeta(x) - \zeta(x'))^4 \\ & = -\zeta'(x)x\zeta(x)^4 + x'\zeta'(x)\zeta(x)^4 + \zeta(x)^5 - \zeta(x')\zeta(x)^4 \\ & \quad + 4\zeta(x')\zeta'(x)x\zeta(x)^3 - 4x'\zeta(x')\zeta'(x)\zeta(x)^3 - 4\zeta(x')\zeta(x)^4 + 4\zeta(x')^2\zeta(x)^3 \\ & \quad - 6\zeta(x')^2\zeta'(x)x\zeta(x)^2 + 6x'\zeta(x')^2\zeta'(x)\zeta(x)^2 + 6\zeta(x')^2\zeta(x)^3 - 6\zeta(x')^3\zeta(x)^2 \\ & \quad + 4\zeta(x')^3\zeta'(x)x\zeta(x) - 4x'\zeta(x')^3\zeta'(x)\zeta(x) - 4\zeta(x')^3\zeta(x)^2 + 4\zeta(x')^4\zeta(x) \\ & \quad - \zeta(x')^4\zeta'(x)x + x'\zeta(x')^4\zeta'(x) + \zeta(x')^4\zeta(x) - \zeta(x')^5 \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} & -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}z_d^6 \\ & = -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}(\zeta(x) - \zeta(x'))^6 \\ & = -\zeta'(x)x\zeta(x)^6 + x'\zeta'(x)\zeta(x)^6 + \zeta(x)^7 - \zeta(x')\zeta(x)^6 \\ & \quad + 6\zeta(x')\zeta'(x)x\zeta(x)^5 - 6x'\zeta(x')\zeta'(x)\zeta(x)^5 - 6\zeta(x')\zeta(x)^6 + 6\zeta(x')^2\zeta(x)^5 \\ & \quad - 15\zeta(x')^2\zeta'(x)x\zeta(x)^4 + 15x'\zeta(x')^2\zeta'(x)\zeta(x)^4 + 15\zeta(x')^2\zeta(x)^5 - 15\zeta(x')^3\zeta(x)^4 \\ & \quad + 20\zeta(x')^3\zeta'(x)x\zeta(x)^3 - 20x'\zeta(x')^3\zeta'(x)\zeta(x)^3 - 20\zeta(x')^3\zeta(x)^4 + 20\zeta(x')^4\zeta(x)^3 \\ & \quad - 15\zeta(x')^4\zeta'(x)x\zeta(x)^2 + 15x'\zeta(x')^4\zeta'(x)\zeta(x)^2 + 15\zeta(x')^4\zeta(x)^3 - 15\zeta(x')^5\zeta(x)^2 \\ & \quad + 6\zeta(x')^5\zeta'(x)x\zeta(x) - 6x'\zeta(x')^5\zeta'(x)\zeta(x) - 6\zeta(x')^5\zeta(x)^2 + 6\zeta(x')^6\zeta(x) \\ & \quad - \zeta(x')^6\zeta'(x)x + x'\zeta(x')^6\zeta'(x) + \zeta(x')^6\zeta(x) - \zeta(x')^7 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} & -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}z_d^8 \\ & = -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}(\zeta(x) - \zeta(x'))^8 \\ & = -\zeta'(x)x\zeta(x)^8 + x'\zeta'(x)\zeta(x)^8 + \zeta(x)^9 - \zeta(x')\zeta(x)^8 \\ & \quad + 8\zeta(x')\zeta'(x)x\zeta(x)^7 - 8x'\zeta(x')\zeta'(x)\zeta(x)^7 - 8\zeta(x')\zeta(x)^8 + 8\zeta(x')^2\zeta(x)^7 \\ & \quad - 28\zeta(x')^2\zeta'(x)x\zeta(x)^6 + 28x'\zeta(x')^2\zeta'(x)\zeta(x)^6 + 28\zeta(x')^2\zeta(x)^7 - 28\zeta(x')^3\zeta(x)^6 \\ & \quad + 56\zeta(x')^3\zeta'(x)x\zeta(x)^5 - 56x'\zeta(x')^3\zeta'(x)\zeta(x)^5 - 56\zeta(x')^3\zeta(x)^6 + 56\zeta(x')^4\zeta(x)^5 \\ & \quad - 70\zeta(x')^4\zeta'(x)x\zeta(x)^4 + 70x'\zeta(x')^4\zeta'(x)\zeta(x)^4 + 70\zeta(x')^4\zeta(x)^5 - 70\zeta(x')^5\zeta(x)^4 \\ & \quad + 56\zeta(x')^5\zeta'(x)x\zeta(x)^3 - 56x'\zeta(x')^5\zeta'(x)\zeta(x)^3 - 56\zeta(x')^5\zeta(x)^4 + 56\zeta(x')^6\zeta(x)^3 \\ & \quad - 28\zeta(x')^6\zeta'(x)x\zeta(x)^2 + 28x'\zeta(x')^6\zeta'(x)\zeta(x)^2 + 28\zeta(x')^6\zeta(x)^3 - 28\zeta(x')^7\zeta(x)^2 \\ & \quad + 8\zeta(x')^7\zeta'(x)x\zeta(x) - 8x'\zeta(x')^7\zeta'(x)\zeta(x) - 8\zeta(x')^7\zeta(x)^2 + 8\zeta(x')^8\zeta(x) \\ & \quad - \zeta(x')^8\zeta'(x)x + x'\zeta(x')^8\zeta'(x) + \zeta(x')^8\zeta(x) - \zeta(x')^9 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned}
& -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}z_d^{10} \\
& = -\{\zeta'(x)(x-x') - (\zeta(x) - \zeta(x'))\}(\zeta(x) - \zeta(x'))^{10} \\
& = -\zeta'(x)x\zeta(x)^{10} + x'\zeta'(x)\zeta(x)^{10} + \zeta(x)^{11} - \zeta(x')\zeta(x)^{10} \\
& + 10\zeta(x')\zeta'(x)x\zeta(x)^9 - 10x'\zeta(x')\zeta'(x)\zeta(x)^9 - 10\zeta(x')\zeta(x)^{10} + 10\zeta(x')^2\zeta(x)^9 \\
& - 45\zeta(x')^2\zeta'(x)x\zeta(x)^8 + 45x'\zeta(x')^2\zeta'(x)\zeta(x)^8 + 45\zeta(x')^2\zeta(x)^9 - 45\zeta(x')^3\zeta(x)^8 \\
& + 120\zeta(x')^3\zeta'(x)x\zeta(x)^7 - 120x'\zeta(x')^3\zeta'(x)\zeta(x)^7 - 120\zeta(x')^3\zeta(x)^8 + 120\zeta(x')^4\zeta(x)^7 \\
& - 210\zeta(x')^4\zeta'(x)x\zeta(x)^6 + 210x'\zeta(x')^4\zeta'(x)\zeta(x)^6 + 210\zeta(x')^4\zeta(x)^7 - 210\zeta(x')^5\zeta(x)^6 \\
& + 252\zeta(x')^5\zeta'(x)x\zeta(x)^5 - 252x'\zeta(x')^5\zeta'(x)\zeta(x)^5 - 252\zeta(x')^5\zeta(x)^6 + 252\zeta(x')^6\zeta(x)^5 \\
& - 210\zeta(x')^6\zeta'(x)x\zeta(x)^4 + 210x'\zeta(x')^6\zeta'(x)\zeta(x)^4 + 210\zeta(x')^6\zeta(x)^5 - 210\zeta(x')^7\zeta(x)^4 \\
& + 120\zeta(x')^7\zeta'(x)x\zeta(x)^3 - 120x'\zeta(x')^7\zeta'(x)\zeta(x)^3 - 120\zeta(x')^7\zeta(x)^4 + 120\zeta(x')^8\zeta(x)^3 \\
& - 45\zeta(x')^8\zeta'(x)x\zeta(x)^2 + 45x'\zeta(x')^8\zeta'(x)\zeta(x)^2 + 45\zeta(x')^8\zeta(x)^3 - 45\zeta(x')^9\zeta(x)^2 \\
& + 10\zeta(x')^9\zeta'(x)x\zeta(x) - 10x'\zeta(x')^9\zeta'(x)\zeta(x) - 10\zeta(x')^9\zeta(x)^2 + 10\zeta(x')^{10}\zeta(x) \\
& - \zeta(x')^{10}\zeta'(x)x + x'\zeta(x')^{10}\zeta'(x) + \zeta(x')^{10}\zeta(x) - \zeta(x')^{11} \tag{E.12}
\end{aligned}$$

