
[. . .] Nous avons beau enfler nos conceptions au-delà des espaces imaginables, nous n'enfantons que des atomes, au prix de la réalité des choses.

Blaise Pascal, *Pensées*.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement Monsieur le professeur Serge Toutain de m'avoir accueilli au sein du laboratoire IREENA.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse, Monsieur le professeur Joseph Saillard, et Monsieur Christophe Bourlier. Vous m'avez inculqué les fondements nécessaires pour que j'embrasse maintenant une carrière scientifique dans de bonnes dispositions. Je tiens aussi à vous remercier pour m'avoir entendu et encouragé quand cela s'est avéré nécessaire.

Christophe, j'aimerais particulièrement te remercier pour l'encadrement scientifique de qualité dont tu m'as fait bénéficier.

Merci à vous trois donc, pour m'avoir témoigné votre confiance en m'offrant la possibilité d'effectuer ma thèse, et pour m'avoir permis de la réaliser pleinement dans d'agréables conditions.

Je remercie également Monsieur le professeur Christian Pichot d'avoir accepté de présider le jury de thèse, ainsi que Monsieur le professeur Richard Dusséaux et Madame Hélène Roussel pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs. Mes remerciements s'adressent aussi à Messieurs Yvonick Hurtaud, Jacques Claverie et Vincent Fabbro pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, et pour avoir accepté d'être membres de ce jury. Merci à tous pour m'avoir apporté quelques précisions scientifiques complémentaires sur ces travaux.

Je tiens à diriger mes remerciements vers mes proches collègues et amis : Laurent, Julien, Janic, Gildas et Nico. Je garderai un impérissable souvenir de ces parties de baby endiablées, et de tous ces bons moments de cordialité. Yann et Nicole, pour votre précieuse écoute, Marc et Sandrine, pour votre polyvalence et votre disponibilité, Serge, pour tes qualités tant scientifiques qu'humaines, je souhaite vous faire part de ma reconnaissance ici.

J'associe également à ces remerciements l'ensemble de mes collègues du laboratoire, et je joins une pensée particulière pour Khalil, Rima et Abir. Je n'oublie pas nos collègues des promotions précédentes, avec lesquels nous avons eu d'agréables échanges.

Enfin, une profonde et chaleureuse pensée à ma famille et à mes proches amis qui ont su m'épauler et me divertir, de la meilleure façon qu'il soit. Vous m'avez tous fidèlement accompagné tout au long du chemin, et je vous en suis reconnaissant ...

Table des matières

Liste des acronymes	9
1 Diffusion des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse	15
1.1 Introduction	16
1.2 Description des outils électromagnétiques	16
1.2.1 Equations de Maxwell	16
1.2.2 Conditions aux limites	17
1.2.3 Equations d'onde	17
1.2.4 Equation de Helmholtz	18
1.2.5 Fonction de Green	19
1.2.6 Amplitude de diffusion	22
1.2.7 Les polarisations horizontale (TE) et verticale (TM)	24
1.2.8 Angle de Brewster	25
1.2.9 Equations intégrales : principe de Huygens	27
1.2.10 Vecteur de Poynting	30
1.2.11 Coefficient de diffusion	31
1.2.12 Onde incidente	34
1.3 Description statistique d'une surface rugueuse	35
1.3.1 Introduction	35
1.3.2 Rappels statistiques et spectre Gaussien	36
1.3.3 Génération d'un profil rugueux	37
1.3.4 Spectre de Mer	38
1.4 Description heuristique de la diffusion et critère de Rayleigh	42
1.5 Résolution du problème électromagnétique par des approches rigoureuses et asymptotiques	44
1.5.1 Introduction	44
1.5.2 Quelques méthodes asymptotiques	45
1.5.3 Théorie des petites perturbations : l'approche analytique retenue	50
1.5.4 Les méthodes numériques	56

1.5.5	Méthode Forward-Backward accélérée dans le domaine spectral	61
1.6	Simulations	62
1.6.1	Travaux de la littérature	62
1.6.2	Résultats numériques	65
1.7	Conclusion	68
2	Méthode des petites perturbations et théorie de la diffusion multiple	73
2.1	Introduction	73
2.2	Travaux originaux	74
2.3	Introduction à la méthode des diagrammes pour la diffusion multiple	76
2.4	Cas d'une surface parfaitement conductrice	77
2.4.1	Formulation du problème	77
2.4.2	Equation de Dyson et champ cohérent	79
2.4.3	Equation de Bethe-Salpeter et intensité moyenne du champ	81
2.4.4	Simulations numériques	83
2.5	Cas réel d'une surface de mer de conductivité finie	93
2.5.1	Formulation du problème pour une surface de conductivité finie	94
2.5.2	Equation de Dyson pour le champ cohérent	94
2.5.3	Equation de Bethe-Salpeter : intensité incohérente	101
2.5.4	Coefficient de diffusion	103
2.5.5	Simulations numériques	104
2.6	Conclusion	112
3	Les incidences rasantes.	113
3.1	Introduction	113
3.2	Phénomènes physiques et rétrodiffusion	114
3.3	Rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une surface conductrice	117
3.3.1	Introduction	117
3.3.2	Un "peu" d'Histoire	117
3.3.3	Onde de surface le long d'une surface plane	120
3.3.4	Interprétation physique de l'onde de surface	128
3.4	Application réelle à une surface rugueuse	131
3.4.1	Introduction	131
3.4.2	Onde de surface le long d'une surface rugueuse	131
3.4.3	Le champ diffusé	133

3.4.4	L'intensité diffusée	134
3.4.5	Coefficient de diffusion incohérent sous incidences rasantes	136
3.5	Simulations numériques	137
3.6	Extensions possibles du modèle	153
3.6.1	Introduction	153
3.6.2	Influence de la courbure de la Terre	153
3.6.3	“Mixed-Path Propagation”	154
3.6.4	Conduits d'évaporation	155
3.6.5	Systèmes de radar réels	157
3.6.6	Conclusion	157
3.7	Conclusion	157
Annexes		161
A Théorie perturbative		161
B Evaluation du pôle de l'impédance effective de surface $Z_{v1}(\kappa)$ pour le cas Neumann		165
C Quelques notions sur les diagrammes de Feynmann		167
D Equation de Bethe-Salpeter		171
E Potentiels scalaire et vectoriel		177
F Méthode du point selle		179
G Calcul de $\nabla_r [\hat{n}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(r, r')]$ pour la détermination de l'intensité totale $\Gamma(r)$		187

Liste des acronymes

AK Approximation de Kirchhoff

APT Approximation du Plan Tangent

BMIA/CAG Banded Matrix Iterative Approach/Canonical Grid

EFIE Electric Field Integral Equation

EI Equations Intégrales

FB Forward-Backward

FBSA Forward-Backward with Spectral Acceleration

FWM Full Wave Method

HF-VHF High Frequency-Very High Frequency

HFSWR High-Frequency Surface Wave Radar

IBC Impedance Boundary Condition

IEM Integral Equation Model

MdM Méthode des Moments

MFIE Magnetic Field Integral Equation

MOMI Method of Ordered Multiple Interactions

MPP Méthode des Petites Perturbations

OEM Operator Expansion Method

OG approximation de l'Optique Géométrique

PC Parfaitement Conducteur

PWE Parabolic Wave Equation

SPM Small Perturbation Method - méthode des petites perturbations

SSA Small Slope Approximation (méthode des faibles pentes)

TC Très Conducteur

TE polarisation Transverse Electrique - (polarisation H)

TM polarisation Transverse Magnétique - (polarisation V)

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de la diffusion des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse, étude spécifique du cas général de la diffusion d'ondes par un objet.

Une onde électromagnétique plane illuminant une surface plane séparant deux milieux est réfléchi dans la direction prescrite par la loi de Snell. L'amplitude, la phase et la polarisation de l'onde réfléchi est une fonction (essentiellement déterminée par les coefficients en réflexion de Fresnel) de l'angle d'incidence, de la polarisation de l'onde incidente, de la longueur d'onde, et des propriétés électriques des milieux de chaque côté de l'interface.

En pratique, les surfaces rencontrées présentent des irrégularités. Leur émergence est de nature diverse : cela va des irrégularités surfaciques d'un corps solide, qui peuvent par exemple être dues à la structure du matériau ou à un défaut d'usinage, à un champ labouré, à une surface de mer dont le profil est perturbé par les turbulences du vent, ou encore à la surface de la Lune ou des planètes. Dans la majeure partie des problèmes, la surface est représentée comme ayant des variations, périodiques ou aléatoires, en fonction des coordonnées spatiales, par rapport à un plan moyen, et parfois en fonction du temps.

Dans ces cas, le processus de diffraction devient alors plus complexe dès lors que l'onde incidente rencontre la surface rugueuse. On ne parle plus de diffraction, mais de diffusion. La principale différence entre une surface plane et une surface rugueuse peut alors être illustrée ainsi : une surface plane (de dimensions suffisamment grandes) réfléchit l'onde incidente dans une seule direction (la direction spéculaire), alors qu'une surface rugueuse diffuse l'onde incidente dans toutes les directions, dont certaines peuvent véhiculer plus d'énergie que d'autres.

La diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces aléatoires se rencontre dans de nombreuses disciplines telles que la physique atomique, l'imagerie médicale, les géosciences, la télédétection, ou encore la radioastronomie. Les trois dernières décades ont vu se faire des progrès considérables dans la compréhension et l'élucidation des problèmes de diffraction inclus dans de tels champs d'applications.

Dans les problèmes de diffusion usuels, l'onde incidente et l'objet sont spécifiés. L'étude consiste alors à déterminer l'onde diffusée. C'est le *problème direct*. Maintenant, si on mesure l'onde diffusée par l'objet pour une onde incidente donnée, on peut remonter aux propriétés de l'objet. C'est le *problème inverse*. Celui-ci, dans le cadre d'un radar observant la surface de mer, permet d'accéder alors à la hauteur des vagues, la salinité, ou encore la direction du vent. On retrouve par exemple ce principe en imagerie médicale.

Dans ce document nous allons nous intéresser à la diffusion des ondes électromagnétiques par une surface de mer, se comportant aléatoirement. Les propriétés statistiques de la surface et le champ incident étant connus, le problème, alors direct, consiste à déterminer les caractéristiques statistiques du champ diffusé. Les premières investigations mathématiques à ce sujet ont été l'oeuvre de Rayleigh, à la fin du XIX^{ème} siècle, qui étudia la diffraction d'ondes acoustiques par une surface sinusoïdale. Depuis lors, de nombreux auteurs ont apporté leur pierre à l'édifice que représente le vaste sujet de la diffusion d'ondes

par une surface de profil arbitraire.

Quelle est alors la motivation d'une telle étude ?

Parce que la majeure partie de la surface de la Terre s'étend sous la mer, les différents événements prenant naissance dans, sur ou directement au-dessus de la surface des océans ont un impact important sur la vie. En conséquence, la surveillance maritime est d'une grande importance. Depuis sa découverte dans les années 30, les techniques radar jouent un rôle important dans cette activité.

Dans cette étude, nous cherchons donc à calculer la puissance rétrodiffusée par la surface de mer et mesurée par un système radar côtier, tel que le système de radar WERA (Wellen Radar), pour des fréquences HF-VHF (de 3 MHz à 300 MHz) et pour des angles d'observation proches de l'horizontale. Il existe, pour résoudre le problème, des méthodes de calculs approchées ou dites méthodes asymptotiques (i.e. des méthodes où des hypothèses simplificatrices et/ou restrictives sont faites). Ces méthodes présentent un grand intérêt. En effet, elles permettent, d'une part, d'expliquer et prédire les mécanismes physiques mis en jeu lors de la diffusion ; d'autre part, elles nécessitent peu de temps de calculs, et sont donc employées pour des applications où la vitesse de calcul et la taille mémoire sont plus importantes que la précision (c'est le cas des systèmes réels embarqués par exemple). C'est cette classe de méthodes qui a motivé l'orientation de cette thèse.

En parallèle, l'évolution des performances du matériel informatique a permis à de nombreuses méthodes numériques de voir le jour ces dernières décennies. Elles sont employées pour résoudre des problèmes de manière rigoureuse, et sont dites "exactes". En revanche les temps de calcul peuvent devenir importants, et elles sont donc utilisées si la solution cherchée demande une précision accrue. Ceci dit, dans notre cadre d'étude, elles font office, dans la littérature, et dans cette thèse, de méthodes de référence pour valider, ou non, les modèles asymptotiques et pour cerner leur domaine de validité.

Le manuscrit est organisé en trois chapitres. Le premier rappelle tout d'abord quelques notions d'électromagnétisme et quelques aspects mathématiques et physiques de la diffusion par une surface rugueuse séparant deux milieux homogènes. Nous donnons ensuite deux exemples de surface rugueuse monodimensionnelle (le problème est bidimensionnel, c'est à dire qu'il est invariant suivant une direction), l'une rencontrée abondamment dans la littérature, notamment en optique, l'autre étant le cas d'une surface de mer réaliste. Quelques méthodes de résolutions, asymptotiques et rigoureuses, sont recensées. Après justification du choix de la méthode asymptotique retenue, celle-ci est présentée plus en détails. Puis, la méthode rigoureuse développée au laboratoire est introduite. Des simulations sont ensuite présentées, dont le but est de comparer la méthode asymptotique avec la méthode numérique (méthode de référence). Puisque la méthode asymptotique retenue est historiquement une des premières théories approchées, elle a fait l'objet de nombreuses publications et dissertations, et nous avons donc jugé particulièrement intéressant de présenter un panorama d'études faites ces quarante dernières années par quelques auteurs connus dans le domaine.

Le chapitre deux présente la méthode asymptotique retenue, mais sous une forme modifiée. Elle est obtenue par la méthode des diagrammes, originellement construite en théorie quantique des champs et adaptée à la propagation des ondes dans un milieu aléatoire, puis à la diffusion par des surfaces rugueuses par la suite. Cette nouvelle formulation permet d'étendre le domaine de validité de la méthode asymptotique, et de rendre compte des phénomènes physiques se rencontrant au cours de la diffusion. Ce deuxième chapitre présente donc tout d'abord, en guise d'introduction, une brève discussion sur la théorie de la propagation d'onde en milieu aléatoire. Puis, la transition vers l'étude de la diffusion par une surface rugueuse est abordée en citant les auteurs de cette théorie. La suite est consacrée à la présentation, en partie, de cette méthodologie, dans un premier temps pour le cas d'une surface rugueuse parfaitement conductrice ; dans un second temps pour une surface dont la permittivité est celle d'une surface de mer, et pour des incidences modérées.

Le troisième et dernier chapitre est voué à l'étude des incidences rasantes, c'est à dire proche de

l'horizontale. Ce sujet, en vogue, est d'un intérêt particulier si l'on souhaite obtenir une idée du signal rétrodiffusé par la mer vers un système radar côtier illuminant la surface. Nous faisons tout d'abord un rappel des phénomènes physiques rencontrés. Puis, une section est consacrée aux différents acteurs qui, pendant un siècle, ont permis d'élucider, tout du moins d'apporter une meilleure compréhension, du problème de la propagation des ondes au-dessus de la surface de la Terre. Après une présentation des travaux réalisés par Sommerfeld en 1909 pour une surface plane très conductrice, nous introduisons dans son modèle la rugosité de la surface, à partir des travaux effectués dans le second chapitre. Des résultats sont ensuite proposés, avec la méthode asymptotique retenue et la méthode de référence, pour le champ et l'intensité du champ rétrodiffusés vers le radar, et ce pour une surface de mer réaliste.

Finalement, nous donnons quelques extensions envisageables pour la méthode asymptotique, qui permettraient d'exprimer du mieux possible la réalité du "terrain". Cependant, la validité du modèle serait loin d'être évidente à évaluer, puisque les méthodes numériques existantes (méthodes de référence) ne proposent pas pour le moment, à notre connaissance, la prise en compte des différents phénomènes présentés dans cette ultime section de ce manuscrit.

Chapitre 1

Diffusion des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse

Sommaire

1.1	Introduction	16
1.2	Description des outils électromagnétiques	16
1.2.1	Equations de Maxwell	16
1.2.2	Conditions aux limites	17
1.2.3	Equations d'onde	17
1.2.4	Equation de Helmholtz	18
1.2.5	Fonction de Green	19
1.2.6	Amplitude de diffusion	22
1.2.7	Les polarisations horizontale (TE) et verticale (TM)	24
1.2.8	Angle de Brewster	25
1.2.9	Equations intégrales : principe de Huygens	27
1.2.10	Vecteur de Poynting	30
1.2.11	Coefficient de diffusion	31
1.2.12	Onde incidente	34
1.3	Description statistique d'une surface rugueuse	35
1.3.1	Introduction	35
1.3.2	Rappels statistiques et spectre Gaussien	36
1.3.3	Génération d'un profil rugueux	37
1.3.4	Spectre de Mer	38
1.4	Description heuristique de la diffusion et critère de Rayleigh	42
1.5	Résolution du problème électromagnétique par des approches rigoureuses et asymptotiques	44
1.5.1	Introduction	44
1.5.2	Quelques méthodes asymptotiques	45
1.5.3	Théorie des petites perturbations : l'approche analytique retenue	50
1.5.4	Les méthodes numériques	56
1.5.5	Méthode Forward-Backward accélérée dans le domaine spectral	61
1.6	Simulations	62
1.6.1	Travaux de la littérature	62
1.6.2	Résultats numériques	65
1.7	Conclusion	68

1.1 Introduction

La diffusion des ondes par des surfaces aléatoires est omniprésente, que ce soit en optique, en acoustique, en physique du solide ou encore en télédétection Radar. Bien que ces sujets soient différents, les descriptions mathématiques de ces problèmes de diffusion sont analogues, et les méthodes développées, par exemple en acoustique des fluides, sont transposables au cas électromagnétique. L'un des premiers scientifiques à s'être intéressé à la diffusion des ondes par des surfaces aléatoires est Lord Rayleigh [1] qui, au début du siècle dernier, a introduit des concepts fondamentaux sur la théorie de la diffraction. Maints travaux à ce sujet ont été développés depuis. Les plus anciennes méthodes analytiques, mais aussi les plus connues, sont la *méthode des petites perturbations* et la *méthode du plan tangent*. Elles sont restées les seules méthodes analytiques disponibles pendant longtemps. Du fait de leur domaine de validité restreint, des méthodes numériques ont été développées. Celles-ci ont été utilisées au début de l'ère informatique, pour valider les méthodes analytiques. Nous pouvons citer les références classiques où sont répertoriées ces méthodes analytiques et numériques [2], [3], [4], [5], [6].

Dans un premier temps, nous allons présenter les outils mathématique et électromagnétique nécessaires pour poser les bases du problème. Puisque le point commun des différentes méthodes est qu'elles s'appuient sur une formulation électromagnétique du problème, les équations de Maxwell et quelques éléments d'électromagnétisme sont rappelés. Puisque l'on parle de surface rugueuse au comportement aléatoire, il est nécessaire d'introduire des notions de statistiques. La surface est considérée être un processus Gaussien, lequel est abondamment illustré dans la littérature, afin de pouvoir déterminer ensuite les moyennes statistiques analytiquement. Puis une surface de mer plus réaliste sera résumée. Avant d'aborder les méthodes analytiques, une description heuristique de la rugosité doit être mentionnée. Une section est largement dédiée à la méthode analytique retenue : la méthode des petites perturbations. Finalement, quelques méthodes numériques sont présentées, dont celle que nous utiliserons dans la suite du manuscrit.

1.2 Description des outils électromagnétiques

1.2.1 Equations de Maxwell

Dans ce manuscrit, les grandeurs en **gras** désignent des **vecteurs**. Les vecteurs surmontés d'un **chapeau** sont des vecteurs **unitaires**.

Une onde électromagnétique se caractérise par un flux quasi-continu de particules dépourvues de masse, les photons, associé à des champs magnétiques et électriques. Ces composantes sont régies par des équations locales mises en forme et publiées par Maxwell en 1873 dans l'ouvrage *Electricity and Magnetism*. Elles sont dérivées des lois de l'électrostatique, du magnétisme et de l'induction.

Un champ électromagnétique dans un milieu est caractérisé par quatre vecteurs : \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} et \mathbf{B} , dépendant du temps et des coordonnées de l'espace. Le vecteur \mathbf{E} est le vecteur champ électrique, \mathbf{H} est le vecteur champ magnétique, \mathbf{D} est le vecteur déplacement électrique et \mathbf{B} est le vecteur d'induction magnétique. Leur comportement et leur interaction avec la matière sont décrits par les quatre équations de Maxwell. Ainsi, les équations différentielles fondamentales gouvernant le comportement des champs électromagnétiques ont été données par Maxwell :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (\text{Equation de Maxwell-Ampère}), \quad (1.1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Equation de Maxwell-Faraday}), \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{Equation de Maxwell-Gauss électrique}), \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Equation de Maxwell-Gauss magnétique}). \quad (1.4)$$

Il est à noter que toutes les grandeurs figurant dans les quatre équations de Maxwell dépendent à la fois du temps t , et de la position \mathbf{R} de coordonnées (x, y, z) . Le couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est appelé le champ électromagnétique. Les champs \mathbf{D} et \mathbf{B} rendent compte des relations entre le champ électromagnétique et la matière environnante. Les grandeurs vectorielles inconnues sont : le champ électrique \mathbf{E} (V/m), le champ magnétique \mathbf{H} (A/m), l'induction magnétique \mathbf{B} (Wb/m² = 1 Tesla), l'induction électrique \mathbf{D} (C/m²). Les grandeurs connues sont la densité de courant électrique \mathbf{J} (A/m²) et la densité de charge électrique ρ (A/m³).

1.2.2 Conditions aux limites

Les composantes tangentielles de \mathbf{E} et \mathbf{H} sont continues à la traversée de l'interface. Les milieux sont isolants et non magnétiques de sorte qu'aucun courant surfacique n'apparaît. En posant par convention que la normale $\hat{\mathbf{n}}$ est dirigée du milieu 2 vers le milieu 1, les relations de continuité des composantes tangentielles à l'interface entre deux milieux diélectriques, s'écrivent

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge [(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) - \mathbf{E}_t] = \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge [(\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r) - \mathbf{B}_t] = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

et les composantes normales

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [(\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r) - \mathbf{B}_t] = 0, \quad (1.7)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\epsilon_1(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) - \epsilon_2\mathbf{E}_t] = 0, \quad (1.8)$$

où les indices i , r , et t représentent l'incidence, la réflexion et la transmission, respectivement. On peut caractériser les propriétés macroscopiques d'un milieu matériel par une permittivité diélectrique ϵ , une perméabilité magnétique μ et une conductivité électrique σ , quantités scalaires. On a alors les relations, dites constitutives, suivantes, dans le cas du régime harmonique

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{R})\mathbf{E}, \quad (1.9a)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{R})\mathbf{H}, \quad (1.9b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{R})\mathbf{E}. \quad (1.9c)$$

1.2.3 Equations d'onde

Dans un problème de propagation scalaire ou vectorielle, c'est l'équation de Helmholtz qui régit le comportement de la grandeur propagée. Elle est obtenue à partir des équations de Maxwell.

Nous nous limiterons au cas d'un milieu LHI¹ [7], de perméabilité μ et de permittivité ϵ , en l'absence de charge et de courant ; on a alors $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Dérivons l'équation d'Ampère (1.1) par rapport au temps, en supposant que les paramètres (ϵ, μ) du milieu sont indépendants du temps, et en incluant les relations constitutives $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

¹

- Un milieu est dit isotrope si ϵ , μ et σ , ne dépendent pas de la direction d'observation.
- Un milieu est dit homogène si ses caractéristiques électrique et magnétique de dépendent pas de la position \mathbf{R} .

qui devient, en utilisant la relation (1.2) :

$$-\frac{1}{\mu} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.11)$$

Puis en utilisant l'égalité $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, et le fait que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ selon (1.1), on démontre que le champ électrique \mathbf{E} vérifie l'équation :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

De même le champ magnétique \mathbf{H} vérifie :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

Les équations (1.12) et (1.13) sont les *équations d'onde* électrique et magnétique. Ces équations sont encore appelées équations de propagation.

Remarque : En coordonnées cartésiennes, si on représente le laplacien scalaire par $\Delta \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, le laplacien vectoriel $\nabla^2 \cdot$ sera défini par

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta A_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta A_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta A_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.14)$$

1.2.4 Equation de Helmholtz

Ondes planes Physiquement, l'onde plane n'existe pas. La notion d'onde plane est liée à la notion de champ lointain, c'est à dire lorsque la distance entre la source et le point d'observation est grande (On parle couramment de zone de Fraunhofer lorsque la distance $2D^2/\lambda$ à partir de l'élément rayonnant, de dimension D , est atteinte). Généralement, l'onde issue d'une source a un comportement d'onde sphérique, dont la densité de puissance est répartie sur une sphère de rayon R . En champ lointain ($R \gg 2D^2/\lambda$), la courbure locale de l'onde électromagnétique est assimilée à un plan.

Une solution particulière de (1.12) est donnée par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]) \quad (1.15)$$

$$\text{avec } \mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon \mu} \omega \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.16)$$

où \mathbf{k} désigne le vecteur d'onde, λ la longueur d'onde dans le milieu, ω la pulsation, et $\hat{\mathbf{u}}$, un vecteur unitaire choisi arbitrairement. Par la suite le facteur $e^{-i\omega t}$ des grandeurs harmoniques sera considéré. Plus particulièrement, dans le vide, ce qui sera le cas dans cette étude, on a :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.17)$$

Physiquement, (1.15) représente une onde plane progressive monochromatique, se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{k}_0 / \|\mathbf{k}_0\|$. Les composantes d'une onde plane sont indépendantes de la position sur un plan d'onde donné. Ceci implique notamment que les composantes de \mathbf{E} sont perpendiculaires à la direction de propagation $\hat{\mathbf{u}}$. De plus, pour une onde plane, l'opérateur $\nabla = +i\mathbf{k}_0$. Par ailleurs, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont reliés par :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{E}}{\mu_0 \omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{E}}{\|\mathbf{k}_0\|} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{H} \wedge \mathbf{k}_0}{\varepsilon_0 \omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\mathbf{H} \wedge \mathbf{k}_0}{\|\mathbf{k}_0\|}. \quad (1.18)$$

L'équation de Helmholtz La forme harmonique de (1.15) a une conséquence pratique sur les grandeurs vectorielles \mathbf{E} , \mathbf{H} , et \mathbf{J} reliées par les équations de Maxwell. Pour celles-ci, la dérivée par rapport au temps se ramène à une multiplication par $-i\omega$. Ainsi $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$ et donc, le terme de gauche de l'équation d'onde électrique (1.12) devient dans ce cas là :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - (-\omega^2)\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E}. \quad (1.19)$$

Et finalement \mathbf{E} vérifie l'équation dite de Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k_0^2)\mathbf{E} = 0 \quad (1.20)$$

De même, le champ magnétique \mathbf{H} vérifie l'équation de Helmholtz.

Si ψ désigne une des trois composantes du champ \mathbf{E} (ou \mathbf{H}) alors elle vérifie l'équation de Helmholtz scalaire

$$(\Delta + k_0^2)\psi = 0. \quad (1.21)$$

Nous aborderons cette notation plus loin puisque le problème sera réduit à deux dimensions (la surface aura donc une dimension). Le champ sera donc une grandeur scalaire.

1.2.5 Fonction de Green

Nous allons présenter dans cette section la fonction de Green scalaire en espace libre qui est un outil mathématique pour résoudre l'équation de Helmholtz. Dans un espace non borné, elle s'écrit

$$(\nabla^2 + k_0^2)G^{(0)}(\mathbf{R}) = -\delta(\mathbf{R}), \quad (1.22)$$

où $\mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. En appliquant la transformée de Fourier spatiale², l'équation (1.22) peut être écrite sous la forme

$$G^{(0)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{-1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} d^n \mathbf{k}. \quad (1.23)$$

L'équation (1.22) est vérifiée en utilisant la représentation intégrale de la fonction δ dans (1.23),

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} d^n \mathbf{k}, \quad (1.24)$$

où n est la dimension de l'espace. Nous utiliserons cette représentation par la suite. Posons également $\|\mathbf{k}\| = k$ et $\|\mathbf{R}\| = R$. Dans l'équation (1.23), on peut porter l'intégration sur les variables θ , k et ϕ en remarquant qu'en coordonnées sphériques ($n = 3$ dimensions) $d^3 \mathbf{k} = k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi$, et ainsi reformuler (1.23) comme³

$$\begin{aligned} G^{(0)}(\mathbf{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{-k^2}{k_0^2 - k^2} dk \int_0^\pi \sin \theta e^{ikR \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{-k^2}{k_0^2 - k^2} dk \left[\frac{e^{ikR \cos \theta}}{ikR} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 iR} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k e^{ikR}}{(k_0 - k)(k_0 + k)} dk. \end{aligned} \quad (1.25)$$

²La propriété de dérivation de la transformée de Fourier (TF) \tilde{f} de la dérivée d'ordre m d'une fonction f est $TF[f^{(m)}](x) = (-ik)^m \tilde{f}(k)$.

³L'intégrale suivant $d\theta$ se calcule aisément en remarquant qu'une primitive $F(\theta)$ d'une fonction composée $f(\theta) = [\partial u(\theta)/\partial \theta]g(u(\theta))$ (avec $u(\theta) = \cos \theta$ dans (1.25)) est $F(\theta) = G(u(\theta))$, où G est la primitive de la fonction g .

Pour un nombre d'onde k_0 réel, lorsque $k = k_0$ et $k = -k_0$, l'intégrande (1.25) présente une singularité. Pour s'affranchir de cette difficulté, on suppose que k_0 possède une petite partie imaginaire positive. Les singularités sont ainsi déplacées hors de l'axe réel [8], comme sur la figure 1.1.

Le seul comportement acceptable de la solution lorsque l'on s'éloigne de la surface ($\|\mathbf{R}\| \rightarrow +\infty$) est celui d'une onde qui se propage de la surface vers le point d'observation : c'est la condition d'onde sortante. On choisit donc le contour supérieur C^+ entourant le point d'affixe $(k_0 + i\gamma)$ (Fig. 1.1) pour vérifier cette condition. On introduit une partie imaginaire infiniment petite au nombre d'onde k_0 , traduisant que

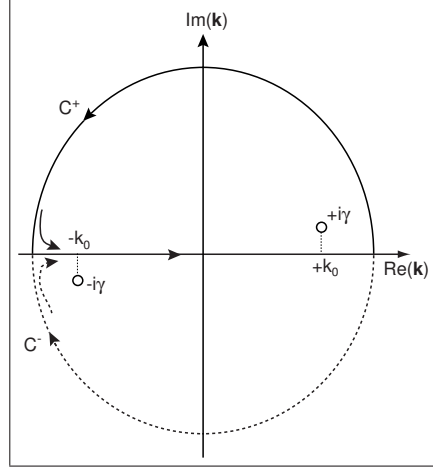


FIG. 1.1 – Contour d'intégration pour la fonction de Green $G^{(0)}(\mathbf{R})$.

le milieu est un milieu à pertes, appelé alors milieu absorbant

$$\Im m(k_0) = \varepsilon > 0. \quad (1.26)$$

A l'aide du théorème des résidus [9], [8], l'évaluation de la fonction de Green sphérique (1.25) amène à⁴

$$G^{(0)}(\mathbf{R}) = \frac{e^{ik_0 R}}{R}. \quad (1.27)$$

En s'intéressant au comportement asymptotique du champ, à l'aide de la méthode du point selle [10], [11], [6], on peut ainsi montrer que le champ diffusé se comporte comme une onde sphérique à grande distance :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{ik_z}{2\pi} \mathbf{E}(\mathbf{K}_R) \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k_0 R}\right), \quad (1.28)$$

où $R = \|\mathbf{R}\|$, $\mathbf{k}_\perp = \kappa \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ et $\mathbf{K}_R = k_0 \mathbf{R}/R$.

Nous avons jugé intéressant de présenter la fonction de Green en 3 dimensions ($n = 3$) pour montrer le comportement en onde sphérique du champ émanant d'un point source. Cependant, dans la suite de l'étude, nous nous intéresserons qu'au cas où le problème est invariant suivant la direction y .

La fonction de Green scalaire pour l'équation de Helmholtz dans le cas d'un problème à deux dimensions ($n = 2$) est donnée par :

$$(\nabla^2 + k_0^2)G^{(0)}(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}). \quad (1.29)$$

Comme précédemment, cette équation peut être résolue à l'aide de la transformée de Fourier. Cependant, (1.29) est obtenue à partir de (1.22) en intégrant sur la coordonnée y , et en imposant, comme pour le cas

⁴Si nous avons choisi le pôle $-k_0 - i\gamma$, la fonction de Green (1.27) aurait consisté en des ondes entrantes, c'est à dire décroissant à mesure que l'on s'approche de la surface.

$n = 3$, une infime partie imaginaire à k_0 , [12]

$$G^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i\kappa\|\mathbf{r}\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{k_0^2 + i\gamma - k_z^2 - \kappa^2}, \quad (1.30)$$

et par quelques manipulations mathématiques, on obtient la représentation intégrale de la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0, $H_0^{(1)}$. La fonction de Green pour un espace à deux dimensions, satisfaisant l'équation d'Helmholtz (1.29) et la condition d'onde sortante cylindrique [12] s'écrit alors

$$G^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 r), \quad (1.31)$$

où $\|\mathbf{r}\| = (x^2 + z^2)^{1/2} = r$. En champ lointain, $k_0 r \geq 1$, la fonction de Green $G^{(0)}(\mathbf{r})$, évaluée par la méthode du point selle [13], prend la forme

$$G^{(0)}(\mathbf{r}) \approx i \frac{e^{i(k_0 r - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_0 r}}. \quad (1.32)$$

Décomposition de Weyl de la fonction de Green Dans l'équation (1.23), on peut porter l'intégration sur la variable k_z , conduisant à

$$G^{(0)}(\mathbf{R}) = \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{k_z(\mathbf{k}_\perp)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + ik_z(\mathbf{k}_\perp)|z|}, \quad (1.33)$$

où $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, $k_\perp = \|\mathbf{k}_\perp\|$ et $\mathbf{k}_\perp = \kappa\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$. Dans l'équation (1.33), supposons $k_z(\mathbf{k}_\perp) > 0$ pour $k_\perp < k_0$, et choisissons la branche de coupure $k_z(\mathbf{k}_\perp) = +i\sqrt{(k_0^2 - k_\perp^2)}$ pour $k_\perp > k_0$, i.e., $\Im m(k_z) \geq 0$. Le principe d'absorption limite est alors vérifié.

La valeur absolue $|z|$ est obtenue par la méthode de résidus pour les deux pôles en k_z et $-k_z$ au dénominateur $k_0^2 - k_\perp^2$ [12]. De plus, le nombre d'onde vertical s'écrit

$$k_z(\mathbf{k}_\perp) = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_\perp^2} & \text{pour } k_\perp \leq k_0 \\ i\sqrt{k_\perp^2 - k_0^2} & \text{pour } k_\perp > k_0 \end{cases}. \quad (1.34)$$

La relation (1.33) est appelée la décomposition de Weyl de la fonction de Green. Elle décrit la fonction de Green d'une base d'ondes sphériques sur une base d'ondes planes. Physiquement, elle représente la superposition d'ondes planes se propageant vers les z croissants ($z > 0$) et décroissants ($z < 0$). Pour $\|\mathbf{k}_\perp\| > k_0$, ces ondes décroissent exponentiellement à mesure qu'elles s'éloignent de la source. Chaque onde plane élémentaire

$$\psi = \psi_0 e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} \pm ik_z(\mathbf{k}_\perp)z} \quad (1.35)$$

entrant dans l'équation (1.33) satisfait l'équation de Helmholtz $(\nabla^2 + k_0^2)\psi = 0$. Le flux d'une onde plane du type (1.35) suivant la composante z pour une onde homogène (une onde est dite homogène lorsque les plans à phase constante sont aussi des plans à amplitude constante. L'onde est inhomogène si les plans équiphase et équi-amplitude ne coïncident pas [14]. Dans le cas où le milieu est d'indice de réfraction complexe ($n = \sqrt{\epsilon}$, et du point de vue champ lointain, i.e. $\|\mathbf{R}\| \rightarrow \infty$, elles sont sans conséquence, puisqu'elles décroissent, et l'énergie qu'elle transportent est absorbée par le milieu) $\|\mathbf{k}_\perp\| < k_0$ (k_z est réel), est donné par la relation [15] $I_z = \pm \omega \sqrt{\epsilon \mu} k_z |\psi_0|^2$. $I_z = 0$ pour des ondes inhomogènes, i.e. $\|\mathbf{k}_\perp\| > k_0$. Par convenance, on choisit l'amplitude de l'onde plane tel que le flux d'énergie soit constant suivant z et indépendant de \mathbf{k}_\perp . Dans ce cas, la base d'ondes planes choisie est de la forme

$$\psi = \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} \pm ik_z(\mathbf{k}_\perp)z}}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}}, \quad + \text{pour les ondes diffusées et } - \text{ pour les ondes incidentes.} \quad (1.36)$$

1.2.6 Amplitude de diffusion

Dans cette section, il est question de déterminer les équations pour le champ, à l'aide des fonctions de Green, qui seront utilisées dans la suite du manuscrit.

L'équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2)\psi = J, \quad (1.37)$$

et la condition aux limites

$$\widehat{\mathcal{H}}\psi(\mathbf{R}) = 0 \quad \text{pour} \quad \mathbf{R} \in \Sigma \implies z = \zeta(\mathbf{r}), \quad (1.38)$$

avec $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, et $\widehat{\mathcal{H}}$ un opérateur linéaire représentant les conditions aux limites, décrivent mathématiquement le problème électromagnétique. De plus, nous avons vu que la solution doit satisfaire la condition d'ondes sortantes lorsque $z \rightarrow \infty$. Dans une majeure partie du manuscrit, le problème est traité pour un point source, situé arbitrairement en \mathbf{R}_0 :

$$J(\mathbf{R}) = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \quad (1.39)$$

Par définition, la solution correspondante est la fonction de Green

$$\psi = G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0). \quad (1.40)$$

Le champ produit par une distribution continue de sources est calculé selon le principe de superposition

$$\psi(\mathbf{R}) = \int G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')J(\mathbf{R}')d\mathbf{R}'. \quad (1.41)$$

Nous désignerons par ψ_{inc} le champ incident, solution de l'équation (1.37) correspondant au cas pour lequel la frontière Σ est absente, et l'espace entier est remplie d'un milieu homogène. Le champ résulte de la radiation initiale de la source J et incident sur la frontière Σ . Il s'écrit dans le cas général

$$\psi_{inc}(\mathbf{R}) = \int G^{(0)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')J(\mathbf{R}')d\mathbf{R}'. \quad (1.42)$$

où $G^{(0)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ est la fonction de Green⁵ pour un espace homogène. En substituant dans cette représentation de ψ_{inc} l'expression de $G^{(0)}$ sous la forme d'une superposition d'ondes planes (1.33), le champ incident s'écrit alors⁶

$$\psi_{inc}(\mathbf{R}) = \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}} F_{inc}(\mathbf{k}_\perp) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} - ik_z(\mathbf{k}_\perp)z}, \quad (1.44)$$

avec

$$F_{inc}(\mathbf{k}_\perp) = \frac{i}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' dz'}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}} e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}' + ik_z(\mathbf{k}_\perp)z'} J(\mathbf{r}', z'). \quad (1.45)$$

Nous avons émis l'hypothèse, ici, lors de la substitution dans (1.33), que le champ incident sur la surface Σ et généré par la distribution de sources J est calculé pour $z' > z$ de sorte que $|z - z'| = z' - z$. Le champ total s'exprime comme la somme des champs incident $\psi_{inc}(\mathbf{R})$ et diffusé $\psi_{sc}(\mathbf{R})$

$$\psi(\mathbf{R}) = \psi_{inc}(\mathbf{R}) + \psi_{sc}(\mathbf{R}). \quad (1.46)$$

⁵En reprenant les équations (1.23) et (1.24), on peut écrire, pour $n = 2$,

$$G^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = G^{(0)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{-1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')} d^2\mathbf{k}. \quad (1.43)$$

et traduit l'invariance par translation de la fonction de Green.

⁶En toute généralité, nous écrivons $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}$, représentant κx en 2D.

Nous considérons maintenant l'aire Γ pour $z > \max[\zeta(\mathbf{r})]$. Puisque le champ diffusé ψ_{sc} doit consister en des ondes sortantes et satisfaire la condition de radiation à l'infini pour $z \rightarrow \infty$ (des ondes se propageant et décroissant vers les z croissants), selon notre convention, nous avons

$$\psi_{sc}(\mathbf{R}) = \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}} F_{sc}(\mathbf{k}_\perp) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + ik_z(\mathbf{k}_\perp)z}. \quad (1.47)$$

La normalisation (1.36) a été utilisée ici pour des ondes sortantes. L'amplitude est sans aucun doute dépendante du champ incident ψ_{inc} . Nous dénoterons, pour la suite de l'étude, $F_{sc}(\mathbf{k}_\perp)$ par $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$ l'amplitude de diffusion de l'onde de vecteur d'ondes \mathbf{k}_0 en l'onde de vecteur d'ondes \mathbf{k} . La solution du problème initial (1.37-1.38) pour une onde plane (1.36) peut s'écrire sous la forme

$$\psi(\mathbf{R}) = \frac{e^{i\mathbf{k}_{0\perp} \cdot \mathbf{r} - ik_z(\mathbf{k}_{0\perp})z}}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_{0\perp})}} + \int R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + ik_z(\mathbf{k}_\perp)z} \frac{d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}}, \quad (1.48)$$

où $k_z(\mathbf{k}_{0\perp})$ est donné dans (1.34). Il est à noter que la formule (1.48) a été obtenue en supposant que $z > \max \zeta(\mathbf{r})$. Puisque dans la plupart des applications, seule la valeur du champ loin de la surface porte un intérêt, cette limitation n'est pas d'importance significative. Si maintenant nous souhaitons obtenir le champ diffusé dans la région bordant directement la frontière, c'est à dire pour $\min \zeta(\mathbf{r}) < z < \max \zeta(\mathbf{r})$, nous nous plaçons alors dans le cadre de l'hypothèse de Rayleigh. Elle sera discutée dans la section 1.5.3. Soulignons que les composantes horizontales des vecteurs d'ondes incident et diffusé respectivement $\mathbf{k}_{0\perp}$ et \mathbf{k}_\perp prennent toutes valeurs réelles. Pour $\|\mathbf{k}_{0\perp}\| = k_{0\perp} < k_0$ une onde homogène est incidente à la surface, pour $k_{0\perp} > k_0$, une onde inhomogène (où onde évanescente) dont l'amplitude s'atténue exponentiellement vers la frontière. Par analogie, pour $k_\perp < k$, l'onde diffusée est une onde plane ordinaire, et pour $k_\perp > k$, elle est évanescente et décroît exponentiellement quand $z \rightarrow +\infty$. L'amplitude de diffusion $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$ décrit donc tous les types de processus de diffusion dépendant de \mathbf{k}_\perp et $\mathbf{k}_{0\perp}$: les interactions entre les ondes homogènes, entre les ondes inhomogènes, et entre les ondes homogènes et inhomogènes, et vice versa. Nous pouvons maintenant construire l'expression de la fonction de Green totale $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, en posant dans (1.45)

$$J(\mathbf{r}', z') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(z' - z_0). \quad (1.49)$$

On montre que le champ issu du point source est une superposition d'ondes planes de la forme (1.44)

$$\psi_{inc}(\mathbf{R}) = \int \frac{d\mathbf{k}_{0\perp}}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_{0\perp})}} F_{inc}(\mathbf{k}_{0\perp}) e^{i\mathbf{k}_{0\perp} \cdot \mathbf{r} - ik_z(\mathbf{k}_{0\perp})z}, \quad (1.50)$$

où

$$F_{inc}(\mathbf{k}_{0\perp}) = \frac{i}{8\pi^2 \sqrt{k_z(\mathbf{k}_{0\perp})}} e^{-i\mathbf{k}_{0\perp} \cdot \mathbf{r}_0 + ik_z(\mathbf{k}_{0\perp})z_0}. \quad (1.51)$$

Ainsi, à partir de (1.48), et en utilisant le principe de superposition (1.41), nous obtenons la fonction de Green totale, solution de l'équation d'ondes du problème de diffusion (1.37)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) &= G^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \frac{i}{8\pi^2} \int e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + ik_z(\mathbf{k}_\perp)z} \\ &\times R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) e^{-i\mathbf{k}_{0\perp} \cdot \mathbf{r}_0 + ik_z(\mathbf{k}_{0\perp})z_0} \frac{d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}} \frac{d\mathbf{k}_{0\perp}}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_{0\perp})}}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

L'expression (1.52) pour la fonction de Green G est solution de l'équation

$$(\nabla^2 + k_0^2)G = \delta(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0), \quad (1.53)$$

et satisfait la condition de radiation pour $z \rightarrow +\infty$. De façon similaire, la représentation du champ diffusé ψ_{sc} de la forme

$$\psi_{sc}(\mathbf{R}) = \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}} R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + ik_z(\mathbf{k}_\perp)z}, \quad (1.54)$$

satisfait la condition de radiation de l'équation homogène de Helmholtz.