Nous faisons précéder, dans chaque terme, les grandeurs en  $x'$ , afin de faciliter la programmation des matrices  $T^s(k)$ ,  $Z^d(k)$  et  $T^r(k)$ .

Puis, en tenant compte de la décomposition (E.6), nous pouvons déduire directement la forme factorisée des matrices  $\mathbf{Z}_m^{(w)}$  intervenant dans la décomposition de la matrice d'interactions faibles  $\mathbf{Z}^{(w)}$

$$\mathbf{Z}^{(w)} = \sum_{m=0}^M \mathbf{Z}_m^{(w)} \tag{E.13}$$

de la même façon que dans le cas TE.

## Annexe F

# Fast Multipole Method

Une méthode efficace pour optimiser le produit matrice-vecteur est indéniablement la Fast Multipole Method (FMM). L'idée originale de Rokhlin dans le cas du problème de diffusion [144], résumée dans [39], a été reprise et améliorée considérablement, et fait encore aujourd'hui l'objet de nombreuses études en 2D ou 3D [25, 44, 45, 92, 189]. Elle est intégrée, par exemple, dans les codes de calcul développés pour le *projet CAIMAN* de l'INRIA [139]. La méthode multipôle rapide est un algorithme récursif et parallélisable qui permet d'accélérer les produits matrice-vecteur utilisés lors des inversions itératives de ces systèmes. Elle consiste à remplacer un produit matrice-vecteur "classique" par un produit matrice vecteur approché. On sépare les interactions entre éléments en fonction de leur caractère proche ou lointain, les interactions lointaines étant regroupées afin d'être gérées collectivement. Nous donnons ici une représentation élémentaire 1D de la méthode FMM tirée de [44].

### F.1 Notion de découplage

Donnons-nous un ensemble de  $N$  points  $x_i \in \mathbb{R}$  répartis uniformément dans  $[0, 1]$ . Soit  $\mathbf{Y}$  un vecteur donné de longueur  $N$  et  $\mathbf{Z}$  une matrice de terme général  $Z_{ij} = f(x_i, x_j)$ . Supposons que l'on veuille calculer rapidement le produit  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{C}$ . On doit alors calculer les sommes :

$$c_i = \sum_{j=1}^N f(x_i, x_j) \cdot Y_j \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{F.1})$$

A priori, pour chacune des  $N$  composantes  $c_i$  nous devons réaliser  $N$  opérations (on ne comptera pas les additions, beaucoup moins coûteuses en temps de calcul). Ainsi, une méthode de calcul direct nécessiterait  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations.

Sans aucune autre connaissance sur  $f$  nous ne pourrions optimiser ce nombre d'opérations. Mais si nous supposons que l'on peut approcher  $f(x_i, x_j)$  par  $g(x_i)h(x_j)$ , (ce qui revient à *découpler*  $f$ ), alors la somme (F.9) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N f(x_i, x_j) \cdot Y_j &= g(x_i) \cdot \sum_{j=1}^N h(x_j) \cdot Y_j \\ &= g(x_i) \cdot S \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

$$\text{où } S = \sum_{j=1}^N h(x_j).Y_j \quad (\text{F.3})$$

Puisque  $S$  peut être pré-calculée en  $\mathcal{O}(N)$  opérations, il reste à calculer

$$g(x_i).S \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{F.4})$$

ce qui est fait en  $\mathcal{O}(N)$  opérations. Ainsi, sous l'hypothèse de *découplage* nous pouvons ramener le nombre d'opérations de  $\mathcal{O}(N^2)$  à  $\mathcal{O}(N)$ .

Cependant, on ne peut pas toujours approcher  $f(x_i, x_j)$  par  $g(x_i)h(x_j)$ , mais plutôt par une somme

$$f(x_i, x_j) = \sum_{p=1}^P g^{(p)}(x_i)h^{(p)}(x_j) \quad (\text{F.5})$$

Cette décomposition est intéressante dans notre cas si  $P \ll N$  car alors la somme (F.9) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N f(x_i, x_j).Y_j &= \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^P g^{(p)}(x_i)h^{(p)}(x_j).Y_j \\ &= \sum_{p=1}^P g^{(p)}(x_i) \left[ \sum_{j=1}^N h^{(p)}(x_j).Y_j \right] \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Comme  $S' = \left[ \sum_{j=1}^N h^{(p)}(x_j).Y_j \right]$  peut être pré-calculée en  $\mathcal{O}(N)$  opérations,

$$\sum_{p=1}^P g^{(p)}(x_i)S' \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{F.7})$$

est calculée en  $\mathcal{O}(P)$  opérations. Ainsi, sous l'hypothèse (F.5) nous pouvons ramener le nombre d'opérations de  $\mathcal{O}(N^2)$  à  $\mathcal{O}(NP) \ll \mathcal{O}(N^2)$ .

## F.2 Application du découplage

On définit la matrice  $Z$  par :

$$Z_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

et on souhaite calculer le produit  $\mathbf{Z}.\mathbf{Y}$  où  $\mathbf{Y}$  est un vecteur donné :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{x_i - x_j}.Y_j \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{F.9})$$

On appelle  $x_i$  le point d'observation, et  $(x_j)_{j=1, \dots, N}$  les points sources. Nous regroupons pour cela les points de l'intervalle  $[0, 1]$  en quatre sous-ensembles :  $G_1 = [0; \frac{1}{4}[$ ,  $G_2 = [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[$ ,  $G_3 = [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[$ , et  $G_4 = [\frac{3}{4}; 1[$ . On notera  $C_k$  le centre du groupe  $G_k$ .


 Fig.F.1 – Partition de l'intervalle  $[0, 1]$ .