Propriétés : réciprocité, symétrie, conservation de l'énergie et unitarité L'amplitude de diffusion $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$ satisfait des propriétés fondamentales qui peuvent être utilisées pour tester la validité ou non d'une méthode approchée. La réciprocité exprime l'invariance de l'onde par inversion temporelle dans le régime harmonique⁷. Dans le cas scalaire, elle s'écrit :

$$R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) = R(-\mathbf{k}_{0\perp}, -\mathbf{k}_\perp). \quad (1.55)$$

En remplaçant $\mathbf{k}_\perp \rightarrow -\mathbf{k}_{0\perp}$ et $\mathbf{k}_{0\perp} \rightarrow -\mathbf{k}_\perp$ dans la fonction de Green (1.52), on obtient

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G^{(0)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) + \frac{i}{8\pi^2} \int e^{-i\mathbf{k}_{0\perp} \cdot \mathbf{r} + ik_z(\mathbf{k}_{0\perp})z} \\ \times R(-\mathbf{k}_{0\perp}, -\mathbf{k}_\perp) e^{+i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_0 + ik_z(\mathbf{k}_\perp)z_0} \frac{d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_\perp)}} \frac{d\mathbf{k}_{0\perp}}{\sqrt{k_z(\mathbf{k}_{0\perp})}}. \quad (1.56)$$

En comparant avec la fonction de Green (1.52) et la relation de réciprocité (1.55), on voit que la fonction de Green est symétrique

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}). \quad (1.57)$$

Par une étude statistique, Voronovich montre que le moment statistique d'ordre deux de l'amplitude de diffusion $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$, traduisant l'intensité totale du champ diffusé (qui est en fait la somme de l'intensité réfléchie dans la direction spéculaire, et l'intensité du champ produit par la rugosité de la surface), satisfait à la conservation de l'énergie, à partir du principe d'unitarité.

De même, on peut montrer que le coefficient de diffusion $\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ (que nous aborderons par la suite) est réel, réciproque et symétrique [15].

1.2.7 Les polarisations horizontale (TE) et verticale (TM)

Puisque nous traitons le cas d'une surface monodimensionnelle (cas d'un problème à deux dimensions), il est intéressant de faire intervenir les grandeurs scalaires composant le vecteur électromagnétique \mathbf{E} . Dans ce manuscrit, nous traiterons trois types de conditions aux limites sur la surface ($\mathbf{r}' \in \Sigma$) :

- La condition aux limites de Dirichlet : $\psi(\mathbf{r}') = 0$. Elle décrit la diffusion par une surface parfaitement conductrice d'une onde polarisée horizontalement.
- La condition aux limites de Neumann : $\frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n} = 0$. Elle décrit la diffusion par une surface parfaitement conductrice d'une onde polarisée verticalement.

Les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet ne décrivent pas rigoureusement la réalité d'une surface de mer. Les effets de la surface sont caractérisés alors par une impédance de surface. Léontovitch a été le premier à obtenir cette équation. Cette condition aux limites porte le nom de condition aux limites de Léontovitch, ou condition aux limites haute impédance (IBC : Impedance Boundary Condition). Celle-ci est valable si le rayon de courbure de la surface est plus grand que la profondeur de peau. Elle s'obtient par les conditions de passage à l'interface, qui pour un potentiel scalaire, s'écrivent [4] :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Sigma, \quad (1.58)$$

⁷Ce qui s'exprime également par l'invariance des pulsations incidente ω_i , réfléchie ω_r , et transmise ω_t à l'interface entre deux milieux semi-infinis.

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \mathbf{r} \in \Sigma. \quad (1.59)$$

En manipulant les conditions de passage (1.58), (1.59), avec la vitesse de phase $v = \omega/k = c/\sqrt{\mu\varepsilon} = nk_0$ [10], la condition aux limites de Leontovitch pour le cas scalaire s'écrit

$$\frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} = -ik_0 \alpha_0 \psi_0(\mathbf{r}), \quad (1.60)$$

où α_0 est un terme contenant implicitement l'impédance de la surface plane Z_s , l'impédance d'onde en espace libre $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ et $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée par rapport à la normale. Elle élimine le besoin de connaître le champ dans le milieu inférieur et amène donc à des simplifications mathématiques. Ainsi le problème à deux milieux se ramène à un problème à un milieu.

1.2.8 Angle de Brewster

Nous verrons dans le chapitre 2 l'apparition d'un phénomène appelé *incidence de Brewster*, classiquement connu pour une interface plane séparant deux milieux LHI. Nous allons en décrire ici l'essence principale. Considérons tout d'abord (figure 1.2) deux milieux matériels semi-infinis, où le milieu in-

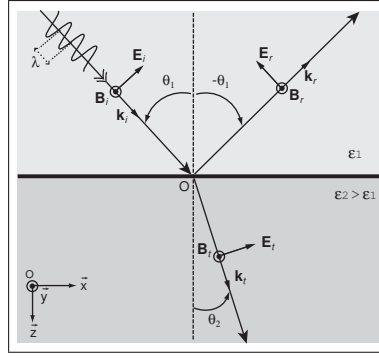


FIG. 1.2 – Configuration pour le coefficient de Fresnel en polarisation verticale.

férieur est diélectrique sans pertes ($\varepsilon = \varepsilon'$ et $\varepsilon' > 0$) et la source est dans le milieu supérieur. L'onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence est appelée la polarisation horizontale, et lorsqu'elle est polarisée parallèlement au plan d'incidence, elle est référencée comme la polarisation verticale. Les coefficients de réflexion sont déterminés à partir de la continuité des composantes tangentielles des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . L'application des conditions aux limites conduit alors à [7] :

$$R_v = \frac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_2 + \theta_1)}, \quad (1.61)$$

et

$$R_h = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}, \quad (1.62)$$

où R_v et R_h sont les coefficients de réflexion en polarisations verticale et horizontale, respectivement.

On peut observer, pour les deux polarisations, lorsque $n_1 > n_2$, donc lorsque l'onde se réfléchit sur un milieu plus réfringent, les coefficients de réflexion atteignent un angle limite θ_{iL} . Au-delà de cet angle, les coefficients de Fresnel deviennent complexes. Pour la polarisation horizontale (R_h), et pour $n_2 > n_1$ ($\theta_2 < \theta_1$), l'onde réfléchit subit, dans le cas d'une réflexion sur un milieu plus réfringent, un déphasage de π . Pour $n_2 < n_1$, l'onde réfléchie ne subit aucun déphasage (on parle ici du cas où le coefficient est

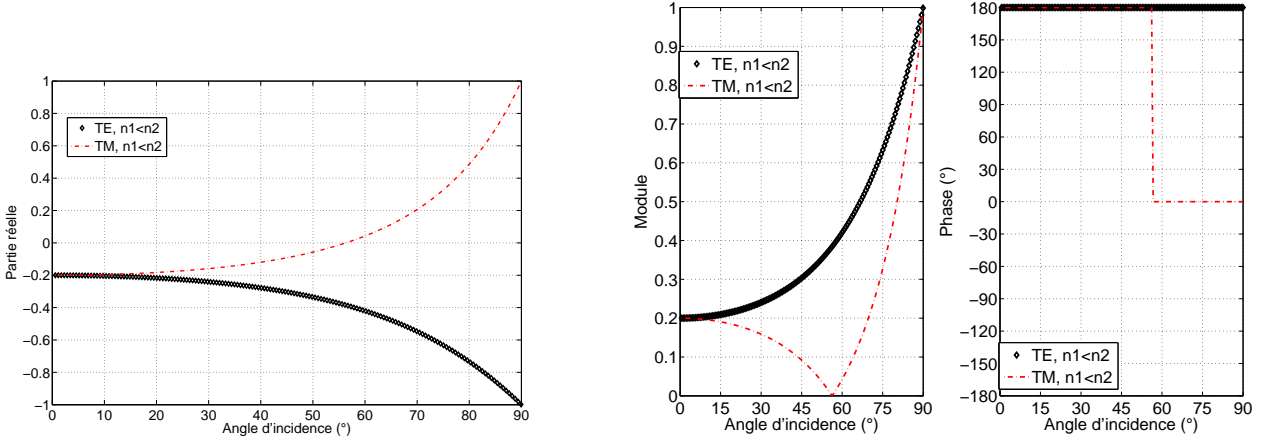


FIG. 1.3 – Coefficients de réflexion R_h et R_v . A Gauche, parties réelles. A droite, leurs modules et phases.

réel, donc pour $\theta_i < \theta_{iL}$). Quant au déphasage de l'onde réfléchiée pour la polarisation verticale, il est donné par le signe de R_v .

Lorsqu'au dénominateur de (1.61) le terme $\theta_2 + \theta_1 \geq \pi/2$, alors R_v passe par 0 (cela revient à dire que le numérateur de R_v s'annule) puis change de signe. L'onde est alors entièrement transmise. L'angle d'incidence correspondant est appelé l'angle de Brewster, et vaut $\theta_B = \tan^{-1}(n_2/n_1)$. A cet angle, toute la puissance incidente est transmise dans le milieu inférieur. Il est important de remarquer que lorsque le milieu inférieur est parfaitement conducteur, l'angle de Brewster vaut $\pi/2$.

Les auteurs dans [16] présentent des simulations, pour le cas d'une surface très conductrice ($\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ où $\epsilon' > 0, \epsilon'' \gg 0$), telle la surface de mer. Les coefficients de réflexions pour les polarisations horizontale et verticale à partir des coefficients de Fresnel, sont donnés par

$$R_h = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_i}} \quad (1.63)$$

et

$$R_v = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_i}}{\epsilon_2 \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_i}} \quad (1.64)$$

Ces formulations ne prennent pas en compte la rugosité de la surface. L'angle de Brewster apparait pour la polarisation verticale, sur la figure 1.4. Le module présente un minimum local proche de l'horizontale et donc il ne s'annule pas. En effet, le numérateur du coefficient de réflexion R_v dans (1.64) vaut 0 lorsque la condition

$$\cos \theta_i = Z_v(\theta_i), \quad (1.65)$$

où $Z_v(\theta_i) = \epsilon_2 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{\epsilon_2}}$, est remplie. Dans le cas où ϵ_2 est réelle, le coefficient s'annule puisque $Z_v(\theta_i) \leq 1$ et est réelle, et $\cos \theta_i \leq 1$ et est réel pur. En revanche si ϵ_2 possède une partie imaginaire finie (le cas d'une surface de mer par exemple), le coefficient de réflexion R_v ne s'annule pas mais passe par un minimum. On observe un déphasage de π pour la polarisation verticale. Pour un diélectrique parfait, le coefficient de réflexion R_v s'annule. Pour un diélectrique à pertes (avec une partie imaginaire), le module du coefficient de réflexion passe par un minimum proche de l'angle de Brewster. Le lecteur est amené à consulter leur livre pour les simulations d'une surface aux caractéristiques électriques telles que la terre par exemple, ou se reporter à la figure 1.3.

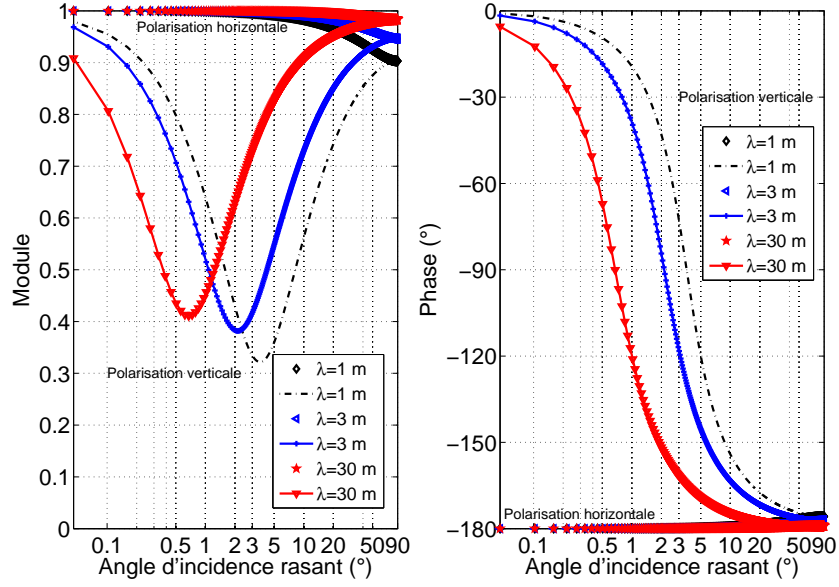


FIG. 1.4 – Coefficients de réflexion pour une surface plane très conductrice, pour les polarisations verticale et horizontale, en fonction de l'angle d'incidence rasant $\alpha = 90^\circ - \theta_i$. Caractéristiques électriques d'une surface de mer : constante diélectrique relative $\epsilon_2/\epsilon_0 = \epsilon_r = 80$, avec la constante diélectrique du vide $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^{-9})$ F/m, la conductivité électrique $\sigma = 4$ S/m .

1.2.9 Equations intégrales : principe de Huygens

Le principe de Huygens permet d'obtenir l'équation pour le champ d'une autre manière que celle obtenue par la solution générale, sous forme de transformée de Fourier, de l'équation d'Helmholtz. Il fait appel au concept de la fonction de Green [14]. Il établit des équations intégrales qui mettent en relation le champ incident ψ_{inc} et le champ total sur la surface. Les méthodes numériques que nous verrons par la suite, font appel à ces équations intégrales. En effet, pour déterminer le champ diffusé ψ_{sc} dans le milieu supérieur V_0 (figure 1.5), l'étape intermédiaire est la détermination du champ total ψ et/ou sa dérivée normale $\partial\psi/\partial\mathbf{n}'$ sur la surface. Cette section apporte une partie de la théorie pour obtenir les équations intégrales, pour le cas scalaire. Le lecteur pourra trouver une démonstration détaillée dans [15].

Physiquement, le principe d'Huygens, base de la théorie de la diffraction, peut être visualisé sous la forme suivante : la forme future de n'importe quelle surface d'onde peut être déterminée en considérant que chaque point de cette surface émet une onde sphérique, et en construisant l'enveloppe de ces ondes sphériques. Nous formulons dans cette section le principe d'Huygens pour le champ électromagnétique [17], [18].

Considérons le champ $\psi(\mathbf{r})$ généré par une source $f(\mathbf{r}_0)$ localisée dans un volume V entouré par une surface S :

$$(\nabla^2 + k_0^2)\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0). \quad (1.66)$$

La fonction de Green $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ nous donne l'amplitude en un point \mathbf{r} d'une onde issue d'une source ponctuelle $j(\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ située en \mathbf{r}_0 . On suppose que l'onde se propage dans un espace non borné qui fixe le vecteur d'onde k_0 . Cette fonction de Green vérifie l'équation de propagation suivante :

$$(\nabla^2 + k_0^2)G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.67)$$

Soit l'identité de Green suivante [14] :

$$\int_V d^2\mathbf{r}_0 [v(\mathbf{r}_0)\Delta u(\mathbf{r}_0) - u(\mathbf{r}_0)\Delta v(\mathbf{r}_0)] = \int_{S_t} dS' \left(u(\mathbf{r}') \frac{\partial v(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - v(\mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right), \quad (1.68)$$

où l'intégration dans le membre de gauche s'effectue sur un volume borné V , et dans le membre de droite sur la frontière fermée de ce volume. La normale est dirigée vers l'intérieur du volume.

Considérons une surface rugueuse séparant deux milieux semi-infinis, illuminée par une source $j(\mathbf{r})$. Deux domaines d'intégration peuvent être définis. Le domaine V_0 comme indiqué sur la figure 1.5. Le champ $\psi_0(\mathbf{r})$ recherché dans le milieu 0 est solution de

$$(\nabla^2 + k_0^2)\psi_0(\mathbf{r}) = -j(\mathbf{r}) \quad (1.69)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \psi_0(\mathbf{r})}{\partial r} - ik_0 \psi_0(\mathbf{r}) \right) = 0, \quad (1.70)$$

et dans le milieu 1, le champ $\psi_1(\mathbf{r})$ solution de

$$(\nabla^2 + k_1^2)\psi_1(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.71)$$

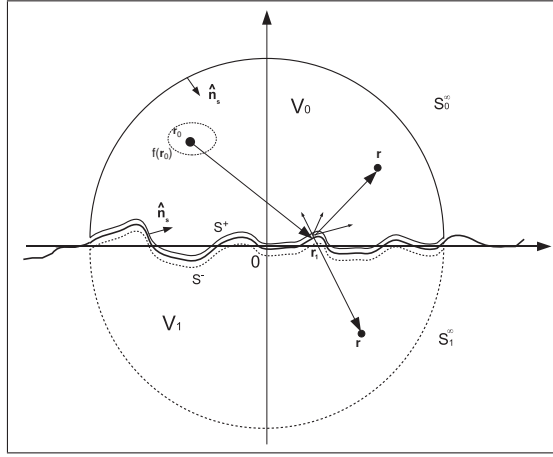


FIG. 1.5 – Contour d'intégration.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial r} - ik_1 \psi_1(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (1.72)$$

La solution globale est donnée par

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \psi_0(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V_0 \\ \psi_1(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V_1 \end{cases}. \quad (1.73)$$

La source de rayonnement $j(\mathbf{r})$ est contenue dans le volume V_0 , c'est pourquoi elle n'apparaît pas dans l'équation de Helmholtz pour le champ $\psi_1(\mathbf{r})$ dans le volume V_1 . Les équations (1.70) et (1.72) sont les conditions de radiation de Sommerfeld [19]. Elles imposent, à grande distance, que les ondes issues de la source et diffractées par la surface sont des ondes sortantes. A grande distance, pour le problème général à trois dimensions, elles se comportent donc comme des ondes sphériques $\exp(ik_{0,1}r)/r$, et comme des ondes cylindriques $\exp(ik_{0,1}r)/\sqrt{r}$ pour un problème à deux dimensions, objet de ce manuscrit. Ce comportement, qui est le seul acceptable physiquement, peut aussi être imposé par le principe d'absorption limite (1.26) [15]. En supposant que les milieux 0 et 1 sont absorbants, i.e. $\Im m(k_{0,1}) > 0$,

alors $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_{0,1}(\mathbf{r}) = 0$. La condition de radiation de Sommerfeld est contenue dans ce principe. Le champ incident ψ_{inc} sur la surface est produit par la source $j(\mathbf{r})$ et vérifie les équations suivantes pour tout l'espace $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$

$$(\nabla^2 + k_0^2)\psi_{inc}(\mathbf{r}) = -j(\mathbf{r}) \quad (1.74)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r})}{\partial r} - ik_0 \psi_{inc}(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (1.75)$$

Nous avons vu que nous pouvions exprimer l'équation de propagation avec la fonction de Green scalaire pour une source ponctuelle localisée en \mathbf{r}_0 (dans le volume V_0 dans notre cas) pour un milieu infini. Elle vérifie les équations

$$(\nabla^2 + k_0^2)G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.76)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} - ik_0 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \right) = 0. \quad (1.77)$$

Posons $u(\mathbf{r}_0) = \psi(\mathbf{r}_0)$ et $v(\mathbf{r}_0) = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ dans (1.68) en choisissant le contour supérieur S_0^∞ puis que $\mathbf{r}_0 \in V_0$, et à l'aide de (1.74) et (1.76), nous avons

$$\begin{aligned} & \int_V d^2\mathbf{r}_0 [G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \Delta \psi(\mathbf{r}_0) - \psi(\mathbf{r}_0) \Delta G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \\ &= \int_V d^2\mathbf{r}_0 [G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) (\Delta + k_0^2) \psi(\mathbf{r}_0) - \psi(\mathbf{r}_0) (\Delta + k_0^2) G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \\ &= \begin{cases} \int_V d^2\mathbf{r}_0 [G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \underbrace{(\Delta + k_0^2) \psi(\mathbf{r}_0)}_{-f(\mathbf{r}_0)} - \psi(\mathbf{r}_0) \underbrace{(\Delta + k_0^2) G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}_{-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}] & \mathbf{r} \in V_0 \\ \int_V d^2\mathbf{r}_0 [G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \underbrace{(\Delta + k_0^2) \psi(\mathbf{r}_0)}_{-f(\mathbf{r}_0)}] & \mathbf{r} \in V_1 \end{cases}. \quad (1.78) \end{aligned}$$

Selon le principe de superposition [20] la solution de (1.74)-(1.75) s'écrit $\psi_{inc}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}_0 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) j(\mathbf{r}_0)$. De plus, avec la propriété $\int d^2\mathbf{r}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r})$, nous pouvons transformer le terme du haut dans (1.78) en $[-\psi_{inc}(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r})]$ et le terme du bas dans (1.78) en $-\psi_{inc}(\mathbf{r})$. On obtient ainsi, en réinjectant dans (1.68), et en posant $u(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}')$ et $v(\mathbf{r}') = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dans (1.68)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} \in V_0, \\ \mathbf{r} \in V_1, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}) \\ 0 \end{array} \right\} = \psi_{inc}(\mathbf{r}) + \int_{S^+ + S_0^\infty} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right]. \quad (1.79)$$

En écrivant les conditions de radiation, on peut montrer que l'intégrale sur la portion de sphère S_0^∞ s'annule. En effet, le champ au-delà de S_0^∞ vaut $-\psi_{inc}(\mathbf{r})$ et celui compris dans S_0^∞ vaut $\psi_{inc}(\mathbf{r})$ puisque la normale est dirigée à l'intérieur du volume V_0 . De plus, remarquons que puisque \mathbf{r}' est un point de la surface, nous avons les relations

$$\mathbf{r}' = x' + \zeta(x') \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.80)$$

$$\mathbf{n}' = \hat{\mathbf{z}} - \nabla \zeta(x'), \quad (1.81)$$

$$dS' = dx' \sqrt{1 + (\nabla \zeta(x'))^2} = dx' / \|\mathbf{n}'\|, \quad (1.82)$$

et, notant que le vecteur normalisé $\hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{n}' / \|\mathbf{n}'\|$ et que $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla$, l'intégrale (1.79) se simplifie

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} \in V_0, \\ \mathbf{r} \in V_1, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}) \\ 0 \end{array} \right\} = \psi_{inc}(\mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}' \in S^+} dx' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right]. \quad (1.83)$$

Nous obtenons le nombre d'équations nécessaires pour déterminer les champs et leurs dérivées sur la surface : 2 équations, 2 inconnues. La première équation de (1.83) est la traduction mathématique du principe de Huygens où le champ ψ en un point d'observation \mathbf{r} du milieu 0 peut se calculer à partir des valeurs du champ $\psi(\mathbf{r}')$ et sa dérivée normale sur la surface S^+ , et de la propagation de ceux-ci vers ce point d'observation par la fonction de Green $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et sa dérivée normale $\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}$, qui sont des ondes cylindriques pour le problème à deux dimensions, et des ondes sphériques pour un problème à trois dimensions. La deuxième partie de cette équation correspond au théorème d'extinction. Les contributions surfaciques annulent le champ incident à l'intérieur du matériau. Calculer le champ diffusé par la surface rugueuse revient à déterminer le champ $\psi(\mathbf{r}')$ et sa dérivée normale $\frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}$ sur la surface. Ces équations ne sont pas aisées à résoudre car les inconnues du problème sont uniquement contenues dans l'intégrale. Pour obtenir une équation plus simple à manipuler, on peut approcher le point d'observation \mathbf{r} de la surface S^+ $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow S^+} \mathbf{r} = \mathbf{r}_s$: c'est le passage à la limite. En passant à cette limite, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$, alors les fonctions de Green ont des singularités surfaciques telles que $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ diverge en $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{1/2}$ et $\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}$ diverge en $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. La procédure est d'exclure une petite surface S_δ de rayon δ autour du point \mathbf{r} de la surface S , et de calculer les intégrales séparément (la surface S sans la surface S_δ et la surface S_δ seule). De plus, dans la limite $\delta \rightarrow 0$, la surface S_δ peut être approximée par un plan, et de ce fait, la notion de valeur principale de l'intégrale apparaît [9], [21]. L'équation (1.83) s'écrit alors pour le milieu 0

$$\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}_s) = \psi_{inc}(\mathbf{r}_s) + \int_{\mathbf{r}' \in S^+} d\mathbf{x}' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right]. \quad (1.84)$$

On remarque que les inconnues du problème ne se trouvent plus seulement sous l'intégrale. On peut donc plus aisément appliquer une procédure itérative pour approximer les champs et leurs dérivées normales sur la surface.

1.2.10 Vecteur de Poynting

Une onde électromagnétique illuminant une surface plane parfaitement conductrice est réfléchiée dans la direction spéculaire. La surface étant rugueuse, une partie de la puissance est diffusée dans des directions autres que la direction spéculaire. Pour caractériser l'intensité diffusée dans la direction d'observation, on introduit le coefficient de diffusion $\sigma(\theta_s)$, qui rend compte de la proportion de l'intensité diffusée dans cette même direction, par rapport à la puissance incidente. Pour exprimer le coefficient de diffusion, il faut d'abord déterminer les puissances des champs incident et diffusé.

Pour évaluer la puissance traversant une surface, on définit le vecteur de Poynting, indépendant du temps [7]

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Re e(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*), \quad (1.85)$$

où $\mathbf{H}^* = \mathbf{B}^*/\mu_0$ dans le vide. Il a alors pour expression, dans le cas Transverse Electrique

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Re e \left(\hat{\mathbf{y}} \psi(x, z) \wedge \left[\frac{1}{i\mu_0\omega} \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right] \right) = -\frac{1}{2\omega\mu_0} \Im m(\psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})), \quad (1.86)$$

et dans le cas Transverse Magnétique

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \Re e \left(-\hat{\mathbf{y}} \psi(x, z) \wedge \left[\frac{-1}{i\epsilon_0\omega} \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right] \right) = -\frac{1}{2\omega\epsilon_0} \Im m(\psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})). \quad (1.87)$$

Pour une onde plane, l'opérateur $\nabla \psi^*(\mathbf{r}) = -i\mathbf{k}_0 \psi^*(\mathbf{r})$.

Ces expressions sont valables pour le champ incident (avec \mathbf{k}_0, ψ_i), le champ diffusé (avec \mathbf{k}_s, ψ_s), et le champ total, ψ , somme du champ incident et du champ réfléchi.

Par exemple, l'onde incidente définie par ψ_i se propageant selon la direction \mathbf{k}_0 , et l'énergie qu'elle transporte se déplace selon cette même direction. Nous supposons par la suite que l'onde incidente est plane⁸, se propage dans le vide, dont l'impédance diélectrique $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, et est polarisée horizontalement, donc que $\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{y}}\psi_i$; le raisonnement est similaire pour la polarisation verticale. A partir de (1.86), on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\omega\mu_0} \Im m(\psi_i(\mathbf{r}) \nabla \psi_i^*(\mathbf{r})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega} \Im m(\psi_i(\mathbf{r}) i\mathbf{k}_0 \psi_i^*(\mathbf{r})) = \frac{1}{2Z_0 k_0} |\psi_i|^2 \mathbf{k}_0, \end{aligned} \quad (1.88)$$

avec $\mathbf{k}_0 = k_0(\cos \theta_i \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}})$. On obtient l'expression de $\mathbf{S}_i(\mathbf{r})$, qui est reliée à la puissance de l'onde incidente :

$$\Re e(\mathbf{S}_i(\mathbf{r})) = \frac{1}{2Z_0 k_0} |\psi_i|^2 \mathbf{k}_0 \quad \text{et} \quad \Im m(\mathbf{S}_i(\mathbf{r})) = 0. \quad (1.89)$$

La partie imaginaire est nulle puisque seules les ondes propagatives ($\kappa < k_0$) participent à la puissance active. En revanche, lorsque l'observateur se positionne dans la zone dite de champ proche, les ondes évanescentes ont une contribution non négligeable. Mais ce n'est pas le cas lorsque l'observateur est en zone de champ lointain. Notons que le vecteur $\mathbf{S}_s(\mathbf{r})$ est obtenu de manière similaire à $\mathbf{S}_i(\mathbf{r})$.

Maintenant que le vecteur de Poynting a été introduit, une expression pour les puissances incidente et diffusée peut être déterminée dans le but d'établir le coefficient de diffusion. C'est l'objectif des deux paragraphes qui suivent.

1.2.11 Coefficient de diffusion

A présent, appelons P_i et P_s respectivement les puissances incidente et réfléchie. La puissance incidente est par définition le flux du vecteur de Poynting à travers le plan moyen \mathcal{P} de la surface rugueuse S ; P_i dépend de l'inclinaison θ_i du champ incident par rapport à la normale à \mathcal{P} .

Quant à la puissance réfléchie P_s , elle est calculée différemment. En supposant que le champ incident éclaire une portion de surface centrée en O ($x = 0, z = 0$), alors, à grande distance r de la surface S , le champ diffusé résultant semblera provenir de l'origine. En champ lointain, P_s sera donc approchée par la somme des puissances élémentaires reçues par les éléments de surface orientée $d\mathbf{S}(\theta_s) = r d\theta_s$, θ_s balayant tous les angles compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Cette définition prend en compte le fait que l'onde incidente est plane et que l'onde diffusée se comporte comme une onde sphérique à grande distance conformément à la condition de radiation vue précédemment.

Elles sont calculées simplement d'après les définitions précédentes ($\hat{\mathbf{z}}$ étant la normale à la surface plane moyenne définie par $z = 0$) :

$$P_i = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0}, \quad (1.90)$$

et P_s est obtenue par :

$$P_s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s r S_s(r, \theta_s), \quad (1.91)$$

où le terme sous l'intégrale dans l'expression de P_s est exprimé dans un système de coordonnées polaires (r, θ) . Le signe $-$ dans l'expression de la puissance incidente vient du fait que le plan \mathcal{P}

⁸Pour une onde plane dans le vide : $\mathbf{H} = (\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{E}) / \mu_0 \omega$, selon (1.18), et $\|\mathbf{k}_0\| = k_0 = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega$.

défini par $z = 0$ est choisi orienté vers les z négatifs, afin que la puissance incidente soit positive. On vérifie bien que, pour un paramètre d'atténuation⁹ g fixé (donc pour une surface d'éclairement fixée), la puissance P_i reçue est maximale lorsque l'onde arrive verticalement ; en effet, le produit $(\mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0}$ est alors maximal. Par un raisonnement similaire, si l'onde incidente est rasante, la puissance reçue est très faible, car alors \mathbf{S}_i est dirigée selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$.

Le coefficient de diffusion $\sigma(\theta_s)$ est par définition [22] égal à la portion de la puissance diffusée par la surface, par rapport à la puissance incidente, dans un intervalle angulaire de largeur $d\theta_s$ autour de la direction d'observation variable θ_s :

$$\frac{P_s}{P_i} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \sigma(\theta_s). \quad (1.92)$$

Il permet ainsi de caractériser, en fonction de l'angle θ_s , la proportion de la puissance diffusée ou réfléchiée dans cette direction. Il est défini de manière implicite par (1.92). On peut obtenir une expression explicite de $\sigma(\theta_s)$; en effet, d'après (1.91) et (1.92),

$$\frac{P_s}{P_i} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s \frac{r S_s}{P_i}. \quad (1.93)$$

Par identification, on obtient

$$\sigma(\theta_s) = \frac{r S_s}{P_i}. \quad (1.94)$$

A partir de la détermination de $\psi(\mathbf{r}')$ et de $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$ sur la surface, on déduit l'expression du champ diffusé dans le demi-espace supérieur V_0 d'après le principe de Huygens [4] qui a été obtenu en (1.79) :

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} \right] \quad \forall \mathbf{r} \in V_0, \quad (1.95)$$

qui traduit le fait que le champ diffusé dans le demi espace supérieur Ω_0 peut être déterminé à partir de la simple connaissance, en tout point, du champ total $\psi(\mathbf{r}')$ et du courant surfacique total $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$ sur la surface S . On se place dans le cas général, où les champs $\psi(\mathbf{r}')$ et $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$ sont non nuls. Le théorème de Huygens peut donc s'appliquer au cas TE ou TM, en considérant un milieu inférieur conducteur parfait ou non.

Pour obtenir le coefficient de diffusion (§1.2.11) [22] il faut connaître le champ diffusé en champ lointain, c'est-à-dire en des points d'observation \mathbf{r} , tels que $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$. Introduisons cette hypothèse dans l'expression (1.95), pour trouver une approximation du champ diffusé en champ lointain.

En champ lointain ($\|\mathbf{r}\| \rightsquigarrow \infty$), on peut approcher l'argument de la fonction de Hankel, dans l'expression de la fonction de Green (1.31), par (Fig. 1.6) [4] $k_0\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \simeq k_0\|\mathbf{r}\| - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'$, où $\mathbf{k}_s = k_0(\sin\theta_s \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta_s \hat{\mathbf{z}})$ est le vecteur d'onde dans la direction d'observation θ_s . La fonction de Green se simplifie en [4] $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik_0 r} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'}$. Le gradient de la fonction de Green par rapport à \mathbf{r}' , pour \mathbf{r} fixé, est $\nabla_{\mathbf{r}'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (-i\mathbf{k}_s)$. Puisque $\frac{\partial}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla$, il vient $\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} \simeq G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (-i\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}')$. Finalement, (1.95) devient :

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ik_0 r} \psi_s^\infty(\theta_s) \quad (1.96)$$

⁹Le paramètre d'atténuation g est homogène à une longueur, et est choisi en fonction de la longueur de la surface, de l'échantillonnage et de l'angle d'incidence. Ce paramètre interviendra en fait dans l'expression de l'onde incidente atténuée gaussiennement que nous aborderons dans la section 1.2.12.

$$\begin{aligned}
 \text{avec } \psi_s^\infty(\theta_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sqrt{1 + (\zeta'(x'))^2} \left[-\frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi(\mathbf{r}') i \mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}' \right] . e^{-i \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[-\sqrt{1 + (\zeta'(x'))^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} + \psi(\mathbf{r}') i k_0 (\zeta'(x') \sin \theta_s - \cos \theta_s) \right] \\
 &\quad \times e^{-i k_0 (x' \sin \theta_s + \zeta(x') \cos \theta_s)}
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

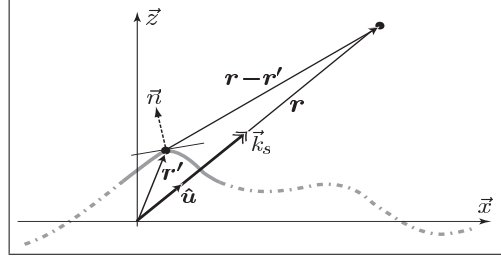


FIG. 1.6 – Approximation en champ lointain.

Nous verrons dans la section 1.2.12 que l'onde incidente n'est pas exactement plane. L'onde diffusée ne l'est alors pas non plus, et rigoureusement, le vecteur de Poynting pour l'onde diffusée dans la direction \mathbf{k}_s , dans sa forme exacte s'écrit

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2Z_0 k_0} \Im m (\psi_s(\mathbf{r}) \nabla \psi_s^*(\mathbf{r})). \tag{1.98}$$

Cependant, en champ lointain le champ diffusé peut être approché par une onde plane, et alors le vecteur de Poynting de l'onde diffusée, en y introduisant l'expression (1.96), s'écrit $\mathbf{S}_s(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{2Z_0} \frac{1}{8\pi k_0 r^2} |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2$. Or comme la puissance totale diffusée est donnée par :

$$P_s = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_s \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s(\mathbf{r}) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_s \sigma(\theta_s) P_i \tag{1.99}$$

on en déduit l'expression du coefficient de diffusion [4] en champ lointain :

$$\sigma(\theta_s) = \frac{\frac{1}{2Z_0} \times \frac{1}{8\pi k_0} |\psi_s^\infty(\theta_s)|^2}{P_i}. \tag{1.100}$$

Dans le cas d'une surface parfaitement conductrice, il y a conservation de l'énergie. Cela permet de tester la qualité du modèle numérique ou asymptotique. Pour une surface parfaitement conductrice, elle impose que

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sigma(\theta_i, \theta_s) d\theta_s = 1, \quad \forall \theta_i, \tag{1.101}$$

signifiant physiquement que la totalité de l'énergie incidente sur la surface est diffusée dans le milieu supérieur. L'égalité (1.101) est vraie dans le cas d'un faisceau incident, objet de la section suivante. Dans le cas d'une incidence en onde plane, il faut faire appel au théorème optique pour la surface [18].

Le paragraphe suivant est consacré à une brève étude de l'onde incidente qui sera utilisée pour la méthode numérique, résumée dans la section 1.5.4.

1.2.12 Onde incidente

Dans les simulations numériques, la surface est tronquée à $x = \pm L/2$. Puisque la solution de l'équation d'onde de Helmholtz est formulée sous forme d'ondes planes (ou sphériques), dont l'étendue est infinie, cela signifie que les courants sur la surface sont "forcés" à 0 pour $|x| \rightarrow \infty$. Ce changement soudain provoque une diffraction et des réflexions artificielles à chaque extrémité de la surface. Pour éviter ceci, il existe une méthode qui consiste à atténuer l'onde incidente pour des abscisses $|x|$ élevées. Ainsi, la surface est éclairée sur une étendue finie, et les courants et champs surfaciques aux extrémités de la surface tendent vers zéro. Dans ce dessein, Thorsos [23] a développé une onde incidente portant son nom. Elle s'écrit

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = e^{ik_0(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)(1+w(\mathbf{r}))} e^{-\frac{(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2}}, \quad (1.102)$$

où g est le paramètre d'atténuation. Sans détailler, on peut expliquer brièvement la signification de certaines composantes de l'onde incidente : dans le terme d'atténuation $e^{-\frac{(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2}}$, l'argument vérifie :

$$\nabla(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \cdot \nabla((x+z \tan \theta_i)^2) = 0, \quad (1.103)$$

et donc l'atténuation s'effectue perpendiculairement au vecteur d'onde incident ; ainsi l'atténuation est gaussienne dans un plan d'onde donné. Par ailleurs le terme $w(\mathbf{r})$ dans la phase permet à l'onde incidente de respecter au mieux l'équation d'onde à condition que $k_0 g \cos \theta_i \gg 1$. La cartographie du champ incident est présentée sur la figure 1.7. Cependant, cette définition de l'onde incidente n'est pas valable pour des incidences rasantes, car alors $\theta_i \rightarrow 90^\circ$ et $k_0 g \cos \theta_i \rightarrow 0$.

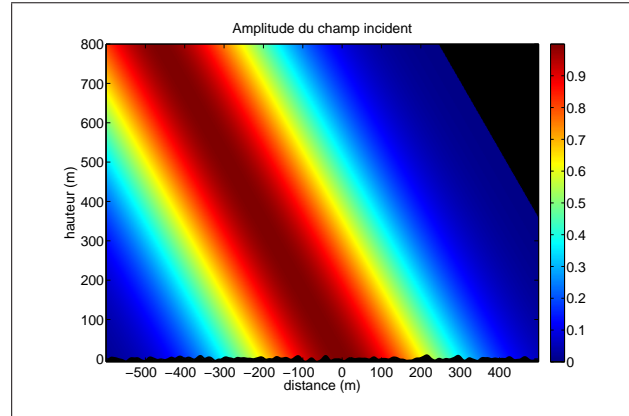


FIG. 1.7 – Représentation de l'onde incidente atténuée de Thorsos.

Le paramètre d'atténuation g est habituellement choisi pour satisfaire $\frac{L}{10} < g < \frac{L}{4}$. Mais si cela convient pour les incidences modérées, il n'est plus valide pour des incidences rasantes. On peut ainsi déterminer la longueur L de la surface après avoir calculé g selon un critère [23]

$$\frac{1}{k_0 g \cos \theta_i} \leq 0.037. \quad (1.104)$$

Il est très fréquent de trouver dans la littérature la convention suivante : $g = L/4$. Un autre critère a été proposé dans [24] : c'est le critère de Kapp, qui, quant à lui s'exprime

$$g > \frac{3\sqrt{2}}{k_0(\frac{\pi}{2} - \theta_i) \cos \theta_i}. \quad (1.105)$$

Tsang et Kong [4] propose une onde incidente adaptée aux incidences rasantes. L'atténuation est effectuée dans le domaine spectral. Le champ incident s'écrit

$$\psi_{inc}(x, z) = \frac{g}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa x - ik_z(\kappa)z} e^{-\frac{(\kappa - \kappa_0)^2 g^2}{4}} d\kappa. \quad (1.106)$$

ψ comporte l'information sur la forme de l'empreinte de l'onde incidente sur la surface ainsi que la direction de l'incidence. Elle est supposée être centrée autour de $\kappa_0 = k_0 \sin \theta_i$. L'avantage de l'équation (1.106) est qu'elle vérifie exactement l'équation d'ondes scalaire de Helmholtz $(\nabla^2 + k_0^2)\psi(\mathbf{r}) = 0$ puisqu'elle est une superposition d'un spectre d'ondes planes. En revanche $\psi_{inc}(x, z)$ doit être évaluée numériquement. On peut remarquer que pour $|x|$ grand, l'intégrande dans (1.106) peut osciller rapidement. Pour éviter cela, les auteurs de cette onde proposent d'effectuer une modification du contour d'intégration pour le facteur exponentiel $\exp(i\kappa x - \frac{(\kappa - \kappa_0)^2 g^2}{4})$ qui est le terme dominant de l'intégrande quelque soit z . Ainsi, κ est décomposé en une partie réelle κ' et une partie imaginaire κ'' . Cette dernière est posée égale à $\frac{2x}{g^2}$ ce qui ramène le terme dominant sous la forme $\exp[(i\kappa_0 x - (\frac{x^2}{g^2} + \frac{(\kappa' - \kappa_0)^2 g^2}{4}))]$. Ce nouveau contour permet d'éviter le passage par la branche de coupure $\Re(\kappa) = \pm k_0$. De plus, seules les ondes propagatives contribuent à la puissance incidente, qui s'exprime alors comme

$$P_{inc} = \frac{g^2}{4Z_0 k_0} \int_{-k_0}^{+k_0} d\kappa k_z(\kappa) e^{-\frac{(\kappa - \kappa_0)^2 g^2}{2}}. \quad (1.107)$$

L'onde incidente de Tsang *et al* a été récemment adaptée au cas d'une surface bidimensionnelle [25].

Les concepts de puissances incidente et diffusée, et de coefficient de diffusion, essentiels à l'étude de la diffusion des ondes par une surface rugueuse, viennent d'être abordés. Le paragraphe qui suit est voué à la description statistique de la surface rugueuse.

1.3 Description statistique d'une surface rugueuse

1.3.1 Introduction

Cette section est consacrée à la description statistique des surfaces rugueuses. L'accent est mis sur le problème 2D, signifiant que la surface $z(x, y, t)$ est invariante selon une direction. En prenant la direction y comme invariante, $z(x, y, t) \equiv z(x, t)$.

Une surface rugueuse est une surface dont le comportement temporel ou/et spatial n'est pas connu pour tout t ou/et x . Le signal associé est alors non déterministe, contrairement au mouvement oscillant du pendule qui est connu à tout instant t . En revanche, à l'aide d'une description statistique, le deuxième paragraphe montrera que ce signal peut être décrit à l'aide de grandeurs statistiques déterministes, comme la distribution et la corrélation des hauteurs de la surface. Dans le but de générer numériquement un profil *ressemblant*¹⁰ à un profil donné, il est souhaitable de décrire de façon pertinente -donc avec le moins de paramètres possibles-, un profil rugueux. Il faut aussi noter que si nous y parvenons, nous pourrions effectuer une étude paramétrée de la diffusion d'une onde électromagnétique par ces profils. Il est également possible de remonter, à partir de la connaissance du champ diffracté, aux valeurs des paramètres de la surface.

Il existe une grande quantité de surfaces rugueuses qui peut être modélisée : surfaces de mer, surfaces rocheuses, surfaces recouvertes par de la végétation ou de la neige... mais aussi des surfaces "artificielles" telles que des surfaces optiques, ou des revêtements de navires ou d'avions...

¹⁰C'est-à-dire ayant les mêmes propriétés statistiques.

Dans ce chapitre, on supposera que les surfaces rugueuses peuvent être modélisées par un processus *aléatoire, stationnaire et ergodique* :

- La stationnarité implique que les grandeurs statistiques sont *invariantes* dans le temps. Il y a donc invariance par translation.
- Un processus ergodique signifie que les moyennes effectuées dans le domaine *temporel* sont égales à celles obtenues dans le domaine *spatial*.

1.3.2 Rappels statistiques et spectre Gaussien

Nous supposons que le profil est défini de façon univoque, c'est-à-dire qu'il peut être décrit à l'aide d'une fonction $x \mapsto z(x)$. Pour être précis, nous supposons que le profil est une réalisation, à un instant t_0 , d'un processus aléatoire et stationnaire à valeurs réelles.

Soit $p_\zeta(\zeta)$ la densité de probabilité des hauteurs de ce profil. $p_\zeta(\zeta)d\zeta$ représente la probabilité, pour un point de la surface, d'être compris entre les hauteurs ζ et $\zeta + d\zeta$. La densité de probabilité des profils considérés sera choisie *gaussienne* centrée (valeur moyenne nulle) et d'écart type σ_ζ ; $p_\zeta(\zeta)$ est alors donnée par :

$$p_\zeta(\zeta) = \frac{1}{\sigma_\zeta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma_\zeta^2}\right)$$

et vérifie

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_\zeta(\zeta) d\zeta = 1 \quad \langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta p_\zeta(\zeta) d\zeta = 0$$

Ce moyennage des hauteurs est le *moment statistique d'ordre un* (valeur moyenne). Le *moment centré statistique d'ordre deux*, $\langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle$, encore appelé variance, correspond ici au moyennage sur le carré des hauteurs. Il s'écrit

$$\langle \zeta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 p_\zeta(\zeta) d\zeta = \sigma_\zeta^2.$$

$\sigma_\zeta = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle}$ désigne l'écart-type des hauteurs du profil.

La fonction d'*autocorrélation des hauteurs* (moment statistique d'ordre deux), est définie comme la moyenne statistique du produit des hauteurs, $\zeta(x_1)$ et $\zeta(x_2) = \zeta(x_1 + x)$, de deux points de la surface. Elle s'écrit donc

$$\langle \zeta(x_1) \zeta^*(x_1 + x) \rangle = \langle \zeta(x_1) \zeta(x_1 + x) \rangle = C_\zeta(x) \quad \text{car } \zeta \in \mathbb{R}. \quad (1.108)$$

Puisque le processus est supposé stationnaire, l'autocorrélation des hauteurs ne dépend que de la distance x séparant les deux points de la surface.

Finalement, les données de la densité de probabilité des hauteurs et de la fonction d'autocorrélation des hauteurs définissent complètement le profil; en effet, les profils de distribution gaussienne des hauteurs possèdent la propriété intéressante d'avoir tous leurs moments statistiques reliés aux deux seuls premiers. On peut noter que $C_\zeta(0) = \langle \zeta(x_1) \zeta(x_1) \rangle = \sigma_\zeta^2$.

Il est intéressant, par ailleurs, d'introduire la *densité spectrale de puissance* de la surface (aussi appelée spectre des hauteurs de la surface), qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$\tilde{W}(\kappa) = \text{TF}[C_\zeta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\zeta(x) e^{-ikx} dx, \quad (1.109)$$

où k représente la fréquence spatiale par cycle et est homogène à des rad.m^{-1} . A noter que la transformée de Fourier inverse s'écrit

$$C_\zeta(x) = \text{TF}^{-1}[\tilde{W}_\zeta(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}_\zeta(k) e^{ikx} d\kappa. \quad (1.110)$$

De même, nous pouvons définir la *fonction caractéristique* des hauteurs, $\chi_\zeta(\varsigma)$, qui est égale à la transformée de Fourier de la densité de probabilité des hauteurs. Soit

$$\chi_\zeta(\varsigma) = \text{TF}[p_\zeta(\zeta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\zeta(\zeta) e^{-i\zeta z} d\zeta = \exp\left(-\frac{\varsigma^2 \sigma_\zeta^2}{2}\right), \quad (1.111)$$

pour un processus Gaussien.

Nous pouvons montrer que 99.73% des hauteurs de la surface sont comprises entre $-3\sigma_\zeta$ et $+3\sigma_\zeta$.

La corrélation statistique, caractérise la ‘‘ressemblance’’ entre deux points de la surface séparés par la distance $x = x_2 - x_1$. Lorsque les deux points sont *proches*, alors x est petit et les deux points sont *fortement corrélés* (pour $x_2 - x_1 = 0$, $C_\zeta(0)/\sigma_\zeta^2 = 1$). Lorsque les deux points sont *éloignés*, alors x est grand et les deux points sont *fortement décorrélés* ($x_2 - x_1 \rightarrow \infty \Rightarrow C_\zeta(x_2 - x_1) \rightarrow 0$). En fait, le passage de l'un à l'autre se fait en introduisant la longueur de corrélation L_c . Pour une autocorrélation des hauteurs supposée Gaussienne, $C_\zeta(x) = \sigma_\zeta^2 \exp(-x^2/L_c^2)$. Il est utile de rappeler également ici quelques formules pour l'étude d'un processus stochastique Gaussien. Pour calculer les moments statistiques d'ordres élevés, nous utilisons la propriété

$$\langle \zeta(x_1) \cdots \zeta(x_{2n-1}) \rangle = 0, \quad (1.112)$$

pour les moments d'ordres impairs, et

$$\langle \zeta(x_1) \cdots \zeta(x_{2n}) \rangle = \sum_{\text{Permutations des indices } i_1 \cdots i_{2n}} \langle \zeta(x_{i_1}) \zeta(x_{i_2}) \rangle \cdots \langle \zeta(x_{i_{2n-1}}), \zeta(x_{i_{2n}}) \rangle, \quad (1.113)$$

pour les moments d'ordres pairs. Ainsi, tous les moments d'ordres impairs sont nuls et ceux d'ordres pairs peuvent s'exprimer en moment d'ordre deux.

1.3.3 Génération d'un profil rugueux

Dans cette section, nous allons montrer que la connaissance de $p_\zeta(\zeta)$ et $C_\zeta(\zeta)$ suffit pour générer un profil rugueux.

Soit $e(i)$, un signal d'entrée échantillonné *connu*, et $s(i)$ la réponse du signal d'entrée d'un système linéaire de réponse impulsionnelle $g(i)$. Le but est de calculer $g(i)$ connaissant le signal de sortie $s(i)$. Si $e(i)$ est un processus aléatoire stationnaire (du second ordre), de densité spectrale de puissance $S_e(k)$, alors $s(i)$ est un processus aléatoire stationnaire (du second ordre), dont la densité spectrale de puissance $S_s(k)$ vérifie $S_s(k) = |S_g(k)|^2 S_e(k)$, où $S_g(k)$ est la densité spectrale de puissance de $g(i)$. Si $S_g(k)$ est réelle, alors l'équation ci-dessus conduit à $S_g(k) = \sqrt{S_s(k)/S_e(k)}$. Puisque le système est supposé *linéaire*, nous pouvons écrire que $s(i) = g(i) * e(i)$ avec $g(i) = \text{TF}^{-1}[\sqrt{S_s(k)/S_e(k)}]$. Le symbole $*$ désigne le produit de convolution. En appliquant en entrée du filtre un bruit blanc (contient toutes les fréquences) gaussien $b(i) = e(i)$ de densité de spectrale de puissance $S_b(k) = 1$, nous obtenons

$$g(i) = \text{TF}^{-1}[\sqrt{S_s(k)}] = \text{TF}^{-1}\{\sqrt{\text{TF}[C_s(i)]}\}. \quad (1.114)$$

Ainsi connaissant les coefficients du filtre $g(i)$, le signal de sortie est déterminé en appliquant la convolution. Cette méthode repose donc sur la détermination de la transformée Fourier inverse de la

racine carrée de la densité spectrale de puissance $S_s(k)$. Ce résultat est appliqué sur la génération d'un profil rugueux $\zeta(s(i) = \zeta(i))$. En effet connaissant la fonction d'autocorrélation $C_\zeta(i)$ des hauteurs des échantillons en sortie du filtre, la densité spectrale de puissance associée $\tilde{W}_\zeta(k)$ peut être calculée et donc les coefficients du filtre sont déterminés.

Pour une fonction d'autocorrélation gaussienne des hauteurs ζ , il est aisé de calculer $g(i)$ à partir de l'expression de la fonction d'autocorrélation $C_\zeta(i)$ donnée en section 1.3.2. A noter que le calcul analytique des coefficients du filtre n'est pas toujours possible. Ils sont alors calculés numériquement à l'aide d'une FFT (Fast Fourier Transform). De plus, le produit de convolution est calculé numériquement dans le domaine de Fourier. Ainsi, nous avons $\zeta(i) = \text{TF}^{-1}\{\text{TF}[b(i)]\sqrt{\text{TF}[C_\zeta(i)]}\}$ où $b(i)$ est un bruit blanc Gaussien centré de variance unitaire. Il est important de noter que ζ est réel impliquant que les quantités réelles $b(i)$ et $C_\zeta(i)$ doivent être *paires*.

1.3.4 Spectre de Mer

Le spectre des hauteurs Gaussien est abondamment rencontré dans la littérature. Cependant, il ne reflète pas une surface réelle. Le cadre de l'étude concernant le domaine maritime, il faut pouvoir injecter un spectre des hauteurs de mer réaliste dans les expressions pour le champ moyen et l'intensité moyenne du champ diffusé.

Le spectre de mer présenté ici est relativement récent mais s'appuie sur des travaux de plusieurs décennies. Il sera intégré dans les modèles analytique et numérique dans la suite de l'étude, en parallèle du spectre Gaussien, pour la détermination de la puissance diffusée par la mer. Une des applications possibles de ce spectre concerne par exemple le rayonnement infrarouge de la surface de mer [26].

La surface de mer consiste en des variations spatiales et temporelles irrégulières comme étant le résultat d'interactions locales et non-locales extrêmement complexes [3], [27]. Les vagues de mer peuvent exister à différentes échelles : de la houle aux vagues de capillarité. Les interactions entre les différentes échelles de rugosité, la présence de vagues générées non localement et qui se propagent dans la région d'observation, et les forces du vent et des tensions de la surface qui se combinent font de la surface de l'océan un processus stochastique difficile à modéliser. La mer est formée, pour une force de vent donnée, lorsque les pertes par déferlement et turbulence compensent exactement l'apport d'énergie mécanique par le vent [28]. Les spectres de mer proposés sont donc empiriques.

Les mesures recueillies sont usuellement une suite d'instant t des déplacements de la surface de mer, qui déterminent ainsi le spectre de fréquence temporel $\tilde{W}(\omega)$ de l'océan. Celui-ci peut être converti (la propriété d'ergodicité intervient) en un spectre de fréquence spatial (ou nombre d'onde), $\tilde{W}(k_\perp)$, en utilisant une relation de dispersion particulière entre ω et k_\perp pour les vagues d'océan. Le spectre présenté modélise une mer formée (ou complètement développée) loin des côtes. Le spectre du nombre d'onde est fonction des deux composantes k et ϕ en coordonnées polaires. Le spectre (isotrope) de l'océan en coordonnées polaires peut être séparé en un spectre de nombre d'onde et un spectre directionnel (anisotrope) s'écrivant :

$$\tilde{W}(k, \phi) = \tilde{W}(k)\Phi(\phi, k), \quad (1.115)$$

où $\Phi(\phi, k) = (1/2\pi)[1 + \Delta(k) \cos(2\phi)]$ et $\tilde{W}(k)$ la partie isotrope du spectre (appelée aussi spectre non-directionnel). Si la direction du vent est orientée suivant l'axe \hat{x} , alors ϕ est l'angle en azimut par rapport à la direction du vent. C'est ainsi que l'amplitude et la direction des vagues peuvent être regardées séparément. Le spectre de mer résulte de la somme de composantes dites de gravité et de capillarité. Nous ne nous intéresserons qu'au spectre isotrope $\tilde{W}(k)$, puisque nous travaillons dans l'espace à deux dimensions.

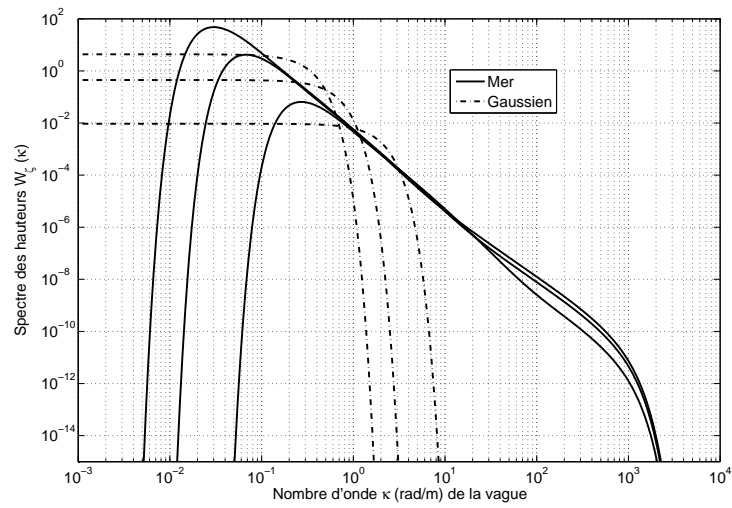


FIG. 1.8 – Spectres Gaussien et d’Elfouhaily pour des vitesses de vent $U_{10} = \{5, 10, 15\}$ m/s. La courbe pour $U_{10} = 5$ m/s est la moins énergétique (aux basses fréquences), celle pour $U_{10} = 15$ m/s est la plus énergétique.

Degré Beaufort	Terme Descriptif	Vitesse en noeuds	Vitesse (km/h)	Vitesse U_{10} (m/s)	σ_ζ en m	σ_p	Observations en mer
0	Calme	< 1	< 1	< 0.2	< 0.0002	< 0.045	La mer est comme un miroir.
1	Très légère brise	1 – 3	1 – 5	0.4 – 1.4	0.001 – 0.0124	0.05 – 0.071	Quelques rides en écailles de poissons mais sans aucune écume.
2	Légère brise	4 – 6	6 – 11	1.7 – 3.3	0.0184 – 0.701	0.076 – 0.1	Vaguelettes courtes aux crêtes d'apparence vitreuse, ne déferlant pas.
3	Petite brise	7 – 10	12 – 19	3.6 – 5.3	0.0836 – 0.1826	0.103 – 0.122	Très petites vagues (environ 60 cm de haut) ; les crêtes commencent à déferler, les moutons apparaissent.
4	Jolie brise	11 – 16	20 – 28	5.6 – 7.8	0.204 – 0.4	0.125 – 0.146	Petites vagues s'allongeant, moutons nombreux
5	Bonne brise	17 – 21	29 – 38	7.8 – 10.6	0.4 – 0.74	0.146 – 0.168	Vagues modérées (2 m de haut), nettement allongées ; beaucoup de moutons ; embruns.
6	Vent frais	22 – 27	39 – 49	10.8 – 13.8	0.77 – 1.26	0.17 – 0.191	Des lames se forment, les crêtes d'écume blanche s'étendent ; davantage d'embruns.
7	Grand frais	28 – 33	50 – 61	14 – 17.1	1.3 – 1.95	0.193 – 0.212	La mer grossit en lames déferlantes ; l'écume commence à être soufflée en traînées dans le lit du vent.
8	Coup de vent	34 – 40	62 – 74	17.3 – 20.7	2 – 2.86	0.213 – 0.233	Les lames atteignent une hauteur de l'ordre de 5 m ; tourbillons d'écume à la crête de lames ; traînées d'écume.

TAB. 1.1 – Echelle de Beaufort (Source MétéoFrance 2003). Ecarts-types des hauteurs et des pentes en fonction de la vitesse du vent U_{10} à une altitude de 10 m au-dessus de la surface de mer.

Elfouhaily *et al.* [29] proposent un spectre de mer basé sur les travaux réalisés depuis 1970 et qui s'appuie sur des faits expérimentaux et théoriques. Sa partie isotrope $\tilde{W}(k)$ s'exprime comme :

$$\tilde{W}(k) = \frac{k^{-3}}{2v_{ph}} (\alpha_g v_g F_g + \alpha_c v_{phm} F_c) \kappa^{\exp \left[\frac{(\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1)^2}{2\delta^2} \right]} \exp \left(-\frac{5k_p^2}{4k^2} \right), \quad (1.116)$$

où le lecteur pourra obtenir les descriptions des différents paramètres constituant (1.116) dans [29]. Dans l'équation (1.116), $k_p = \frac{\Omega^2 g}{U_{10}^2}$ et est le pic de gravité, U_{10} est la vitesse du vent à 10 m au dessus de la surface en m/s, k est le nombre d'onde en rad/m, et intervient dans les fonctions de gravité F_g et de capillarité F_c , Ω est l'inverse de l'âge de la vague et vaut, pour une mer complètement développée, 0.84. Le spectre $\tilde{W}(k)$ se trouve aussi sous la forme condensée

$$\tilde{W}(k) = \frac{B_L(k) + B_H(k)}{k^3}, \quad (1.117)$$

où les termes $B_L(k)$ et $B_H(k)$ représentent respectivement les vagues de gravité et de capillarité. L'expression détaillée de ces termes se trouvent dans [29].

Sur la figure 1.8, les spectres de mer directionel et Gaussien pour des vitesses de vent U_{10} de 5, 10 et 15 m/s sont représentés. Même s'il ne décrit pas la réalité d'une surface de mer, le spectre Gaussien présente un fort intérêt puisqu'il est fréquemment utilisé dans la littérature. Les spectres de mer ont d'abord été générés afin de déterminer l'écart-type des hauteurs σ_ζ et l'écart-type des pentes σ_p , respectivement

$$\sigma_\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_0^{+\infty} dk \tilde{W}(k)}, \quad (1.118)$$

et

$$\sigma_p = \sqrt{\int_0^{+\infty} dk \tilde{W}(k) k^2}, \quad (1.119)$$

pour en déduire la longueur de corrélation $L_c = \sqrt{2} \frac{\sigma_h}{\sigma_p}$ à injecter dans l'expression du spectre Gaussien. Sur la figure 1.8, il est possible de vérifier la valeur théorique du nombre d'onde correspondant au maximum, pour une vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s. Elle vaut $k_p = 0.2769$ rad/m. Pour les mêmes caractéristiques de la surface, on peut donc émettre un raisonnement sur les deux spectres tracés en fonction de la fréquence. Par exemple, pour une fréquence $f = 1$ MHz, le nombre d'onde correspondant $k = 2\pi/\lambda = \omega/c = 0.0209$ rad/m. Pour une vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s, le spectre Gaussien est alors plus énergétique que le spectre de mer. On dit alors que le spectre Gaussien est plus énergétique aux basses fréquences. Sur la figure 1.9, les profils de hauteurs selon la distance x , et paramétrés par la vitesse du vent U_{10} sont tracés. Il faut remarquer que la surface est plus chahutée à mesure que U_{10} augmente. Egalement, on peut observer que les profils des hauteurs pour une surface de mer ont une forme plus "piquante" que les profils pour un spectre Gaussien. Ceci est dû à la prise en compte de la capillarité. Elle se traduit par la présence de vaguelettes se superposant aux vagues de gravité. Elle s'explique en observant, sur la figure 1.8, que le spectre de mer a une contribution énergétique aux hautes fréquences, ce que n'a pas le spectre Gaussien.

Le lecteur pourra trouver une étude détaillée du spectre de mer et les applications radar dans [12].

Nous présentons l'échelle de Beaufort sous forme d'un tableau de classification (tableau 1.1) des degrés de force du vent utilisé universellement depuis 1946 en météorologie marine.

Maintenant que les propriétés statistiques de la surface rugueuse étudiée par la suite ont été abordées, il est nécessaire de considérer celle-ci dans le cadre d'étude du problème électromagnétique. Pour pouvoir décrire les différentes méthodes de résolution du problème, il faut pouvoir quantifier la rugosité de la

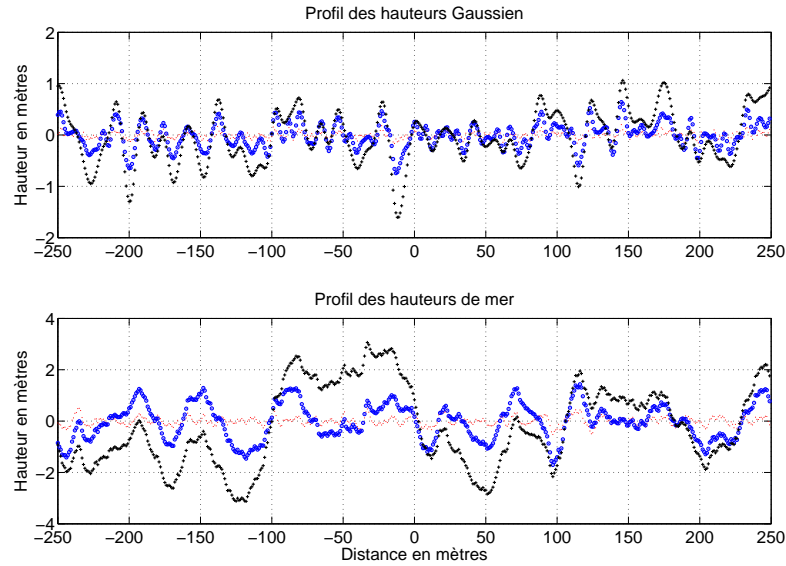


FIG. 1.9 – Profils des hauteurs Gaussien (en haut) et de mer (en bas) pour des vitesses de vent $U_{10} = \{5, 10, 15\}$ m/s.

surface. Ce raisonnement est dû à Lord Rayleigh. La section suivante est consacrée à une brève étude de la rugosité *électromagnétique* de la surface.

1.4 Description heuristique de la diffusion et critère de Rayleigh

En plus de la rugosité *géométrique* d'une surface rugueuse qui est liée à sa géométrie -plus la surface est irrégulière, plus elle est rugueuse-, nous allons définir la rugosité *électromagnétique* d'une surface rugueuse. A noter que dans la littérature, lorsque la rugosité d'une surface est évoquée, il s'agit de la rugosité électromagnétique et non de la rugosité géométrique.

La rugosité d'une surface n'est pas une propriété intrinsèque de celle-ci. Elle est aussi définie par rapport aux caractéristiques de l'onde qui vient illuminer cette surface (telle que la longueur d'onde, l'angle d'incidence). Le paramètre de Rayleigh quantifie alors le degré de rugosité de la surface.

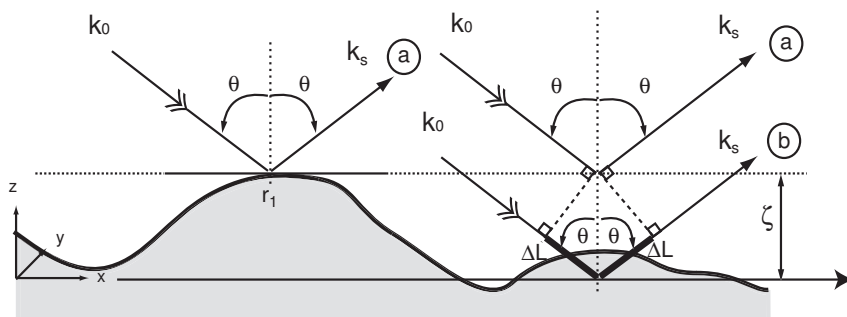


FIG. 1.10 – Calcul du déphasage entre deux rayons dans la direction d'observation spéculaire.

Considérons une surface monodimensionnelle définie par $x \mapsto \zeta(x)$. Choisissons un point arbitraire de

cette surface, $\mathbf{r}_1 = (x_1, \zeta_1)$. Nous admettons que l'on peut assimiler le champ incident à des rayons, et que chacun d'eux est réfléchi spéculairement par le plan tangent en chaque point de la surface. Sur la figure 1.10, l'onde incidente est réfléchi par les points dont le plan tangent est horizontal, et donc est assimilé à une surface plane. Dans ces conditions, le point \mathbf{r}_1 va contribuer au champ réfléchi $\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$. On peut écrire pour chacun de ces points

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{k}_0)e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}e^{i\Delta\phi}. \quad (1.120)$$

Le vecteur $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{k}_0)$ décrit l'amplitude et la polarisation de l'onde incidente dans le milieu supérieur, et la matrice diagonale $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_0)$ contient les coefficients de réflexion de Fresnel d'une surface plane en polarisations rectilignes horizontale et verticale. Le facteur $e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}}$ décrit la phase de l'onde réfléchi. Le terme de phase $e^{i\Delta\phi}$ est la différence de phase suivant le point où l'onde est réfléchi. Prenons le plan moyen $z = 0$ pour origine des phases. Dans la configuration de la figure 1.10, le point \mathbf{r}_1 , entraîne donc un déphasage [5]

$$\Delta\phi = 2\Delta L\|\mathbf{k}_0\| = 2k_0\zeta_1 \cos(\theta), \quad (1.121)$$

où la différence de longueur optique entre les chemins a et b vaut $2\Delta L$. On peut déjà noter que, si la surface est plane, la différence de phase est nulle indépendamment de l'angle d'incidence. Si la différence de phase est très faible, ($|\Delta\phi| \ll \pi$), les deux rayons interféreront constructivement. Si, au contraire, $|\Delta\phi| \simeq \pi$, les rayons seront pratiquement en opposition de phase, donc interféreront destructivement et, ainsi, très peu d'énergie sera réfléchi dans la direction spéculaire. L'étude ci-dessus, menée dans le cas d'un point seulement, peut être étendue à la surface entière en calculant la valeur moyenne

$$\langle \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \rangle = \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{k}_0)e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} \langle e^{i\Delta\phi} \rangle, \quad (1.122)$$

où

$$\langle e^{i\Delta\phi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ik_0\zeta \cos(\theta)} p_\zeta(\zeta) d\zeta, \quad (1.123)$$

où $p_\zeta(\zeta)$ est densité de probabilité des hauteurs ζ . Pour un processus Gaussien, par définition $\langle \exp(ia\zeta(x_1)) \rangle = \exp(-\frac{1}{2}a^2\sigma_\zeta^2)$, d'où

$$\langle e^{i\Delta\phi} \rangle = e^{-2(k_0\sigma_\zeta \cos(\theta))^2} = e^{-2R_a^2}, \quad (1.124)$$

avec

$$R_a = \frac{4\pi}{\lambda}\sigma_\zeta \cos(\theta), \quad (1.125)$$

où σ_ζ désigne l'écart-type des hauteurs de la surface. R_a est le *paramètre de Rayleigh*. Le champ moyen équivaut donc à une onde plane réfléchi spéculairement avec pour coefficients de réflexions $R_h(\mathbf{k}_0) \exp(-2R_a^2)$ pour la polarisation horizontale et $R_v(\mathbf{k}_0) \exp(-2R_a^2)$ pour la polarisation verticale. Le facteur $\exp(-2R_a^2)$ rend compte de l'atténuation du champ dans la direction spéculaire due au phénomène de diffusion (le terme *diffusion* est utilisé car le champ diffusé par la surface émane du comportement aléatoire de cette-dernière). Ainsi, ce terme donne l'influence de la rugosité dans le processus de diffusion. Plus R_a augmente, plus l'énergie est diffusée en dehors de la direction spéculaire, et donc plus la surface est rugueuse (figure 1.11). On considère qu'une surface est peu rugueuse lorsque le déphasage entre deux points suffisamment éloignés est inférieur à $\pi/2$ [5]. si $R_a < \pi/4$, la surface sera dite *lisse* ou *peu rugueuse*, et si $\pi/4 < R_a$, elle sera dite *rugueuse*. Le critère $R_a < \pi/4$ est plus connu sous le nom de *Critère de Rayleigh*. Pour résumer, si $R_a \ll 1$, alors $\sigma_\zeta \cos \theta \ll \lambda$, et la surface est dite peu rugueuse. Dans le cas contraire, elle est dite très rugueuse. Est représentée sur la figure 1.11 l'influence du paramètre de Rayleigh sur la diffusion.

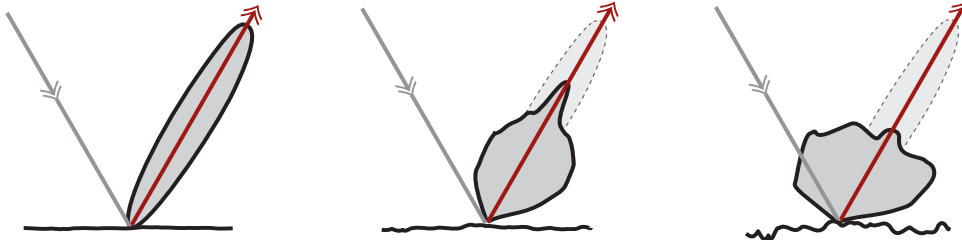


FIG. 1.11 – Coefficients de diffusion obtenus pour des surfaces avec des valeurs de R_a croissantes. À gauche, surface peu rugueuse, $R_a < \pi/4$; à droite surface très rugueuse, $\pi/4 < R_a$. L'intégrale du lobe, représentant la puissance diffusée totale est la même pour toutes les configurations.

Ainsi, la rugosité se définit d'après la valeur du paramètre de Rayleigh qui prend en compte l'écart-type des hauteurs de la surface, la longueur d'onde et l'angle d'incidence de l'onde. Cependant, d'autres paramètres de la surface (l'écart-type des pentes, la courbure... par exemple) influent aussi sur la diffusion de l'onde.

Le paramètre de Rayleigh peut aider au choix de la méthode asymptotique à utiliser. Il existe un ensemble considérable de ces méthodes. Dans la section suivante, les plus répandues et les plus connues d'entre elles sont résumées. Puis, par une application numérique du critère de Rayleigh avec les différents paramètres de cette étude, nous introduirons la méthode retenue.

1.5 Résolution du problème électromagnétique par des approches rigoureuses et asymptotiques

1.5.1 Introduction

Pour modéliser le problème électromagnétique défini auparavant, on peut adopter soit des modèles asymptotiques (approchés), soit des modèles numériques (exactes). Les premiers s'appuient sur des hypothèses physiques simplificatrices, tandis que pour les seconds, les hypothèses sont beaucoup moins restrictives, et leur domaine de validité est plus large.

S'intéresser à la description de la diffusion des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse, amène naturellement à se poser la question des avantages et des inconvénients des méthodes asymptotiques comparativement aux méthodes numériques. La nature statistique de la surface à étudier est une difficulté majeure pour les méthodes numériques, dites "exactes" ou rigoureuses. En effet, le champ et l'intensité diffusés se déterminent à partir de n réalisations de la surface. Il faut donc calculer le champ diffusé pour chacune de ces réalisations afin d'en déduire la moyenne de l'intensité diffusée. Il faut également prendre en note que ces méthodes ne traitent que des surfaces de taille finie, et qu'elles ne se sont développées à des surfaces à deux dimensions que ces dernières années. L'approche la plus répandue est basée sur une discrétisation des équations intégrales de Stratton et Chu évaluées sur la surface, résolues à partir de la Méthode des Moments (MdM) abordée dans la section 1.5.4.

Par ailleurs, la MdM est coûteuse en temps de calculs lorsque la surface est de grande taille, ce qui est le cas des incidences rasantes. Pour remédier à cet inconvénient, des algorithmes d'accélération ont été développés ces dernières années, réduisant considérablement la complexité de calculs inhérente à la MdM. Nous aborderons également quelques-uns de ces algorithmes par la suite, dont en particulier celui que nous utiliserons. On peut donc dire que dans l'état actuel des choses, les approches analytiques et numériques sont complémentaires. Les premières sont utilisées pour cerner les phénomènes et

mécanismes physiques intervenant dans la diffusion, et ce, pour des temps de calculs courts. Les méthodes numériques permettent de valider les domaines de validité des théories analytiques, cerner leur domaine de validité, dans le dessein de pouvoir appliquer ces dernières en télédétection, dans les milieux complexes comme les peintures, dans les problèmes inverses, etc. Dans les deux paragraphes à suivre, les méthodes asymptotiques les plus répandues sont présentées. Bien qu'elle soit une méthode asymptotique, la méthode retenue pour l'étude a sa propre section. Suivront enfin les méthodes numériques.

1.5.2 Quelques méthodes asymptotiques

Dans cette section, nous allons présenter brièvement les approches asymptotiques existantes. Les problèmes de diffusion des ondes par une surface rugueuse n'ont pas de solutions analytiques exactes. Pour les résoudre, des méthodes variées ont été développées. Même si nous retiendrons pour notre cadre d'étude la méthode des petites perturbations, nous axons ce résumé sur les méthodes analytiques les plus répandues. Historiquement, les premières théories approchées sont celles des *petites perturbations* (MPP) et l'*approximation du plan tangent* (APT), une forme de l'*approximation de Kirchhoff* (Fig. 1.12). Mais leur domaine de validité restreint (dû entre autres à la rugosité de la surface, les phénomènes d'ombrage et de réflexions multiples) ont imposé le développement des méthodes reliant le comportement de chacune d'elle. Ce sont les théories unifiées. Ainsi est apparu tout d'abord le *modèle à deux échelles*, résultat de la superposition de vagues de capillarité et de gravité pour une surface océanique par exemple. Cependant, l'inconvénient de cette théorie est qu'elle décompose le spectre de la surface en deux parties ce qui affecte les résultats numériques. Ainsi, en 1985, Voronovich suggère l'*approximation des petites pentes* (*Small-Slope Approximation : SSA*), une nouvelle approche utilisant les principes de symétrie de la matrice de diffusion. Ce sont ces méthodes que nous allons décrire plus en détails. Cependant, il en existe de nombreuses autres, que nous pouvons citer, pêle-mêle : L'"Operator Expansion Method" (OEM) qui a été empruntée à l'hydrodynamique et adaptée à une surface rugueuse par Milder [30] pour le problème acoustique 1D, la "Phase Perturbation" (PP), ou encore la "Tilt-Invariant Approximation". Une méthode répandue est la "La Full-Wave Method" (FWM) de E. Bahar [31]. Elle a la forme de l'équation des télégraphistes, utilisée pour les transmissions par câbles et guides d'ondes. Elle évolue continuellement depuis son apparition au début des années 70.

Voronovich a d'ailleurs démontré la concordance de la SSA1 avec la FWM1 (le suffixe 1 correspondant au premier ordre du développement), dans le cas 1D Dirichlet. L'"Integral Equation Method" (IEM) de A. K. Fung *et al* [32] dont le principe est basé sur l'itération de l'équation intégrale (1.84) et celle équivalente pour le champ transmis dans le milieu 1. Mais cette méthode a été reconnue comme plus ou moins discutable (pour les composantes des polarisations croisées) par les auteurs originaux eux-mêmes, dans la définition du terme de phase de la représentation spectrale de la fonction de Green.

Il existe bien d'autres méthodes asymptotiques, que le lecteur pourra consulter dans la littérature [30], [33], [34], [35], [36].

Les théories présentées, bien que qu'assez complexes, ne tiennent pas compte de tous les phénomènes physiques liés à la diffusion. En effet, un sujet d'un fort intérêt depuis quelques années est l'étude des pics de rétro-diffusion, dûs aux plasmons de surface (Fig. 1.13). Et l'approximation à l'ordre le plus bas de ces théories ne décrit pas l'augmentation du signal rétro-diffusé. Le *pic de rétro-diffusion* ou *backscattering enhancement* est le phénomène que les approches analytiques ne prédisent pas aux ordres les plus bas (Fig. 1.13). Nous ne détaillerons pas ces phénomènes et renvoyons le lecteur à la littérature [37], [38], [17], [39], entre autres.

L'approximation de Kirchhoff Avec la théorie des petites perturbations que nous verrons ci-après, l'*approximation de Kirchhoff* (KA) est la plus ancienne et la plus appliquée des méthodes analytiques.

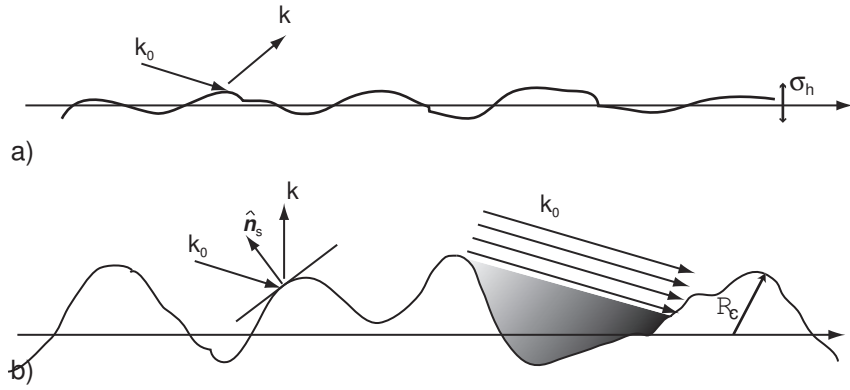


FIG. 1.12 – Surfaces 1D a) pour de petites perturbations b) pour le plan tangent.

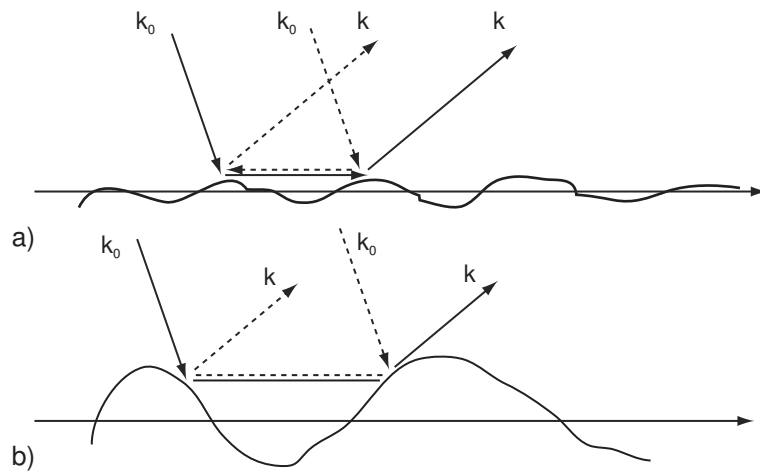


FIG. 1.13 – a) Double diffusion due aux plasmons de surface b) Double diffusion due à la forte rugosité.

Elle est adoptée lorsque le rayon de courbure R_c en tout point de la surface est supérieur à la longueur d'onde. La KA est aussi connue sous les appellations *approximation du plan tangent* et *approximation de l'optique physique*. Elle a été proposée pour la première fois par Brekhovskikh [40]. L'étude statistique a été réalisée par Isakovitch [41]. L'approche est basée sur la supposition que le champ a localement la structure d'une onde plane pour laquelle l'amplitude et le vecteur d'onde varient peu d'un point à l'autre. Dans les problèmes de diffusion par des limites rugueuses, cette supposition se formule ainsi : en chaque point de la limite (la surface rugueuse dans notre étude), l'onde incidente est réfléchiée de la même manière que si la surface était plane et infinie en chacun de ces points. On dit alors que la limite est approchée en chaque point par son plan tangent. A partir de cette représentation, le champ diffusé et sa dérivée normale à la limite peuvent être calculés à l'aide du champ incident. Puis, le champ total dans tout l'espace est déterminé grâce au principe d'Huygens.

La méthode du plan tangent Comme point de départ, on utilise l'expression [15] pour $z > \max(\zeta(x))$

$$R(\kappa, \kappa_0) = \frac{i}{2k_z} \int \left\{ i[-k_z + \kappa \nabla \zeta(x)] \psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right\} e^{-i\kappa x - ik_z \zeta(x)} dx. \quad (1.126)$$

L'hypothèse du plan tangent consiste à approximer les champs inconnus sur la surface $\psi(\mathbf{r})$ et $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r})$ comme si chaque point de la surface réfléchissait spéculairement l'onde incidente, par rapport à son plan tangent de normale $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(x)$ où x est l'abscisse des points de la surface. Ainsi, les coefficients de réflexion de Fresnel interviennent, dont l'argument est l'angle d'incidence local. La KA est donc une approximation locale car elle suppose que le champ en un point de la surface ne dépend pas des autres points de la surface et ne prend donc pas en compte les multiples réflexions se produisant sur une surface très chahutée. Elle n'inclut également pas la courbure de la surface. Elle est donc appliquée pour des surfaces de pentes peu élevées, de grands rayons de courbure, et des angles d'incidences pour lesquels les réflexions multiples et l'ombrage (Fig. 1.12) ne sont pas prépondérants. Cependant, ces dernières années, elle a été améliorée pour prendre en compte le phénomène d'ombrage à l'aide de la fonction d'ombre [6], [42], [43], [44].

Après quelques manipulations, l'équation intégrale (1.126) s'écrit

$$R(\kappa, \kappa_0) = \frac{1}{k_z} \int \mathbb{K}(\kappa, \kappa_0, \nabla \zeta(x)) e^{-i(\kappa - \kappa_0)x - i(k_z + k_{0z})\zeta(x)} dx, \quad (1.127)$$

où le noyau (kernel) $\mathbb{K}(\kappa, \kappa_0, \nabla \zeta(x))$, non réciproque, dépend de la pente locale. La dépendance en $\nabla \zeta(x)$ dans le coefficient de réflexion local de Fresnel apparaissant dans \mathbb{K} complique l'analyse statistique dans le but d'obtenir le coefficient de diffusion. Dans le cas où la surface est parfaitement conductrice, les coefficients de réflexion valent -1 pour le cas Dirichlet et $+1$ dans le cas Neumann. Dans ce cas la dépendance linéaire en $\nabla \zeta(x)$ implicite dans le noyau $\mathbb{K}(\kappa, \kappa_0, \nabla \zeta(x))$ peut être éliminée par une intégration par partie, i.e. $\nabla \zeta(x) = -\frac{(\kappa - \kappa_0)}{k_z - k_{0z}}$ [15]. Pour la cas d'une surface diélectrique, Kodis [45] a établi une formulation basée sur l'approximation de la phase stationnaire¹¹ avant de procéder au moyennage statistique. Barrick [46] montra par la suite que le résultat obtenu par Kodis était indépendant de l'ordre dans lequel sont effectués la phase stationnaire et le moyennage statistique. C'est l'approximation de l'*optique géométrique* (OG). L'amplitude de diffusion $R(\kappa, \kappa_0)$ s'écrit alors sous la forme

$$R(\kappa, \kappa_0) = \mathbb{K} \left(\kappa, \kappa_0, -\frac{\kappa - \kappa_0}{k_z - k_{0z}} \right) \frac{1}{k_z} \int e^{-i(\kappa - \kappa_0)x - i(k_z + k_{0z})\zeta(x)} dx. \quad (1.128)$$

¹¹Le terme de phase dans (1.127) $\phi = -(\kappa - \kappa_0)x - (k_z(\kappa) + k_{iz}(\kappa_0))\zeta(x)$ varie très rapidement. La contribution majeure dans l'intégrale provient alors du terme où la phase est stationnaire, c'est à dire où le gradient de la phase de l'exponentielle s'annule : $\nabla \phi = 0 \Leftrightarrow \nabla \zeta(x) = -\frac{\kappa - \kappa_0}{k_z - k_{0z}} \equiv \nabla \zeta(x)_{stationnaire}$

La littérature est très abondante sur cette méthode historique. Le lecteur pourra trouver de nombreuses références dans [35].

Voronovich [15] propose une comparaison de l'amplitude de diffusion de la KA avec l'amplitude de diffusion de la MPP. En effet, il suppose un écart type des hauteurs faible au sens de la longueur d'onde, et développe l'exponentielle dans l'amplitude de diffusion de la KA en série de puissance en ζ . Il montre que l'on obtient un développement de la forme $\psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \mathcal{O}(\zeta^2)$ que nous verrons dans la méthode des petites perturbations. Cependant, seul le terme à l'ordre 0 (diffusion dans la direction spéculaire) de la KA est identique à celui de la MPP. C'est l'importance des méthodes unifiées qui tentent de satisfaire à la fois les limites basse et haute fréquences.

Le lecteur trouvera une discussion plus détaillée sur cette méthode dans [5], [16], et [15].