- Si on prend par exemple, comme l'indique la figure F.1,  $x_i \in G_1$  et  $x_j \in G_3 \cup G_4$ , alors  $|C_1 - x_i| \leq \frac{|C_1 - x_j|}{2} < |C_1 - x_j|$ , et on peut écrire :

$$\frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{(C_1 - x_j) - (C_1 - x_i)} = \frac{1}{C_1 - x_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{C_1 - x_i}{C_1 - x_j} \right)^n \quad (\text{F.10})$$

Ainsi si on se donne un ordre de tolérance  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre  $N_\epsilon = \mathcal{O}\left(\frac{-\log \epsilon}{\log 2}\right)$  [44] tel que :

$$\left| \frac{1}{x_i - x_j} - \sum_{n=0}^{N_\epsilon} g(x_i) \cdot h(x_j) \right| \leq \epsilon \frac{1}{x_i - x_j} \quad (\text{F.11})$$

$$\text{où } g(x_i) \cdot h(x_j) = \frac{(C_1 - x_i)^n}{(C_1 - x_j)^{n+1}} \quad \text{pour } x_i \in G_1 \text{ et } x_j \in G_3 \cup G_4 \quad (\text{F.12})$$

On peut déduire alors l'approximation suivante :

$$\sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} m_{ij} \cdot Y_j \approx \sum_{n=0}^{N_\epsilon} (C_1 - x_i)^n \sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \frac{Y_j}{(C_1 - x_j)^{n+1}} \quad (\text{F.13})$$

L'approximation ci-dessus n'est valable que pour  $|C_1 - x_i| < |C_1 - x_j|$ , qui n'est exact que lorsque  $x_j \in G_3 \cup G_4$ ,  $x_i$  étant donné dans  $G_1$ . Dans ce cas là, on parle d'*interactions lointaines*, qui permet de supposer le *découplage* de la fonction :

$$\begin{aligned} (G_1 \cup G_2) \times (G_3 \cup G_4) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_i, x_j) &\mapsto \frac{1}{x_i - x_j} \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

En résumé, nous devons calculer en premier, pour chaque groupe  $G_k$  et pour chaque  $n \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$  :

$$S_k^n = \sum_{j/x_j \in G_{far}} \frac{Y_j}{(C_k - x_j)^{n+1}} \quad (\text{F.15})$$

qui est la contribution lointaine des groupes  $G_{far}$ , commune à tous les points observateurs  $x_i$  du groupe  $G_k$ .

Puis on effectue ensuite, pour chaque groupe, le calcul :

$$\sum_{n=0}^{N_\epsilon} (C_k - x_i)^n \cdot S_k^n \quad (\text{F.16})$$

- Dans le cas où  $x_j \in G_1 \cup G_2$ , on parle d'*interactions proches*, et on calcule directement la somme :

$$\sum_{\substack{j/x_j \in G_1 \cup G_2 \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot Y_j \quad (\text{F.17})$$

ou encore, en généralisant :

$$\sum_{\substack{j/x_j \in G_{near} \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot Y_j \quad (\text{F.18})$$

Finalement, la complexité du produit matrice-vecteur  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}(MN \ln N + N^2/M)$  où  $M$  est le nombre d'intervalles (dans l'exemple,  $M = 4$ ). La complexité optimale  $\mathcal{O}(N^{3/2} \ln N)$  est obtenue pour  $M \sim N^{1/2}$ .

### F.3 Interprétation physique

On peut résumer la démarche FMM par les illustrations présentées ci-dessous :

- Pour le calcul des interactions lointaines, nous calculons d'abord la contribution au centre  $C_1$  du groupe observateur des sources en champ lointain. Puis nous transférons cette contribution au point d'observation  $x_i$  (Fig. F.2).

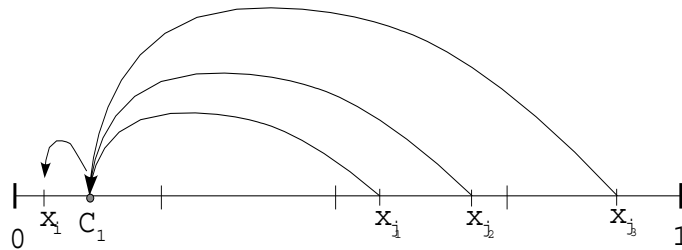


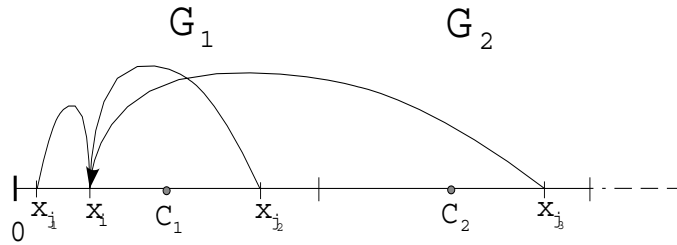
Fig.F.2 – Calcul des contributions en champ lointain par découplage.

- Pour le calcul des interactions proches, nous calculons directement au point  $x_i$  les contributions de chaque point source situé en champ proche (Fig. F.3).

### F.4 Conclusion

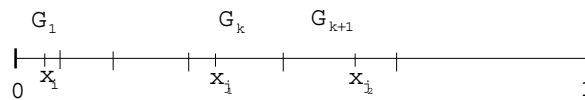
La méthode FMM est une méthode complexe à programmer, mais qui est très performante. Elle est couramment utilisée à présent, de même que la méthode BMIA/CAG, lorsque les problèmes sont de très grande taille (de l'ordre de 20000 inconnues). On peut cependant améliorer la méthode pour ramener sa complexité de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^{3/2})$  à celui de  $\mathcal{O}(N \log N)$ . La démarche suivie est brièvement expliquée dans [44] : lorsque on considère des groupes répartis uniformément sur la surface, on parle de méthode FMM à un niveau. Mais si on choisit une répartition





**Fig.F.3** – Calcul des contributions directes en champ proche.

fonction de l'éloignement des points sources, (Fig. F.4), alors on parle d'une méthode FMM multiniveaux (multilevel).



**Fig.F.4** – Regroupement non uniforme, dans le cas de la méthode FMM multiniveaux.

Il existe aussi une autre variante de la méthode FMM qui est la SDFMM (Steepest Descent FMM) [92].

La méthode FMM a été aussi adaptée pour des surfaces diélectriques, et a été utilisée conjointement à d'autres méthodes itératives telles que la méthode PBTG (Physic-Based Two-Grid) [181] et la méthode FB.



# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions. Applied Mathematics Series, Volume 55*. Dover Publications, New York, 1968.
- [2] R. J. Adams. *A class of robust and efficient iterative methods for wave scattering problems*. Thèse, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [3] R. J. Adams and G. S. Brown. An iterative solution of one-dimensional rough surface scattering problems based on a factorization of the helmholtz operator. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47 :765–767, 1999.
- [4] C. Amra. Calculation and measurement of scattering for investigation of microroughness in optical coatings. *J. Opt.*, 21(3) :83–98, 1990.
- [5] C. Amra. From light scattering to the microstructure of thin film multilayers. *Applied Optics*, 32 :5481–5491, 1993.
- [6] C. Amra. Light scattering from multilayer optics. i. tools of investigation. *Journal of the Optical Society of America A*, 11 :197–210, 1994.
- [7] C. Amra. Light scattering from multilayer optics. ii. application to experiment. *Journal of the Optical Society of America A*, 11 :211–226, 1994.
- [8] C. Amra, G. Albrand, and P. Roche. Theory and application of antiscattering single layers : antiscattering antireflection coatings. *Applied Optics*, 16 :2695–2702, 1986.
- [9] C. Amra, J. H. Apfel, and E. Pelletier. The role of interface correlation in light scattering by a multilayer. *Applied Optics*, 31 :3134–3151, 1992.
- [10] J. R. Apel. An improved model of the ocean surface wave vector spectrum and its effects on radar backscatter. *J. of Geo. Res. Oceans*, 99 :16269–16291, 1994.
- [11] T. Arens. Uniqueness for elastic wave scattering by rough surfaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 33 :461–476, 2001.
- [12] J. L. Alvarez-Perez. An extension of the iem/iemm surface scattering model. *Waves in Random Media*, 11 :307–329, 2001.
- [13] A. Aziz, W. Papousek, and G. Leising. Polychromatic reflectance and transmittance slab with a randomly rough boundary. *Pure Appl. Opt.*, 38(25) :5422–5428, 1999.
- [14] E. Bahar and M. A. Fitzwater. Like and cross-polarized scattering cross sections for random rough surfaces : Theory and experiment. *Journal of the Optical Society of America A*, 2 :2295–2303, 1985.

- 
- [15] E. Bahar and R. D. Kubik. Computations of the mueller matrix elements for scattering from layered structures with rough surfaces, with applications to optical detection. *Applied Optics*, 36(13) :2947–2955, 1997.
- [16] E. Bahar and Y. Zhang. Diffuse like and cross-polarized fields scattered from irregular layered structures : full-wave analysis. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(5) :941–948, 1999.
- [17] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Poza, C. Romine, and H. Ban der Vort. *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [18] C. Baudier. *Diffraction d’ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires : méthode approchée de Rayleigh et méthode exacte en coordonnées non-orthogonales*. Thèse, Université de Versailles - Centre d’étude des Environnements Terrestre et Planétaires, 2002.
- [19] P. Beckman and A. Spizzichino. *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Pergamon, Oxford, 1963.
- [20] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, 114 :185–200, 1994.
- [21] D. G. Blumberg, V. Freilikher, I. M. Fuks, Y. Kaganovskii, A. A. Maradudin, and M. Rosenbluh. Effects of roughness on the retroreflection from dielectric layers. *Waves in Random Media*, 12 :279–292, 2002.
- [22] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics : Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 7th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [23] C. Bourlier and G. Berginc. Microwave analytical backscattering models from randomly rough anisotropic sea surface - comparison with experimental data in c and ku bands. *Progress In Electromagnetics Research*, 37 :31–78, 2002.
- [24] G. C. Brown, V. Celli, M. Haller, and A. Marvin. Vector theory of light scattering from a rough surface : unitary and reciprocal expansions. *Surf.Sci.*, 136 :381–397, 1984.
- [25] R. J. Burkholder and D.-H. Kwon. High-frequency asymptotic acceleration of the fast multipole method. *Radio Science*, 51 :1199–1206, 1996.
- [26] O. Calvo-Perez. *Diffusion des ondes électromagnétiques par un film rugueux hétérogène*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale, Paris, 1999.
- [27] O. Calvo-Perez, J. J. Greffet, and A. Sentenac. Scattering by randomly rough dielectric surfaces and rough dielectric films : influence of the height distribution. *Pure Appl. Opt.*, 1 :560–565, 1999.
- [28] P. Cao and C. Macaskill. Iterative techniques for rough surface scattering problems. *Wave Motion*, 21 :209–229, 1995.
- [29] C. H. Chan, L. Tsang, and Q. Li. Monte-carlo simulations of large-scale one-dimensional random rough-surface scattering at near-grazing incidence : penetrable case. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(1) :142–149, 1998.

- 
- [30] S. N. Chandler-Wilde. The impedance boundary value problem for the helmholtz equation in a half-plane. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 20 :813–840, 1997.
- [31] S. N. Chandler-Wilde, C. R. Ross, and B. Zhang. Scattering by infinite one-dimensional rough surfaces. *Proc. R. Soc. Lon. A*, 455 :3767–3787, 1999.
- [32] S. N. Chandler-Wilde and B. Zhang. Electromagnetic scattering by an inhomogenous conducting or dielectric layer on a perfectly conducting plate. *Proc. R. Soc. Lon. A*, 454 :519–542, 1998.
- [33] S. N. Chandler-Wilde and B. Zhang. A uniqueness result for scattering by infinite rough surfaces. *SIAM J. Appl. Math.*, 58 :1774–1790, 1998.
- [34] M. Cheney. A mathematical tutorial on synthetic aperture radar. *SIAM Rev.*, 43 :301–312, 2001.
- [35] W. C. Chew, J. M. Jin, C. C. Lu, E. Michielssen, and J. M. Song. Fast solution methods in electromagnetics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(3) :533–543, 1997.
- [36] W. C. Chew, J.-M. Jin, E. Michielssen, and J. Song. *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*. Artech House, Boston, 2001.
- [37] H. T. Chou and J. T. Johnson. A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the forward-backward method. *Radio Science*, 33 :1277–1287, 1998.
- [38] H. T. Chou and J. T. Johnson. Formulation of forward-backward method using novel spectral acceleration for the modeling of scattering from impedance rough surfaces. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(1) :605–607, 2000.
- [39] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzurau. The fast multipole method for the wave equation : a pedestrian description. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 35(3) :7–12, 1993.
- [40] R. E. Collin. Electromagnetic scattering from perfectly conducting rough surfaces (a new full wave method). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40 :1466–1477, 1992.
- [41] C. S. Cox and W. H. Munk. Statistics of the sea surface derived from sun glitter. *J. Mar. Res.*, 13 :198–226, 1954.
- [42] H.-T. Chou D. Torrungrueng and J. T. Johnson. A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from two-dimensional large-scale perfectly conducting random rough surfaces with the forward-backward method. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(4) :1656–1668, 2000.
- [43] A. E. Danese. *Advanced Calculus*, volume 1. Allyn and Bacon, Boston, 1965.
- [44] E. Darrigrand. *Couplage méthodes multipôles - discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 2002.
- [45] E. Darve. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999.