L'équation réduite de Rayleigh L'équation réduite de Rayleigh a été démontrée par Brown *et al.* [47], basée sur les travaux originaux de Toigo *et al.* [48], à partir du théorème d'extinction et en supposant l'hypothèse de Rayleigh comme vraie. Ces auteurs ont montré que l'on pouvait obtenir une équation intégrale ne faisant intervenir que la matrice de diffusion¹² dans le cas d'une interface diélectrique (les milieux supérieur et inférieur sont référencés par les indices 0 et 1 respectivement) illuminée par une onde électromagnétique. Cette équation est exacte hormis l'hypothèse de Rayleigh qu'elle suppose. Elle s'écrit [49] sous la forme d'une équation intégrale matricielle

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{4\pi^2} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{p}|\mathbf{k}_\perp) \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) \frac{I(k_{1z}(\mathbf{p}) - k_{0z}(\mathbf{k}_\perp)|\mathbf{p} - \mathbf{k}_\perp)}{k_{1z}(\mathbf{p}) - k_{0z}(\mathbf{k}_\perp)} \\ & = -\overline{\mathbf{N}}(\mathbf{p}|\mathbf{k}_{0\perp}) \frac{I(k_{1z}(\mathbf{p}) + k_{0z}(\mathbf{k}_{0\perp})|\mathbf{p} - \mathbf{k}_{0\perp})}{k_{1z}(\mathbf{p}) + k_{0z}(\mathbf{k}_{0\perp})}, \end{aligned} \quad (1.130)$$

où $k_{0z}(\mathbf{k}_{0\perp})$ et $k_{0z}(\mathbf{k}_\perp)$ sont respectivement les nombres d'ondes verticaux pour l'onde incidente et l'onde diffusée, dans le milieu 0, les matrices $\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{p}|\mathbf{k}_\perp)$ et $\overline{\mathbf{N}}(\mathbf{p}|\mathbf{k}_{0\perp})$ peuvent être retrouvées dans [47], et $\mathbf{k}_{0\perp}$ et \mathbf{k}_\perp sont les projections horizontales des vecteurs d'ondes incident et diffusé dans le milieu supérieur 0, respectivement, et

$$I(\tau|\mathbf{k}_\perp) = \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} - i\tau\zeta(\mathbf{r})}. \quad (1.131)$$

Ainsi, les équations ont été découplées, car la matrice de transmission $\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$, également une inconnue du problème au même titre que la matrice de diffusion $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$, a été éliminée, et seul le champ diffusé apparaît dans l'équation alors dite "réduite". Les calculs sont simplifiés, et il suffit de développer le terme $\exp(-i\tau\zeta(\mathbf{r}))$ dans (1.131) pour obtenir un développement perturbatif en puissance de ζ pour la matrice de diffusion $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$. Cette méthode a permis de déterminer récemment les termes d'ordres deux et trois de la matrice de diffusion [49], obtenus également par la méthode de Rice dans [50].

L'équation réduite de Rayleigh a l'avantage d'être écrite de sorte que les principes d'unitarité et de réciprocité sont apparents. Plus récemment, Soubret *et al.* l'ont généralisée à une couche rugueuse [51]. Depuis les travaux originaux de Brown *et al.* en 1984, l'équation réduite de Rayleigh a été utilisée en

¹²La matrice de diffusion [15] relie l'amplitude des ondes diffusées et l'amplitude de l'onde incidente sous la forme

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{k}_\perp) = \overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_{0\perp}), \quad (1.129)$$

où $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) = \begin{pmatrix} R_{VV}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) & R_{VH}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) \\ R_{HV}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) & R_{HH}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}) \end{pmatrix}$ pour reprendre la notation de Voronovich [15].

Nota : puisque nous traitons uniquement le cas scalaire dans cette thèse, la matrice $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$ devient la quantité scalaire que nous avons référencée comme étant l'amplitude de diffusion $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$.

majeure partie pour mettre en évidence le phénomène de rétro-diffusion cohérente, [39], [52], [49], [53]. Elle est également retrouvée pour l'étude des pics-satellites dans les guides d'ondes [54], pour modéliser l'interaction entre une particule et une surface métallique [55], ou pour étudier la lumière diffusée par deux milieux, dont le développement perturbatif n'est plus en fonction de la hauteur $\zeta(x)$, mais fonction du contraste entre leurs permittivités. Madrazo *et al* applique l'équation réduite de Rayleigh en présentant des résultats numériques pour un système à couches [56].

Modèle à “deux échelles” Nous avons vu dans les sections précédentes que la méthode des petites perturbations était applicable pour de petites rugosités devant la longueur d'onde ($\sigma_\zeta \ll \lambda$), alors que l'approximation du plan tangent de Kirchoff s'appliquait pour des irrégularités grandes devant la longueur d'onde ($\sigma_\zeta \gg \lambda$). Dans la réalité souvent, il n'est pas possible de choisir l'une ou l'autre des méthodes car, par exemple, pour une surface de mer, comme le présente la figure (1.14), il peut y avoir à la fois des vagues de grande et petite amplitudes. Dans de tels cas, la diffusion est estimée par

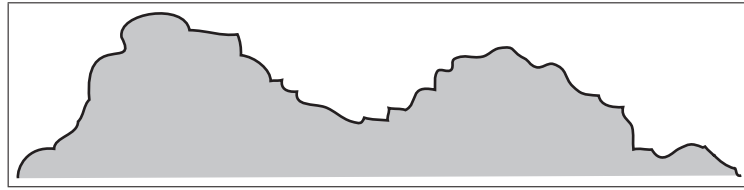


FIG. 1.14 – Surface avec deux échelles de rugosité.

le modèle à deux échelles. Son principe est que les rugosités de grande échelle sont considérées dans l'approximation de l'optique géométrique, et les rugosités de petites échelles sont introduites de manière perturbative. Cette méthode, étudiée au premier ordre par l'auteur [57], a été suggérée par Kur'yanov [58]. Elle consiste en la superposition à la frontière (ou condition à la limite) des deux types de rugosité énoncés auparavant.

Méthode de l'approximation des petites pentes Cette méthode analytique d'approche non-classique a été développée par Voronovich [15], dans l'idée de contenir à la fois les approximations basses et hautes fréquences. C'est un modèle alors dit “unifié”, qui permet de s'affranchir des restrictions des méthodes des petites perturbations (qui sera abordée plus loin) et de l'approximation de Kirchoff.

La méthode est basée sur les lois de transformation d'une matrice de diffusion, telle que $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0})$, au cours d'une translation. Un facteur de phase dû à la translation apparaît dans l'expression de la matrice de diffusion, ainsi qu'un opérateur inconnu $\bar{\varphi}$, et alors

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0}) = \int \frac{d\mathbf{r}_s}{4\pi^2} e^{-i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_{\perp 0}) \cdot \mathbf{r}_s - i[k_z(\mathbf{k}_\perp) + k_z(\mathbf{k}_{\perp 0})]\zeta(\mathbf{r}_s)} \bar{\varphi}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0}, \mathbf{r}_s). \quad (1.132)$$

Cette inconnue est déterminée par une comparaison avec le développement perturbatif. On cherche donc à déterminer cet opérateur inconnu sous la forme d'une série d'équations intégrales, similaire au développement de Taylor

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0}, \mathbf{r}_s) &= \bar{\varphi}^{(0)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0}, \mathbf{r}_s) + \int d\mathbf{r}_1 \bar{\varphi}^{(1)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0}, \mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_1) \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \bar{\varphi}^{(2)}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{\perp 0}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_2) + \dots \end{aligned} \quad (1.133)$$

En travaillant dans le domaine de Fourier, après certaines conditions supplémentaires et manipulations mathématiques non triviales, et en identifiant $\bar{\varphi}$ au développement perturbatif, Voronovich montre que

l'on obtient un développement en terme des pentes $\nabla\zeta$ de la surface. C'est donc l'approximation des faibles pentes. Il faut souligner que cette méthode est résumée dans [15], que l'auteur l'a développée pour la condition aux limites de Dirichlet [59], et que le cas Neumann a été développée par Dashen *et al* dans [60].

1.5.3 Théorie des petites perturbations : l'approche analytique retenue

L'objectif de l'étude est d'obtenir un modèle asymptotique pour déterminer la puissance diffusée sous incidence rasante par une surface de mer. L'avantage est la rapidité du modèle (en rapport avec les méthodes numériques, qui, nous le verrons, nécessitent d'importantes ressources informatiques à mesure que l'on s'approche des angles d'incidence rasants), mais le domaine de validité est restreint dû à l'hypothèse faite sur la rugosité, au sens électromagnétique, de la surface. Puisque le cadre applicatif de l'étude concerne les radars côtiers fonctionnant dans la bande de fréquences HF-VHF, réparties de 3 à 300 MHz, pour des angles d'incidences rasants, l'écart-type des hauteurs de la surface est faible au sens du paramètre de Rayleigh (1.125). Dans ce cas, nous avons décidé d'orienter notre choix sur la méthode des petites perturbations. Par exemple, pour une fréquence $f = 100$ MHz, un angle d'incidence rasant $\theta_i = 85^\circ$, un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = 0.2$ m, le paramètre de Rayleigh (1.125) vaut $R_a = 4\pi/\lambda\sigma_\zeta \cos\theta_i = 0.073$. Si l'angle d'incidence vaut $\theta_i = 40^\circ$, alors $R_a = 0.64$. Le paramètre de Rayleigh est donc inférieur à 1 dans le cadre de notre étude.

La théorie des petites perturbations est certainement la plus répandue des méthodes asymptotiques. Son principe est également retrouvé en théorie quantique des champs. A titre d'exemple, Morse et Feschbach traitent à l'aide de la méthode perturbative, dans leur livre [61], du mouvement d'une particule soumise à un potentiel dans un espace à une dimension puis un espace à trois dimensions à l'aide de l'équation de Schrödinger, ou encore de l'équation de Mathieu, rencontrée dans la propagation d'onde dans un système de coordonnées cylindres elliptiques. Egalement, rapportée à l'hydrodynamique, la méthode perturbative décrit l'état de mer engendré par les vents locaux [62] comme étant la superposition de vagues progressives de petites amplitudes...

Hypothèse de Rayleigh

Lorsque nous parlons de la théorie perturbative pour l'étude de la diffusion des ondes par une surface rugueuse, nous nous trouvons confrontés à l'hypothèse de Rayleigh, abondamment illustrée et controversée dans la littérature [63], [15], [64].

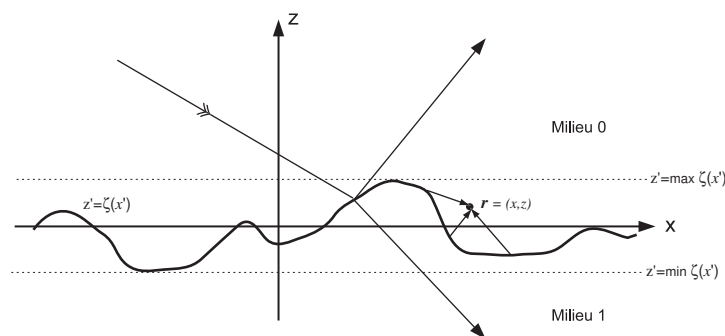


FIG. 1.15 – Représentation de la diffusion d'une onde incidente plane de vecteur d'onde k_0 en une onde réfléchie de vecteur k_s et une onde transmise k_t , dans le cadre de l'hypothèse de Rayleigh.

Afin de déterminer l'amplitude de diffusion $R(\kappa, \kappa_0)$, vue dans la section 1.2.6, il est possible d'utiliser

les conditions de passage (1.58-1.59) dans l'équation (1.47). Cependant, cette équation n'est valable que pour $z > \max[\zeta(x')]$. On ne peut donc pas à priori appliquer rigoureusement les conditions de passage à cette-dernière lorsque le point d'observation $\mathbf{r} = (x, z)$ ($\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$ en $3D$) est sur la surface. C'est en supposant malgré tout ces développements applicables aux conditions aux limites que l'on se place dans l'hypothèse de Rayleigh. Cette hypothèse est admise comme valable dans l'approximation des faibles perturbations. Cependant, elle est mise en défaut pour des surfaces périodiques de fortes pentes [15]. Nous avons vu que nous pouvions exprimer le champ diffusé à partir du principe de Huygens (1.83) où la fonction de Green est représentée par

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{2} \int \frac{d\kappa}{2\pi k_z(\kappa)} e^{i\kappa(x-x') + ik_z(\kappa)|z-z'|}. \quad (1.134)$$

Lorsque le point d'observation a pour coordonnées $\mathbf{r} = (x, \min[\zeta(x')] < z < \max[\zeta(x')])$ (figure 1.15), le champ dans le milieu 0 s'écrit

$$\psi_{sc}(\mathbf{r}) = \psi_{sc}(x, z) = \int_{\mathbf{r}': \zeta(x') > z} \frac{d\kappa}{2\pi} R^+(\kappa, \kappa_0) e^{i\kappa x + ik_z(\kappa)z} + \int_{\mathbf{r}': \zeta(x') < z} \frac{d\kappa}{2\pi} R^-(\kappa, \kappa_0) e^{i\kappa x - ik_z(\kappa)z}, \quad (1.135)$$

avec

$$R^\pm(\kappa, \kappa_0) = \frac{i}{2} \int \frac{dx'}{k_z(\kappa)} \left(i[\mp k_z(\kappa) + \nabla \zeta(x') \kappa] \psi(\mathbf{r}') - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right) \times e^{-i\kappa x' \mp ik_z(\kappa) \zeta(x')}. \quad (1.136)$$

Cette définition pour le champ diffusé en est sa forme complète et générale, signifiant que le champ diffusé, lorsque le point est dans la région bordant la surface, est la somme d'ondes sortantes et entrantes. A noter que le raisonnement est similaire pour l'amplitude de transmission $T(\kappa, \kappa_0)$. Lord Rayleigh, qui a probablement été le premier à s'intéresser à la diffusion d'ondes par une surface rugueuse [1], appliqua le premier terme dans (1.135) pour représenter le champ diffusé sur la surface, i.e. pour des points $\mathbf{r} = (x, \zeta(x'))$. L'hypothèse de Rayleigh simplifie l'équation pour le champ diffusé ψ_{sc} puisqu'elle néglige la contribution de $R^-(\kappa, \kappa_0)$. Pour que cette représentation soit valable, il faut étudier la convergence de l'intégrale du premier terme dans (1.135) [63]. Lorsque $|\kappa| \rightarrow \infty$ on a¹³ $k_z(\kappa) \rightarrow i|\kappa|$, on obtient de $R^+(\kappa, \kappa_0)$ dans (1.136)

$$|R^+(\kappa, \kappa_0)| < \text{Const.} e^{|\kappa| \{-\max(\zeta(x'))\}} \quad |\kappa| \rightarrow \infty. \quad (1.137)$$

Ainsi, si la valeur Const. est supposée finie, l'intégrale du premier terme dans (1.135) convergera pour $z > \max(\zeta(x'))$ (puisque l'on se place dans le milieu 0) car $|\psi_{sc}(\mathbf{r})| < \text{Const.} \exp[-|\kappa|(z - \max(\zeta(x')))]$. C'est la représentation utilisée dans la littérature, et particulièrement pour le calcul de la méthode des petites perturbations de Rice que nous verrons après. Nous admettons donc que l'on peut écrire le champ diffusé sous la forme du premier terme de (1.135) et renvoyons le lecteur à [15] et [65], pour une étude plus détaillée sur l'hypothèse de Rayleigh et ses controverses au cours du siècle dernier.

Résumé de la méthode des petites perturbations de Rice [66]

Elle est d'une grande utilité dans le cas de surfaces peu rugueuses au sens électromagnétique, c'est-à-dire $k_0 \sigma_\zeta \ll 1$. Avec l'hypothèse de Rayleigh vue précédemment, on peut montrer que le champ diffusé

¹³Puisqu'on a la relation $k_z(\kappa) = i\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}$ pour $|\kappa| > k_0$, on peut dire que lorsque $|\kappa| \rightarrow \infty$, $|\kappa| \gg k_0$, et donc $k_z(\kappa) \rightarrow i|\kappa|$.

sur la surface pour une onde incidente plane, est donné par [3]

$$\psi_{sc}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa e^{i\kappa x + ik_z(\kappa)z} R(\kappa, \kappa_0), \quad (1.138)$$

où $z = \zeta(x)$. Pour obtenir une approximation d'une fonction qui dépend d'un paramètre, on effectue généralement un développement limité pour des faibles valeurs de ce paramètre. Dans notre problème le paramètre est une fonction de la hauteur ζ de la surface qui elle-même est fonction de l'abscisse x . Elle consiste donc à développer en série de Taylor la fonction exponentielle $e^{ik_z(\kappa)\zeta(x)}$. On admet [2], [37] que la théorie perturbative peut être utilisée lorsque les conditions suivantes sur l'écart type des hauteurs σ_ζ et l'écart type des pentes σ_p sont remplies :

$$\frac{\sigma_\zeta}{\lambda} < 0.3 \quad \sigma_p < 0.3. \quad (1.139)$$

Ce critère a été obtenu en comparant le résultat de la théorie perturbative avec des résultats numériques ou expérimentaux [2], [23]. Il est vérifié dans notre cas si, nous l'avons vu, la fréquence d'émission de l'antenne est $f = 100$ MHz ($\lambda = c/f = 3$ m), l'écart type des hauteurs est de 20 cm et l'écart type des pentes vaut 0.14 par exemple, correspondant à une vitesse de vent $U_{10} \approx 5$ m/s. Il existe trois grandes méthodes permettant de calculer le développement. La première de celles-ci a été développée par Rice [66]. Elle consiste à développer les équations du champ scalaire total dans les milieux supérieur et inférieur

$$\psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\kappa_0 x - ik_z(\kappa_0)z} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa e^{i\kappa x + ik_z(\kappa)z} R(\kappa, \kappa_0) \quad z > \max(\zeta), \quad (1.140)$$

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa e^{i\kappa x - ik_z(\kappa)z} T(\kappa, \kappa_0) \quad z < \min(\zeta). \quad (1.141)$$

Elles sont basées sur le développement du terme $e^{ik_z(\kappa)\zeta(x)}$ en puissance de ζ . La théorie des perturbations suppose que le champ diffracté s'exprime comme la série :

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \psi_s^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi_s^{(1)}(\mathbf{r}) + \psi_s^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \quad (1.142)$$

La condition aux limites à $z = \zeta(x)$ pour la polarisation horizontale ou Transverse Electrique dans le cas d'une surface infiniment conductrice (Parfaitement Conductrice ou PC) est, à partir de (1.46) et (1.58) et (1.59)

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) + \psi_{sc}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.143)$$

et pour la polarisation verticale ou Transverse Magnétique

$$\frac{\partial \psi_{inc}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial \psi_{sc}(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \quad (1.144)$$

On cherche à déterminer un développement perturbatif de l'amplitude spectrale $R(\kappa, \kappa_0)$ dans (1.138) en fonction de ζ . Il faut développer les fonctions exponentielles $e^{-ik_z(\kappa_0)\zeta(x)}$ et $e^{+ik_z(\kappa)\zeta(x)}$ en une série de puissance

$$e^{\pm ik_z(\kappa)\zeta(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\pm ik_z(\kappa)\zeta(x)]^m}{m!} \quad (1.145)$$

où le terme $k_z \zeta \ll 1$. L'amplitude de diffusion $R(\kappa, \kappa_0)$ est également développée en série. Puis l'autocorrélation statistique (qui est le moment statistique d'ordre 2), du champ diffusé ψ_{sc} est calculée, laquelle est injectée ensuite dans l'expression du vecteur de Poynting (1.86)

$$\langle \mathbf{S}_s(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \rangle_{incoh} = \Re e \left[\frac{i}{2\omega\mu_0} \left\langle \psi_{sc}^{(1)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_{sc}^{(1)*}(\mathbf{r})}{\partial z} \right\rangle \right]. \quad (1.146)$$

L'expression du coefficient de diffusion $\sigma(\kappa, \kappa_0)$ s'en déduit, comme étant le quotient du vecteur de Poynting pour le champ diffusé sur le vecteur de Poynting pour le champ incident (1.89)

$$\mathbf{S}_{inc}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{1}{2Z_0 k_0} |\psi_i|^2 \mathbf{k}_0 \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{1}{2Z_0 k_0} \psi_0^2 (\kappa_0 \hat{\mathbf{x}} - \underbrace{k_z(\kappa_0)}_{k_0 \cos \theta_i} \hat{\mathbf{z}}) \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{2Z_0} \cos \theta_i. \quad (1.147)$$

Une partie des calculs est présentée en Annexe A et les coefficients de diffusion pour une surface parfaitement conductrice et une surface diélectrique aux ordres 1 et 2 sont donnés. Des résultats numériques seront présentés dans le chapitre deux. Nous verrons cependant que cette théorie perturbative que l'on qualifiera de "classique" ou "conventionnelle", en comparaison avec la théorie que nous détaillerons dans le chapitre 2, est défaillante sous incidences rasantes pour la polarisation verticale.

La seconde méthode utilise le théorème d'extinction. Le paragraphe suivant lui est consacré.

Théorème d'extinction et méthode des petites perturbations

Nous allons maintenant utiliser la méthode perturbative pour développer en terme des hauteurs $\zeta(x_s)$ le théorème d'extinction (1.83), qui est une équation exacte pour le champ total, à partir de (1.134). Ceci dans le but de comparer le champ total $\psi(\mathbf{r}_s)$ et sa dérivée $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}_s)$ sur la surface déduits de cette méthode avec ceux obtenus par la méthode numérique, abordée plus loin. De plus, l'atténuation de l'onde plane incidente, paramètre important de la méthode numérique (voir la section 1.2.12) est prise en compte dans les calculs.

Nous traitons du cas IBC (les cas PC de Dirichlet et de Neumann s'en déduisent). Puisque l'on suppose que $z > \zeta(x_s)$, la valeur absolue est supprimée dans la représentation de Weyl de la fonction de Green (1.134). Nous supposons que le champ incident est une onde plane atténuée gaussiennement et passons l'intégration sur le plan $z = 0$ [67]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{i2k_z} e^{i\kappa(x-x_s) - ik_z(z-\zeta(x_s))} \right] \times \{ [\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla] \left(1 + (\nabla \zeta(x_s))^2 \right)^{1/2} \psi(\mathbf{r}_s) - \Upsilon(\mathbf{r}_s) \} = -e^{i\kappa_0 x - ik_z(\kappa_0)z} \Pi(x, z), \quad (1.148)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ et ∇ sont donnés par

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial x_s} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_s}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.149)$$

la flèche en exposant du terme $[\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla]$ indique la direction vers laquelle s'effectue la dérivée (donc vers le terme en exponentiel), $\Upsilon(\mathbf{r}_s) = (1 + (\nabla \zeta(x_s))^2)^{1/2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}_s)$ et $\Pi(x, z)$ est le terme d'atténuation de l'onde incidente de Thorsos. Pour alléger la notation, posons $\gamma = \nabla \zeta(x_s)$. On multiplie par¹⁴

¹⁴ Afin de faire apparaître la TF d'un Dirac translaté dans le domaine spectral $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i(a-b)x) dx = 2\pi \delta(a-b)$ et de la propriété de Dirac $\int_{-\infty}^{+\infty} da f(a) \delta(a-b) = f(b)$ et $u(a, b) = 2\pi \delta(a-b) = 2\pi$ si $a = b$, $u(a, b) = 0$ sinon. On définira également les transformées de Fourier directe et inverse par

$$TF[f(x)] = \tilde{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\kappa x} dx, \quad \text{et} \quad TF^{-1}[\tilde{f}(\kappa)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\kappa) e^{i\kappa x} \frac{d\kappa}{2\pi}, \quad (1.150)$$

et la propriété de Modulation de la TF

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\kappa - \kappa_0)x} dx = TF[e^{i\kappa_0 x} f(x)] = \tilde{f}(\kappa - \kappa_0). \quad (1.151)$$

$\int \exp(-i\kappa'x)dx$ et remarquons que puisque l'on calcule les champs sur la surface, l'onde incidente s'exprime pour les points de la surface de coordonnées $\mathbf{r}_s = (x_s, \zeta(x_s))$. On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{i2k_z} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(\kappa-\kappa')x - i\kappa x_s + ik_z \zeta(x_s)} \right] \\ & \times \{ [\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla]^{-1} (1 + \gamma^2)^{1/2} \psi(\mathbf{r}_s) - \Upsilon(\mathbf{r}_s) \} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(\kappa_0 - \kappa')x} \Pi(x_s, \zeta(x_s)), \end{aligned} \quad (1.152)$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{i2k_z} \delta(\kappa - \kappa') e^{-i\kappa x_s + ik_z \zeta(x_s)} \right] \\ & \times \{ [\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla]^{-1} (1 + \gamma^2)^{1/2} \psi(\mathbf{r}_s) - \Upsilon(\mathbf{r}_s) \} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(\kappa_0 - \kappa')x} \Pi(x_s, \zeta(x_s)). \end{aligned} \quad (1.153)$$

L'opérateur $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$ s'effectue sur le point $\mathbf{r}_s = (x_s, \zeta(x_s))$ de la surface. Il vient alors $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla = i[k_z - \kappa\gamma]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{i2k_z} \delta(\kappa - \kappa') e^{-i\kappa x_s + ik_z \zeta(x_s)} \right] \\ & \times \{ (1 + \gamma^2)^{1/2} i(k_z - \kappa\gamma) \psi(\mathbf{r}_s) - \Upsilon(\mathbf{r}_s) \} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(\kappa_0 - \kappa')x} \Pi(x_s, \zeta(x_s)). \end{aligned} \quad (1.154)$$

Pour le membre de gauche, on peut user de la propriété de Dirac. Pour le membre de droite, on peut remarquer la propriété de Modulation de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \left[\frac{e^{-i\kappa'x_s + ik'_z \zeta(x_s)}}{i2k'_z} \right] \\ & \times \{ (1 + \gamma^2)^{1/2} i(k'_z - \kappa'\gamma) \psi(\mathbf{r}_s) - \Upsilon(\mathbf{r}_s) \} = -\delta(\kappa' - \kappa_0) \Pi(x_s, \zeta(x_s)). \end{aligned} \quad (1.155)$$

Notons à titre indicatif que le théorème d'extinction (1.83) utilisé ici, combiné avec le même système d'équations composant le théorème d'extinction pour le milieu inférieur est le point de départ de l'équation réduite de Rayleigh [48]. Les champs et leurs dérivées sur la surface sont liés dans le cas IBC par la relation (1.60) (également donnés dans une section ultérieure par les relations (1.167) pour les polarisations horizontale et verticale, respectivement).

Puisque $k_0 \sigma_\zeta \ll 1$, nous pouvons développer le terme $e^{+ik'_z \zeta(x_s)}$ selon la relation (1.145) ainsi que $\psi(\mathbf{r}_s)$ et $\Upsilon(\mathbf{r}_s)$, puis regrouper les termes de même ordre en $\zeta(x_s)$.

On a alors pour la polarisation TE

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \frac{e^{-i\kappa x_s}}{i2k_z} \left[1 + ik_z \zeta(x_s) - \frac{k_z^2 \zeta^2(x_s)}{2} \right] \\ & \times \left\{ \left[(1 + \gamma^2)^{1/2} i[k_z - \kappa\gamma] \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - 1 \right] \right. \\ & \left. \times \left(\Upsilon^{(0)}(\mathbf{r}_s) + \Upsilon^{(1)}(\mathbf{r}_s) + \Upsilon^{(2)}(\mathbf{r}_s) \right) \right\} = -\delta(\kappa - \kappa_0) \Pi(x_s, \zeta(x_s)), \end{aligned} \quad (1.156)$$

et pour la polarisation TM

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \frac{e^{-i\kappa x_s}}{i2k_z} \left[1 + ik_z \zeta(x_s) - \frac{k_z^2 \zeta^2(x_s)}{2} \right] \\ & \times \left\{ \left[(1 + \gamma^2)^{1/2} i[k_z - \kappa\gamma] \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - 1 \right] \right. \\ & \left. \times \left(\psi^{(0)}(\mathbf{r}_s) + \psi^{(1)}(\mathbf{r}_s) + \psi^{(2)}(\mathbf{r}_s) \right) \right\} = -\delta(\kappa - \kappa_0) \Pi(x_s, \zeta(x_s)). \end{aligned} \quad (1.157)$$

Après quelques manipulations, inspirées¹⁵ de [68], en omettant volontairement le terme $(1 + \gamma^2) \approx 1$, on obtient le champ et sa dérivée normale sur la surface aux ordres successifs

$$\begin{aligned}
 \Upsilon^{(0)}(\mathbf{r}_s) &= \frac{2ik_z(\kappa_0)e^{i\kappa_0x_s}\Pi(x_s)}{\frac{ik_z(\kappa_0)}{k_0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - 1} \\
 \Upsilon^{(1)}(\mathbf{r}_s) &= \left\{ -\Upsilon^{(0)}(\mathbf{r}_s) \left[\left(ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s)\frac{ik_z(\kappa_0)}{k_0} + \frac{i\kappa_0\gamma}{k_0} \right) \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2ik_z(\kappa_0)e^{i\kappa_0x_s}\Pi^{(1)}(x_s, \zeta(x_s)) \right\} \times \frac{1}{\frac{ik_z(\kappa_0)}{k_0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - 1}, \\
 \Upsilon^{(2)}(\mathbf{r}_s) &= -\left\{ \left[-\frac{k_z^2(\kappa_0)\zeta^2(x_s)}{2} \frac{ik_z(\kappa_0)}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} + ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s) \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \kappa_0\gamma + \frac{k_z^2(\kappa_0)\zeta^2(x_s)}{2} \right] \Upsilon^{(0)}(\mathbf{r}_s) \right. \\
 &\quad \left. + \left[ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s) \frac{ik_z(\kappa_0)}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} + \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \kappa_0\gamma - ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s) \right] \Upsilon^{(1)}(\mathbf{r}_s) \right. \\
 &\quad \left. + 2ik_z(\kappa_0)e^{i\kappa_0x_s}\Pi^{(2)}(x_s, \zeta(x_s)) \right\} \times \frac{1}{\frac{ik_z(\kappa_0)}{k_0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - 1}. \tag{1.159}
 \end{aligned}$$

pour la polarisation TE, et pour la polarisation TM

$$\begin{aligned}
 \psi^{(0)}(\mathbf{r}_s) &= \frac{2ik_z(\kappa_0)e^{i\kappa_0x_s}\Pi(x_s)}{ik_z(\kappa_0) - \frac{k_0}{i}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}}} \\
 \psi^{(1)}(\mathbf{r}_s) &= \left\{ -\psi^{(0)}(\mathbf{r}_s) \left[i\kappa_0\gamma - k_z^2(\kappa_0)\zeta(x_s) - ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s) \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2ik_z(\kappa_0)e^{i\kappa_0x_s}\Pi^{(1)}(x_s, \zeta(x_s)) \right\} \times \frac{1}{ik_z(\kappa_0) - \frac{k_0}{i}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}}}, \\
 \psi^{(2)}(\mathbf{r}_s) &= -\left\{ \left[\frac{k_z^2(\kappa_0)\zeta^2(x_s)}{2} \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - \kappa_0\gamma k_z(\kappa_0)\zeta(x_s) - \frac{ik_z^3(\kappa_0)\zeta^2(x_s)}{2} \right] \psi^{(0)}(\mathbf{r}_s) \right. \\
 &\quad \left. + \left[-ik_z(\kappa_0)\zeta(x_s) \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} - k_z^2(\kappa_0)\zeta(x_s) + i\kappa_0\gamma \right] \psi^{(1)}(\mathbf{r}_s) \right. \\
 &\quad \left. + 2ik_z(\kappa_0)e^{i\kappa_0x_s}\Pi^{(2)}(x_s, \zeta(x_s)) \right\} \times \frac{1}{ik_z(\kappa_0) - \frac{k_0}{i}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}}}. \tag{1.160}
 \end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre $\epsilon_1 \rightarrow +\infty$, qui est le cas d'une surface parfaitement conductrice, on retrouve les cas Dirichlet et Neumann, que nous ne présentons donc pas ici puisqu'ils découlent du cas IBC. En

¹⁵Les auteurs dans [68], eux-mêmes inspirés des travaux de [69], étudient le cas d'une surface pour la condition aux limites de Dirichlet. Il montre, après avoir développé $\Upsilon(\mathbf{r}_s)$ et le terme $\exp(ik_z(\kappa)\zeta(x_s))$ jusqu'à l'ordre 2, que $\Upsilon^{(n)}(\mathbf{r}_s) = 2ik_z(\kappa_0) \exp(i\kappa_0x_s) f^{(n)}(\kappa_0|x_s)$, où $f^{(n)}(\kappa_0|x_s) = \int \exp(i\kappa x_s) \tilde{f}^{(n)}(\kappa_0|\kappa) d\kappa / (2\pi)$ et

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}^{(0)}(\kappa_0|\kappa) &= 2\pi\delta(\kappa) \\
 \tilde{f}^{(n)}(\kappa_0|\kappa) &= -\sum_{m=1}^n (-1)^m \binom{n}{m} k_z^m(\kappa_0) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa'}{2\pi} \tilde{f}^{(n-m)}(\kappa_0|\kappa - \kappa') \tilde{\zeta}^{(m)}(\kappa'), \quad n \geq 1, \quad \text{et} \\
 \zeta^{(m)}(x_s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} e^{i\kappa x_s} \tilde{\zeta}^{(m)}(\kappa), \tag{1.158}
 \end{aligned}$$

où le terme $(-1)^m \binom{n}{m}$ se développe comme un produit scalaire-vecteur. En utilisant donc la propriété du produit de convolution et sa transformée de Fourier, nous pouvons montrer que l'on obtient la dérivée normale du champ à l'ordre 1 sur la surface dans le cas Dirichlet, en tout point x_s de la surface. Le développement des équations intégrales pour les champs diffusés et transmis dans le cas d'une surface diélectrique dans [70] est inspiré de ce développement.

effectuant une transformée de Fourier sur les différents ordres successifs obtenus, on retrouve l'amplitude $R(\kappa, \kappa_0)$ calculée par la méthode de Rice dans la section 1.5.3. De même on peut montrer que dans la limite $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, correspondant au cas parfaitement conducteur, on retrouve les ordres calculés pour la cas PC (que nous n'avons pas présentés ici). Le champ diffusé observé en un point \mathbf{r} se déduit alors des équations (1.159) pour la polarisation horizontale et (1.160) pour la polarisation verticale que l'on injecte dans le principe de Huygens (1.95), dans lequel on exprime [71]

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|), \quad (1.161)$$

et

$$\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial n_s} = -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 u)}{u} \frac{[-\gamma(x - x_s) + (z - \zeta(x_s))]}{\sqrt{1 + (\zeta'(x_s))^2}} \quad (1.162)$$

avec

$$u = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - \zeta(x_s))^2}. \quad (1.163)$$

Cette méthode a également été appliquée au cas vectoriel pour une onde plane. On pourra se reporter à [72], ou encore [71]. Dans la section 1.6.2, nous allons présenter une comparaison des champs sur la surface (1.159) et (1.160) avec les champs sur la surface calculés par la MdM et la FBSA. Puis, le champ diffusé à partir des champs sur la surface sera également présenté.

Enfin la troisième méthode améliore la méthode de Rice. Elle porte le nom d'*équation réduite de Rayleigh* et a été résumé précédemment dans la section 1.5.2.

1.5.4 Les méthodes numériques

Les modèles asymptotiques (ou approchés) telle que la méthode des petites perturbations étudiée dans ce manuscrit, ont l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre. Cependant, leur domaine de validité reste restreint. Pour surmonter cet inconvénient, des modèles dits rigoureux (ou exacts) sont développés en parallèle. Ces méthodes viennent compléter les méthodes asymptotiques. Toutefois, il est à noter que tout comme les méthodes analytiques, les méthodes numériques rapides ont des conditions de validité. En effet, selon la rugosité de la surface, et l'écart-type des hauteurs de cette-dernière, ces méthodes, pour un nombre d'itérations maximal fixé, ne peuvent dépasser une certaine précision. Mais en fonction de la précision voulue, on peut itérer la méthode sans entraîner de complications supplémentaires, ni sans rajouter un nombre trop important de calculs.

Dans cette section nous allons étudier en partie la Méthode des Moments (MdM), qui discrétise les équations intégrales et permet de ramener le problème à un système matriciel. Puis la méthode Forward-Backward Spectral Acceleration (FBSA), basée sur la discrétisation des équations intégrales par la MdM, et s'adaptant à la problématique des incidences rasantes est abordée.

Moyennage statistique et méthode de Monte-Carlo

La résolution des équations intégrales repose sur la détermination du champ électrique sur la surface. Ce dernier dépend de la position de l'émetteur, des caractéristiques physiques de la surface et de sa forme, et plus particulièrement de sa hauteur ζ et de sa pente γ . Par conséquent, le champ sur la surface est une variable *aléatoire* car ζ et γ sont des variables aléatoires. Un capteur va mesurer la contribution *moyenne* des champs diffractés émanant des points de la surface. En d'autres termes, le capteur mesure la valeur moyenne du champ diffracté par la surface (le capteur peut aussi mesurer la valeur de la puissance moyenne). Ce calcul peut s'effectuer de deux manières :

- La valeur moyenne du champ diffracté par la surface est calculée *analytiquement* en utilisant les propriétés statistiques (densité de probabilité des hauteurs, autocorrélation des hauteurs de la surface, ...) de la surface. Cette approche sera utilisée pour calculer, en champ lointain, les puissances *cohérente* et *incohérente* avec l'aide de la méthode des petites perturbations.
- La valeur moyenne du champ rayonné par la surface est calculée *numériquement* en générant un profil des hauteurs de la surface. De plus, afin de réduire la taille du problème à traiter, qui est similaire à réduire le nombre d'échantillons du profil, plusieurs profils *indépendants* de nombre d'échantillons plus petit sont générés. Ainsi la moyenne statistique du champ est obtenue en calculant la moyenne du champ sur chacun de ces profils et en moyennant le champ moyen sur chacun des profils. Cette méthode largement répandue, est connue sous le nom de la *méthode de Monte-Carlo*. Elle sera appliquée sur la méthode des moments et ses variantes (FBSA).

Rappels des équations intégrales

A l'aide du second théorème de Green, de l'équation d'Helmholtz et des conditions aux limites, Le théorème d'extinction a été obtenu en (1.83). En approchant le point d'observation \mathbf{r} de la surface S , l'équation est confrontée à une singularité en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ sur la surface [73]. Il faut donc évaluer l'intégrale au sens de la valeur principal de Cauchy, qui a été introduite en (1.84). Les équations intégrales s'écrivent alors [4] et [74]

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{+\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}) - \int_S dS' \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_i^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'}}_{\text{Neumann avec } G_i=G_1} + \underbrace{\int_S dS' G_i^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'}}_{\text{Dirichlet avec } G_i=G_1} = \psi_{inc}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S \\ \underbrace{-\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}) - \int_S dS' \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_i^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'}}_{\text{Neumann avec } G_i=G_2} + \rho_{21} \underbrace{\int_S dS' G_i^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'}}_{\text{Dirichlet avec } G_i=G_2} = 0 \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S, \end{array} \right. \quad (1.164)$$

où $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}$ donne la position d'un point quelconque de l'espace de coordonnées (x, z) , ramené ici sur la surface, et $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + \zeta'\hat{\mathbf{z}}$ donne la position d'un point de la surface S de coordonnées $(x', \zeta(x'))$. $\zeta(x')$ désigne la hauteur d'un point de la surface supposée *monodimensionnelle* (1D). ψ_{inc} est le champ incident vérifiant l'équation d'Helmholtz et $\psi(\mathbf{r})$ est le champ total sur la surface. L'opérateur $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla f$, où l'opérateur nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x'}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial z'}\hat{\mathbf{z}}$ et la normale à la surface $\hat{\mathbf{n}}' = (-\nabla\zeta(x')\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})[1 + (\nabla\zeta(x'))^2]^{-1/2}$. Pour un problème 2D, la fonction de Green scalaire $G_i^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_i\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)$, où k_i est le nombre d'onde des milieux supérieur ($i = 1$) et inférieur ($i = 2$) séparés par l'interface rugueuse (dans notre étude, le milieu supérieur est le vide et nous le référençons avec l'indice $i = 0$), et $H_0^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel du premier type et d'ordre zéro. La dernière équation correspond au théorème d'extinction.

Pour une surface parfaitement conductrice deux cas peuvent se présenter selon la polarisation de l'onde :

- Cas Transverse Electrique (TE) ou polarisation horizontale (H) : $\psi(\mathbf{r}')$ s'annule sur la surface. Nous parlons alors de la condition aux limites de *Dirichlet* et

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = \int_S G_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} dS'. \quad (1.165)$$

Cette équation est nommée EFIE (Electric Field Integral Equation) TE.

- Cas Transverse Magnétique (TM) ou polarisation verticale (V) : $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$ s'annule sur la surface. Nous parlons alors de la condition aux limites de *Neumann* et

$$\psi_{inc}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}) - \int_S dS' \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}. \quad (1.166)$$

Cette équation est nommée MFIE (Magnetic Field Integral Equation) TM.

Dans (1.164), pour une surface diélectrique, les équations intégrales s'écrivent comme une combinaison linéaire des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Dans le cas TE, $\rho_{21} = 1$ et dans le cas TM, $\rho_{21} = \epsilon_2/\epsilon_1 = \epsilon_i$ où ϵ_i est la permittivité du milieu i .

Dans (1.164), les inconnues à déterminer sont le champ total sur la surface $\psi(\mathbf{r}')$ et sa dérivée normale $\partial\psi(\mathbf{r}')/\partial\hat{\mathbf{n}}'$.

Condition d'impédance sur la surface

Dans le cas où les milieux supérieur et inférieur offrent un fort contraste de permittivité en module, le système d'équations (1.164) peut être approché par une seule équation intégrale dont l'inconnue est soit $\psi(\mathbf{r}')$ ou $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$. En effet, dans ce cas, la dérivée normale du champ sur la surface est proportionnelle au champ ; cette hypothèse est aussi connue sous le nom d'Impedance Boundary Condition (IBC). Ainsi $\forall \mathbf{r} \in \Sigma$ [4] et [74]

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}') = \frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} \quad \text{Polarisation TE} \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} = \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \psi(\mathbf{r}') \quad \text{Polarisation TM} \end{array} \right. \quad (1.167)$$

avec $|\epsilon_1| \gg |\epsilon_0|$. Le système (1.164) se simplifie, dans le cas TE, comme

$$\frac{i}{k_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} - \int_S dS' \frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} \frac{\partial G_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} \right\} \quad (1.168)$$

$$+ \int_S dS' G_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} = \psi_{inc}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in S, \quad (1.169)$$

et dans le cas TM

$$+\frac{1}{2}\psi(\mathbf{r}') - \int_S dS' \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'} \quad (1.170)$$

$$+ \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} \int_S dS' G_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') = \psi_{inc}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in S \quad (1.171)$$

Il faut noter que les deux intégrales ci-dessus ont respectivement pour inconnues $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$ et $\psi(\mathbf{r}')$. Ce choix n'est pas arbitraire ; en effet, si $|\epsilon_1| \gg |\epsilon_0|$ alors $\psi(\mathbf{r}') \simeq 0$ sur la surface dans le cas TE, ce qui est analogue à la condition de Dirichlet, et donc l'inconnue intéressante, celle qui "contient l'information", est $\frac{\partial\psi(\mathbf{r}')}{\partial\hat{\mathbf{n}}'}$. De façon similaire, l'inconnue pertinente du cas TM est $\psi(\mathbf{r}')$. Ce choix des inconnues permet une meilleure stabilité des méthodes numériques lorsque l'approximation de l'IBC est utilisée.

Méthode des moments

La méthode des moments a été pour la première fois appliquée aux problèmes de diffraction électromagnétique par Harrington en 1968 [75]. Elle permet de résoudre un problème linéaire de la forme $\mathcal{L}f = g$, où \mathcal{L} est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire, f l'inconnue et g , une fonction donnée. Dans notre cas, l'inconnue f est le champ et sa dérivée normale, et g , le champ incident.

La méthodologie est la suivante [74] :

- La fonction recherchée f est projetée sur une base de fonctions, dites *fonctions de projection* $\{f_n\}$, c'est-à-dire que f est approchée par $f \simeq \hat{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n$. Le problème revient donc à déterminer les coefficients a_n . Une erreur de troncature sur la somme ε_N est alors introduite. En remplaçant cette approximation dans $\mathcal{L}f = g$, une nouvelle équation est obtenue.
- Cette équation est ensuite projetée sur une base de fonctions $\{w_m\}_{m=1..M}$, dites *fonctions test*, choisies de façon à minimiser l'influence de l'erreur ε_N . Le système obtenu peut alors s'écrire sous la forme d'une équation matricielle $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$. La matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ est dite matrice impédance, \mathbf{X} est le vecteur inconnu, et \mathbf{b} est le vecteur contenant les informations de l'onde incidente.

Plusieurs choix sont possibles pour les fonctions f_n et w_m . Le choix optimal résulte d'un compromis entre un gain de temps (si les fonctions de projection sont bien adaptées au problème, le nombre N d'inconnues sera réduit), une précision suffisante et une simplicité de la mise en oeuvre. C'est pourquoi nous retenons par la suite la méthode classique des moments par *collocation*, c'est-à-dire que les fonctions w_m seront égales à des fonctions de Dirac. Pour les fonctions f_n , les fonctions rectangles sont choisies, appelées en anglais fonctions *pulse basis*.

Ainsi le système (1.164) devient [4] et [74]

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \underbrace{\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Neumann}}}_{k_i=k_1} & \underbrace{\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Dirichlet}}}_{k_i=k_1} \\ \underbrace{\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Neumann}}}_{k_i=k_2} & \rho_{21} \underbrace{\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Dirichlet}}}_{k_i=k_2} \end{bmatrix}, \quad (1.172)$$

et les vecteurs source et inconnu de longueur $2N$ s'écrivent respectivement

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \psi_i(\mathbf{r}_1) \\ \psi_i(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{r}_1) \\ \psi(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix}. \quad (1.173)$$

} N fois

La matrice carrée $\bar{\mathbf{Z}}$ est de dimension $2N \times 2N$. Les matrices carrées $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Dirichlet}}$ et $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Neumann}}$ de dimensions $N \times N$ correspondent respectivement aux conditions aux limites de Dirichlet et Neumann, dont les éléments sont donnés par

$$\text{EFIE TE : } Z_{mn}^{\text{Dirichlet}} = \frac{j\Delta x \sqrt{1 + \gamma_n^2}}{4} \begin{cases} 1 + \frac{2j}{\pi} \ln \left(0.164k_i \sqrt{1 + \gamma_m^2} \Delta x \right) & \text{pour } n = m \\ H_0^{(1)}(k_i \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } n \neq m \end{cases}. \quad (1.174)$$

et

$$\text{MFIE TM : } Z_{mn}^{\text{Neumann}} = \begin{cases} -\frac{jk_i \Delta x}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_i \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times \{\gamma(x_n)(x_n - x_m) - [\zeta(x_n) - \zeta(x_m)]\} & \text{pour } m \neq n, \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\gamma'(x_m)}{1 + \gamma^2(x_m)} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (1.175)$$

A noter que $dS' = dx' \sqrt{1 + \gamma^2(x')}$. De plus $\gamma(x') = \zeta'(x')$ est la pente de la surface et Δx est le pas d'échantillonnage. A noter que pour le calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{\text{Neumann}}$ en $k_i = k_2$, les éléments diagonaux ($m = n$) s'écrivent $-\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4\pi} \frac{\gamma'(x_m)}{1 + \gamma^2(x_m)}$.

Les algorithmes d'accélération

L'étude des incidences rasantes du point de vue des méthodes rigoureuses ou exactes pose quelques problèmes. En effet, nous avons vu que l'onde incidente devait être atténuée afin de s'affranchir des effets de bords. Dans ce cas, le critère (1.104) conditionne la longueur L de la surface à générer. Et pour des angles proches de l'horizontal, on a

$$L|_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} = g \times 4 \rightarrow \infty. \quad (1.176)$$

Pour un pas d'échantillonnage Δx fixé à $\lambda/10$, le nombre d'inconnues sur la surface est $N = L/\Delta x > 10000$ pour des incidences rasantes. Les possibilités actuelles des PC de bureau ne permettent pas de stocker des matrices impédances complexes de 10000×10000 termes, ni de les inverser par la méthode LU, dont la complexité est de l'ordre de $\mathcal{O}(N^3)$. Ainsi, on est contraint d'employer des méthodes numériques nouvelles adaptées à la taille du problème. Elles sont dites *rapides* car elles accélèrent, de manière itérative [76], la résolution du système $\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$, obtenu par discrétisation des équations intégrales (1.164) à l'aide de la méthode des moments. Dans ce qui suit, quelques méthodes courantes sont résumées. La méthode numérique FBSA est l'outil développée au laboratoire, et qui servira de méthode de référence pour l'étude des incidences rasantes au chapitre trois.

Quelques méthodes répandues Pour l'étude du problème de la diffusion par une surface rugueuse monodimensionnelle, il est courant de trouver dans la littérature la "Method of Ordered Multiple Interactions" (MOMI), similaire à la méthode "Forward-Backward" (FB), et la "Banded Matrix Iterative Approach/CAnonical Grid" (BMIA/CAG) :

1. La MOMI a été proposée par Kapp et Brown [77] et est très similaire à la FB publiée la même année, dans le même journal, à la suite de l'article de Kapp et Brown, par Holliday *et al.* [78]. Le principe fondamental de ces deux méthodes est identique : en orientant la surface de gauche à droite, en référence à l'onde incidente, on suppose d'abord que le champ créé en un point de la surface ne provient que de la gauche, puis on le corrige en prenant en compte la contribution du champ provenant de la droite. Cette opération est itérée autant de fois que nécessaire, selon la rugosité de la surface. Les contributions provenant de la gauche, dites *forward contribution*, et celles provenant de la droite, *backward contribution*, sont calculées à l'aide d'opérateurs calculés et inversibles simplement.
2. La BMIA a été proposée par Tsang *et al* [79]. La matrice d'impédance \mathbf{Z} est décomposée en une matrice bande qui représente les interactions fortes et une matrice restante représentant les

interactions faibles. Cette décomposition est conditionnée par le paramètre r_d (appelé distance de voisinage) choisi en fonction de la rugosité de la surface et dépendant de l'angle d'incidence. Ce paramètre définit la limite entre les points situés en champ proche et champ lointain par rapport à un point d'observation (ou point courant) r' donné. Cette méthode originale a ensuite été accélérée par la Canonical Grid [80]. La matrice impédance des interactions faibles est composée de la fonction de Green discrétisée. En dehors de la distance de voisinage r_d , la fonction de Green joignant deux points de la surface s'apparente à celle d'une surface plane. Il est alors possible de développer la fonction de Green en une série de Taylor autour de la surface plane.

Cependant, bien que les auteurs titrent à l'époque que ces méthodes sont applicables pour des incidences rasantes, elles restent coûteuses en temps de calculs puisque leur complexité est d'ordre $\mathcal{O}(N^2)$ pour la MOMI et $\mathcal{O}(N \log N)$ pour la BMIA/CAG. L'accélération spectrale a vu le jour peu de temps après le développement des méthodes rapides énumérées ci-dessus. La complexité est ramenée alors à $\mathcal{O}(N)$. Nous allons détailler dans le paragraphe suivant le principe de l'algorithme FB accéléré dans le domaine spectral. Du fait de sa complexité en $\mathcal{O}(N)$, elle est la méthode numérique la plus rapide existante, et nous servira d'outil de référence.

1.5.5 Méthode Forward-Backward accélérée dans le domaine spectral

En angle rasant, qui est le cadre de notre étude, l'onde peut être réfléchiée en plusieurs points de la surface avant d'atteindre le point d'observation : c'est le phénomène de diffusion multiple. Il est alors nécessaire de choisir une surface de grande longueur, augmentant ainsi le nombre d'inconnues du problème. Les méthodes numériques pour ces problèmes à grandes échelles doivent donc devenir encore plus performantes. La méthode itérative "forward-backward" accélérée dans le domaine spectral est la plus intéressante. Pour un bref état de l'art des autres méthodes itératives, on peut citer [81]. La méthode "forward-backward" (connue aussi comme la Method of Ordered Multiple Interactions (MOMI)) divise les champs de chaque élément de courant sur la surface en deux contributions :

1. les contributions du champ se propageant vers l'avant (ou à droite) dû au champ incident et la radiation des courants de surface précédant l'élément recevant,
2. les contributions du champ se propageant vers l'arrière (ou à gauche) dû aux courants de surface suivant l'élément recevant.

Le courant dû à la contribution du champ se propageant vers l'avant est déterminé en premier lieu pour chaque élément récepteur de la surface. Il est ensuite employé pour retrouver la contribution du champ se propageant vers l'arrière à partir d'une procédure itérative, qui se poursuit jusqu'au critère de convergence spécifié. Une distance de "voisinage" autour de chaque élément récepteur de la surface est définie pour séparer les régions d'interactions "fortes" (contenant les éléments récepteurs à l'intérieur de cette distance de voisinage) des régions d'interactions "faibles" (contenant les éléments récepteurs à l'extérieur de cette distance de voisinage).

C'est cette dernière méthode qui est utilisée ici. En effet, alors que la méthode "Forward-Backward" (FB) originale de *Holliday et al.*, [78], [82], possède un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(N^2)$ dans la multiplication matrice-vecteur, une méthode est apparue récemment, fondée sur cette dernière et ayant un nombre d'opérations de $\mathcal{O}(N)$ où N est le nombre d'inconnues : la méthode "forward-backward" accélérée dans le domaine spectral. On opère une simplification, à l'aide de la méthode du point selle, sur la fonction de Green pour les points de la surface situés dans la zone extérieure de la distance de voisinage. Le lecteur trouvera le détail de cette méthode dans [81], [26], [83].

1.6 Simulations

Dans cette section, nous allons présenter quelques références de la littérature, et quelques résultats numériques. Une discussion appuyée sur les travaux des auteurs les plus prolifiques dans le domaine est présentée. Le but est de cerner le domaine de validité de la MPP1. Puis quelques simulations (inspirées des calculs obtenus dans la section 1.5.3 à partir du théorème d’extinction), toujours en comparaison avec la méthode de référence FBSA, montrent le comportement du champ diffusé, et la défaillance de la polarisation verticale sous incidences rasantes.

1.6.1 Travaux de la littérature

Barrick *et al* [84], [85], étudient la diffusion d’ondes polarisées verticalement sous incidences rasantes par une surface parfaitement conductrice peu rugueuse (condition aux limites de Neumann). Ils mettent en exergue la défaillance de la MPP. A noter également qu’il observe dans [84] un comportement important en rétro-diffusion, relevé également par de nombreux auteurs, dont [86] : la dépendance en α^4 de l’angle de rasance, du coefficient de diffusion (figure 1.16), lorsque $\alpha = 90^\circ - \theta_i^\circ < 1^\circ$.

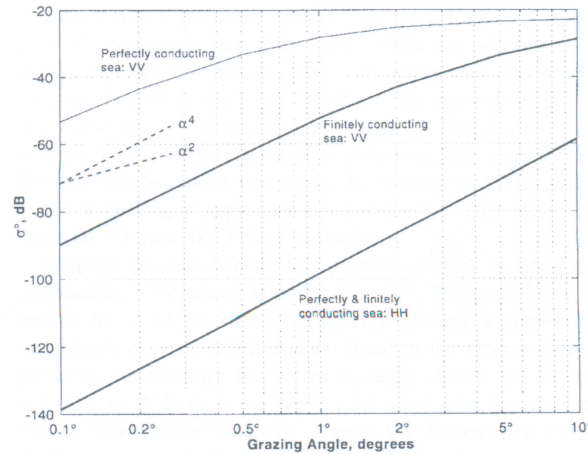


FIG. 1.16 – Coefficient de diffusion en rétro-diffusion sous incidences rasantes. Nombre de réalisations Monte Carlo de la surface : 2048. Profil des hauteurs issu du spectre des hauteurs de Philips. $f = 500$ MHz. Figure extraite de [84].

De même, Soto-Crespo *et al* étudient le domaine de validité de la MPP dans le cas électromagnétique [87]. Les auteurs montrent que pour la polarisation verticale, jusqu’à l’ordre 2 en $k_0\zeta$, l’intensité moyenne diffusée, intervenant dans le coefficient de diffusion, possède un “dénominateur résonant”, pour reprendre leur terme, en $1/k_z(\mathbf{k}_\perp)$, à chaque ordre du développement, excepté pour l’ordre 0. En effet, dans la référence [72], les auteurs étudient le cas électromagnétique à partir du théorème d’extinction de Ewald-Oseen [10], et obtiennent les amplitudes spectrales $\mathbf{E}_h(\mathbf{k}_\perp)$ et $\mathbf{E}_v(\mathbf{k}_\perp)$ pour les polarisations horizontale et verticale respectivement, jusqu’à l’ordre 2 en ζ . Il apparaît explicitement de leurs relations que pour des incidences rasantes, le nombre d’onde vertical $k_z(\mathbf{k}_\perp) = 0$ et $\mathbf{E}_h(\mathbf{k}_\perp)$ est réduit au premier terme proportionnel à $\delta(\mathbf{k}_\perp)$ et correspond donc à la direction spéculaire. En revanche, $\mathbf{E}_v(\mathbf{k}_\perp)$ s’annule. Cette méthode est avantageuse puisqu’elle ne prend pas en compte l’hypothèse de Rayleigh (consistant à supposer que seules des ondes sortantes existent dans la région $\min[\zeta(\mathbf{r})] < z < \max[\zeta(\mathbf{r})]$). Barrick *et al* [85] remarque également ce comportement en $1/k_z(\mathbf{k}_\perp)$ sous incidences rasantes, en utilisant une

approche modale développée dans [88] et [84], où l'hypothèse de Rayleigh, utilisée par Rice [66], [89], [90], n'est plus supposée. Ajoutons finalement l'auteur de [91] qui montre également la défaillance de la MPP sous incidences rasantes dans le cas d'une surface périodique et pour la condition aux limites de Neumann.

Les auteurs dans [92] font une étude complète du domaine de validité de la MPP à l'ordre 1 pour des surfaces rugueuses périodiques, diélectrique et très conductrice (on retrouve également le terme "conductivité finie" dans la littérature). Ils évoquent tout d'abord l'équivalence, dans l'espace de Fourier, entre le théorème d'extinction et la méthode invoquant l'hypothèse de Rayleigh, discutée dans la référence [93]. Les auteurs proposent tout d'abord une méthode numérique différente de la MdM, en ce sens où les champs sur la surface sont calculés directement dans le domaine spectral de Fourier, tandis que la MdM s'effectue dans l'espace réel et est dépendante de l'échantillonnage de la surface. Ainsi, les matrices sont de plus petites dimensions que celles de la MdM. Ce qui est avantageux, à l'époque (en 1995, les méthodes numériques rapides apparaissaient), pour réduire le temps de calcul de l'inversion matriciel LU d'ordre N^3 . A partir du champ diffusé, les auteurs calculent les "rendements" e_{in} (équivalent au ratio des modules de l'intensité diffusée dans chaque mode propagatif n et de l'onde incidente) pour les milieux supérieur $i = 1$ et inférieur $i = 2$. Ils proposent un critère d'erreur "ADDE" (Average Diffuse Decibel Error), s'écrivant

$$\text{ADDE} = \frac{1}{M-1} \sum_n |10 \log_{10} e_n - 10 \log_{10} p_n|, \quad n > 0 \quad (1.177)$$

où l'indice n représente le $n^{\text{ième}}$ mode propagatif diffusé dans le milieu supérieur et M la quantité numérique de ces modes, e_n et p_n sont les rendements de la méthode numérique et de la MPP1, respectivement. Les méthodes sont validées lorsque le critère de conservation de l'énergie $\sum_{n \in P_1} e_{1n} + \sum_{n \in P_2} e_{2n} = 1$ (P_1 et P_2 sont les ensembles des ondes propagatives dans les espaces supérieur et inférieur, respectivement) est vérifié. En revanche, pour le cas d'un conducteur fini (la permittivité électrique ϵ est complexe), il n'y a pas d'ondes se propageant à l'infini vers le bas (vers les z négatifs) puisque l'énergie est absorbée. Le critère de conservation d'énergie devient $\sum_{n \in P_1} e_{1n} \leq 1$, et n'est donc pas applicable pour vérifier la fiabilité de la méthode numérique. Ils utilisent alors le principe de réciprocité $e_n(\theta_i, \theta_s) = e_n(-\theta_s, -\theta_i)$ abordé à la section 1.2.6.

L'ADDE est représentée sur les figures 1.17 et 1.18 pour des erreurs de 1 dB et 2 dB. Si on autorise une erreur de 1 dB, on observe, figure 1.17, que la MPP1 est valide jusqu'à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta < 0.05\lambda$ pour des angles d'incidences θ_i modérées dans les deux polarisations. Pour la polarisation TE, le domaine de validité s'étend jusqu'à $\sigma_\zeta < 0.09\lambda$, à mesure que l'angle d'incidence augmente. Pour la polarisation TM, la MPP1 est applicable pour des angles d'incidences modérés, mais faillit au voisinage de l'angle de Brewster θ_B (voir section 1.2.8). Néanmoins, pour des angles $\theta_i > \theta_B$, la MPP1 semble s'appliquer de nouveau même si son domaine de validité est plus restreint. En effet, pour une ADDE de 1 dB, pour $\theta_i = 75^\circ$, la MPP1 est valide pour un écart type des hauteurs jusqu'à 0.06λ , tandis que pour la polarisation TE, au même angle d'incidence, la MPP1 est valide jusqu'à 0.08λ . Le domaine de validité diminue considérablement pour la polarisation verticale à l'approche des incidences rasantes. Si une erreur de 2 dB est autorisée, le domaine de validité de la MPP1, pour les deux polarisations, est augmenté de 0.025λ par rapport à une erreur de 1 dB sous incidences modérées. La figure 1.18 montre que lorsque le milieu inférieur est complexe, l'effet de l'angle de Brewster, pour la polarisation TM, est atténué, et l'ADDE est quasiment constant sur toute la gamme des angles d'incidence. Après une étude détaillée, Kim *et al.* en arrivent aux conclusions suivantes, sur le domaine de validité de la MPP1 :

- Dans le cas TE, la théorie perturbative au premier ordre (qui est d'ordre 2 en σ_ζ si on s'intéresse à l'intensité) reste valide quelque soit l'angle d'incidence θ_i , à condition que σ_ζ soit petit devant la longueur d'onde λ , sans tenir compte des caractéristiques électriques du matériau. Le paramètre de Rayleigh qui a été introduit dans la section 1.4 rend compte de cette observation. En revanche, la valeur de σ_ζ pour laquelle la théorie faillit est dépendante de ces mêmes caractéristiques.
- Pour la polarisation TM, la MPP1 faillit quand l'angle d'incidence est dans la région de l'angle

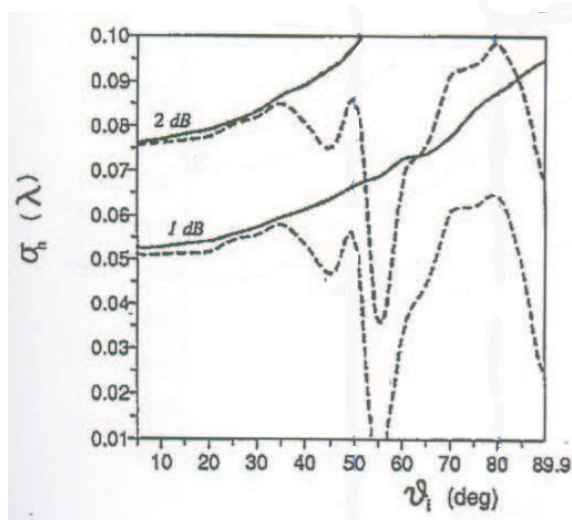


FIG. 1.17 – Plan du contour des valeurs de l'ADDE pour les polarisations TE (trait plein) et TM (pointillés) fonction de l'écart-type des hauteurs σ_z et de l'angle d'incidence θ_i . Longueur de corrélation $L_c = 0.2\lambda$, indice de réfraction réel (diélectrique parfait) $n_2 = 1.2$ (Angle de Brewster $\approx 50^\circ$). Figure extraite de [92].

de Brewster pour le cas d'un diélectrique parfait, mais est valide pour des angles d'incidence $\theta_i < \theta_B$. Or dans notre cas, la surface est très conductrice, c'est à dire que l'angle de Brewster est proche de $\pi/2$. Ce qui explique la défaillance sous incidences rasantes dans cette polarisation. Les simulations que nous présenteront plus loin le confirmeront.

- Pour un diélectrique à pertes, la région de validité de la MPP1 est quasiment constante sur l'ensemble des angles d'incidence. Lorsque la partie imaginaire de l'indice de réfraction est grande (comme le cas de la mer), les résultats sont proches de ceux obtenus pour un conducteur parfait, discuté dans [94] (cette référence traite également d'une surface rugueuse d'autocorrélation Gaussienne).
- Pour les deux polarisations, la région de validité observée devient plus petite lorsque la longueur de corrélation n'est plus $L_c = 0.2\lambda$, mais $L_c = 0.5\lambda$.

Leur conclusion finale est qu'il faut être prudent dans l'utilisation de la MPP1 pour la polarisation verticale, car elle est sensible à θ_i , θ_s , l_c , et au milieu sur lequel l'onde incidente se réfléchit.

Citons également les travaux de Chan *et al.* [95] qui proposent des résultats pour une surface diélectrique à pertes (comportant donc une permittivité électrique ϵ complexe) comparant la MPP1 avec la BMIA/CAG. L'observation importante à retenir est que, sous incidences rasantes, le niveau du coefficient de diffusion en rétro-diffusion pour la polarisation verticale est plus grand que celui pour la polarisation horizontale. Observation que l'on peut également faire sur la figure 1.16.

Le lecteur pourra aussi se reporter à [96] pour un bref résumé des domaines de validité de différents modèles asymptotiques, dont la MPP1.

L'intérêt porté par ces différents auteurs sur la théorie perturbative dans le cas des incidences rasantes n'est pas nouveau, mais fait l'objet d'études récentes à en voir les dates de parution des références que nous avons citées ci-dessus, et cela, bien que la théorie perturbative soit ancienne. De plus, ces auteurs sont très connus dans le domaine de la diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Tout cela donne au sujet un peu plus d'importance, et montre bien le besoin réel de posséder un modèle de diffusion électromagnétique.

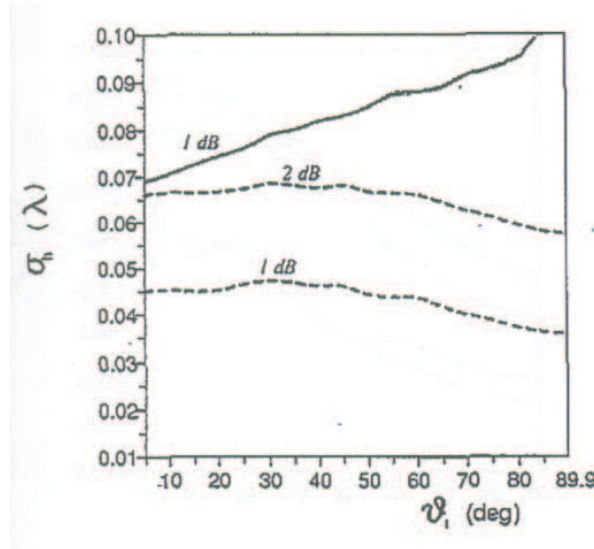


FIG. 1.18 – Mêmes caractéristiques que la figure 1.17, mais $n_2 = 1.33 + 2i$ (permittivité diélectrique de l'eau, avec des pertes). Figure extraite de [92].

1.6.2 Résultats numériques

Dans la littérature, lorsqu'il est question d'une surface de mer très conductrice (l'approximation IBC), les caractéristiques électriques de l'eau de mer employées correspondent aux valeurs moyennes mesurées dans l'Océan Atlantique à une latitude de 40° . La conductivité électrique $\sigma = 4$ S/m et la permittivité relative électrique $\epsilon_r = 80$, telles que

$$\epsilon = n^2 = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 80 + i \frac{7.2 \times 10^{10}}{f(\text{Hz})}. \quad (1.178)$$

A noter que lorsque l'on parle de surface de mer, référence est faite au modèle de Elfouhaily *et al* vu dans la section 1.3.4.

Sur la figure 1.19, nous avons tracé les coefficients de diffusion calculés à partir de la méthode des Moments et de la FBSA, pour une réalisation de la surface. La fréquence $f = 100$ MHz, $\lambda = 3$ m, d'où est déduit $k_0 = 2\pi/\lambda$. La permittivité du milieu se déduit de (1.178) et vaut $\epsilon = 80 + i720$. La vitesse du vent U_{10} à 10 mètres au-dessus de la surface de mer vaut 5 m/s. L'écart-type des hauteurs vaut alors $\sigma_\zeta = 0.164$ m et l'écart-type des pentes est $\sigma_p = 0.1318$. La longueur de corrélation à injecter dans le spectre Gaussien est alors $l_c = \sqrt{2}\sigma_\zeta/\sigma_p \approx 1.76$ m. L'angle d'incidence θ_i vaut 30° . La légende correspond au critère de conservation de l'énergie. Il est proche de 1 car la surface est très conductrice. Sur la figure des coefficients de diffusion 1.19, on remarque le pic cohérent dans la direction spéculaire $\theta_s = 30^\circ$. Le pas d'échantillonnage de la surface est $\Delta x = 0.1\lambda$. Le nombre d'échantillons N de la surface est $N = L/\Delta x = 6g/\Delta x$, avec $g \geq 1/(0.037k_0 \cos \theta_i) \geq 14$ selon le critère de Thorsos (1.104). La méthode numérique rapide FBSA converge vers la MdM au bout de 4 itérations. En polarisation horizontale, il faut 8 itérations de la FBSA pour une bonne convergence de la méthode vers la MdM. Pour une surface de corrélation Gaussienne, la distance des interactions fortes est $X_d = 2l_c$. Pour une surface de mer, elle vaut $X_d = 2 \times 0.154 \times U_{10}^{2.04}$ [97].

La figure 1.20 représente les parties réelle et imaginaire des champs sur la surface calculés avec la FBSA et la MPP1 et MPP2 à partir du théorème d'extinction (section 1.5.3). L'atténuation de l'onde

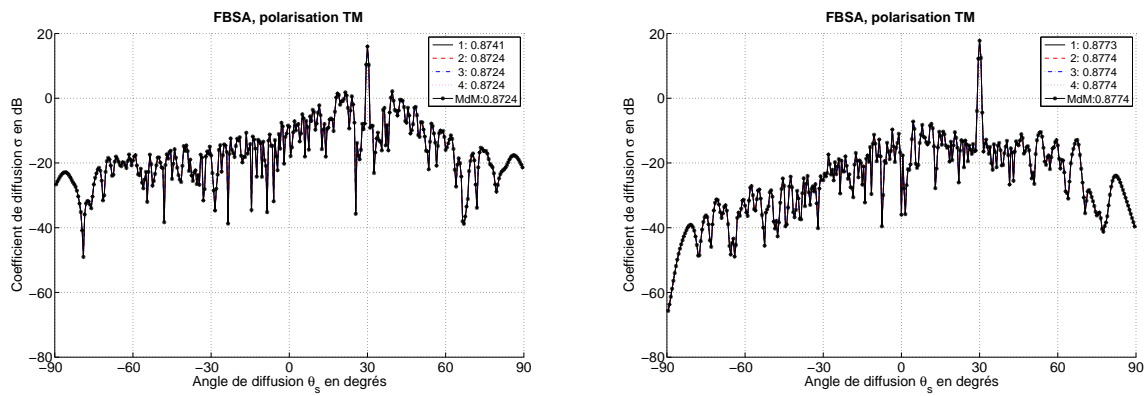


FIG. 1.19 – Coefficients de diffusion pour une réalisation avec la FBSA. Polarisation verticale. A gauche, pour une surface de mer. A droite, pour une corrélation des hauteurs Gaussienne. Angle d’incidence $\theta_i = 30^\circ$. $\lambda = 3$ m, $\epsilon = 80 + 720i$. $g = L/6$. La vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s, correspondant à un écart type des hauteurs $\sigma_\zeta = 0.164$ m.

incidente a été prise en compte. Les résultats concordent bien entre la méthode asymptotique et la méthode numérique.

L’avantage de connaître les champs sur la surface est qu’ils permettent de déterminer le champ diffusé par le principe de Huygens (1.95), où la fonction de Green et sa dérivée normale sont données dans (1.161) et (1.162). Les champs sur la surface ont été tracés sur la figure 1.20, à partir de la loi d’éclairement représentée sur la figure 1.7. Sur les figures 1.21 et 1.22 sont tracées les cartographies pour le champ diffusé. La cartographie avec la MPP1 est tracée à partir des champs sur la surface calculés dans la section 1.5.3 à l’aide du théorème d’extinction.

La figure 1.23, représente une illustration pour le champ diffusé en fonction de la hauteur pour une abscisse donnée de la surface. Selon cette configuration, sur la figure 1.24, le champ diffusé pour une hauteur d’observation variable, et pour une abscisse donnée $X = 20$ m, est tracé à partir de la détermination des champs (à l’ordre un) sur la surface obtenus dans (1.159) et (1.160), pour une corrélation des hauteurs Gaussienne. La méthode de référence est la FBSA. Les résultats concordent assez bien. La hauteur de direction spéculaire est donnée par la relation $z = X / \tan(\theta_i)$, tel qu’indiqué sur la figure 1.23. Sur la figure 1.25, l’angle d’incidence est 85° . L’abscisse d’observation est $X = 300$ m. La polarisation horizontale. En revanche, le champ diffusé pour la polarisation verticale n’est plus valide avec la MPP1. Ceci est dû au terme en $1/k_z(\kappa_0)$, mis en avant par Barrick et Soto-Crespo, ayant fait l’objet de la discussion auparavant.

La figure 1.26 montre les coefficients de diffusion pour les cas Dirichlet et Neumann, et un spectre des hauteurs de mer. L’angle d’incidence est modéré, $\theta_i = 50^\circ$. 10 réalisations de la surface ont été effectuées. La MPP aux ordres un et deux a été simulée à partir des coefficients de diffusion de l’annexe A. Il peut être observé dans la direction spéculaire une chute du coefficient de diffusion. Cela est dû à la manière dont est générée la surface de mer.

La figure 1.27 présente les coefficients de diffusion de la MPP1 et la FBSA pour un angle d’incidence rasant $\theta_i = 88^\circ$, pour le cas Neumann, pour 5 réalisations de la surface. A gauche, le critère de conservation de l’énergie est vérifié par la FBSA. A droite, la MPP1 sous-estime la FBSA en rétro-diffusion, tandis que la MPP2 est en accord.

Sur la figure 1.28 nous avons tracé le coefficient de diffusion pour une surface très conductrice avec le coefficient de diffusion bistatique (A.11), pour la polarisation verticale. Le spectre des hauteurs de la

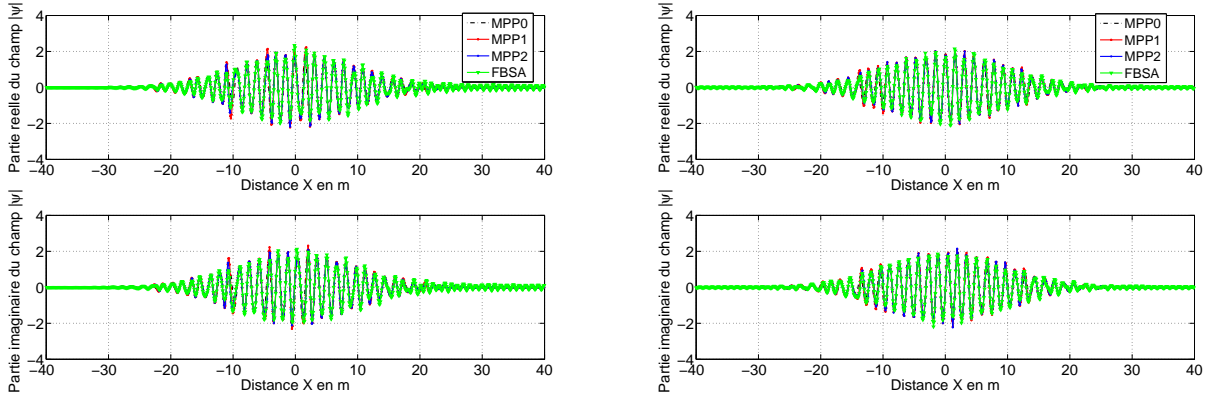


FIG. 1.20 – Parties réelle et imaginaire du champ $\psi(\mathbf{r})$ sur la surface pour une réalisation de la surface, en polarisation verticale. $\theta_i = 40^\circ$, $\lambda = 2$ m, $\epsilon = 80 + 720i$, $L = 80\lambda$, $g = L/6$. A gauche, corrélation des hauteurs Gaussienne. A droite, profil des hauteurs de mer.

surface est Gaussien. La fréquence $f = 100$ MHz. L'angle d'incidence rasant $\theta_i = 88^\circ$. Permittivité de la mer correspondante à cette fréquence : $\epsilon = 80 + i720$. Le terme $k_0\sigma_\zeta = 0.42$. La puissance de l'onde incidente est calculée avec l'approche de Tsang et Kong (1.107). L'angle d'incidence $\theta_i = 88^\circ \rightarrow 1.536$ radians. La longueur de la surface est déterminée à partir du critère de Kapp (1.105), dont l'application numérique donne

$$g > \frac{3\sqrt{2}}{\frac{2\pi}{3}(\frac{\pi}{2} - 1.536) \cos 1.536} \implies g > 1663 \text{ m.} \quad (1.179)$$

On en déduit alors $L = 6g > 9980$ m. Le pas d'échantillonnage étant $\Delta x = 0.1\lambda$, le nombre d'échantillons $N = \frac{L}{\Delta x} > 99800/\lambda$. Pour être sûr de s'affranchir des effets de bords, le nombre d'échantillons pris pour cette figure est $N = 110000$. Pour alléger les temps de calculs déjà importants, le nombre de réalisation de la surface est 5. On observe une sous-estimation de la MPP à l'ordre 1 en rétro-diffusion en polarisation verticale. En effet, l'ordre de grandeur du champ rétro-diffusé prédit par la FBSA est de -60 dB. Le capteur peut détecter ces valeurs. Le signal rétro-diffusé n'est donc pas négligeable. Il convient donc d'obtenir un modèle perturbatif corrigeant l'écart de 40 dB, entre la FBSA et la MPP1, observable sur la figure 1.28.

Ce comportement est également observé par Chan *et al* qui utilisent la BMIA/CAG pour simuler le coefficient de diffusion en rétro-diffusion [95]. Ils le comparent avec la MPP à l'ordre 1. La surface est diélectrique. Par leurs résultats, on observe une différence d'environ 40 dB entre la méthode numérique et la méthode asymptotique sous incidences rasantes.

Notons, à titre indicatif, que l'espace mémoire requis pour stocker les différents paramètres de la figure 1.28 est d'environ 54 Mo. De plus, malgré la puissance certaine des PC standards, et la complexité en $\mathcal{O}(N)$ de la FBSA, l'obtention de la figure 1.28 a pris quelques jours.

Le cadre de l'étude concerne l'observation de la surface de mer par un radar côtier. Le radar émet l'onde incidente, et mesure la puissance diffusée par la surface de mer. L'émetteur et le récepteur sont alors dits colocalisés. L'information importante est donc la puissance rétrodiffusée vers le radar. Sur la figure (1.28), la puissance rétrodiffusée sous incidence rasante évaluée par la MPP sous-estime la FBSA. Les deux chapitres suivants vont tentés d'apporter des modifications à la MPP vue ici, dans le but de corriger ce défaut.

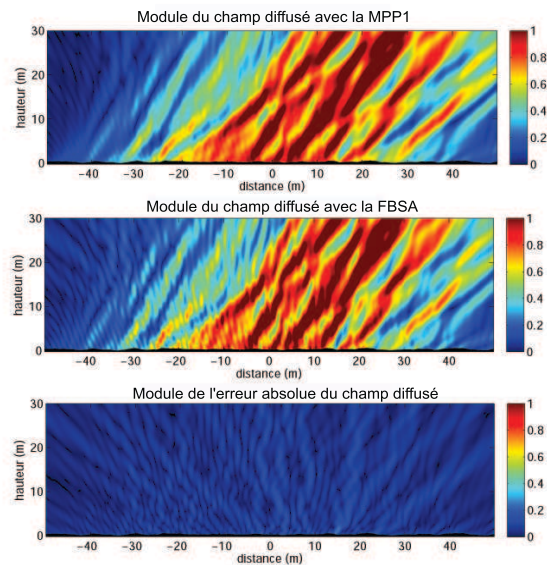


FIG. 1.21 – Cartographie du module du champ diffusé pour la polarisation verticale pour une réalisation de la surface pour un profil des hauteurs de mer. $\theta_i = 40^\circ$, $\lambda = 2$ m, $\epsilon = 80 + 720i$. En haut : le champ diffusé avec la MPP au 1^{er} ordre (MPP1). Au milieu : la FBSA. En bas : l'erreur absolue du champ diffusé $|FBSA - MPP1|$. Polarisation verticale.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tenté de poser les bases du vaste sujet qu'est la diffusion d'ondes électromagnétiques par une surface rugueuse. Nous avons tout d'abord introduit les fonctions de Green, puis la notion d'amplitude de diffusion, à partir de l'équation de propagation de Helmholtz. L'approche par les fonctions de Green est la base de l'étude faite dans le chapitre deux. Puis nous avons abordé le principe de Huygens et le théorème d'extinction. La majorité des méthodes analytiques sont basées sur l'écriture du champ diffusé avec l'une ou l'autre de ces représentations. La dernière section a été consacrée à la présentation de quelques travaux issus de la littérature. Puis des résultats numériques basés sur les calculs effectués dans la section 1.5.3, avec le théorème d'extinction, ont permis de comparer les champs sur la surface et les champs diffusés entre la MPP1, la MPP2 et la FBSA. La défaillance de la polarisation verticale sous incidences rasantes a été abordée dans la discussion sur les travaux de la littérature, et montrée sur la figure 1.25. En conclusion, la MPP à l'ordre 1, la plus utilisée dans la littérature, également appelée théorie de Bragg, était défaillante sous incidences rasantes. Le chapitre suivant est consacré à la formulation par les fonctions de Green, inspirée de la théorie quantique et adaptée à la diffusion des ondes par une surface rugueuse. Une nouvelle expression pour les coefficients de diffusion en découle.

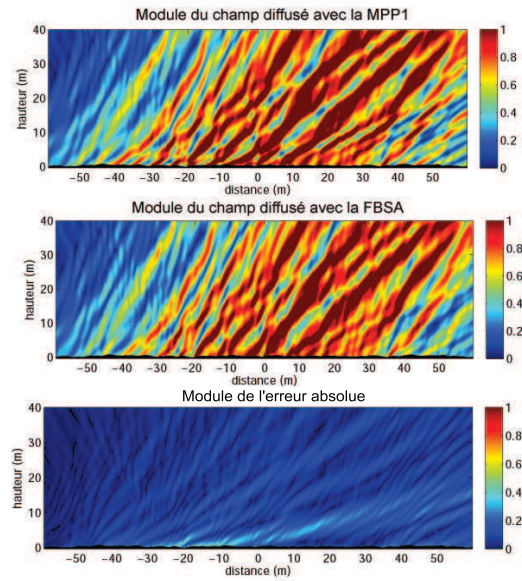


FIG. 1.22 – Paramètres identiques à la figure 1.21, mais en polarisation horizontale, et une corrélation des hauteurs Gaussienne.

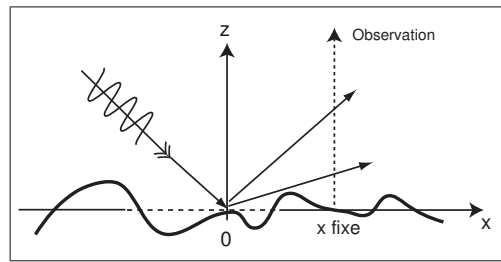


FIG. 1.23 – Interprétation de la variation de la hauteur d'observation pour une abscisse x fixe .

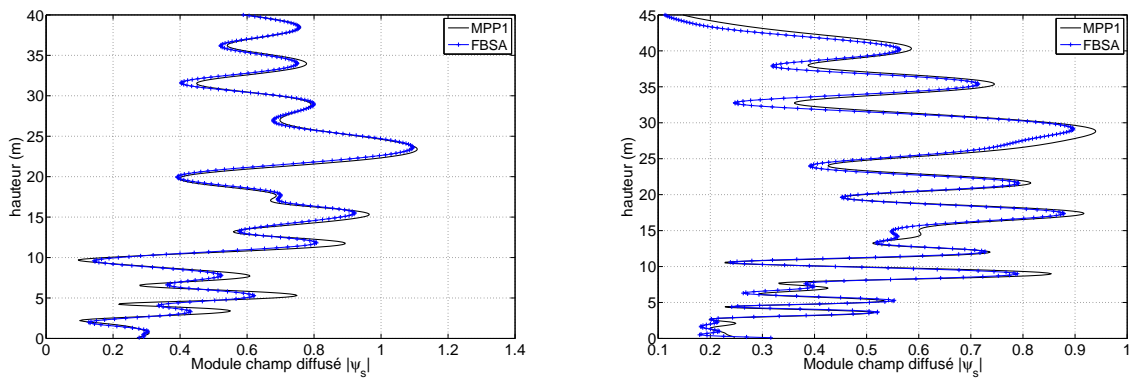


FIG. 1.24 – Champ diffusé pour $\theta_i = 40^\circ$ pour une abscisse donnée $x = 20$ m et une hauteur d'observation variable. $\lambda = 2$ m, $\sigma_\zeta = 0.2$ m. Corrélation des hauteurs Gaussienne. $\epsilon = 80 + i720$. A Gauche, en polarisation horizontale, à droite, en polarisation verticale.

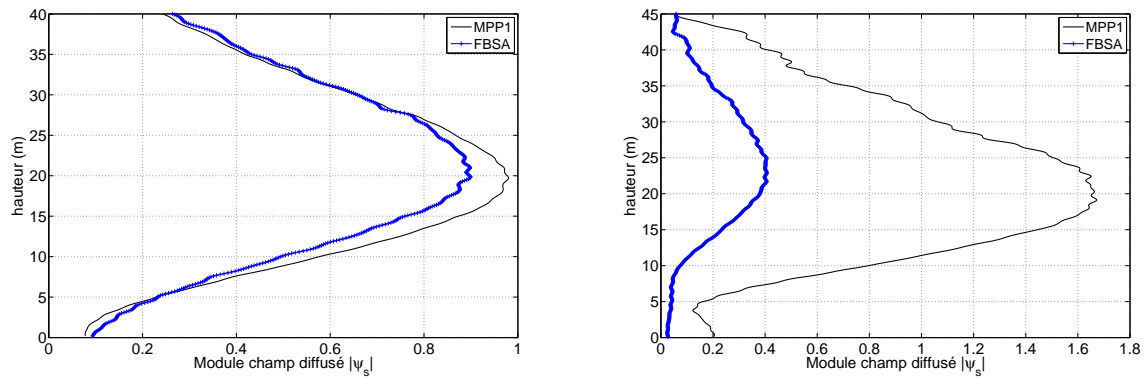


FIG. 1.25 – Mêmes paramètres que la figure 1.24, mais pour $\theta_i = 85^\circ$, et pour une abscisse d'observation $X = 300$ m.

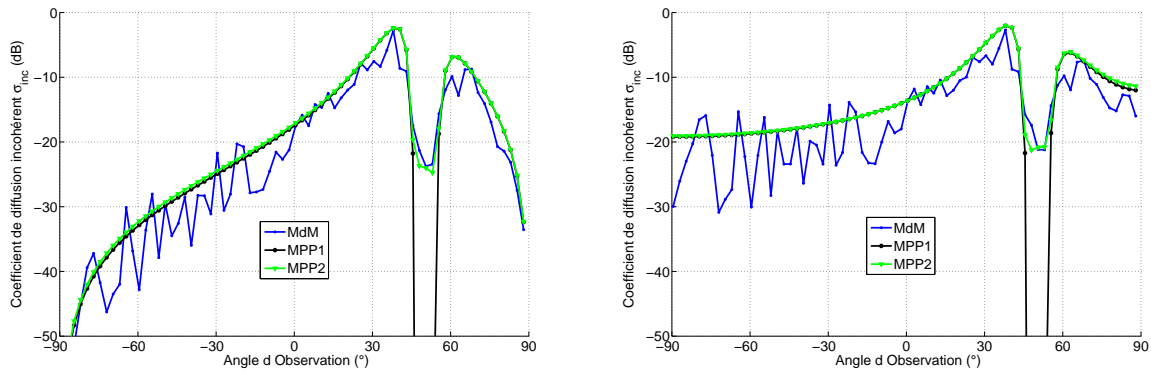


FIG. 1.26 – Coefficient de diffusion pour $\theta_i = 50^\circ$, et une surface parfaitement conductrice. A gauche, polarisation horizontale. A droite, polarisation verticale. $\lambda = 3$ m. Vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s correspondant à $\sigma_\zeta = 0.16$ m. Profil des hauteurs de mer.