- 
- [46] G. Colas de Francs. *Optique sub-longueur d'onde et fluorescence moléculaire perturbée*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2002.
- [47] N. Dechamps, C. Bourlier, N. de Beaucoudrey, and S. Toutain. Méthode de kirchhoff avec ombre appliquée à diffusion électromagnétique par une couche rugueuse diélectrique 1d. *Numelec, Toulouse, presentation orale*, 2003.
- [48] N. Dechamps, C. Bourlier, N. de Beaucoudrey, and S. Toutain. Numerical simulations of scattering from multilayers separated by one-dimensional rough interfaces. *Intern. Geo. and Rem. Sens. Symp., Toulouse, presentation orale*, 2003.
- [49] N. Dechamps, C. Bourlier, N. de Beaucoudrey, and S. Toutain. Electromagnetic scattering by one-dimensional rough layers : Fast numerical methods. *Progress In Electromagnetics Research Symposium, Pise, Italie presentation orale*, 2004.
- [50] N. Dechamps, N. de Beaucoudrey, C. Bourlier, and S. Toutain. Electromagnetic scattering by oil slicks on sea surfaces : Rigorous numerical simulations. *Radar'04, Toulouse*, 2004.
- [51] G. A. Deschamps. The gaussian beam as a bundle of complex rays. *Electron. Lett.*, 7(23) :684–685, 1971.
- [52] G. A. Deschamps. Ray techniques in electromagnetics. *Proc. IEEE*, 60, 1972.
- [53] D. J. Donohue, H.-C. Ku, and D. R. Thompson. Application of iterative moment-method solutions to ocean surfaces radar scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46 :121–132, 1998.
- [54] R. Dusseaux and R. de Oliveira. Scattering of a plane wave by a one-dimensional rough surface. study in a nonorthogonal coordinate system. *Progress In Electromagnetics Research*, 34 :63–88, 2001.
- [55] J. M. Eastman. Scattering by all-dielectric multilayer bandpass filters and mirrors for lasers. *Phys. Thin Films*, 6 :167–226, 1978.
- [56] T. Elfouhaily and al. A new bistatic model for electromagnetic scattering from perfectly conducting random surfaces. *Waves in Random Media*, 9 :281–294, 1999.
- [57] T. Elfouhaily and al. A new bistatic model for electromagnetic scattering from perfectly conducting random surfaces : Numerical evaluation and comparison with spm. *Waves in Random Media*, 11 :33–44, 2001.
- [58] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark. A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. *J. of Geo. Res.*, 102(7), 1997.
- [59] T. M. Elfouhaily and C.-A. Guérin. A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces. *Waves in Random Media*, 14 :R1–R40, 2004.
- [60] J. M. Elson. *Journal of the Optical Society of America A*, 66 :682, 1976.
- [61] J. M. Elson, J. P. Rahn, and J. M. Bennett. Light scattering from multilayer optics : comparison of theory and experiment. *Applied Optics*, 19 :669–679, 1980.

- 
- [62] J. M. Elson, J. P. Rahn, and J. M. Bennett. Relationship of the total integrated scattering from multilayer-coated optics to angle of incidence, polarization, correlation-length, and roughness cross-correlation properties. *Applied Optics*, 22 :3207–3219, 1983.
- [63] N. Engheta, W. D. Murphy, V. Rokhlin, and M. S. Vassiliou. The fast multipole method (fmm) for electromagnetic scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40 :634–641, 1992.
- [64] R. Fletcher. *Conjugate gradient methods for indefinite systems*. Proceedings of the Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis, Springer Verlag, New York, 1974.
- [65] V. Freilikher, E. Kanziiper, and A. A. Maradudin. Coherent scattering enhancement in systems bounded by rough surfaces. *Physics Reports*, 288 :127–204, 1997.
- [66] V. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich. *Phys. Lett. A*, 193 :467, 1994.
- [67] V. Freilikher, M. Pustilnik, I. Yurkevich, and A. A. Maradudin. *Opt. Commun.*, 110 :263, 1994.
- [68] R. W. Freund and N. M. Nachtigal. Qmrpack : A package of qmr algorithms. *ACM Trans. Math. Software*, 22(1) :46–77, 1996.
- [69] I. M. Fuks. Wave diffraction by a rough boundary of an arbitrary plane-layered medium. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49 :630–639, 2001.
- [70] I. M. Fuks and V. G. Voronovich. Wave diffraction by rough interfaces in an arbitrary plane-layered medium. *Waves in Random Media*, 10 :253–272, 2000.
- [71] A. K. Fung. *Microwave scattering and emission models and their applications*. Artech House, Boston, 1994.
- [72] A. K. Fung and M. F. Chen. Numerical simulation of scattering from simple and composite random surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(12) :2274–2284, dec 1985.
- [73] A. K. Fung and M. F. Chen. Numerical simulation of scattering from simple and composite random surfaces. *Applied Optics*, 2(12) :2274–2284, 1985.
- [74] R. Garcia-Llamas. Scattering of electromagnetic plane waves from rough periodic multilayer film. *Journal of the Optical Society of America B*, 11 :618–623, 1994.
- [75] R. Garcia-Llamas and L. E. Regalado. Transmitted scattered light from a thin film with shallow random rough interfaces. *Applied Optics*, 35 :5595–5599, 1996.
- [76] R. Garcia-Llamas, L. E. Regalado, and C. Amra. Scattering of light from a two-layer system with a rough surface. *Journal of the Optical Society of America A*, 16 :2713–2719, 1999.
- [77] T. A. Germer. Measurement of roughness of two interfaces of a dielectric film by scattering ellipsometry. *Physical Review Letters*, 85(2) :349–352, 2000.
- [78] T.A. Germer and M. J. Fasolka. *Characterizing surface roughness of thin films by polarized light scattering*, volume Advanced Characterization Techniques for

- Optics, Semiconductors, and Nanotechnologies, Proc. SPIE 5188. A. Duparré and B. Singh, Eds., 2003.
- [79] H. Giovannini, M. Saillard, and A. Sentenac. Numerical study of scattering from rough inhomogeneous films. *Journal of the Optical Society of America A*, 15(5) :1182–1191, 1998.
- [80] D. Goodman and Conyers. *Ground Penetrating Radar, An Introduction for Archaeologists*. Altamira, 1997.
- [81] Z.-H. Gu. High-order correlations from rough-surface scattering. *Applied Optics*, 43(15) :3061–3065, 2004.
- [82] Z.-H. Gu, J. Q. Lu, and A. A. Maradudin. Enhanced backscattering from a rough dielectric film on a glass substrate. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(8) :1753–1764, 1993.
- [83] Z.-H. Gu, A. A. Maradudin, E. R. Mendez, M. A. Ponce, and V. Ruiz-Cortes. Enhanced transmission through randomly rough surfaces. *Waves in Random Media*, 3 :s75–s90, 1991.
- [84] M. H. Gutknecht. Variants of bicgstab for matrices with complex spectrum. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 14(5) :1020–1033, 1993.
- [85] R. C. Hansen. *Geometric theory of diffraction*. IEEE Press, Piscataway, New Jersey, 1981.
- [86] F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993.
- [87] M. R. Hestenes and E. L. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. of Research of the National Bureau of Standards*, 49(B) :409–436, 1952.
- [88] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G. J. St-Cyr. Volterra approximation for low grazing angle shadowing on smooth ocean-like surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(11) :1199–1206, 1995.
- [89] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G. J. St-Cyr. Forward-backward : a new method for computing low-grazing angle scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44 :722–729, 1996.
- [90] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G. J. St-Cyr. Forward-backward method for scattering from imperfect conductors. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46 :101–107, 1998.
- [91] A. Iodice. Forward-backward method for scattering from dielectric rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 50(7) :901–911, 2002.
- [92] V. Jandhyala, E. Michielssen, S. Balasubramaniam, and W. C. Chew. A combined steepest descent-fast multipole algorithm for the fast analysis of three-dimensional scattering by rough surfaces. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 36(3) :738–748, 1998.
- [93] Y.-Q. Jin and G. Li. Detection of a scatter target over a randomly rough surface by using the angular correlation function in a finite-element approach. *Waves in Random Media*, 10 :273–280, 2000.