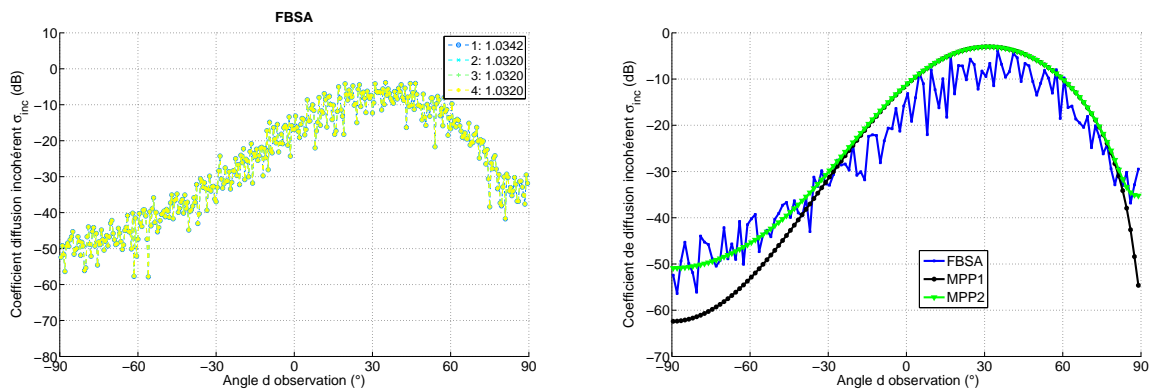


FIG. 1.27 – Coefficient de diffusion pour $\theta_i = 88^\circ$, et une surface parfaitement conductrice, pour la polarisation verticale. A gauche, critère de conservation de l'énergie. A droite, comparaison MPP aux ordres un et deux avec FBSA. $\lambda = 3$ m. $\sigma_\zeta = 0.2$ m. $l_c = 2$ m. Corrélation des hauteurs Gaussienne.

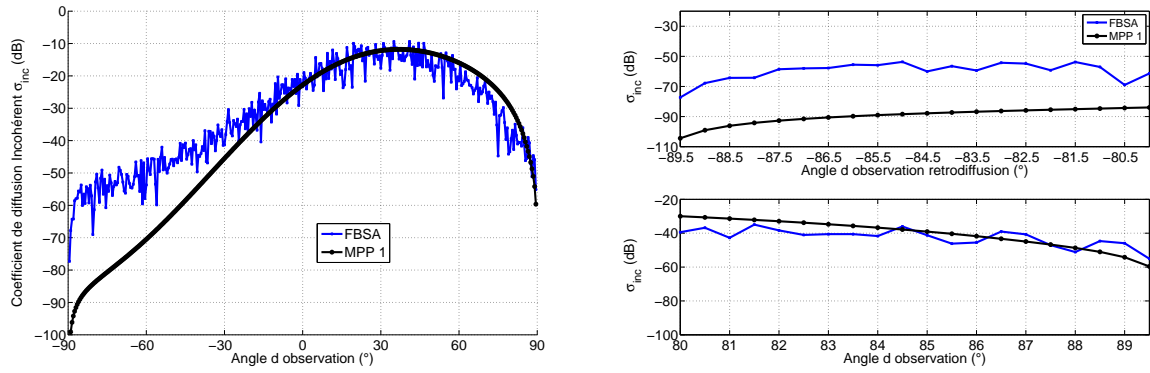


FIG. 1.28 – Coefficient de diffusion pour $\theta_i = 88^\circ$. Polarisation verticale. $\lambda = 3$ m, $\sigma_\zeta = 0.2$ m. Corrélation des hauteurs Gaussienne. $\epsilon = 80 + i720$

Chapitre 2

Méthode des petites perturbations et théorie de la diffusion multiple

Sommaire

2.1	Introduction	73
2.2	Travaux originaux	74
2.3	Introduction à la méthode des diagrammes pour la diffusion multiple	76
2.4	Cas d'une surface parfaitement conductrice	77
2.4.1	Formulation du problème	77
2.4.2	Equation de Dyson et champ cohérent	79
2.4.3	Equation de Bethe-Salpeter et intensité moyenne du champ	81
2.4.4	Simulations numériques	83
2.5	Cas réel d'une surface de mer de conductivité finie	93
2.5.1	Formulation du problème pour une surface de conductivité finie	94
2.5.2	Equation de Dyson pour le champ cohérent	94
2.5.3	Equation de Bethe-Salpeter : intensité incohérente	101
2.5.4	Coefficient de diffusion	103
2.5.5	Simulations numériques	104
2.6	Conclusion	112

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons dressé un bref aperçu des méthodes analytiques et numériques existantes, pour l'étude de la diffusion des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse. Celle-ci est illuminée par un radar côtier fonctionnant dans les bandes HF-VHF, sous incidences rasantes. Le choix de la méthode asymptotique retenue s'est porté sur la méthode des petites perturbations. Puisque nous étudions les incidences rasantes, le phénomène de diffusion multiple intervient, phénomène que ne prend pas en compte la MPP au premier ordre. Une nouvelle formulation basée sur le formalisme mathématique de la théorie quantique des champs va permettre d'obtenir une nouvelle impédance de surface effective dans laquelle la rugosité intervient. Ces dernières années, l'auteur [98] en particulier, a utilisé cette méthode pour développer un modèle pour des petites irrégularités de la surface. Bien sûr, nous pouvons citer également les travaux de l'auteur dans [90], qui obtient également une impédance de

surface en décomposant la surface périodique en une série de Fourier, fidèlement à la méthode originale développée par Rice [66]. Cette impédance de surface trouve son importance d'abord parce qu'elle rend compte physiquement de la rugosité de la surface. Puis, elle sera prise en compte dans le chapitre trois, pour l'étude des incidences rasantes. Ce chapitre est donc voué à l'étude et la validation de l'impédance de surface effective, pour les surfaces PC et IBC. Dans un premier temps, la théorie originale de la propagation des ondes en milieu aléatoire est résumée. Puis, son développement au cas d'une surface rugueuse est introduit. L'application concerne le cas d'une surface de mer parfaitement conductrice (PC) et d'une surface de mer très conductrice (IBC), illuminée sous une incidence modérée ($\theta_i < 80^\circ$).

2.2 Travaux originaux

En réalité, le système de diffusion est plus complexe. En effet, la propagation des ondes se fait en milieu aléatoire, ce qui la soumet à de nombreuses difficultés mathématiques. Pour étudier la propagation des ondes dans un milieu aléatoire, c'est-à-dire que la permittivité du milieu s'écrit $\epsilon(\omega, \mathbf{r}) = \langle \epsilon \rangle + \epsilon_f(\omega, \mathbf{r})$, où $\epsilon_f(\omega, \mathbf{r})$ est la partie fluctuante de la permittivité électrique et est fonction du temps et de la position dans l'espace (l'indice de réfraction est aléatoire), des auteurs ont développé une méthode perturbative dite formelle¹ [99], [100], [71]. Cette méthode a été largement décrite par Frisch [101]. Le point de départ est toujours l'équation de Helmholtz, qui, en terme de fonction de Green, s'écrit [71]

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \omega^2 \mu \epsilon(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.1)$$

La solution de cette équation, décrivant le champ issu d'un point source \mathbf{r}_0 , et, observé en un point \mathbf{r} , satisfait l'équation intégrale [102], en posant $V(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu \epsilon_f(\mathbf{r})$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0). \quad (2.2)$$

La représentation intégrale (2.2) peut être mise sous une notation compacte, du type Lipmann-Schwinger (on parle également d'équation fermée)

$$G = G^{(0)} + G^{(0)} V G, \quad (2.3)$$

qui, en injectant G dans la partie droite et en itérant à l'infini, s'écrit²

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} (G^{(0)} V)^n G^{(0)}. \quad (2.4)$$

Le développement formel (2.3) de l'équation (2.2) devient une série (appelée série de Neumann) en termes de la fonction de Green :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \\ &+ \dots + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) \\ &G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \dots V(\mathbf{r}_n) G^{(0)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹ Il s'agit d'une équation non explicite, où la solution $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ figure dans les deux membres : c'est une équation dite auto-cohérente ou *self-consistent*.

² $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) = G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)$, à l'ordre un. On peut itérer à nouveau en remplaçant $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)$ par (2.3), et ainsi de suite.

où la fonction aléatoire $V(\mathbf{r}_i)$ contient l'information sur la permittivité. Ce développement permet d'interpréter clairement le processus de diffusion. Le premier terme $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ d'ordre zéro, représente la diffusion de l'onde incidente par une surface plane. Le terme d'ordre un correspond à la diffusion de l'onde incidente par un point de la surface rugueuse, laquelle est implicitement représentée dans $V(\mathbf{r}_1)$. Le terme d'ordre deux représente le processus de double diffusion, etc.

En supposant un processus quelconque centré et en effectuant la moyenne statistique de (2.5), la perturbation en séries pour la fonction de Green s'écrit :

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) \rangle + \dots \quad (2.6)$$

Le formalisme décrit est donc général. Si maintenant la fluctuation du milieu aléatoire est petite, la méthode naturelle pour résoudre le problème de diffusion est de remplacer V par δV dans (2.3), où δ est petit, et de chercher une solution pour $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ en puissance de ϵ . C'est la méthode qui sera adoptée plus loin pour l'étude de la diffusion par une surface rugueuse, où le petit paramètre sera la hauteur de la surface ζ implicitement représenté dans $V(\mathbf{r})$.

Comme en fait état l'auteur dans [101], la plupart des problèmes de diffusion en milieu aléatoire est basé sur le développement perturbatif. Dans ce cas des études sur la convergence de tels développement est importante. Mais elles sont non triviales. Ainsi, il montre que la série de Neumann peut être utilisée pour construire une solution approximative, telle l'approximation de Born [103], courante dans la littérature, lorsque le critère de convergence $\frac{1}{2} M k_0^2 D^2$ (dépendant du diamètre D du volume de diffusion et d'un paramètre M tel que $|\epsilon_f(\mathbf{r})| < M$), est très inférieur à l'unité. En revanche, lorsque le diamètre $D \rightarrow \infty$, rencontré dans un milieu homogène telle que notre étude, la série de Neumann devient divergente. Bien sûr, il n'est pas question ici d'étudier le comportement asymptotique de telles séries, qui relève de pures démonstrations mathématiques. L'auteur cité ci-dessus en fait largement mention, propose quelques démonstrations, et cite de nombreux auteurs à ce sujet, et le lecteur pourra donc consulter [101]. Il faut surtout retenir de ces études qu'un moyen de passer outre la divergence de la série de Neumann est de procéder formellement en usant des diagrammes, utilisés en mécanique statistique, en électrodynamique quantique, \dots Nous allons en reparler ultérieurement.

Revenons à l'approximation de Born. Il est montré par exemple dans [104] que la méthode des petites perturbations et l'approximation de Born³ fournissaient les mêmes résultats, puisque l'on peut dire que la méthode des petites perturbations, méthode itérative, converge dès le premier ordre. La plus grande partie donc de l'information est contenue dans les amplitudes des champs⁴ d'ordres $\mathbf{E}^{(0)}$ et $\mathbf{E}^{(1)}$ [6].

Ensuite, le moyen utilisé pour quantifier tous les ordres de la série perturbative est basé sur les diagrammes, que l'on retrouve en électrodynamique quantique, mécanique statistique, etc. Le développement par les diagrammes a été introduit par Bourret [106] et [107], Furustsu [108], et Tatarskii [109] dans le cas d'un indice de réfraction Gaussien.

³L'approximation de Born s'applique souvent à des particules discrètes de permittivité électrique non-homogène, c'est à dire $\epsilon \equiv \epsilon(\mathbf{r})$, mais la perméabilité magnétique est homogène, c'est à dire que μ est indépendante de \mathbf{r} . Le développement de Born est l'itération, lorsque la perturbation est petite, de l'équation formelle de Lipmann-Schwinger [71]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + \int G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'.$$

sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + \int G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \mathbf{E}^0(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \int \int G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') G^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') V(\mathbf{r}'') \mathbf{E}^0(\mathbf{r}'') d^3 \mathbf{r}'' d^3 \mathbf{r}' + \dots$$

Lorsque ce développement est limité au premier ordre, on parle de l'approximation de Born, et correspond à la diffusion d'une seule particule dans la théorie de la diffusion de la lumière par des particules en optique (figure 2.1) [105].

⁴L'amplitude diffusée calculée satisfait en fait les conditions d'unitarité (expression mathématique de la loi de conservation de l'énergie) avec une précision en $O(\hbar^2)$ [15].

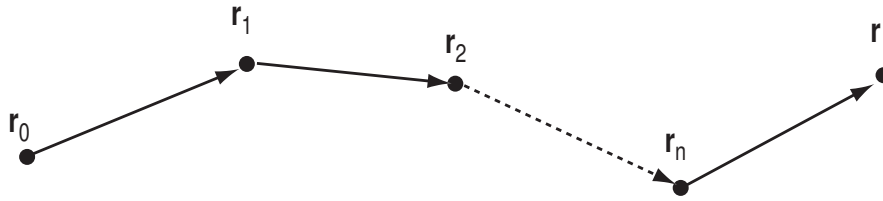


FIG. 2.1 – Diffusion par des particules à l'ordre n . Au 1^{er} ordre, seule la particule en r_1 participe à la diffusion.

Puis, Bass [110] a appliqué cette théorie à la diffraction d'onde par une surface statistiquement rugueuse en considérant la rugosité comme une perturbation des conditions aux limites en introduisant la notion d'impédance de surface rugueuse. Enfin, Bass, Freilikher et Fuks généralisèrent la théorie de la fonction de Green en champ quantique à l'analyse de la diffusion multiple [111] qui existe par exemple dans les guides d'ondes dont les parois internes présentent des irrégularités surfaciques (au sens de la longueur d'onde) [6].

2.3 Introduction à la méthode des diagrammes pour la diffusion multiple

L'approche par les diagrammes de Feynman, tirant son origine de la théorie quantique des champs, a été adaptée pour l'étude de la diffusion par des surfaces rugueuses par Freilikher et Fuks [111]. A partir d'une équation intégrale, une formulation plus générale a été présentée par Zipfel et DeSanto [112] et DeSanto [113], pour les premier et second moments du champ diffusé par une surface rugueuse aléatoire. Elle a également son intérêt pour l'étude de la dépolarisation des ondes dans un milieu aléatoire à deux couches [114], l'étude du pic de rétrodiffusion par une couche aléatoire renfermant des diffuseurs discrets (diffusion de volume) [115], la propagation de la lumière en milieu aléatoire [105], la diffusion par une surface rugueuse dont le milieu est élastique (le matériau se déforme selon les variations de température, les contraintes exercées, ...) [116], où encore la diffusion des ondes par une couche aléatoire limitée par deux surfaces rugueuses [117].

La série de Neumann (2.5), formalisme général, va être calculée perturbativement en puissance des hauteurs ζ de la surface rugueuse, puisque celles-ci sont supposées petites devant la longueur d'onde au sens du critère de Rayleigh vu dans le chapitre un. Pour le calcul des deux premiers moments statistiques du champ, sont obtenues, respectivement, les équations *fermées* de Dyson et de Bethe-Salpeter. Elles sont exactes, mais sont difficiles à manipuler. Elles contiennent, un opérateur dit de *masse* pour la première, et un opérateur *intensité*, pour la seconde. Une solution approchée de ces opérateurs correspond à une sommation partielle de la série perturbative que génèrent ces deux équations. L'auteur [101] montre que la série (C.1) de l'annexe C, diverge. Cette solution approchée est référencée comme la méthode du *lissage*⁵ et a été développée pour traiter les problèmes de propagation dans les milieux aléatoires dont la théorie a été introduite précédemment [118], [119]. Elle a été ensuite adaptée aux problèmes de diffusion scalaire, par des surfaces rugueuses [120], [121], [122] et au problème électromagnétique [123]. Cette méthode consiste à déterminer les différents moments d'une fonction satisfaisant une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce⁶. Frisch [101] fait apparaître un critère appelé *nombre de Reynolds*, qui, inférieur à 1, est, pour le citer, "une condition à la fois nécessaire et suffisante pour la validité de l'ap-

⁵Dans la littérature, elle est appelée *first-order smoothing approximation*, ce qui peut être traduit littéralement comme *approximation de lissage au premier ordre*. Par souci esthétique, nous garderons l'appellation d'approximation smoothing au premier ordre.

⁶Une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est de la forme $\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt$ où $K(x, t)$ est appelé *Kernel*, et f est la fonction inconnue.

proximation de smoothing au premier ordre”. Nous allons d’abord montrer comment obtenir l’équation intégrale qui sera ensuite exprimée à l’aide de graphes : les diagrammes de Feynman, dont un aperçu non exhaustif est donné en Annexe C. Puis à l’aide de l’approximation de smoothing, les équations de Dyson et Bethe-Salpeter seront réduites à une expression analytique au premier ordre, permettant une manipulation mathématique plus abordable. L’étude ci-dessous est faite pour un processus Gaussien. Ajoutons à ce titre que la procédure a été étendue a des fonctions non-Gaussiennes, résumée dans [124].

La solution obtenue est une combinaison de la méthode des diagrammes et de la méthode perturbative au premier ordre, dite “modifiée” [125], [99]. Elle permet d’obtenir une expression pour la fonction de Green, décrivant le problème électromagnétique. Citons ici les travaux de DeSanto [126], qui montre l’accord aux deux premiers ordres de la méthode de smoothing et de la méthode des diagrammes (nous utilisons dans cette étude la méthode de smoothing au premier ordre).

2.4 Cas d’une surface parfaitement conductrice

2.4.1 Formulation du problème

On considère une onde incidente de vecteur d’onde k_0 diffusée par une surface rugueuse au comportement aléatoire. La géométrie est représentée sur la figure 2.2. La surface obéit à un processus Gaussien, et \mathbf{r}_s est un point de la surface.

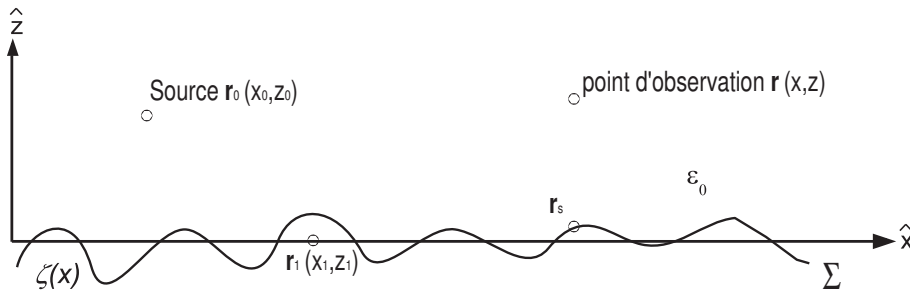


FIG. 2.2 – La surface rugueuse Σ est décrite par $z = \zeta(x)$. Le point source est en \mathbf{r}_0 . Le point d’observation est situé en \mathbf{r} . Le milieu supérieur est LHI. Le milieu inférieur est PC, dans un premier temps, puis Très Conducteur (TC), section 2.5.

Pour un problème à deux dimensions, et à partir du principe de superposition, nous pouvons exprimer le principe de Huygens en terme de fonctions de Green [6], [111]. L’équation intégrale (1.68) pour le champ total vue dans le premier chapitre est

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int_{\Sigma} dS(\mathbf{r}_1) \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}_1} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \frac{\partial G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)}{\partial \hat{\mathbf{n}}_1} \right), \quad (2.7)$$

où $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ est la fonction de Green pour un point source localisé en \mathbf{r}_0 , solution de l’équation d’Helmholtz (1.67)

$$(\nabla^2 + k_0^2)G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad p = h \quad \text{ou} \quad v, \quad (2.8)$$

dans tout l’espace supérieur, pour une surface perturbée. $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ est la fonction de Green solution de l’équation (1.67) pour une surface plane. \mathbf{r} , \mathbf{r}_1 , et \mathbf{r}_0 sont respectivement le point d’observation, un point de la surface et le point source. Nous donnons ici un bref aperçu de la théorie pour le cas d’une surface parfaitement conductrice. Le cas d’une surface très conductrice comme la surface de mer, est exposé plus loin.

Les conditions aux limites s'écrivent

$$G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{Dirichlet} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s \in \Sigma, \quad (2.9)$$

ou

$$\frac{\partial G_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} = 0 \quad \text{Neumann} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s \in \Sigma. \quad (2.10)$$

Nous introduisons maintenant la rugosité dans ces conditions aux limites (initialement proposé dans [127]). En effet, par un développement de Taylor en terme des hauteurs $\zeta(x)$ de la surface⁷, les conditions aux limites peuvent être ramenées sur la surface non perturbée, c'est-à-dire la surface représentée par le plan moyen $z = 0$. Puisque nous supposons que $|k_0\zeta \cos \theta_i| < 1$ et $|\partial\zeta/\partial x| < 1$, où θ_i est l'angle d'incidence, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{-\frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}}{\left(1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2}} \approx -\frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} + \dots, \quad (2.11)$$

puisque le dénominateur vaut approximativement 1. Le développement de Taylor, en $\zeta(x)$, de la fonction de Green autour de $z = 0$ s'écrit

$$G_p(\mathbf{r}_1) + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} G_p(\mathbf{r}_1) + \frac{\zeta_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} G_p(\mathbf{r}_1) \dots \quad (2.12)$$

où le point \mathbf{r}_1 est sur le plan moyen $z = 0$, et où l'on a posé $\zeta_1 = \zeta(x_1)$. En ne s'intéressant qu'au terme d'ordre un en ζ_1 , les conditions aux limites (2.9) et (2.10) s'écrivent

$$G_h + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} G_h = 0, \quad (2.13)$$

$$-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} G_v + \frac{\partial}{\partial z_1} G_v + \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} G_v = 0. \quad (2.14)$$

Si l'on considère maintenant le théorème de Green (2.7) et que l'on y applique les conditions aux limites (2.13) et (2.14), nous obtenons :

$$G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_p^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int_{\zeta_1=0} d\mathbf{r}_1 G_p^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V_p(\zeta_1) G_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \quad (2.15)$$

où

$$V_p(\zeta_1) = -\frac{\partial^{\leftarrow}}{\partial z_1} \zeta_1 \frac{\partial^{\rightarrow}}{\partial z_1} \quad p = h \quad (2.16)$$

$$V_p(\zeta_1) = -\zeta_1 \left(\frac{\partial^{\leftarrow}}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial^{\rightarrow}}{\partial z_1} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} \quad p = v. \quad (2.17)$$

$V_p(\zeta_1)$ est le potentiel perturbateur de la surface aléatoire [6], fonction des hauteurs de la surface $\zeta(x)$, et $\nabla_{\mathbf{r}_1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial z_1} \hat{\mathbf{z}} \right)$. L'intégration dans (2.15) s'effectue sur le plan moyen $z = 0$, et la fonction de Green $G_p^{(0)}$ est connue et satisfait les conditions aux limites sur la surface non-perturbée, et ne correspond pas à la fonction de Green en l'espace libre. Les flèches sur les opérateurs des dérivées partielles indiquent la direction dans laquelle est effectuée la dérivée. Par exemple, dans (2.16), la dérivée à gauche s'opère sur $G_p^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ de (2.15), par rapport à z_1 .

Les deux sections suivantes sont consacrées à la détermination, à partir de (2.15), (2.16) et (2.17), du champ cohérent, c'est à dire le champ moyen diffusé par la surface rugueuse, et l'intensité moyenne du champ (les auteurs dans [71] parlent également de covariance du champ).

⁷La hauteur ζ étant un paramètre de la fonction de Green, et l'écart-type des hauteurs étant faible devant la longueur d'onde, le développement de Taylor de la fonction de Green autour de $z = 0$ devient en fait une série de Maclaurin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$.

2.4.2 Equation de Dyson et champ cohérent

Il faut maintenant chercher à déterminer la moyenne statistique de $G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ dans (2.15). L'équation de Dyson est l'expression exacte pour le champ cohérent, ou la moyenne statistique du champ. C'est une équation non linéaire pour la fonction de Green cohérente (la moyenne statistique). A partir de (2.15)

$$\langle G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = G_p^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G_p^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \mathcal{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \langle G_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle, \quad (2.18)$$

où $\mathcal{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est l'opérateur de Masse, pour lequel nous n'étudierons pas sa convergence ici. La fonction de Green en deux dimensions pour un point source s'écrit, à partir de la solution générale (1.52) :

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa)} [e^{ik_z(\kappa)|z-z_0|} + R_0(\kappa)e^{k_z(\kappa)(z+z_0)}] e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa. \quad (2.19)$$

Notons que l'équation (2.18) s'applique pour tout point \mathbf{r} au-dessus de la surface $z = 0$. Lorsque \mathbf{r} approche la surface plane, $G_p^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ devient zero (dans le cas Dirichlet), mais $G_p^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ sous l'intégrale n'est pas nul car l'opérateur de Masse \mathcal{M} inclut la dérivée $\partial/\partial z$. Ainsi, $\langle G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ n'est pas nul sur la surface plane.

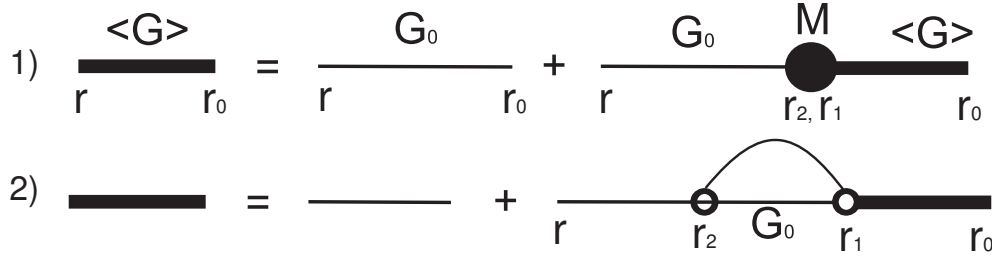


FIG. 2.3 – 1) Forme en diagrammes pour l'équation non-linéaire de Dyson pour la fonction de Green cohérente $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$. 2) Equation de Dyson avec l'approximation de smoothing.

Pour simplifier l'équation de Dyson, l'opérateur de Masse est approché par la méthode de smoothing au premier ordre, ou approximation de Bourret [106]. La figure 2.3 montre l'équation de Dyson en utilisant la méthode de smoothing au premier ordre, dans sa forme diagrammatique, où la fonction de Green pour une surface plane G_p^0 est représentée par un trait plein et la fonction de Green moyenne $\langle G_p \rangle$ est en trait plein gras. Notons que l'auteur dans [128] propose une brève étude du domaine de validité de la méthode pour les termes supérieurs dans l'opérateur de Masse \mathcal{M} . Cet opérateur s'écrit, sous l'approximation de *smoothing* (voir annexe C) pour les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle V_p(\zeta(x_1)) G_p^0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) V_p(\zeta(x_2)) \rangle = \mathcal{M}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.20)$$

Pour un milieu homogène, l'opérateur de Masse \mathcal{M} est invariant par translation, et est donc fonction de la différence entre les points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 [71]. Les variables z_1 et z_2 dans la fonction de Green sont mises égales à zéro une fois que la dérivée a été effectuée. En effet, le théorème de Green dans (2.7) a été simplifié en développant une condition aux limites équivalente à $z = 0$, donnant ainsi (2.15). Pour résoudre l'équation de Dyson pour la fonction de Green cohérente, nous utilisons la représentation de la transformée de Fourier suivante

$$\langle G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\kappa \langle G_p(\kappa, z, z_0) \rangle e^{i\kappa(x-x_0)}, \quad (2.21)$$

où la transformée de Fourier spatiale $\langle G_p(\kappa, z, z_0) \rangle$ de la fonction de Green cohérente $\langle G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ satisfaisant les conditions aux limites et de radiation à $z = \infty$, et est donnée par (voir (1.52))

$$\langle G_p(\kappa, z, z_0) \rangle = \frac{i}{2k_z(\kappa)} [e^{ik_z(\kappa)|z-z_0|} + R_p(\kappa)e^{ik_z(\kappa)(z+z_0)}]. \quad (2.22)$$

Pour une surface plane, les coefficients de réflexion de la fonction de Green $G_p^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ valent $R_h(\kappa) = -1$ dans le cas Dirichlet, et $R_v(\kappa) = +1$ dans le cas Neumann.

Itô [128], à partir de la formulation de Furutsu [129], obtient une expression de l'opérateur de Masse permettant d'obtenir une équation intégrale pour chaque impédance de surface $Z_{h,v}$. Nakayama *et al*, à partir de leur théorie obtiennent deux équations intégrales similaires à celles de Itô pour les impédances effectives d'une surface Dirichlet et Neumann [130], [36]. Ces auteurs montrent alors que les coefficients de réflexion et les impédances effectives de la surface sont des relations de récurrence. L'ordre n s'obtient à partir de l'ordre $n - 1$. Ce sont des équations intégrales qui s'écrivent :

$$Z_h(\kappa) = \int d\kappa' \frac{k_z(\kappa')k_0}{k_0 + k_z(\kappa')Z_h(\kappa')} \tilde{W}(\kappa - \kappa'), \quad (2.23)$$

$$Z_v(\kappa) = \int d\kappa' \frac{(k_0^2 - \kappa\kappa')^2}{k_0[k_z(\kappa') + k_0Z_v(\kappa')]} \tilde{W}(\kappa - \kappa'). \quad (2.24)$$

Les coefficients de réflexion $R_{h,v}(\kappa)$ sont donnés, formellement par

$$R_h(\kappa) = -\frac{k_0 - k_z(\kappa)Z_h(\kappa)}{k_0 + k_z(\kappa)Z_h(\kappa)} \quad (2.25)$$

$$R_v(\kappa) = \frac{k_z(\kappa) - k_0Z_v(\kappa)}{k_z(\kappa) + k_0Z_v(\kappa)} \quad (2.26)$$

Ainsi, Itô donne des relations plus générales qui permettront de simuler l'ordre directement supérieur au premier ordre des impédances effectives dans le cas PC.

Après quelques manipulations mathématiques⁸ de (2.18) et (2.20), avec (2.21) et (2.22), les coefficients de réflexion modifiés au premier ordre, pour les cas Dirichlet et Neumann s'écrivent, respectivement

$$R_{h1}(\kappa) = \frac{k_z(\kappa)Z_{h1}(\kappa) - k_0}{k_z(\kappa)Z_{h1}(\kappa) + k_0}, \quad (2.27)$$

$$R_{v1}(\kappa) = \frac{k_z(\kappa) - k_0Z_{v1}(\kappa)}{k_z(\kappa) + k_0Z_{v1}(\kappa)}, \quad (2.28)$$

où

$$Z_{h1}(\kappa) = \int d\kappa' k_z(\kappa') \tilde{W}(\kappa - \kappa'), \quad (2.29)$$

et

$$Z_{v1}(\kappa) = \int \frac{d\kappa'}{k_0 k_z(\kappa')} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa'). \quad (2.30)$$

L'expression (2.30) (pour le cas Neumann) est consistante avec celle de Fuks *et al*. [86].

Notons que l'intégrande dans (2.30) exhibe un pôle $k_z(\kappa')$. Nous discutons de son évaluation dans l'Annexe B. L'équation non-linéaire de Dyson permet d'obtenir des solutions en accord avec le critère de conservation de l'énergie et prend en compte les effets de diffusion multiples aux ordres supérieurs [71]. En répétant la procédure jusqu'à la seconde itération, donc jusqu'au second ordre dans (2.23) et (2.24), nous pouvons écrire l'impédance de surface effective à l'ordre deux [130]

$$Z_{h2}(\kappa) = \int d\kappa' \frac{k_z(\kappa')k_0}{k_0 + k_z(\kappa')Z_{h1}(\kappa')} \tilde{W}(\kappa - \kappa'), \quad (2.31)$$

⁸Nous détaillerons plus loin le cas IBC. Le cas PC, plus simple, s'en déduit. Nous ne présentons alors ici que les résultats importants et pertinents.

où

$$Z_{h1}(\kappa') = \int d\kappa'' k_z(\kappa'') \tilde{W}(\kappa' - \kappa''), \quad (2.32)$$

et

$$Z_{v2}(\kappa) = \int d\kappa' \frac{(k_0^2 - \kappa\kappa')^2}{k_0[k_z(\kappa') + k_0 Z_{v1}(\kappa')]} \tilde{W}(\kappa - \kappa'), \quad (2.33)$$

où

$$Z_{v1}(\kappa') = \int \frac{d\kappa''}{k_0 k_z(\kappa'')} (k_0^2 - \kappa'\kappa'')^2 \tilde{W}(\kappa' - \kappa''). \quad (2.34)$$

Ainsi, nous obtenons une impédance effective pour la surface rugueuse, puisque celle-ci a été conceptuellement remplacée par une surface plane en $z = 0$ avec une impédance $Z_p(\kappa)$.

En considérant une surface plane, le spectre des hauteurs $\tilde{W}(\kappa - \kappa')$ intervenant dans les impédances effectives $Z_h(\kappa)$ et $Z_v(\kappa)$ est nul. Dans ce cas, les coefficients de réflexion (2.25) et (2.26) s'écrivent $R_h(\kappa) = -1$ et $R_v(\kappa) = +1$. Nous retrouvons les coefficients de réflexion pour une surface plane parfaitement conductrice.

2.4.3 Equation de Bethe-Salpeter et intensité moyenne du champ

Dans la section précédente, nous avons considéré le champ cohérent, où moment d'ordre un du champ total dans l'espace supérieur. Si la surface est faiblement rugueuse par rapport à la longueur d'onde, ce champ prédomine. Néanmoins, l'accroissement de la rugosité de la surface, où à des distances éloignées de la source, le champ cohérent diminue et le champ incohérent devient dominant. L'équation exacte décrivant l'intensité totale du champ dans tout l'espace supérieur est l'équation de Bethe-Salpeter [131]. Elle est donnée par l'équation intégrale

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) &= \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle + \\ &\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}'_1) \rangle \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) \end{aligned} \quad (2.35)$$

A partir de cette équation fondamentale, nous pouvons obtenir la partie diffuse ou fluctuante du champ ou intensité moyenne du champ que nous noterons Γ_f , correspondant au terme sous l'intégrale dans le membre de droite. C'est une équation fermée, au même titre que l'équation de Lipmann-Schwinger (2.3), et que l'on itère à l'infini, dans $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$, pour obtenir une série. Le terme de gauche dans le membre de droite correspond à l'intensité cohérente. Le terme sous l'intégrale peut s'écrire, sous la forme approchée de Bourret (Annexe C) par :

$$\Gamma_f = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}'_1) \rangle \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_0) \rangle. \quad (2.36)$$

Dans la section suivante 2.5, l'équation sera développée dans le but d'obtenir les coefficients de diffusion bistatiques incohérents en champ lointain pour le cas IBC, duquel découlent les conditions de Neumann et Dirichlet. Ici, les coefficients de diffusion bistatiques incohérents sont donnés directement par

$$\sigma_{h1}^{MPPM}(\kappa_0, \kappa_1) = \frac{4}{k_0} \frac{k_z^2(\kappa_0) k_z^2(\kappa_1) \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0)}{|1 + \eta_{h1}(\kappa_0)|^2 |1 + \eta_{h1}(\kappa_1)|^2}, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{v1}^{MPPM}(\kappa_0, \kappa_1) = \frac{4}{k_0} \frac{(k_0^2 - \kappa_0 \kappa_1) \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0)}{|1 + \eta_{v1}(\kappa_0)|^2 |1 + \eta_{v1}(\kappa_1)|^2}, \quad (2.38)$$

où l'exposant MPPM signifie Méthode des Petites Perturbations Modifiée, $\eta_{h1}(\kappa) = \frac{k_z(\kappa)}{k_0} Z_{h1}(\kappa)$, $\eta_{v1}(\kappa) = \frac{k_0}{k_z(\kappa_0)} Z_{v1}(\kappa)$. La paire $(\kappa_0 = k_0 \sin \theta_i, \kappa_1 = k_0 \sin \theta_s)$ représente les nombres d'ondes projetés sur l'axe x des champs incident et diffusé, respectivement, au point \mathbf{r}_{1c} comme sur la figure D.1. Les coefficients de diffusion bistatiques au premier ordre de la méthode des petites perturbations (MPP1) pour les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann sont, respectivement, [15]

$$\sigma_{h1}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1) = \frac{4}{k_0} k_z^2(\kappa_0) k_z^2(\kappa_1) \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0), \quad (2.39)$$

$$\sigma_{v1}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1) = \frac{4}{k_0} (k_0^2 - \kappa_0 \kappa_1)^2 \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0). \quad (2.40)$$

Les coefficients bistatiques de diffusion au second ordre sont donnés, pour les termes de co-polarisations par [71]

$$\sigma_{p2}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1) = \frac{k_z^2(\kappa_0)}{k_0} \Re \left\{ \int d\kappa' \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa') \tilde{W}(\kappa' - \kappa_0) \right. \\ \left. [|A_p(\kappa_1, \kappa')|^2 + A_p(\kappa_1, \kappa') A_p^*(\kappa_1, -\kappa' + \kappa_1 + \kappa_0)] \right\}, \quad (2.41)$$

où $p = h, v$ et

$$A_p(\kappa_1, \kappa') = \begin{cases} 2k_z(\kappa_0)k_z(\kappa') & \text{pour } p = h \\ \frac{2}{k_z(\kappa_1)k_z(\kappa')} (k_0^2 - \kappa_1 \kappa') (\kappa' \kappa_0 - k_0^2) & \text{pour } p = v \end{cases}. \quad (2.42)$$

Le coefficient de diffusion bistatique au second ordre s'écrit

$$\sigma_{p(1-2)}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1) = \sigma_{p1}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1) + \sigma_{p2}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1). \quad (2.43)$$

Le coefficient de diffusion bistatique pour la MPP modifiée du premier ordre s'exprime, en terme de la MPP conventionnelle comme

$$\sigma_{p1}^{MPPM}(\kappa_0, \kappa_1) = \sigma_{p1}^{MPP}(\kappa_0, \kappa_1) |F_{p1}(\kappa_0)|^2 |F_{p1}(\kappa_1)|^2, \quad (2.44)$$

où $|F_{p1}(\kappa_0)|^2$ et $|F_{p1}(\kappa_1)|^2$ correspondent aux termes $1/|1 + \eta_{p1}(\kappa_{0,1})|^2$ dans (2.37) et (2.38) et sont appelés facteurs de correction.

Il est important de noter l'étude des auteurs dans [86]. Ils traitent de la condition aux limites de Neumann et développe une impédance effective à partir de l'amplitude de diffusion $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$ et du théorème d'extinction, dans lequel $\exp\{ik_z(\mathbf{k}_\perp)\zeta(\mathbf{r})\}$ est développé perturbativement au premier ordre en terme de $k_z\zeta$. Cette méthode est issue de [125], [99] pour l'étude de la propagation d'ondes dans les milieux dont la permittivité est une fonction aléatoire. Ils expriment la moyenne et la partie fluctuante de l'amplitude de diffusion $R(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp})$ et du champ inconnu $E(\mathbf{r}, \mathbf{k}_\perp)$ sur la surface. Ils obtiennent alors un couple d'équations intégrales qui, à l'aide des transformées de Fourier, leur permet de déterminer le coefficient de réflexion et l'impédance de surface de Neumann, en adéquation avec (2.28) et (2.30), et le coefficient de diffusion, également équivalent à (2.38). A noter que leurs résultats s'appuient sur, et vérifient, des travaux plus anciens [132]. Par la suite, Bass [110] a développé et généralisé cette théorie pour la diffraction d'ondes par des surfaces statistiquement rugueuses, en considérant la rugosité comme une perturbation des conditions aux limites. La méthode de sommation par les diagrammes de Feynmann pour résoudre la problématique de diffusion par des surfaces rugueuses a été développée pour la première fois dans [111].

2.4.4 Simulations numériques

Puisque $k_z(\kappa') = \sqrt{k_0^2 - \kappa'^2}$, dans les impédances effectives au premier ordre (2.29) et (2.30), seules les composantes spectrales de la surface rugueuse pour lesquelles le nombre d'ondes spatial est plus petit que la longueur d'onde, i.e. $|\kappa'| \leq k_0$ (donnant une intégrande réelle, car le spectre de la surface est réel) contribuent à la portion résistive de l'impédance de la surface et produisent des ondes propagatives diffusées dans le milieu supérieur. Ainsi, cela est rendu possible si les composantes spectrales du spectre des hauteurs $\tilde{W}(\kappa - \kappa')$ a des fréquences spatiales respectant $-k_0 \leq \kappa' \leq +k_0$, c'est à dire $-k_0 + \kappa \leq \kappa - \kappa' \leq +k_0 + \kappa$. Donc, si l'angle d'incidence est $\theta_i = 0^\circ$, $\Rightarrow \kappa = k_0 \sin \theta_i = 0$, alors les vagues ayant des composantes spectrales $-k_0 \leq \kappa - \kappa' \leq +k_0$ contribuent à la portion résistive. Lorsque l'angle d'incidence $\theta_i = 90^\circ$, donc $\kappa = k_0$, ce sont les vagues ayant des composantes spectrales $0 \leq \kappa - \kappa' \leq +2k_0$ qui contribuent à la portion résistive de l'impédance. Dans ce cas, cela signifie que seules les vagues supérieures à une demi-longueur d'onde peuvent contribuer à la portion résistive. Ce sont ces vagues qui produisent le champ diffusé par le mécanisme de Bragg.

D'autre part, les composantes spectrales $|\kappa'| > k_0$, participent à la portion réactive (partie imaginaire) de l'impédance de surface. Elles ne produisent pas d'ondes propagatives mais des ondes évanescentes. L'auteur dans [128] a étudié les impédances effectives au second ordre (2.31) et (2.33). On peut retrouver une démonstration théorique dans l'annexe B de l'article cité auparavant. Il montre qu'au second ordre, en plus des conditions pour l'impédance au premier ordre ci-dessus, le second ordre impose de nouvelles conditions. La partie réelle de l'impédance effective $Z_{p2}(\kappa)$ se décompose en deux contributions : l'une correspondant à des ondes propagatives (donc $|\kappa'| \leq k_0$), l'autre étant des ondes évanescentes (donc $|\kappa'| > k_0$). Il apparaît de cette décomposition que les ondes évanescentes augmentent la partie résistive de l'impédance de surface. De même, la partie imaginaire de l'impédance effective $Z_{p2}(\kappa)$ se décompose en deux intégrales. Itô montre alors que les composantes $|\kappa'| \leq k_0$ jouent un rôle dans la décroissance de la partie réactive de l'impédance. Physiquement, cela suggère que l'effet d'interactions multiples dû à la rugosité de la surface permet un transfert d'énergie entre les modes propagatifs et évanescents (ordre un), et également, un transfert d'énergie entre les mêmes modes. Par exemple, dans la partie imaginaire (donc correspondant aux ondes évanescentes) de l'impédance de surface à l'ordre deux, une partie de l'énergie des modes évanescents est diffusée dans l'espace libre, l'autre partie est transférée en d'autres modes évanescents, due à la décomposition de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa'$ en $\int_{|\kappa'| < k_0} d\kappa' + \int_{|\kappa'| > k_0} d\kappa'$ dans $Z_{p2}(\kappa)$.

Validation avec les travaux de la littérature

Avant de comparer la MPP modifiée avec la méthode de référence (la MdM), nous avons vérifié la théorie et la programmation en reprenant les paramètres de simulations de Itô [128] et Ishimaru [98]. Ce qui suit en est un bref aperçu.

Tout d'abord, nous présentons ici (figure 2.4) une partie des simulations pour les impédances effectives normalisées par $(k_0 \sigma_\zeta)^2$, conformément à Itô [128], pour un spectre des hauteurs Gaussien, dont l'expression est

$$\tilde{W}(\kappa) = \frac{\sigma_\zeta^2 l_c}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\kappa^2 l_c^2}{4}}. \quad (2.45)$$

L'annexe B présente une étude du pôle pour l'impédance effective au premier ordre dans le cas Neumann.

Les impédances effectives du second ordre ont été programmées avec $(k_0 \sigma_\zeta)^2 = 0.04$ ($\sigma_\zeta = 0.0318\lambda$), puisqu'elles dépendent de ce paramètre après que la normalisation ait été faite (voir équation 2.47).

Il est possible par exemple d'écrire l'impédance effective $Z_{h1}(\kappa)$ au premier ordre (2.29) dans le cas Dirichlet, en effectuant les changements de variables $k_z(\kappa') = k_0 \cos \theta'$ et $\kappa' = k_0 \sin \theta'$

$$\frac{Z_{h1}(\kappa)}{(k_0 \sigma_\zeta)^2} = \frac{1}{2\pi} \int d \sin \theta' k_0 l_c \cos \theta 2\pi^{3/2} \tilde{F}(k_0(\sin \theta - \sin \theta')). \quad (2.46)$$

où $\tilde{F}(k_0(\sin \theta - \sin \theta')) = e^{-\left[\frac{k_0 l_c}{2}(\sin \theta - \sin \theta')\right]^2}$ et correspond au spectre Gaussien (2.45) après normalisation par le terme $(k_0 \sigma_\zeta)^2$, et pour $Z_{h2}(\kappa)$, impédance effective du second ordre

$$\frac{Z_{h2}(\kappa)}{(k_0 \sigma_\zeta)^2} = \frac{1}{2\pi} \int d \sin \theta' \left[\frac{k_0 l_c 2\pi^{3/2} \tilde{F}(k_0(\sin \theta - \sin \theta')) \cos \theta'}{1 + \frac{\cos \theta'}{2\pi} \int d \sin \theta'' k_0 l_c 2\pi^{3/2} (k_0 \sigma_\zeta)^2 \tilde{F}(k_0(\sin \theta' - \sin \theta'')) \cos \theta''} \right]. \quad (2.47)$$

Le résultat est similaire pour le cas Neumann.

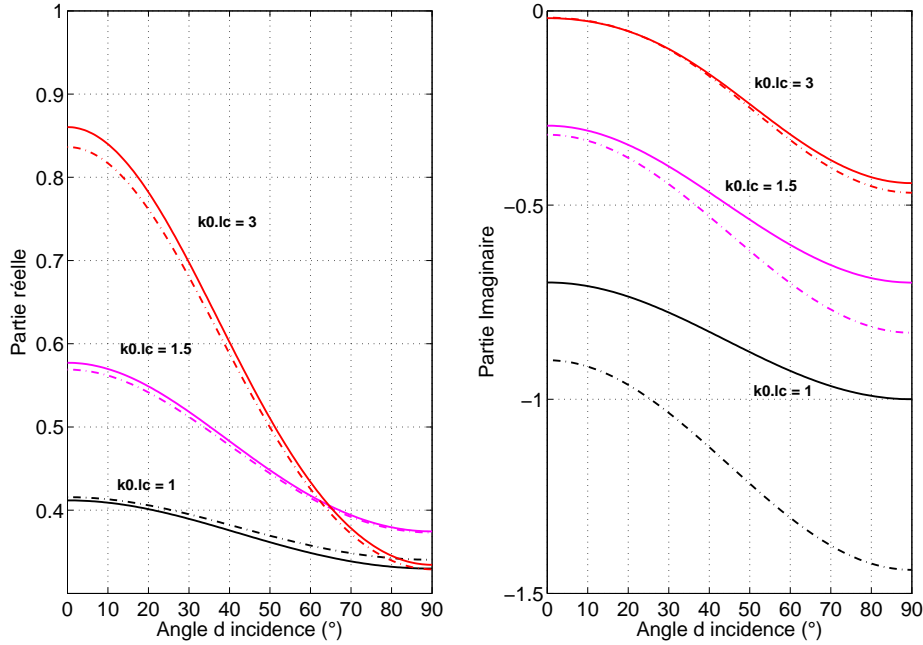


FIG. 2.4 – Impédance effective pour un spectre des hauteurs Gaussien. Cas d'une surface Dirichlet. Impédance du second ordre programmée pour $(k_0 \sigma_\zeta)^2 = 0.04$. $k_0 l_c = \{1; 1.5; 3\}$. Le second ordre est en trait discontinu.

La réactance (partie imaginaire de l'impédance) négative pour le cas Dirichlet représente une capacitance. Le résultat, non présenté, pour le cas Neumann indique une réactance positive, représentant une inductance. Les composantes résistives (parties réelles des impédances) décroissent lorsque l'angle d'incidence augmente. Et d'autant plus lorsque les valeurs $k_0 l_c$ ($k_0 l_c = \{1; 1.5; 3\} \Rightarrow l_c = \{1; 1.5; 3\} \frac{\lambda}{2\pi}$) sont plus grandes. En revanche, lorsque l'angle d'incidence devient rasant ($\theta_i \rightarrow 90^\circ$), les composantes réactives augmentent (dans le négatif pour le cas Dirichlet, et dans le positif pour le cas Neumann). De plus, pour ces angles, l'augmentation de l'impédance de surface au second ordre, surtout pour les composantes réactives, s'observe aisément pour $k_0 l_c$ devenant petit. Itô en déduit que cela peut venir de

la contribution de l'onde de surface, c'est à dire la contribution dans (2.23) et (2.24) de l'intégrale au voisinage des pôles de l'onde de surface qui sont proches de l'axe réel κ' . Cependant, dans la limite où $k_0 l_c \rightarrow 0$, un tel réhaussement de l'impédance au second ordre n'apparaît pas, puisque l'impédance de surface devient nulle. Il en ressort la constatation suivante : la longueur de corrélation de la surface, pour une fréquence d'émission et un écart type des hauteurs σ_ζ fixés, est donc influente sur le second ordre en particulier, et surtout pour la partie imaginaire de l'impédance de surface. En effet, lorsque le terme $k_0 l_c$ diminue, revenant à dire que la longueur de corrélation diminue, et donc l'écart type des pentes augmente (car pour un spectre des hauteurs gaussien $\sigma_p = \sqrt{2}\sigma_\zeta/l_c = \frac{2\pi 0.0318\sqrt{2}}{\{1;1.5;3\}}$), la surface est donc plus rugueuse, ce qui explique que le second ordre, dû à la diffusion multiple, est plus important.

Nous avons également vérifié les facteurs de correctifs au premier ordre $|k_0/[k_0 + k_z(\kappa)Z_{h1}(\kappa)]|^2$ et $|k_z(\kappa)/[k_z(\kappa) + k_0 Z_{v1}(\kappa)]|^2$ pour les cas Dirichlet et Neumann. A noter qu'Itô calcule également les intensités cohérente et incohérente.

Nous avons également vérifié les coefficients de diffusion obtenu par d'Ishimaru *et al* dans l'étude pour le cas Dirichlet, pour une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne. Les tracés sont paramétrés par $k_0 \sigma_\zeta$. L'angle d'incidence vaut $\theta_i = 45^\circ$, le nombre d'onde $k_0 = 4.24$ rad/m, soit la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k_0 \approx 1.48$ m. La fréquence d'émission est alors $f \approx 200$ MHz. Pour $k_0 \sigma_\zeta \leq 0.25$, il est observé que les trois théories donnent approximativement les mêmes résultats. Ainsi, Ishimaru conclut son article en ayant montré que lorsque $k_0 \sigma_\zeta$ augmente, la MPP conventionnelle augmente plus rapidement que la MPP Modifiée, ou la MPP de Itô. Cependant, contrairement à Itô, leurs résultats ne satisfont pas au critère de conservation de l'énergie. Pour cela, il convient de prendre en compte les ordres supérieurs, donc la théorie dite "cyclique". Celle-ci a déjà été étudiée par le même auteur pour des diffuseurs discrets [38]. Ces travaux précurseurs ont d'ailleurs permis de prédire théoriquement les pics de rétro-diffusion dus aux plasmons de surface, discutés brièvement dans le chapitre un.

Impédances effectives

Tout d'abord, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable pour programmer numériquement les spectres des hauteurs $\tilde{W}(\kappa - \kappa')$ et $\tilde{W}(\kappa' - \kappa'')$. On utilise alors la transformation $U_1 = (\kappa - \kappa')l_c/2$ pour l'impédance de surface à l'ordre un, d'où $\kappa' = -2U_1/l_c + \kappa$, et $U_2 = (\kappa' - \kappa'')l_c/2 = -U_1 + (\kappa - \kappa'')l_c/2$ pour l'impédance de surface à l'ordre deux. Puis on pose les bornes d'intégration $U_i \in [-5; +5]$ rad dans le cas Gaussien, et $U_1 = \kappa - \kappa'$, $U_2 = \kappa' - \kappa''$, avec $U_i \in [0, 15k_p; +1500]$ rad/m pour le spectre de mer, où $k_p = 9.81 \times 0.84^2/U_{10}^2 \approx 6.92/U_{10}^2$. L'expression du spectre de mer est donnée dans [29].

Les figures 2.5 à 2.8 présentent les parties réelle (résistive) et imaginaire (réactive) des impédances de surface effectives en fonction de l'angle d'incidence θ_i . Les courbes en trait plein sont les impédances au premier ordre $Z_{p1}(\kappa)$ et celles en trait pointillé représentent les impédances effectives au second ordre $Z_{p2}(\kappa)$. L'angle d'incidence vaut $\theta_i = 40^\circ$. La fréquence d'émission est $f = 100$ MHz, soit $\lambda = 3$ m. La vitesse du vent est $U_{10} = \{5, 6, 7\}$ m/s, correspondant à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = \{0.16, 0.23, 0.32\}$ m, respectivement. La longueur de corrélation correspondante pour le cas Gaussien est $l_c = \{1.3, 1.7, 2.2\}$ m. L'écart-type des pentes vaut alors $\sigma_p = \{0.16, 0.18, 0.2\}$. On peut observer la décroissance de la partie résistive pour chacune des impédances, aux ordres un et deux. La partie imaginaire quant à elle augmente, négativement pour le cas Dirichlet, positivement pour le cas Neumann (voir discussion au paragraphe 2.4.4).

La réactance négative dans le cas Dirichlet signifie que son comportement est similaire à une capacité (nous avons choisi une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$), tandis que la réactance positive pour le cas Neumann s'apparente à une inductance. Les parties résistives, pour les deux types de surface PC, quant à elles, décroissent à mesure que l'angle d'incidence augmente.

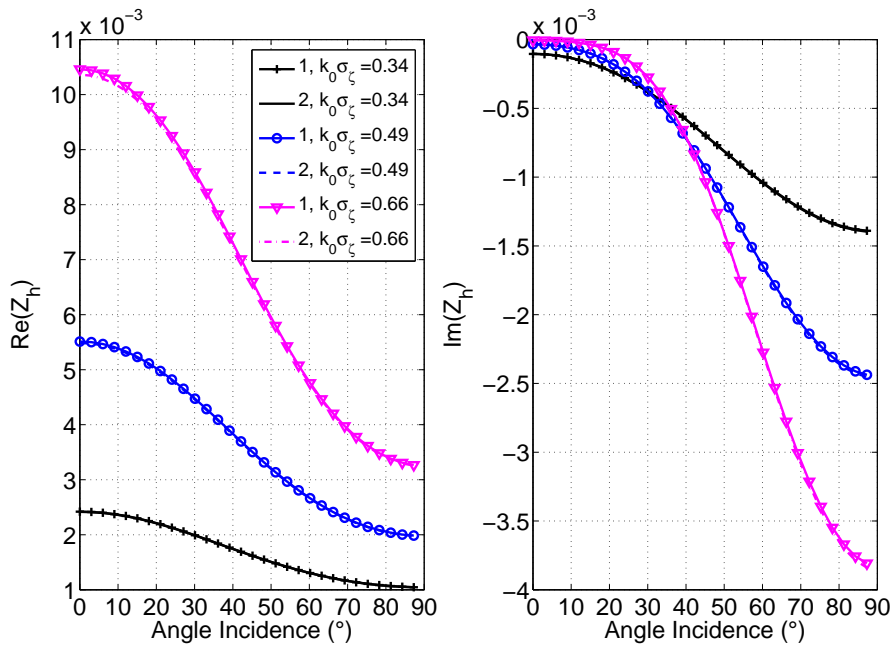


FIG. 2.5 – Impédance effective pour un spectre des hauteurs Gaussien. Cas Dirichlet. Angle d’incidence $\theta_i = 40^\circ$. Fréquence d’émission $f = 100$ MHz, $\lambda = 3$ m. Vitesse du vent $U_{10} = \{5, 6, 7\}$ m/s, correspondant à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = \{0.16, 0.23, 0.32\}$ m, respectivement. Longueur de corrélation $l_c = \{1.3, 1.7, 2.2\}$ m. Ecart-type des pentes $\sigma_p = \{0.16, 0.18, 0.2\}$.

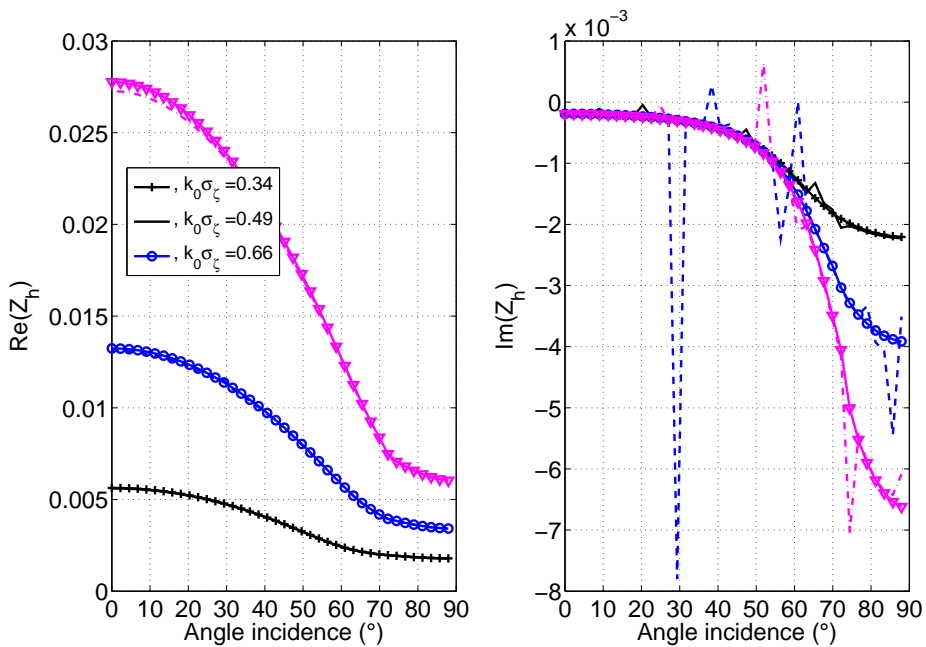


FIG. 2.6 – Même paramètres que pour la figure 2.5 mais pour une surface de mer.

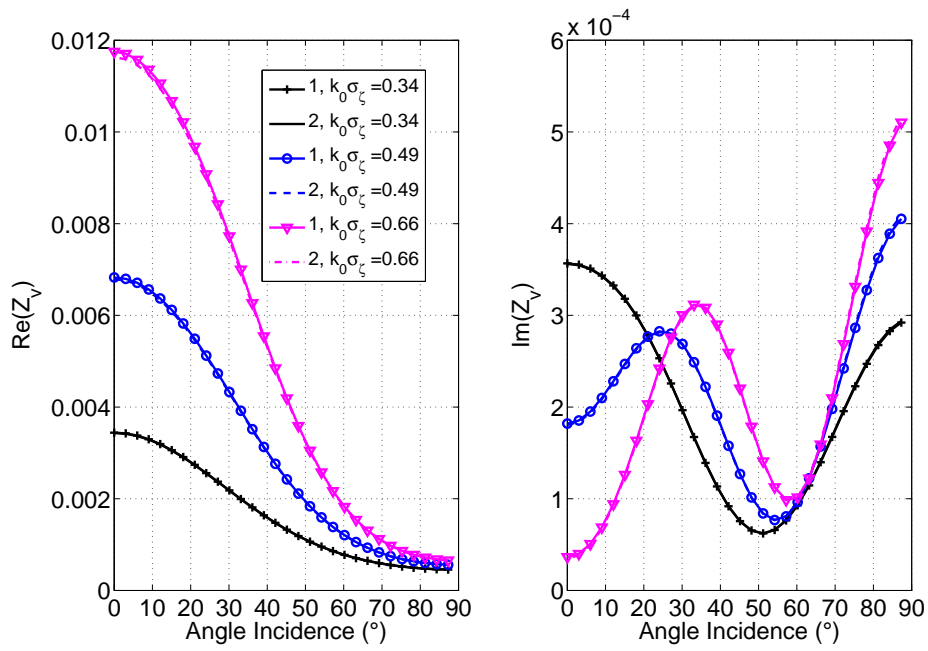


FIG. 2.7 – Mêmes paramètres que pour la figure 2.5, mais pour le cas Neumann.

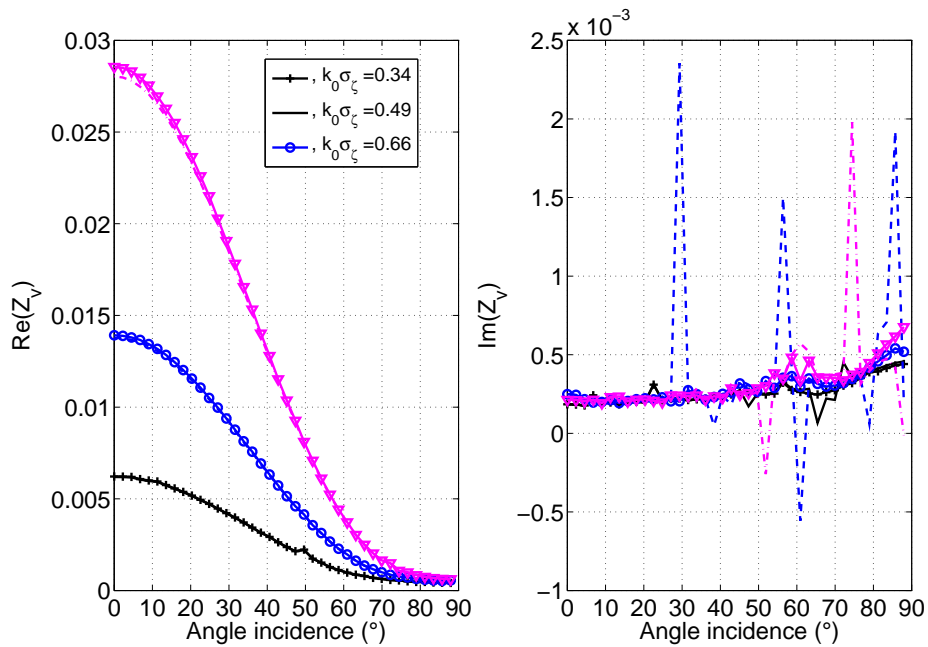


FIG. 2.8 – Même paramètres que pour la figure 2.7 mais pour une surface de mer.

Remarquons également que les comportements diffèrent entre une surface Gaussienne et surface de mer réaliste. Ainsi se positionne l'intérêt d'étudier une mer réaliste, non investiguée dans la littérature.

Sur les figures 2.6 et 2.8, les courbes issues du second ordre présentent des pics non physiques. Pour le cas Neumann, l'intégrande (2.24) présente un pôle. Dans l'annexe B une étude du pôle $k_z \rightarrow 0$ pour l'impédance au premier ordre $Z_{v1}(\kappa)$ est proposée. Le second ordre est plus complexe à évaluer car le pôle vaut $k_0[k_z(\kappa') + k_0 Z_v(\kappa')] \rightarrow 0$. On peut cependant remarquer que la prise en compte du second ordre de l'impédance effective de surface n'est pas primordial pour interpréter le processus de diffusion, et l'on peut alors le négliger. Ainsi, le temps de calcul sur un PC de bureau est moins important puisqu'à l'ordre 1, seule une intégration numérique est nécessaire, au lieu de deux pour l'ordre 2. Comme pour le cas Gaussien, la partie imaginaire pour le cas Neumann augmente lorsque l'on s'approche des incidences rasantes. Cela signifie que la partie réactive de la surface contribue plus fortement, et donc les ondes évanescentes sont à considérer à de telles incidences. Pour des incidences modérées, la partie réelle est plus importante, et donc les ondes propagatives contribuent le plus.

Coefficient de réflexion

Les impédances effectives qui ont été présentées interviennent dans les coefficients de réflexion $R_h(\kappa)$ et $R_v(\kappa)$. Les figures 2.9 à 2.10 montrent les coefficients de réflexion R_{h1} et R_{v1} à partir des impédances effectives à l'ordre un. Les équations en jeu sont (2.27) et (2.28).

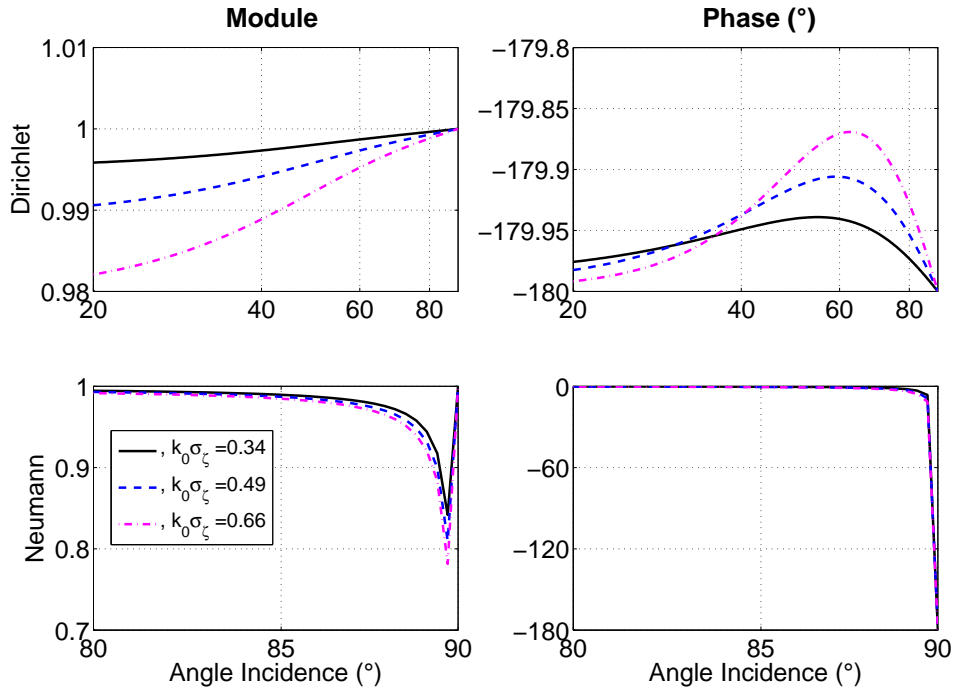


FIG. 2.9 – Coefficients de réflexion pour un spectre des hauteurs Gaussien. Cas Dirichlet en haut, Neumann en bas. Mêmes paramètres que sur la figure 2.5.

Il existe un angle de Brewster lorsque le coefficient de réflexion passe par 0, donc lorsque le numérateur du coefficient de réflexion s'annule :

- Pour une surface plane PC, l'angle de Brewster vaut $\tan \theta_{iB} = n_2/n_1 = \infty/1$ d'où $\theta_{iB} = \pi/2$. Ce phénomène n'intervient donc pas pour une surface PC plane.

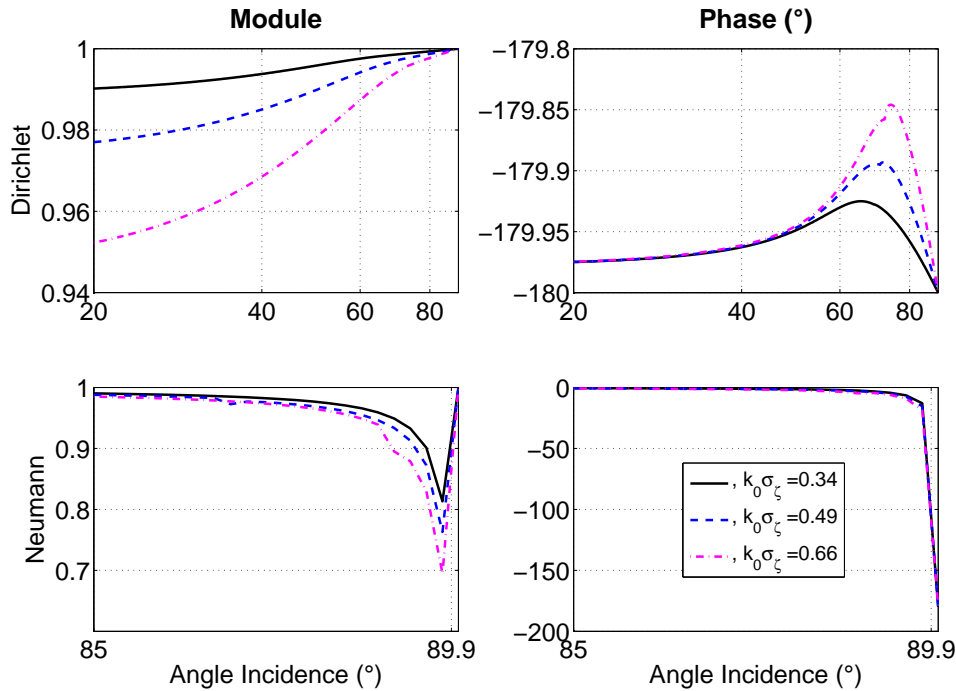


FIG. 2.10 – Même paramètres que pour la figure 2.9 mais pour une surface de mer.

- Dans l'équation du coefficient de réflexion sous la condition aux limites de Dirichlet (2.25), le numérateur s'annule si $k_0/k_z(\kappa) = Z_h(\kappa)$. Ce cas de figure ne se rencontre pas puisque $|Z_h(\kappa)| < 1$ et $|k_0/k_z(\kappa)| > 1$ puisque ce terme se comporte en $1/\cos\theta$. Il n'y a donc pas de phénomène de Brewster pour le cas Dirichlet.
- Dans le coefficient de réflexion de Neumann (2.26), le numérateur s'annule si $k_z(\kappa)/k_0 = Z_v(\kappa)$. Ce cas de figure se rencontre puisque $|Z_v(\kappa)| < 1$ et $|k_z(\kappa)/k_0| < 1$ car ce terme se comporte en $\cos\theta$. Le phénomène de Brewster apparaît donc pour le cas Neumann.

Comme le mentionne également Barrick *et al* dans [85], la rugosité fait exhiber un angle de Brewster pour la polarisation verticale, et qui ne s'observe pas pour une surface plane. On voit en effet sur les figures 2.9 et 2.10 que la phase du coefficient de réflexion passe de 0° à -180° . On observe également que le module du coefficient de réflexion présente un minimum local⁹ proche de 90° . Puisque l'angle de Brewster n'existe pas pour une surface PC plane, nous appelons le phénomène observé ici, à cause de la rugosité, *pseudo-angle de Brewster*. Nous verrons que celui-ci est observable pour une surface très conductrice plane et rugueuse dans la section suivante. Il est important dans notre cadre d'étude puisque il apparaît sous incidences rasantes, configuration dans laquelle observe le radar côtier. De plus, ajoutons que lorsque la rugosité augmente, cet angle particulier est décalé vers les angles inférieurs, et la valeur associée du coefficient de réflexion décroît.

Pour la polarisation horizontale (Dirichlet), le comportement est identique à celui d'une surface plane parfaitement conductrice. En effet, le module du coefficient de réflexion avoisine l'unité, et sa phase reste quasi-constante (autour de -180°). Cependant, on note, tout comme le cas Neumann, que l'augmentation de la rugosité a une influence sur les niveaux du module et de la phase du coefficient de réflexion.

⁹Pour la polarisation verticale et une surface plane, théoriquement, la partie réelle du coefficient de réflexion passe de la valeur +1 à -1 à l'angle de Brewster.

Facteur de correction

Sur les figures 2.11 et 2.12, les facteurs de correction apparaissant dans les coefficients de diffusion (2.37) et (2.38) sont représentés.

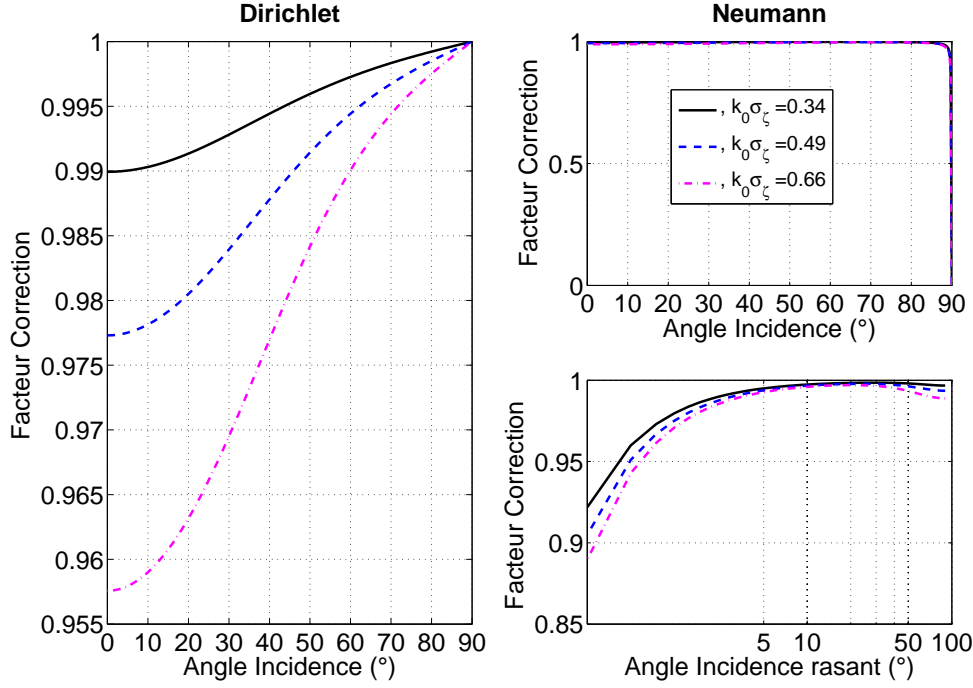


FIG. 2.11 – Facteurs de correction $|F_{p1}(\kappa_0)|^2$ issus de (2.44), pour un spectre des hauteurs Gaussien. Cas Dirichlet à gauche, Neumann à droite. Angle d'incidence $\theta_i = 40^\circ$. Fréquence d'émission $f = 100$ MHz, $\lambda = 3$ m. Vitesse du vent $U_{10} = \{5, 6, 7\}$ m/s, correspondant à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = \{0.16, 0.23, 0.32\}$ m, respectivement. Longueur de corrélation $l_c = [1.3, 1.7, 2.2]$ m. Ecart-type des pentes $\sigma_p = \{0.16, 0.18, 0.2\}$.

Les effets de la diffusion multiple, dus à la rugosité, apparaissent dans les impédances effectives de surface [128]. Ces dernières sont le résultat de l'interaction des ondes avec la surface rugueuse aléatoire. Itô [128] montre que les facteurs de correction $|F_{p1}(\kappa_0)|^2$ et $|F_{p1}(\kappa_1)|^2$ dans la solution au premier ordre (2.44), interviennent également dans les intensités cohérentes¹⁰ au premier ordre, pour les deux polarisations. Plus précisément, les intensités incohérentes $\Gamma_{f1}(\kappa_0, \kappa_1)$ au premier ordre, desquelles sont tirés les coefficients de diffusion incohérents $\sigma_{p1}(\kappa_0, \kappa_1)$ peuvent s'écrire en fonction des intensités cohérentes [86], [128]. En effet, ces dernières comportent le même dénominateur¹¹ en $|1 + \eta_{p1}(\kappa_0)|^2$ que les intensités incohérentes. L'auteur calcule également les intensités incohérentes au second ordre, et montre qu'elles s'expriment en terme des impédances effectives de surface aux ordres un et deux. Les effets de la diffusion multiple, dans le cas Dirichlet (figures 2.11 et 2.12), sont visibles à des angles proches

¹⁰L'intensité cohérente intervient dans le second moment statistique du champ (l'intensité moyenne du champ), au même titre que le champ cohérent intervient au premier moment statistique.

¹¹L'expression qu'en donne Itô, pour les cas Dirichlet et Neumann est

$$\Gamma_p^{coh}(\kappa_0, \kappa_1) = (2\pi)k_0k_z(\kappa_0)R_p(\kappa_0)\delta(\kappa_0 - \kappa_1) \quad (2.48)$$

où la fonction Dirac indique la direction spéculaire, et $R_p(\kappa_0)$ est le coefficient de réflexion.

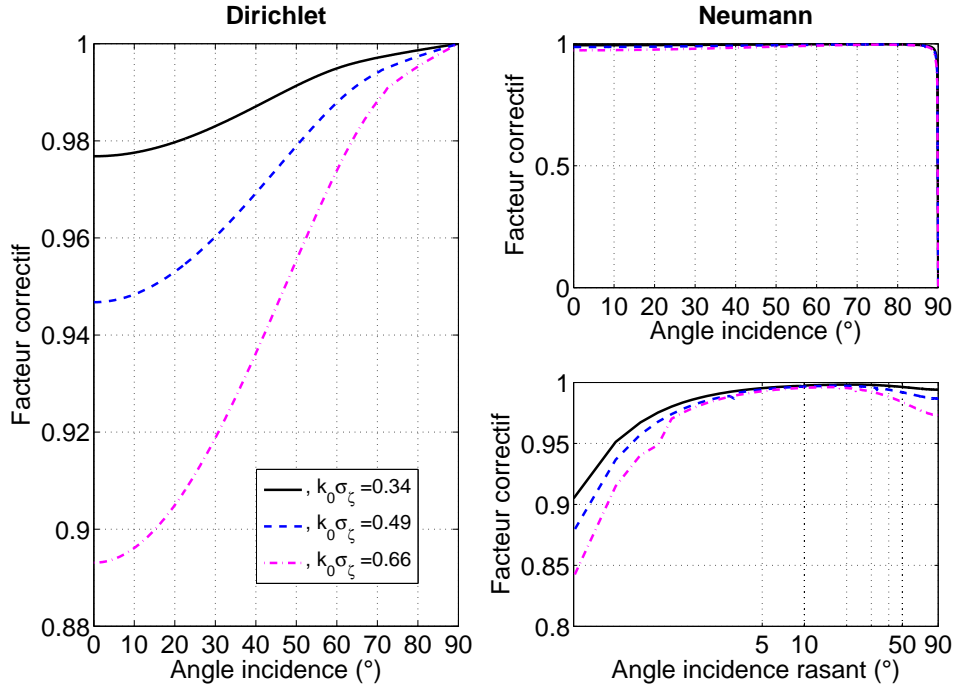


FIG. 2.12 – Mêmes paramètres que pour la figure 2.11 mais pour une surface de mer.

de l'incidence normale, même si ces effets ne sont pas si prépondérants. En effet, la diffusion multiple atténue le signal puisque le facteur correctif est inférieur à 1. Pour des angles d'incidences proches de l'horizontale, le facteur de correction dans le cas Dirichlet avoisine 1, et donc la diffusion multiple n'est pas présente. En revanche, à mesure que l'angle d'incidence augmente pour le cas Neumann, les effets de la diffusion multiple sont plus prononcés, et modifient même considérablement le coefficient de diffusion pour des angles $\theta_i \rightarrow 90^\circ$.

Coefficient de diffusion

Dans ce paragraphe, il est question de présenter les coefficients de diffusion présentés précédemment, pour les deux spectres des hauteurs. La méthode de référence est la MdM.

La longueur de la surface est $L = 100\lambda$, le pas d'échantillonnage $\Delta x = 0.1\lambda$, le paramètre d'atténuation de l'onde incidente de Thorsos vaut $g = L/6$. 100 réalisations de Monte Carlo ont été effectuées. La fréquence d'émission est $f = 100$ MHz d'où la longueur d'onde $\lambda = 3$ m.

Nous avons observé que pour un écart-type des hauteurs faible, $k_0\sigma_\zeta \leq 0.25$, les coefficients de diffusion obtenus par les différentes méthodes sont équivalents (simulations non présentées). Lorsque $k_0\sigma_\zeta$ augmente, les résultats obtenus par la solution perturbative conventionnelle augmente plus rapidement que la méthode perturbative modifiée, qui est assez en accord avec la MdM (figures 2.13, 2.14, 2.15). Cependant, cette dernière est sous la méthode de référence, et, en fait, il est à espérer que les ordres supérieurs de la sommation partielle permettraient de compenser ce défaut en augmentant le niveau afin d'atteindre au mieux la solution de référence. A notre connaissance, les ordres supérieurs n'ont pas été publiés dans la littérature¹². De tels calculs sont d'ailleurs complexes, et on peut s'interroger sur la né-

¹²Il faut souligner tout de même le développement jusqu'au troisième ordre de la MPP classique dans le cas d'une surface diélectrique obtenu par Johnson dans [50]

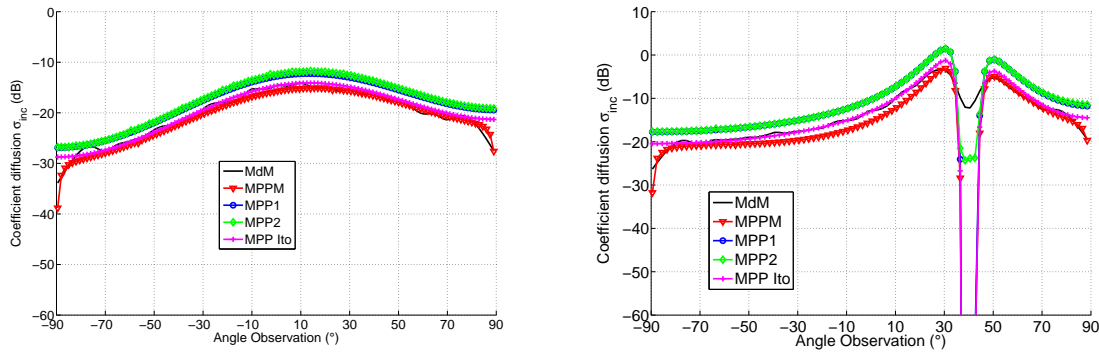


FIG. 2.13 – Coefficient de diffusion pour le cas Neumann à partir des équations (2.38), (2.40), (2.41) et (2.44). Paramètres identiques à la figure 2.7. $\theta_i = 40^\circ$. $f = 100$ MHz. $\sigma_\zeta = 0.16$ m, correspondant à une vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s. Longueur de corrélation $l_c = 1.3$ m. Ecart-type des pentes $\sigma_p = 0.18$. A gauche, pour un spectre Gaussien. A droite, pour un spectre de mer.

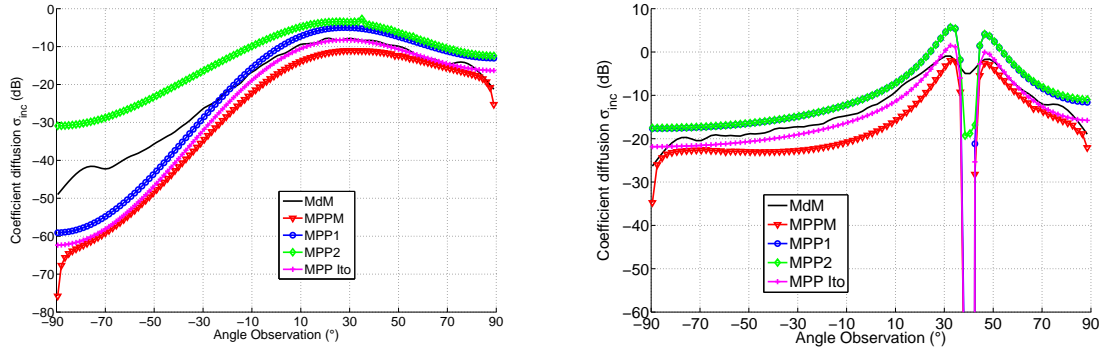


FIG. 2.14 – Paramètres identiques à la figure 2.13. A gauche, pour un spectre Gaussien, pour une vitesse de vent $U_{10} = 7$ m/s, correspondant à $\sigma_\zeta = 0.32$ m, $l_c = 2.2$ m. $\sigma_p = 0.19$. A droite, pour un spectre de mer, pour une vitesse de vent $U_{10} = 6$ m/s, correspondant à $\sigma_\zeta = 0.23$ m. $l_c = 1.7$ m. $\sigma_p = 0.18$.

cessité de pousser si loin les calculs afin de connaître ces termes. Leur influence mériterait tout de même de s'y attarder. De la même façon, il est à espérer que les ordres supérieurs de la MPP contribueraient à décroître la puissance, du moins en rétrodiffusion. Néanmoins, nous avons vu, sur la figure 1.27 du chapitre un, que le second ordre de la MPP dans le cas Neumann venait compenser l'erreur de la MPP au premier ordre. Le second ordre de la MPP conventionnelle pour un spectre des hauteurs Gaussien à $k_0\sigma_\zeta = 0.66$ ($U_{10} = 7$ m/s) montre une surestimation dans la direction de rétro-diffusion. Cependant, pour le cas d'un spectre de mer, le comportement est différent. En effet, la MPP classique faillit dès une vitesse de vent $U_{10} = 6$ m/s, c'est à dire pour $k_0\sigma_\zeta = 0.49$. La MPP modifiée, quant à elle, reste de niveau toujours inférieur à celui de la solution de référence. Au-delà de $U_{10} = 6$ m/s, les deux méthodes MPP conventionnelle et MPP Modifiée passent au dessus du niveau 0 dB, montrant ainsi leur limite de validité pour un spectre de mer à cette fréquence. Ishimaru fait une observation similaire dans [98]. Il est utile de rappeler que la chute du coefficient de diffusion dans le cas d'un spectre de mer est liée à la manière dont est générée la surface.

La solution au premier ordre de Itô [128], basée sur la forme du diagramme de l'équation de Bethe-Salpeter (cas 3 de la figure 2.19), est identique à la formulation de Watson-Keller [121] qui est non

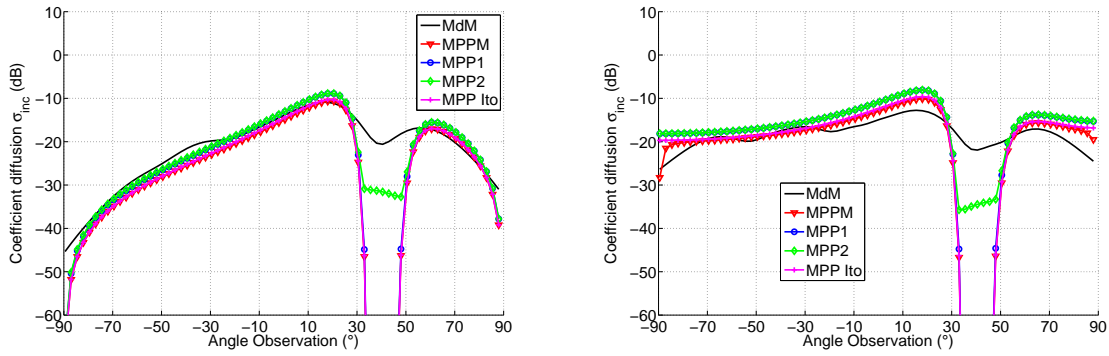


FIG. 2.15 – Coefficient de diffusion pour un spectre des hauteurs de mer. $f = 30$ MHz. $U_{10} = 6$ m/s. Paramètres identiques à la figure 2.14. A gauche, polarisation horizontale, à droite polarisation verticale.

réciroque mais conserve l'énergie. Néanmoins, (2.37) et (2.38) ne satisfont pas au critère de conservation de l'énergie, mais sont réciroques, c'est à dire

$$\sigma(\kappa_0, \kappa_1) = \sigma(-\kappa_1, -\kappa_0). \quad (2.49)$$

Les équations (2.37) et (2.38) satisfont à la condition de réciprocité puisque le spectre des hauteurs est une fonction paire. Fuks *et al* [86] notent de plus que, à partir de la théorie perturbative au premier ordre, non seulement la diffusion de Bragg est prise en compte via le terme $\tilde{W}(\kappa_1 - \kappa)$ dans (2.37) et (2.38), mais aussi l'atténuation de l'onde incidente due au processus de diffusion multiple à travers le facteur de correction $|F_{p1}(\kappa)|^2$ qui contient implicitement le coefficient de réflexion $R_p(\kappa)$. Le raisonnement est identique pour l'onde diffusée, dont l'atténuation due à la diffusion multiple se fait à travers $|F_{p1}(\kappa_1)|^2$, et donc le coefficient de réflexion $R_p(\kappa_1)$. Autrement dit, le terme $1/[1 + \eta_p(\kappa)]$ est issu du coefficient de réflexion, obtenu à partir de l'étude de la fonction de Green cohérente. C'est un terme cohérent donc, qui intervient dans les intensités cohérente et incohérente pour les deux polarisations, comme il en a été fait mention auparavant dans le paragraphe sur les facteurs de correction. Physiquement, dans le coefficient de diffusion (2.44), comme le montre la figure D.1, la présence du terme $1/[1 + \eta_p(\kappa)]$ signifie qu'une onde cohérente, incluant les effets de la rugosité, est incidente au point x_{1c} . L'onde diffusée se propage alors du point de la surface x_{1c} au point d'observation, également comme une onde cohérente incluant les effets de la rugosité [86], [98].