- 
- [94] J. T. Johnson. A numerical study of low-grazing angle backscattering from ocean-like impedance surfaces with the canonical grid method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46 :114–120, 1998.
- [95] J. T. Johnson. On the canonical grid method for two-dimensional scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(3) :297–302, 1998.
- [96] J. T. Johnson, R. T. Shin, J. A. Kong, L. Tsang, and K. Pak. A numerical study of the composite surface model for ocean backscattering. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 36(1) :72–82, 1998.
- [97] D. S. Jones and M. Kline. Asymptotic expansion of multiple integrals and the method of stationary phase. *J. Math. Phys.*, 37 :1–28, 1958.
- [98] Y. Kaganovskii and al. Light scattering from slightly rough dielectric films. *Journal of the Optical Society of America A*, 16, 1999.
- [99] H. Kaplan. Black coatings are critical in optical design. *Photon. Spectra*, 31 :48–50, 1997.
- [100] D. A. Kapp and G. S. Brown. A new numerical method for rough-surface scattering calculations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44 :711–721, 1996.
- [101] T. Kawanishi, H. Ogura, and Z. L. Wang. Scattering of an electromagnetic wave from a planar waveguide structure with a slightly 2d random surface. *Waves in Random Media*, 7 :35–64, 1997.
- [102] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak. A uniform geometrical theory of diffraction by for an edge in a perfectly conducting surface. *Proc. IEEE*, 62 :1448–1461, 1974.
- [103] M. Lambert. *Obstacles et cibles*. Notes de cours, DEA Méthodes Physiques en Télédétection, 2001.
- [104] S. W. Lee and G. A. Deschamps. A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 24 :25–35, 1976.
- [105] S. W. Lee, H. Ling, and R. C. Chou. Ray tube integration in shooting and bouncing ray method. *Micro. Opt. Tech. Lett.*, 1 :285–289, 1988.
- [106] L. Li. Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *Journal of the Optical Society of America A*, 13(5) :1024–1035, 1996.
- [107] L. Li, G. Granet, J.-P. Plumey, and J. Chandezon. Some topics in extending the c method to multilayer gratings of different profiles. *Pure Appl. Opt.*, 5 :141–156, 1996.
- [108] S. Q. Li, C. H. Chan, M.-Y. Xia, B. Zhang, and L. Tsang. Multilevel expansion of the sparse-matrix canonical grid method for two-dimensional random rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49(11) :1579–1589, 2001.

- 
- [109] S. Q. Li, L. Tsang, and C. H. Chan. Monte-carlo simulations of wave scattering from lossy dielectric random rough surfaces using the physics-based two-grid method and the canonical-grid method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(4) :752–763, 1999.
- [110] S. Q. Li, L. Tsang, K. S. Pak, and C. H. Chan. Bistatic scattering and emissivities of random rough dielectric lossy surfaces with the physics-based two-grid method in conjunction with the sparse-matrix canonical grid method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(1) :1–11, 2001.
- [111] S. H. Lou, L. Tsang, and C. H. Chan. Application of the finite element method to monte carlo simulations of scattering of waves by random rough surfaces : penetrable case. *Waves in Random Media*, 1 :287–307, 1991.
- [112] S. H. Lou, L. Tsang, C. H. Chan, and A. Ishimaru. Monte carlo simulations of scattering of waves by a random rough surface with the finite element method and the finite difference method. *Microwave. Opt. Tech. Lett.*, 3 :150–154, 1991.
- [113] C. C. Lu and W. C. Chew. A multilevel algorithm for solving a boundary integral equation of wave scattering. *Micr. Opt. Technol. Lett.*, 7 :466–470, 1994.
- [114] J. Q. Lu, A. A. Maradudin, and T. Michel. Enhanced backscattering from a rough dielectric film on a reflecting substrate. *Journal of the Optical Society of America B*, 8(2) :311–318, 1991.
- [115] J. Q. Lu, J. A. Sanchez-Gil, E. R. Mendez, Z. H. Gu, and A. A. Maradudin. Scattering of light from a rough dielectric film on a reflecting substrate : diffuse fringes. *Journal of the Optical Society of America A*, 15 :185–195, 1998.
- [116] Jun Q. Lu and Zu-Han Gu. Angular correlation function of speckle patterns scattered from a one-dimensional rough dielectric film on a glass substrate. *Applied Optics*, 36(19) :4562–4570, 1997.
- [117] A. Madrazo and A. A. Maradudin. Numerical solutions of the reduced rayleigh equation for the scattering of electromagnetic waves from rough dielectric films on perfectly conducting substrates. *Optics. Comm.*, 137 :251–263, 1997.
- [118] A. Madrazo and M. Nieto-Vesperinas. Reconstruction of corrugated dielectric surfaces with a model of a photon scanning tunneling microscope : influence of the tip on a near field. *Journal of the Optical Society of America A*, 14 :618–628, 1997.
- [119] A. A. Maradudin and E. R. Mendez. Enhanced backscattering of light from weakly rough, random metal surfaces. *Appl. Opt.*, 32 :3335–3343, 1993.
- [120] A. A. Maradudin, M. Nieto-Vesperinas, and *al.* Enhanced backscattering and trasmission of light from random surfaces on semi-infinite substrates and thin films. *Waves in Random Media*, 3 :s129–s141, 1991.
- [121] A. A. Maradudin, M. Nieto-Vesperinas, and *al.* Scattering from a rough layer of a random medium. *Waves in Random Media*, 9 :521–536, 1999.
- [122] P. A. Martin and P. Ola. Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogeneous dielectric obstacle. *Proc. R. Soc. Edin. A*, 123 :185–208, 1993.

- 
- [123] J. R. Mautz and R. F. Harrington. H-field, e-field, and combined-field solutions for conducting bodies of revolution. *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik (Electronics and Communication)*, 32(4) :157–164, 1978.
- [124] S. T. McDaniel. An extension of the small-slope approximation for rough surface scattering. *Waves in Random Media*, 5 :201–214, 1995.
- [125] A. R. McGurn and A. A. Maradudin. An analogue of enhanced backscattering in the transmission of light through a thin-film with a randomly rough surface. *Optics Communications*, 72 :279–285, 1989.
- [126] A. R. McGurn, A. A. Maradudin, and V. Celli. Localization effects in the scattering of light from a randomly rough grating. *Phys. Rev. B*, 31(8) :4866–4871, 1985.
- [127] G. Mie. Beiträge zur optik trüber medien speziel kolloidaler metallösungen. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 25 :377, 1908.
- [128] D. M. Milder. An improved formalism for wave scattering from rough surfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89 :529–541, 1991.
- [129] K. M. Mitzner. An integral equation approach to scattering from a body of finite conductivity. *Radio Sci.*, 2 :1459–1470, 1967.
- [130] N. Morita, N. Kumagai, and J. R. Mautz. *Integral Equation Methods for Electromagnetics*. Artech House, Boston, 1990.
- [131] M. Nieto-Vesperinas. *Scattering and diffraction in physical optics*. Wiley, New York, 1991.
- [132] A. J. Ogilvy. *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. IOP Publishing Ltd, 1991.
- [133] I. Ohlidal and K. Navratil. Scattering of light from multilayer systems with rough boundaries. *Progress in Optics*, 34 :251–334, 1995.
- [134] I. Ohlidal, K. Navratil, and F. Lukes. Reflection of light by a system of nonabsorbing isotropic film - nonabsorbing isotropic substrate with randomly rough boundaries. *Journal of the Optical Society of America*, 61 :1630–1639, 1971.
- [135] K. O'Neill, R. F. Lussky, and K. D. Paulsens. Scattering from a metallic object embedded near the randomly rough surface of a lossy dielectric. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 34 :367–376, 1996.
- [136] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, 1992.
- [137] W. J. Pierson and L. Moskowitz. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of s. a. kitaigorodskii. *J. Geophys. Res.*, 69 :5181–5190, 1964.
- [138] M. R. Pino, R. J. Burkholder, and F. Obelleiro. Spectral acceleration of the generalized forward-backward method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 50(6) :785–797, 2002.
- [139] S. Piperno. *Projet Caiman - Calcul scientifique, modélisation et analyse numérique*. Rapport d'Activité, INRIA, Sophia Antipolis, 2001.

- 
- [140] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes*. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [141] Lord Rayleigh. On the dynamical theory of gratings. *Proc. R. Soc. Lon. A*, 79 :399–416, 1907.
- [142] Lord Rayleigh. *Theory of sound*. Dover Publ., 1976. (publication originale : 1877).
- [143] S. O. Rice. *Reflection of EM waves by slightly rough surfaces*. *The Theory of Electromagnetic Waves*. M. Kline, Ed., Interscience, New York, 1963.
- [144] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *J. Comp. Phys.*, 36 :414–439, 1990.
- [145] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, and C. K. Krichbaum. *Radar Cross Section Handbook*, volume 1 and 2.
- [146] B. P. Rynne and P. D. Smith. Stability of time marching algorithms for the electric field integral equation. *J. Electromagn. Waves Applicat.*, 12 :1181–1205, 1990.
- [147] Y. Saad and M. H. Shultz. Gmres : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7 :856–869, 1986.
- [148] M. Saillard and J. A. DeSanto. A coordinate-spectral method for rough surface scattering. *Waves in Random Media*, 6 :135–150, 1996.
- [149] M. Saillard and D. Maystre. Scattering from random rough surfaces : a beam simulation method. *J. Opt.*, 19 :173–176, 1988.
- [150] M. Saillard and D. Maystre. Scattering from metallic and dielectric rough surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 7 :982–990, 1990.
- [151] M. Saillard and A. Sentenac. Rigorous solutions for electromagnetic scattering from rough surfaces. *Waves in Random Media*, 11 :R103–R137, 2001.
- [152] M. Saillard and G. Toso. Electromagnetic scattering from bounded of infinite subsurface bodies. *Radio Science*, 32 :1347–1359, 1997.
- [153] J. A. Sanchez-Gil, A. A. Maradudin, J. Q. Lu, and al. Scattering of electromagnetic waves from a bounded medium with random surface. *Phys. Rev. B*, 50 :3164–3182, 1994.
- [154] J. A. Sanchez-Gil, A. A. Maradudin, J. Q. Lu, V. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich. Satellite peaks in the scattering of p-polarized light from a randomly rough film on a perfecting conducting substrate. *J. Mod. Opt.*, 43 :435–452, 1996.
- [155] A. Sentenac, H. Giovannini, and M. Saillard. Scattering from rough inhomogeneous media : splitting of surface and volume scattering. *Journal of the Optical Society of America A*, 19(4) :727–736, fev 2002.
- [156] A. Sentenac and J.-J. Greffet. Mean-field theory of light scattering by one-dimensional rough surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 15 :528–532, 1998.

- 
- [157] A. Sentenac, G. Toso, and M. Saillard. Study of the coherent scattering from one dimensional rough surfaces with a mean field theory. *Journal of the Optical Society of America A*, 15 :924–931, 1998.
- [158] I. Simonsen and A. A. Maradudin. Numerical simulation of electromagnetic wave scattering from planar dielectric films deposited on rough perfectly conducting substrates. *Optics Communications*, 162 :99–111, 1999.
- [159] C. F. Smith, A. F. Peterson, and R. Mittra. The biconjugate gradient method for electromagnetic scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 38 :938–940, 1990.
- [160] A. Sommerfeld. Mathematische theorie der diffraction. *Math. Annalen*, 47(s319) :317–374, 1896.
- [161] A. Sommerfeld. *Partial differential equations in physics*. Academic Press, New York, 1949.
- [162] A. Sommerfeld. *Optics*. Academic Press, New York, 1954.
- [163] A. Soubret. *Diffusion des ondes électromagnétiques par des milieux et des surfaces aléatoires : études des effets cohérents dans le champ diffusé*. Thèse, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, Centre de Physique Théorique, 2001.
- [164] B. J. Stagg and T. T. Charalampopoulos. Surface-roughness effects on the determination of optical properties of materials by the reflection method. *Applied Optics*, 30 :4113–4118, 1991.
- [165] R. Swanepoel. Transmission and reflection of an absorbing thin film on an absorbing substrate. *S. Afr. Tydskr. Fis.*, 12(4) :149–159, 1989.
- [166] A. Taflove. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1962.
- [167] A. Taflove. *Computational electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain method*. Norwood, MA : Artech House, 1995.
- [168] V. I. Tatarskii. Relation between the rayleigh equation in diffraction theory and the equation based on green’s formula. *Journal of the Optical Society of America A*, 12 :1254–1260, 1995.
- [169] V. I. Tatarskii and V. V. Tatarskii. Statistical description of rough-surface scattering using the quasi-small slope approximation for random surfaces with a gaussian multivariate probability distribution. *Waves in Random Media*, 4 :197–214, 1994.
- [170] Yves Thomas. *Signaux et systèmes linéaires*. Masson, 1992.
- [171] Eric I. Thorsos. The validity of the kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1) :78–92, 1988.
- [172] Eric I. Thorsos and S. L. Broschat. An investigation of the small-slope approximation for scattering from rough surfaces. part i : Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97 :2082–2093, 1995.
- [173] Eric I. Thorsos and D. R Jackson. Studies of scattering theory using numerical methods. *Waves in Random Media*, 3 :s165–s190, 1991.

- 
- [174] J. V. Toporkov, R. S. Awadallah, and G. S. Brown. Issues related to the use of a gaussian-incident field for low-grazing-angle scattering. *Journal of the Optical Society of America A*, 16(1) :176–187, janv. 1999.
- [175] D. Torrungrueng and J. T. Johnson. Numerical studies of backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional random rough surfaces with the forward-backward/novel spectral acceleration method. *Journal of the Optical Society of America A*, 18(10) :2518–2526, 2001.
- [176] P. Tran and T. M. Elson. Banded method of ordered multiple interaction for the scattering of electromagnetic waves from a rough surface. *Journal of the Optical Society of America A*, 15 :1643–1646, 1998.
- [177] L. Tsang, C. H. Chan, K. Pak, and H. Sangani. Monte-carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the bmia/canonical grid method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43 :851–859, 1995.
- [178] L. Tsang, C. H. Chang, and H. Sangani. A banded matrix iterative approach to monte carlo simulations of scattering of waves by largescale random rough surface problems : Tm case. *Electron. Lett.*, 29 :166–167, 1993.
- [179] L. Tsang, C. H. Chang, H. Sangani, A. Ishimaru, and P. Phu. A banded matrix iterative approach to monte carlo simulations of largescale random rough surface scattering : Te case. *J. Electromagn. Waves Applicat.*, 7(9) :1185–1200, 1993.
- [180] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding, and C. O. Ao. *Scattering of Electromagnetics Waves : Advanced Topics*, volume 3. Wiley Series on Remote Sensing, 2001.
- [181] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding, and C. O. Ao. *Scattering of Electromagnetics Waves : Numerical Simulations*, volume 2. Wiley Series on Remote Sensing, 2001.
- [182] L. Tsang, G. Zhang, and K. Pak. Detection of a buried object under a single random rough surface with angular correlation function in em wave scattering. *Microwave. Opt. Tech. Lett.*, 11(6) :300–304, 1996.
- [183] F. T. Ulaby, R. K. Moore, and A. K. Fung. *Microwave remote sensing*, volume 2. Artech House, Norwood, 1982.
- [184] F. T. Ulaby, R. K. Moore, and A. K. Fung. *Microwave remote sensing*, volume 3. Artech House, Norwood, 1982.
- [185] H. A. van der Horst. Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 13 :631–644, 1992.
- [186] A. G. Voronovich. A two-scale model from the point of view of the small-slope approximation. *Waves in Random Media*, 6 :73–83, 1996.
- [187] A. G. Voronovich. *Wave scattering from rough surfaces*. Springer, 1999.
- [188] R. L. Wagner and W. C. Chew. A ray-propagation fast multipole algorithm. *Micro. Opt. Tech. Lett.*, 7(10) :435–438, 1994.

- 
- [189] R. L. Wagner, J. Song, and W. C. Chew. Monte-carlo simulations of electromagnetic scattering from two-dimensional random rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(2) :235–245, 1997.
- [190] X. Wang, C.-F. Wang, Y.-B. Gan, and L.-W. Li. Electromagnetic scattering from a circular target above or below rough surface. *Progress In Electromagnetics Research*, 40 :207–227, 2003.
- [191] Z. L. Wang, H. Ogura, and N. Takahashi. Enhanced scattering from a planar waveguide structure with a slightly rough boundary. *Phys. Rev. B*, 52 :6027–6041, 1995.
- [192] K. F. Warnick and W. C. Chew. Numerical simulation methods for rough surface scattering. *Waves in Random Media*, 11 :R1–R30, 2001.
- [193] C. S. West and K. A. O’Donnell. Observations of backscattering enhancement from polaritons on a rough metal surface. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(2) :390–397, fev 1995.
- [194] C. S. West and K. A. O’Donnell. Scattering by plasmon polaritons on a metal surface with a detuned roughness spectrum. *Opt. Lett.*, 21(2) :1–3, 1996.
- [195] J. C. West. Preconditioned iterative solution of scattering from rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Letters*, 48(6) :1001–1002, 2000.
- [196] J. C. West and J. M. Sturm. On iterative approaches for electromagnetic rough-surface scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(8) :1281–1288, 1999.
- [197] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14 :302–307, 1966.
- [198] Z. Yin, M. S. Tan, and F. W. Smith. Determination of the optical constants of diamond films with a rough growth surface. *Diamond Rel. Mater.*, 5 :1490–1496, 1996.
- [199] G. Zhang and L. Tsang. Angular correlation function of wave scattering by a random rough surface and discrete scatterers and its application in the detection of a buried object. *Waves in Random Media*, 7 :467–479, 1997.
- [200] G. Zhang, L. Tsang, and Y. Kuga. Studies of the angular correlation function of scattering by random rough surfaces with and without a buried object. *IEEE Trans. Geosc. Remote Sensing*, 35(2) :444–453, 1997.
- [201] G. Zhang, L. Tsang, and K. Pak. Angular correlation function and scattering coefficient of electromagnetic waves scattered by a buried object under a two-dimensional rough surface. *Journal of the Optical Society of America A*, 15 :2995–3002, 1998.
- [202] Y. Zhang and E. Bahar. Mueller matrix elements that characterize scattering from coated random rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(5) :949–955, 1999.

## Résumé

Cette thèse a pour contexte l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par une ou deux surfaces rugueuses superposées, séparant des milieux homogènes. Le problème est supposé bidimensionnel (les surfaces sont à variation unidimensionnelle). Le champ diffusé est déterminé par des méthodes numériques rigoureuses qui consistent à discrétiser des équations intégrales par la méthode des moments.

Pour le cas d'une seule surface, des méthodes de résolution performantes existantes, méthodes dites rapides, sont étudiées et mises en oeuvre. La Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid se révèle particulièrement intéressante.

Pour le cas de deux surfaces, de telles méthodes performantes n'existaient pas ; la méthode que nous développons comble ce manque. Nous établissons une équation qui fait intervenir une matrice caractéristique du système formé par les deux interfaces. La solution itérative s'exprime sous la forme d'une série, qui converge vers la solution exacte lorsque la matrice caractéristique satisfait une condition de validité. Les termes du développement peuvent s'interpréter physiquement comme les réflexions multiples successives de l'onde diffusée dans la couche. Cette méthode, qui permet la résolution de problèmes à grand nombre d'inconnues, est validée par comparaison avec d'autres méthodes de la littérature.

## MOTS CLES

Diffusion électromagnétique, Surfaces rugueuses, Couches rugueuses, Equations intégrales, Méthode des Moments, Méthodes numériques rigoureuses.

## Abstract

We are concerned by the scattering of an electromagnetic field by one rough surface or by a stack of two rough surfaces; our aim is to solve exactly this problem, by means of numerical methods. We consider the case of one-dimensional surfaces separating homogeneous media and we deal with integral methods. The integral equations are reduced to a linear system using the method of moments.

For the case of a single interface, in order to solve efficiently this system, we study and implement several recent fast methods; among these methods, the Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid is of particular interest.

For the case of a stack of two rough surfaces, we develop a fast method, able to solve huge problems. The established equation involves a matrix which is characteristic of the layer. An iterative solution is obtained by a series expansion, leading to an exact result when a validity condition is fulfilled. The iterates of the method can be seen as the contributions of multi-scattered fields, successively reflected inside the layer. Our method is validated by comparison to results from literature.

## KEY WORDS

Electromagnetic scattering, Rough surfaces, Rough layers, Integral equations, Method of moments, Rigorous numerical methods.