2.5 Cas réel d'une surface de mer de conductivité finie

La littérature fait mention le plus souvent d'une surface rugueuse PC. Les auteurs s'intéressant au cas d'une surface de mer, donc Très Conductrice (TC), sont peu nombreux, et les articles parus sont souvent l'oeuvre de mêmes auteurs : Ishimaru et Barrick, pour citer les plus connus dans le domaine. De plus, seul le cas d'une surface Gaussienne a été traité par le seul auteur [133]. Nous ne présenterons ici que les lignes essentielles, et une partie de la théorie est reprise dans les annexes D et C. Puis nous présenterons des résultats pour une surface de mer réaliste, avec le spectre des hauteurs de Elfouhaily *et al*. Comme pour le cas d'une surface PC discuté ci-dessus, nous allons tracer les impédances effectives, les facteurs de correction et les coefficients de diffusion pour une surface Gaussienne et une surface de mer. Ces résultats numériques, non existants à notre connaissance dans la littérature, sont importants puisque l'impédance effective sera utilisée dans le chapitre 3 pour l'étude des incidences rasantes.

2.5.1 Formulation du problème pour une surface de conductivité finie

Lorsque la surface est très conductrice, la condition aux limites satisfaisant (2.8) est une combinaison linéaire des conditions de Neumann et Dirichlet, que nous avons vues dans (1.60). Les conditions aux limites, pour une surface perturbée [6] sont :

$$\text{TE} \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.50)$$

$$\text{TM} \quad \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \alpha_0 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0. \quad (2.51)$$

où $\beta_0 = -iZ_s/(k_0Z_0)$, pour le cas TE, et où $\alpha_0 = ik_0Z_s/Z_0$ pour le cas TM, $\partial/\partial n$ est la dérivée normale, $Z_0 = 120\pi \Omega$ et Z_s est l'impédance de surface d'une surface plane [134]

$$Z_s = \frac{Z_0}{n} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{(k_0n)^2}} = Z_0\Delta, \quad (2.52)$$

où $n = \epsilon + i\sigma/(\omega\epsilon_0)$ est l'indice de réfraction du milieu conducteur. Les potentiels perturbés de surface $V(\mathbf{r})_{TE, TM}$ sont donnés pour les cas TE et TM par [133]

$$V(\mathbf{r})_{TE} = \beta_0 \left(\zeta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.53)$$

$$V(\mathbf{r})_{TM} = \zeta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_0 \zeta \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.54)$$

De façon similaire au cas PC, à partir des développements en série de la dérivée normale (2.11) et de la fonction de Green (2.12), on obtient l'équation intégrale suivante

$$G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_p^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int_{\zeta_1=0} d\mathbf{r}_1 G_p^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V_p(\zeta(x_1)) G_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0), \quad (2.55)$$

où, $\mathbf{r} = (x, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, z_0)$ et $\mathbf{r}_1 = (x_1, z_1 = 0)$. $G^{(0)}$ est la fonction de Green pour une surface plane, et est par conséquent une fonction déterministe, tandis que le potentiel $V_p(\zeta(x_1))$ et la fonction de Green $G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ sont des fonctions aléatoires. A partir de l'équation (2.55), les moments statistiques d'ordres supérieurs peuvent être calculés, conduisant au champ cohérent et à l'intensité incohérente. Le moment statistique d'ordre un $\langle G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ est obtenu à partir de l'équation de Dyson (2.18), où nous avons vu que l'opérateur de Masse était approximé à son premier terme (figure. 2.3-b) par la méthode de *smoothing*. Nous présentons dans la section 2.5, une partie du développement pour le cas d'une surface très conductrice pour la polarisation verticale.

A partir de la résolution de l'équation de Dyson il est possible d'obtenir les coefficients de réflexion pour les deux polarisations. Dans ce qui suit, le cas TM est traité. Le cas TE n'est pas présenté, mais il se déduit de la même manière [133].

2.5.2 Equation de Dyson pour le champ cohérent

Pour un milieu statistique homogène, l'opérateur de masse est statistiquement invariant par translation, de sorte que le champ cohérent est aussi invariant par translation :

$$\langle V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (2.56)$$

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = \langle G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rangle. \quad (2.57)$$

L'opérateur de masse de l'équation de Dyson est la somme des diagrammes connectés dans la technique des diagrammes de Feynmann. Une connection représente une corrélation de deux points de la surface associés à leur fonction de Green correspondante qui résout l'équation d'onde *locale* entre ces points. La "first-order smoothing approximation" (approximation *lissée* au premier ordre) consiste à réduire l'expression de cet opérateur de masse à son premier terme. A partir de l'équation de Dyson, $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ s'écrit :

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \langle V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) \rangle \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle dx_1 dx_2, \quad (2.58)$$

où le coefficient de réflexion modifié $R(\kappa)$ peut être déduit.

La fonction de Green $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ étant une solution particulière de l'équation de propagation d'onde pour une source ponctuelle placée à l'infini, elle peut être décomposée sur une base d'ondes planes grâce à la formule de Weyl, et grâce au théorème de superposition [20]. Exprimons la représentation spatiale de la fonction de Green d'une surface plane par sa transformée de Fourier [135] :

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa)} e^{ik_z(\kappa)|z-z_0|} e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa}_{G_{direct}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa)} R_0(\kappa) e^{ik_z(\kappa)(z+z_0)} e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa}_{G_{réfléchi}}. \quad (2.59)$$

Les vecteurs d'ondes sont représentés figure 2.16. Le premier terme du membre de droite dans (2.59) fait

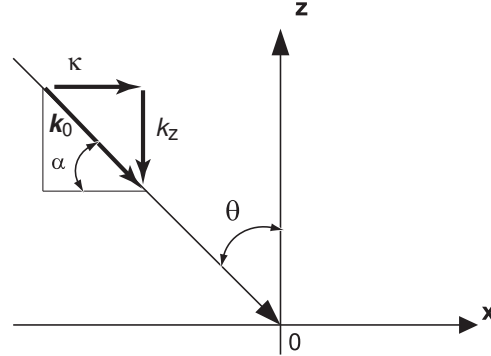


FIG. 2.16 – Représentation schématique du vecteur d'onde incident et de ses projections horizontale et verticale sur la base cartésienne.

référence au champ d'un point source dans un espace infini, et correspond au trajet direct (G_{direct}) entre le point source \mathbf{r}_0 et le point d'observation \mathbf{r} . Le second terme correspond au champ réfléchi ($G_{réfléchi}$), et traduit le trajet entre l'image du point source \mathbf{r}_0^I et le point d'observation (figure 2.17). $R_0(\kappa)$ est le coefficient de réflexion, où l'indice 0 fait référence au plan.

La condition de radiation est satisfaite puisque l'onde se propageant vers les z positifs, se comportant en $\exp(ik_z(\kappa)z)$, avec $\Im m(k_z(\kappa)) \geq 0$, de sorte que $|\exp(ik_z(\kappa)z)|$ tend vers 0 lorsque le point d'observation $z \rightarrow +\infty$.

De la même manière, nous pouvons écrire

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa)} \underbrace{\left[e^{ik_z(\kappa)|z-z_1|} + R_0(\kappa) e^{ik_z(\kappa)(z+z_1)} \right]}_{\tilde{G}^{(0)}(\kappa, z, z_1)} e^{i\kappa(x-x_1)} d\kappa, \quad (2.60)$$

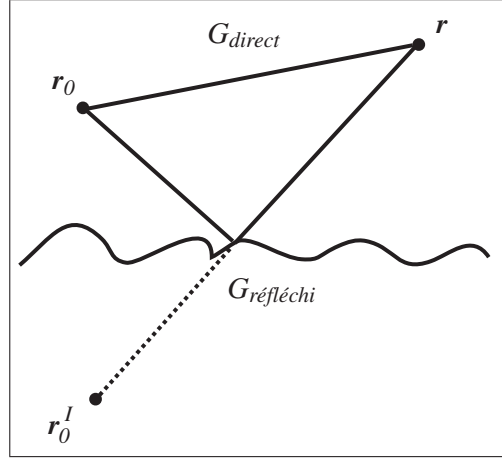


FIG. 2.17 – Interprétation géométrique de la fonction de Green pour un point source (2.59).

$$G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa')} \underbrace{\left[e^{ik_z(\kappa')|z_1-z_2|} + R_0(\kappa')e^{ik_z(\kappa')(z_1+z_2)} \right]}_{\tilde{G}^{(0)}(\kappa', z_1, z_2)} e^{i\kappa'(x_1-x_2)} d\kappa', \quad (2.61)$$

$$\langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa''')} \underbrace{\left[e^{ik_z(\kappa''')|z_2-z_0|} + R(\kappa''')e^{ik_z(\kappa''')(z_2+z_0)} \right]}_{\tilde{G}(\kappa''', z_2, z_0)} e^{i\kappa'''(x_2-x_0)} d\kappa''', \quad (2.62)$$

où $R(\kappa''')$ est le coefficient de réflexion pour une surface rugueuse. La corrélation entre les points $\mathbf{r}_1 = (x_1, \zeta(x_1))$ et $\mathbf{r}_2 = (x_2, \zeta(x_2))$ contenue implicitement dans le terme $\langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2) \rangle$ de (2.58), s'écrit dans le domaine spectrale

$$\langle \tilde{\zeta}(x_1)\tilde{\zeta}(x_2) \rangle = \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa''(x_1-x_2)} d\kappa'', \quad (2.63)$$

où $\tilde{W}(\kappa'')$ représente le spectre des hauteurs de la surface.

A l'aide de l'expression (2.54), si l'on développe $V(\mathbf{r}_1)$ et $V(\mathbf{r}_2)$ dans l'équation de Dyson, celle-ci devient, pour le cas TM :

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle &= G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \left\langle \left(\zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_0 \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\zeta_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_0 \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right\rangle \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Les dérivées du potentiel $V(\mathbf{r}_1)$ opèrent sur $G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, et celles de $V(\mathbf{r}_2)$ opèrent sur $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)$. Dans la suite de la démonstration, nous posons par simplicité,

$$\begin{cases} k_z(\kappa) = k_z, \\ k_z(\kappa') = k'_z, \\ k_z(\kappa'') = k''_z, \\ k_z(\kappa''') = k'''_z. \end{cases}$$

Réécrivons l'équation de Dyson (2.58) développée, d'après (2.59)-(2.64) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}^{(0)}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa + \int \int dx_1 dx_2 \\
 &\left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_z} \left\{ \left((ik'_z)^2 - (i\kappa' \kappa'') \right) \left[e^{ik'_z |z_1 - z_2|} + R_0(\kappa') e^{ik'_z(z_1+z_2)} \right] + \right. \right. \\
 &\left. \left. (-i\alpha_0 k'_z) \left[e^{ik'_z |z_1 - z_2|} - R_0(\kappa') e^{ik'_z(z_1+z_2)} \right] \right\} e^{i\kappa'(x_1-x_2)} d\kappa' \times \right. \\
 &\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'''_z} \left\{ \left((ik'''_z)^2 - (-i\kappa'' \kappa''') \right) \left[e^{ik'''_z |z_2 - z_0|} + R(\kappa''') e^{ik'''_z(z_2+z_0)} \right] + \right. \\
 &\left. \left. (-i\alpha_0 k'''_z) \left[e^{ik'''_z |z_2 - z_0|} - R(\kappa''') e^{ik'''_z(z_2+z_0)} \right] \right\} e^{i\kappa'''(x_2-x_0)} d\kappa''' \times \right. \\
 &\left. \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}^{(0)}(\kappa, z, z_1) e^{i\kappa(x-x_1)} d\kappa \times \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa''(x_1-x_2)} d\kappa'' \right]. \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

Faisons maintenant quelques remarques :

- Puisque les fonctions de Green $G^{(0)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ décrivent l'onde pour une surface plane, si le point $\mathbf{r}_{i,j}$ est un point de la surface, alors ses coordonnées sont $\mathbf{r}_{i,j} = (x_{i,j}; 0)$.
- Dans la fonction de Green au comportement aléatoire $\langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle$, \mathbf{r}_2 est un point de la surface. On procède d'abord en opérant la dérivée, puis on pose $\mathbf{r}_{i,j} = (x_{i,j}; 0)$, puisque l'on a ramené au début du raisonnement, dans les conditions aux limites, les points de la surface rugueuse (équation (2.55)) sur la surface équivalente $z = 0$.

L'équation de Dyson devient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}^{(0)}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa + \int \int dx_1 dx_2 \\
 &\left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_z} \left\{ \left((ik'_z)^2 - (i\kappa' \kappa'') \right) \left[1 + R_0(\kappa') \right] \right. \right. \\
 &\left. \left. + (-i\alpha_0 k'_z) \left[1 - R_0(\kappa') \right] \right\} e^{i\kappa'(x_1-x_2)} d\kappa' \times \right. \\
 &\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'''_z} \left\{ \left((ik'''_z)^2 - (-i\kappa'' \kappa''') \right) \left[e^{ik'''_z z_0} + R(\kappa''') e^{ik'''_z z_0} \right] + \right. \\
 &\left. \left. (-i\alpha_0 k'''_z) \left[e^{ik'''_z z_0} - R(\kappa''') e^{ik'''_z z_0} \right] \right\} e^{i\kappa'''(x_2-x_0)} d\kappa''' \times \right. \\
 &\left. \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z} \left[e^{ik_z z} + R_0(\kappa) e^{ik_z z} \right] e^{i\kappa(x-x_1)} d\kappa \times \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa''(x_1-x_2)} d\kappa'' \right]. \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

Intégrons maintenant selon dx_1 et dx_2 . Nous faisons alors apparaître la fonction delta de Dirac, qui est la Transformée de Fourier de l'impulsion unité. Nous avons dans (2.66), en considérant que l'on peut changer l'ordre d'intégration :

$$\int dx_1 e^{i\kappa'' x_1} e^{-i\kappa x_1} e^{i\kappa' x_1} = 2\pi \delta(-\kappa + \kappa' + \kappa''). \quad (2.67)$$

La fonction delta de Dirac vaut

$$\delta(-\kappa + \kappa' + \kappa'') = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\kappa + \kappa' + \kappa'' = 0 \implies \kappa'' = \kappa - \kappa' \\ 0 & \text{pour } -\kappa + \kappa' + \kappa'' \neq 0 \end{cases}. \quad (2.68)$$

De même pour l'intégration suivant dx_2 , nous pouvons noter que

$$\int dx_2 e^{i\kappa'''x_2} e^{-i\kappa''x_2} e^{-i\kappa'x_2} = 2\pi\delta(-\kappa' - \kappa'' + \kappa'''). \quad (2.69)$$

$$\delta(-\kappa' - \kappa'' + \kappa''') = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\kappa' - \kappa'' + \kappa''' = 0 \implies \kappa''' = \kappa' + \kappa'' = \kappa \\ 0 & \text{pour } -\kappa' - \kappa'' + \kappa''' \neq 0 \end{cases}. \quad (2.70)$$

Nous obtenons l'équation de Dyson simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}^{(0)}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa + \\ &\left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_z} \left\{ \left((ik'_z)^2 - (i\kappa'\kappa'') \right) \left[1 + R_0(\kappa') \right] + (-i\alpha_0 k'_z) \left[1 - R_0(\kappa') \right] \right\} d\kappa' \times \right. \\ &\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k''_z} \left\{ \left((ik''_z)^2 - (-i\kappa''\kappa''') \right) \left[e^{ik''_z z_0} + R(\kappa''') e^{ik''_z z_0} \right] + \right. \\ &\left. \left. (-i\alpha_0 k''_z) \left[e^{ik''_z z_0} - R(\kappa''') e^{ik''_z z_0} \right] \right\} e^{-i\kappa'' x_0} d\kappa'' \times \right. \\ &\left. \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z} \left[e^{k_z z} + R_0(\kappa) e^{ik_z z} \right] e^{i\kappa x} d\kappa \times \int \tilde{W}(\kappa'') d\kappa'' \times \right. \\ &\left. 2\pi\delta(-\kappa' - \kappa'' + \kappa''') 2\pi\delta(-\kappa + \kappa' + \kappa'') \right]. \quad (2.71) \end{aligned}$$

Puisque l'on a vu que l'intégration sur x_1 et x_2 nous donne l'égalité $\kappa''' = \kappa' + \kappa'' = \kappa$, nous pouvons dire que $k_z = k''_z = \sqrt{k_0^2 - \kappa'''^2}$. De plus, le coefficient de réflexion est obtenu à l'interface $z = 0$, alors, à partir de toutes ces données, et des conditions d'existence des fonctions de Dirac (2.68) et (2.70), nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}^{(0)}(\kappa, z, z_0) e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa + \\ &\left[\int \frac{i}{2k'_z} \left\{ \left((ik'_z)^2 - (i\kappa'\kappa'') \right) \left[1 + R_0(\kappa') \right] + (-i\alpha_0 k'_z) \left[1 - R_0(\kappa') \right] \right\} d\kappa' \times \right. \\ &\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{i}{2k_z} \right)^2 \left\{ \left((ik_z)^2 - (-i\kappa''\kappa) \right) \left[e^{ik_z |z-z_0|} + R(\kappa) e^{ik_z(z+z_0)} \right] \right. \\ &\left. \left. + (-i\alpha_0 k_z) \left[e^{ik_z |z-z_0|} - R(\kappa) e^{ik_z(z+z_0)} \right] \right\} e^{i\kappa(x-x_0)} d\kappa \times \right. \\ &\left. \left[1 + R_0(\kappa) \right] \times \int \tilde{W}(\kappa'') d\kappa'' \right]. \quad (2.72) \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion sur la surface se détermine en faisant tendre le point d'observation \mathbf{r} vers la surface, alors $z \rightarrow 0$, et le terme $\exp\{ik_z z_0\}$ est facteur commun. Il vient alors

$$\begin{aligned}
 \left[1 + R(\kappa) \right] &= \left[1 + R_0(\kappa) \right] + \\
 &\left[\int \frac{i}{2k'_z} \left\{ \left((ik'_z)^2 - (i\kappa'\kappa'') \right) \left[1 + R_0(\kappa') \right] + (-i\alpha_0 k'_z) \left[1 - R_0(\kappa') \right] \right\} \times \right. \\
 &\frac{i}{2k_z} \left\{ \left((ik_z)^2 - (-i\kappa''\kappa) \right) \left[1 + R(\kappa) \right] + (-i\alpha_0 k_z) \left[1 - R(\kappa) \right] \right\} d\kappa' \times \\
 &\left. \left[1 + R_0(\kappa) \right] \times \int \tilde{W}(\kappa'') d\kappa'' \right]. \tag{2.73}
 \end{aligned}$$

De plus puisque k_z est une fonction de κ , il entre en compte dans l'intégration suivant κ . De même pour k'_z , k''_z et k'''_z pour les intégrations sur κ' , κ'' , et κ''' . On peut aussi sortir le terme $\left[1 + R_0(\kappa) \right]$ de l'intégrale et le mettre ainsi en facteur de toutes les intégrales.

$((ik'_z)^2 - (i\kappa'\kappa'')^2)$ peut s'écrire aussi $(-k_z'^2 - \kappa'^2 + \kappa\kappa') = (-k_0^2 + \kappa\kappa')$ puisque nous avons vu dans (2.68) que $\kappa'' = \kappa - \kappa'$. De même, on peut écrire à l'aide de l'expression de κ dans (2.70) que $(ik_z)^2 - (-i\kappa''\kappa)^2 = (-k_z^2 - \kappa^2 + \kappa\kappa') = (-k_0^2 + \kappa\kappa')$. Enfin, nous réalisons le changement de variable $\kappa'' = \kappa - \kappa'$ dans l'argument du spectre des hauteurs $\tilde{W}(\kappa'')$. Nous obtenons ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}(\kappa'') d\kappa'' = \int_{+\infty}^{-\infty} \tilde{W}(\kappa - \kappa') \underbrace{\frac{d\kappa''}{d\kappa'}}_{=-1} d\kappa' = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}(\kappa - \kappa') d\kappa'. \tag{2.74}$$

Finalement nous obtenons l'équation de Dyson simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}
 \left[1 + R(\kappa) \right] &= \left[1 + R_0(\kappa) \right] + \left[1 + R_0(\kappa) \right] \times \\
 &\left[\int \frac{i}{2k'_z} \left\{ (-k_0^2 + \kappa\kappa') \left[1 + R_0(\kappa') \right] + (-i\alpha_0 k'_z) \left[1 - R_0(\kappa') \right] \right\} \times \right. \\
 &\frac{i}{2k_z} \left\{ (-k_0^2 + \kappa\kappa') \left[1 + R(\kappa) \right] + (-i\alpha_0 k_z) \left[1 - R(\kappa) \right] \right\} \times \\
 &\left. \tilde{W}(\kappa - \kappa') d\kappa' \right]. \tag{2.75}
 \end{aligned}$$

Après quelques calculs, nous pouvons donner la forme compacte du coefficient de réflexion $R(\kappa)$ pour une surface rugueuse :

$$R(\kappa) = \frac{1 - \eta_v(\kappa)}{1 + \eta_v(\kappa)}, \tag{2.76}$$

où $\eta_v(\kappa)$ intervient dans l'impédance effective $Z_v(\kappa)$ de la surface, avec :

$$Z_v(\kappa) = \frac{k_z(\kappa)}{k_0} \eta_v(\kappa), \tag{2.77}$$

où $\eta_v(\kappa)$ dépend à la fois de l'angle d'incidence, et, de ce qui le fait différer de $\eta_v^0(\kappa)$ pour une surface plane, du spectre des hauteurs de la surface rugueuse. On en déduit, pour une surface plane,

$$\frac{1 - R_0(\kappa)}{2} = \frac{\eta_v^0(\kappa)}{1 + \eta_v^0(\kappa)}, \tag{2.78}$$

où

$$\eta_v^0(\kappa) = \frac{k_0 Z_v^0}{k_z(\kappa)} = \frac{k_0}{nk_z(\kappa)} \left(1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.79)$$

et n est l'indice de réfraction complexe.

La théorie ci-dessus donne la démarche à utiliser pour calculer le cas TC TE, et les cas PC (Dirichlet et Neumann), plus simples quant à eux.

Pour résumer, les coefficients de réflexion pour les cas TE et TM, s'écrivent :

$$R_h(\kappa) = \frac{\eta_h(\kappa) - 1}{\eta_h(\kappa) + 1} \quad (2.80)$$

avec

$$Z_h(\kappa) = \frac{k_0}{k_z(\kappa)} \eta_h(\kappa), \quad (2.81)$$

et

$$\eta_h(\kappa) = \frac{\eta_h^0(\kappa) + ik_z(\kappa) \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') d\kappa'}{1 - ik_z(\kappa) \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') \beta_0 M(\kappa, \kappa') d\kappa'} \quad (2.82)$$

où $\eta_h^0(\kappa) = i\beta_0 k_z(\kappa)$, et

$$L(\kappa', \kappa) = \frac{\beta_0(\kappa\kappa' - k_0^2) \eta_h^0(\kappa') - ik_z(\kappa')}{1 + \eta_h^0(\kappa')} \quad (2.83)$$

et

$$M(\kappa, \kappa') = \frac{i}{k_z(\kappa)} (\kappa\kappa' - k_0^2), \quad (2.84)$$

pour le cas TE. Et pour le cas TM

$$R_v(\kappa) = \frac{1 - \eta_v(\kappa)}{1 + \eta_v(\kappa)}, \quad (2.85)$$

avec

$$\eta_v(\kappa) = \frac{\eta_v^0(\kappa) - \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') M_2(\kappa, \kappa') d\kappa'}{1 + \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') \alpha_0 d\kappa'}, \quad (2.86)$$

où $\eta_v^0(\kappa) = \alpha_0 / (ik_z(\kappa))$, et

$$L(\kappa', \kappa) = \frac{M_1(\kappa', \kappa) + \alpha_0 \eta_v^0(\kappa')}{1 + \eta_v^0(\kappa')}, \quad (2.87)$$

et

$$M_1(\kappa', \kappa) = \frac{i}{k_z(\kappa')} (\kappa\kappa' - k_0^2) \quad M_2(\kappa, \kappa') = \frac{i}{k_z(\kappa)} (\kappa\kappa' - k_0^2). \quad (2.88)$$

Etant donné la complexité des calculs, nous n'avons pas présenté ici les impédances effectives au second ordre mais seulement celles du premier ordre.

A partir de l'expression de l'impédance de surface ci-dessus, pour les deux polarisations, on montre bien que l'état de la mer, implicitement représenté dans l'expression du spectre $\tilde{W}(\kappa - \kappa')$, affecte les pertes en propagation en modifiant l'impédance de surface.

Les impédances effectives obtenues sont des cas particuliers. La forme générale est donnée dans la littérature [6]. Dans (2.82), en posant que $\zeta \rightarrow 0$, alors $\eta_h(\kappa) \rightarrow \eta_h^0$, et la fonction de Green cohérente $\langle G \rangle$

est réduite à la fonction de Green pour une surface plane $G^{(0)}$. De plus, si l'on pose $\beta_0 \rightarrow 0$ (cas d'une surface PC), $\eta_h^0 = 0$ et $R_h(\kappa) = -1$, correspondant bien au cas Dirichlet, où

$$\eta_h(\kappa) = k_z(\kappa) \int k_z(\kappa') \tilde{W}(\kappa - \kappa') d\kappa', \quad (2.89)$$

et l'on retrouve bien (2.29). La démarche est similaire pour le cas TM : à la limite $\alpha_0 \rightarrow 0$, $\eta_v^0 = 0$ et $R_v(\kappa) = +1$, et l'on a

$$\eta_v(\kappa) = k_z(\kappa) \int M_1(\kappa', \kappa) M_2(\kappa, \kappa') \tilde{W}(\kappa - \kappa') d\kappa', \quad (2.90)$$

correspondant bien au cas Neumann de (2.30). Cela permet ainsi de vérifier le cas TC.

Les deux cas PC ont aussi été obtenus dans [122] et [121]. Pour le cas TM, on peut noter également, à la limite $\alpha_0 \rightarrow 0$ dans (2.86), avec (2.77), que

$$Z_v(\kappa) = Z_v^0(\kappa) - \frac{k_z(\kappa)}{k_0} \int M_1(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') M_2(\kappa, \kappa') d\kappa', \quad (2.91)$$

ce qui est en accord avec les travaux de Barrick ([90], équation (24)). En effet, il obtient une expression pour l'impédance effective en s'inspirant de la méthode de Rice [66], en employant un développement en séries de Fourier des hauteurs de la surface. Il obtient finalement une impédance de surface décomposée en deux termes. Le premier comptant pour une impédance plane, le deuxième prenant en compte la rugosité de la surface.

Des simulations numériques seront présentées pour les coefficients de réflexion modifiés $R_p(\kappa)$ dans le cas d'une surface rugueuse TC. Les coefficients de réflexion $R^{(0)}(\kappa)$ pour une surface plane TC sont présentés dans le chapitre un, section 1.2.8.

2.5.3 Equation de Bethe-Salpeter : intensité incohérente

Maintenant que la partie cohérente a été étudiée, il faut déterminer l'intensité incohérente du champ. Pour cela, nous allons utiliser l'équation de Bethe-Salpeter qui est l'équation fondamentale pour le second moment statistique du champ. Elle décrit la corrélation des champs en \mathbf{r} et \mathbf{r}' , issus des sources situées en \mathbf{r}_0 et \mathbf{r}'_0 . L'intensité incohérente du champ diffusé s'en déduit.

L'opérateur $V(\mathbf{r}_i)$ apparaissant dans l'équation (2.15) est désigné comme une source de rayonnement (préalablement excitée par une source extérieure). La propagation du champ rayonné par la source $V(\mathbf{r}_i)$ de \mathbf{r}_i en \mathbf{r}_{i+1} est ensuite décrite grâce au tenseur (pour un problème 3D, le cas général) de Green $\mathbf{G}(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i)$. Ce champ diffusé excite à son tour un autre point source $V(\mathbf{r}_{i+1})$, puis ce rayonnement ce propage jusqu'au point \mathbf{r}_{i+2} , et ainsi de suite jusqu'au point d'observation \mathbf{r} . Cet opérateur peut être obtenu via les équations réduites de Rayleigh [47], [17] pour le cas vectoriel.

Pour une rugosité faible de la surface, le champ cohérent est dominant, c'est-à-dire qu'une grande partie de l'énergie est distribuée autour de la direction spéculaire, direction que prendrait l'onde si la surface était infinie et plane. A mesure que la rugosité augmente, la contribution du champ cohérent diminue et celle du champ incohérent croît. Sa détermination requiert d'évaluer le moment d'ordre deux de la fonction de cohérence mutuelle¹³ (figure 2.18) :

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle, \quad (2.92)$$

¹³Cette appellation est utilisée surtout en Optique dans la théorie des ondes partiellement cohérentes ([10], p.500). Dans la théorie générale des processus aléatoires stationnaires, $\Gamma_{12} = \langle P_1(t + \tau) P_2^*(t) \rangle$ est appelée fonction d'*inter-corrélation* des points $P_1(t)$ et $P_2(t)$; et $\Gamma_{11} = \langle P_1(t + \tau) P_1^*(t) \rangle$ est appelée fonction d'*auto-corrélation* du points $P_1(t)$.

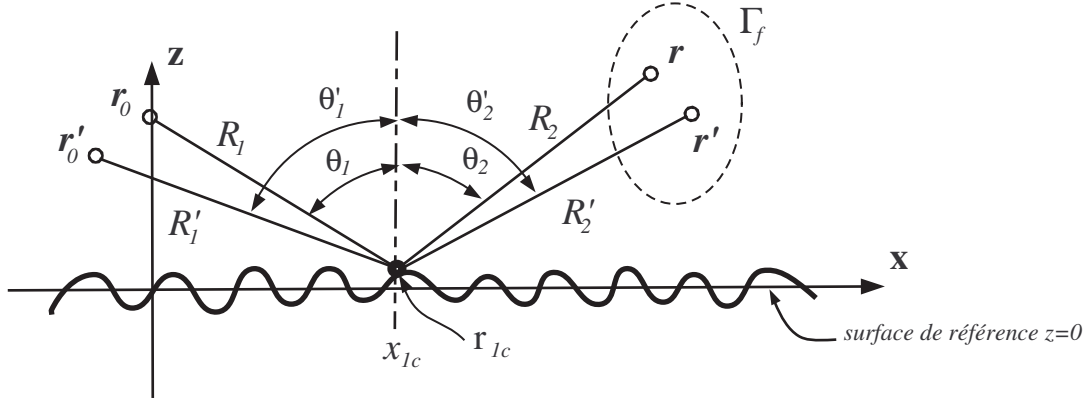


FIG. 2.18 – Illustration de l'intensité incohérente diffusée par une surface rugueuse.

qui s'écrit,

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}'_1) \rangle \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0). \quad (2.93)$$

La première itération de cette équation est donnée par l'approximation de Γ dans l'intégrande par des termes cohérents (figure 2.19). Elle nous permet de calculer l'intensité moyenne du champ. Dans l'intégrande, $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$ contient les points de la surface \mathbf{r}_i . L'idée est d'itérer à l'infini l'équation formelle (2.93), au même titre que l'équation (2.3) pour le champ.

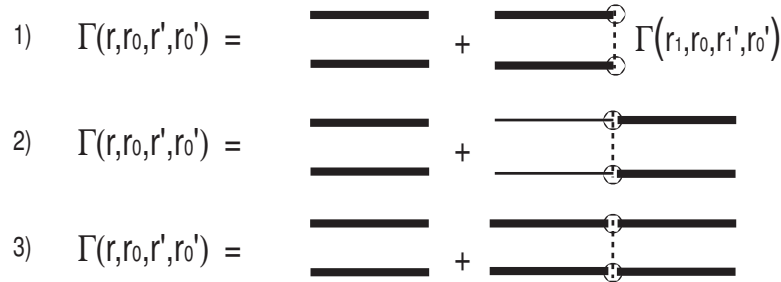


FIG. 2.19 – Diagrammes pour 1) l'équation de Bethe-Salpeter via l'approximation de smoothing au premier ordre [101] 2) l'équation de Bethe-Salpeter avec l'approximation du premier ordre développée par Ishimaru [98]. 3) l'équation de Bethe-Salpeter de Itô's [128].

La fonction de cohérence mutuelle s'écrit donc comme la somme d'une fonction de cohérence mutuelle cohérente et une fonction de cohérence mutuelle incohérente :

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \Gamma_{coh} + \Gamma_f, \quad (2.94)$$

où la fonction de cohérence mutuelle cohérente a pour expression :

$$\Gamma_{coh} = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle. \quad (2.95)$$

Le terme $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ est calculé par l'équation de Dyson, et la fonction de cohérence mutuelle incohérente ou fluctuante est déterminée sous l'approximation de smoothing du premier ordre, (cas 3 de la figure 2.19), conduisant à [98] :

$$\Gamma_f = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}'_1) \rangle \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_0) \rangle. \quad (2.96)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intensité incohérente dans le cas scalaire, donnée par (2.36). Posons les transformées de Fourier spatiales¹⁴

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa)} [e^{ik_z(\kappa)|z-z_1|} + R(\kappa)e^{ik_z(\kappa)(z+z_1)}] e^{i\kappa(x-x_1)} d\kappa, \quad (2.97)$$

$$\langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z(\kappa_1)} [e^{k_z(\kappa_1)|z_1-z_0|} + R(\kappa_1)e^{ik_z(\kappa_1)(z_1+z_0)}] e^{i\kappa_1(x_1-x_0)} d\kappa_1, \quad (2.98)$$

où $R(\kappa) = \frac{1-\eta_0(\kappa)}{1+\eta_0(\kappa)}$ avec $\eta_0(\kappa) = Z_0 \frac{k_0}{k_z(\kappa)}$ dans le cas plan. Γ_f (2.96) se réécrit comme suit¹⁵ :

$$\begin{aligned} \Gamma_f = & \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \left\langle \left(\zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_0 \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right. \\ & \left. \times \left(\zeta'_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1'^2} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial x_1'} \frac{\partial}{\partial x_1'} + \alpha_0 \zeta'_1 \frac{\partial}{\partial z_1'} \right) \right\rangle \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Dans l'annexe D, en parallèle de l'annexe C, est présentée une partie des calculs pour l'obtention du coefficient de diffusion incohérent dans le cas de la polarisation verticale. La section suivante résume les coefficients de diffusion bistatiques.

2.5.4 Coefficient de diffusion

Nous étudions ici le coefficient de diffusion de la mer en configuration monostatique. Nous considérons donc que le champ cohérent ne contribue pas ou très peu dans l'évaluation du coefficient¹⁶.

Pour la MPP classique, ils sont donnés dans [100]

$$\sigma_p^{MPP1}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{2\pi}{k_0} k_0^4 \cos^2 \theta_i \cos^2 \theta_s |\alpha_p|^2 \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0) \quad \text{avec } p = h, v \quad (2.100)$$

où θ_s (θ_2 sur la figure 2.18) est l'angle dans la direction d'observation, et

$$\alpha_h = -\frac{\epsilon - 1}{[\cos \theta_i + (\epsilon - \sin^2 \theta_i)^{1/2}][\cos \theta_s + (\epsilon - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}, \quad (2.101)$$

$$\alpha_v = \frac{(\epsilon - 1)[\epsilon \sin \theta_i \sin \theta_s - (\epsilon - \sin^2 \theta_i)^{1/2}(\epsilon - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}{[\epsilon \cos \theta_i + (\epsilon - \sin^2 \theta_i)^{1/2}][\epsilon \cos \theta_s + (\epsilon - \sin^2 \theta_s)^{1/2}]}. \quad (2.102)$$

Les coefficients de diffusion basés sur la formulation pour une surface parfaitement conductrice de Itô [128]

$$\sigma_{vv}^{Ito}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{2\pi}{k_0} \frac{4|\kappa_0 \kappa_1 - k_z^2(\kappa_0) - ik_z(\kappa_0)\alpha_0 \eta_v(\kappa_0)|^2}{|1 + \eta_v(\kappa_0)|^2} \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0), \quad (2.103)$$

$$\sigma_{hh}^{Ito}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{2\pi}{k_0} \frac{4|\beta_0(\kappa_0 q_d - k_z^2(\kappa_0))\eta_h(\kappa_0) - ik_z(\kappa_0)|^2}{|1 + \eta_h(\kappa_0)|^2} |k_z(\kappa_1)|^2 \tilde{W}(q_d). \quad (2.104)$$

¹⁴A noter que l'indice 1 dans (2.98) ne fait pas référence au milieu 1.

¹⁵La fonction de cohérence mutuelle incohérente Γ_f de l'équation (2.99) est celle correspondant au cas de la polarisation verticale puisque nous avons utilisé le potentiel perturbateur V_{TM} de (2.54). La polarisation verticale sera sous entendu pour toute la suite de la démonstration.

¹⁶Malgré le fait que la communauté scientifique des physiciens du solide s'est aperçue que des phénomènes de rétro-diffusion cohérente qui surviennent habituellement dans des milieux aléatoires, pouvaient se produire dans la diffraction par des surfaces rugueuses. Ces phénomènes sont mis en évidence lorsqu'on développe les termes d'ordres supérieurs en ζ .

Les coefficients de diffusion incohérents pour le cas IBC en champ lointain, pour la MPP Modifiée s'écrivent (D.23) et (D.24)

$$\sigma_{vv}^{MPPM}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{\sigma_{vv}^{Itô}(\kappa_1, \kappa_0)}{|1 + \eta_v(\kappa_1)|^2}, \quad (2.105)$$

$$\sigma_{hh}^{MPPM}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{\sigma_{hh}^{Itô}(\kappa_1, \kappa_0)}{|1 + \eta_h(\kappa_1)|^2}, \quad (2.106)$$

où $\kappa_0 = \sin \theta_i$ et $\kappa_1 = \sin \theta_s$ représentent les nombres d'ondes projetés sur l'axe x pour le champ incident et diffusé, respectivement, tels que représentés figure D.1. Les coefficients de diffusion, basés sur la formulation en PC, de Itô ne sont pas réciproques. Ils s'apparentent à ceux calculés par Watson et Keller [121].

Revenons aux travaux de l'auteur le plus actif sur la méthode des fonctions de Green, et sur lequel nous nous sommes le plus inspirés. Dans l'article [98], l'auteur traite du cas Dirichlet, et propose des résultats numériques pour un spectre Gaussien des hauteurs, en faisant varier le terme $k_0\sigma_\zeta$ de 0.1 à 1. On observe que, et Ishimaru conclut ses travaux ainsi, la MPP modifiée à l'ordre un, reste valide pour $k_0\sigma_\zeta \rightarrow 1$, bien qu'elle sous-estime la méthode de référence. Mais comme le remarque l'auteur, la prise en compte des ordres supérieurs de la diffusion multiple, devrait compenser cette perte. Ces ordres supérieurs sont déterminés par la théorie cyclique et l'approximation des termes en échelle par la méthode des fonctions de Green. Cependant l'aboutissement des calculs est loin d'être aisé, et le lecteur avisé pourra trouver une étude intéressante, pouvant être appliquée ici, dans [136], [115] ou [137]. En revanche la MPP classique faillit dès $k_0\sigma_\zeta = 0.75$.

2.5.5 Simulations numériques

Dans cette section sont présentées, comme pour le cas d'une surface parfaitement conductrice vue dans la section précédente, les impédances effectives $Z_p(\kappa)$ au premier ordre, les coefficients de réflexion $R_p(\kappa)$, les facteurs de correction $|F_p(\kappa)|^2$, et enfin les coefficients de diffusion $\sigma_p(\kappa_1, \kappa_0)$.

Impédances effectives

Sur les figures 2.20 à 2.23, les impédances de surface effectives pour une surface très conductrice ont été simulées numériquement, pour une fréquence radar $f = 100$ MHz. La permittivité électrique correspondante est alors $\epsilon = 80 + 720i$. Les comportements observés sont similaires à ceux d'une surface PC. On peut remarquer qu'à mesure que l'angle d'incidence augmente, la partie réelle de l'impédance effective diminue, quelque soit la polarisation. Cette diminution est d'autant importante que le terme $k_0\sigma_\zeta$ approche 1. La partie imaginaire négative en polarisation horizontale représente une capacitance. La partie imaginaire positive en polarisation verticale représente une inductance. Cette partie imaginaire est d'autant plus importante que l'on s'approche des incidences normales et rasantes. On remarque, en polarisation horizontale, que plus l'écart type des hauteurs augmente ($k_0\sigma_\zeta \rightarrow 1$), plus la partie imaginaire chute conséquemment. Les comportements des impédances pour les deux surfaces restent globalement identiques, même si quelques différences subsistent. Par exemple, la partie imaginaire en polarisation horizontale diminue plus pour une surface de corrélation des hauteurs gaussienne à l'approche des incidences rasantes.

Coefficient de réflexion

Les figures 2.24 et 2.25 montrent les coefficients de réflexion R_{h1} et R_{v1} à partir des impédances effectives à l'ordre un. Les équations en jeu sont (2.80) et (2.85).

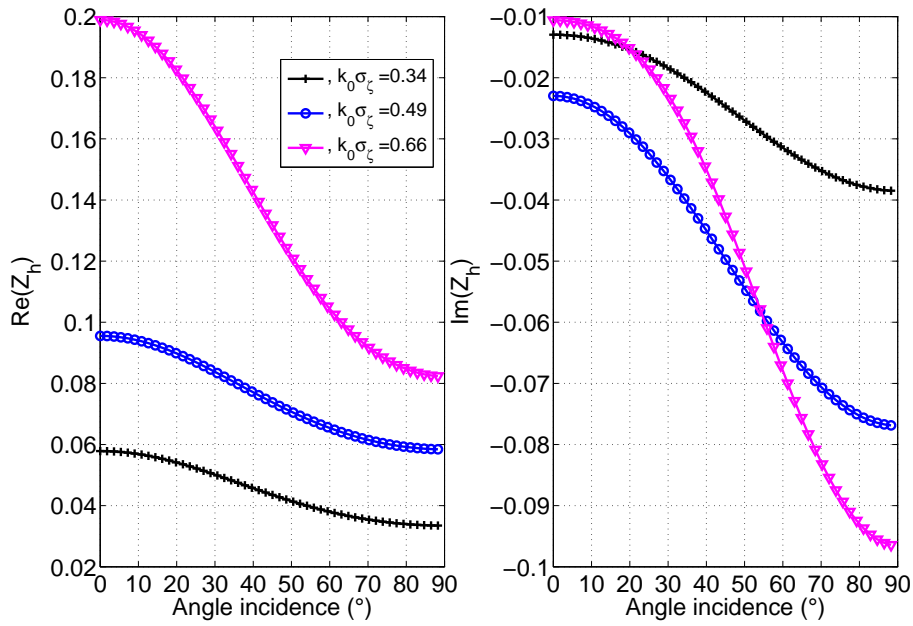


FIG. 2.20 – Impédance effective dans la polarisation horizontale (TE), et pour un spectre des hauteurs Gaussien. Angle d'incidence $\theta_i = 40^\circ$. Fréquence d'émission $f = 100$ MHz, $\lambda = 3$ m. Vitesse du vent $U_{10} = \{5, 6, 7\}$ m/s, correspondant à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = \{0.16, 0.23, 0.32\}$ m, respectivement. Longueur de corrélation $l_c = \{1.3, 1.7, 2.2\}$ m. Ecart-type des pentes $\sigma_p = \{0.16, 0.18, 0.2\}$.

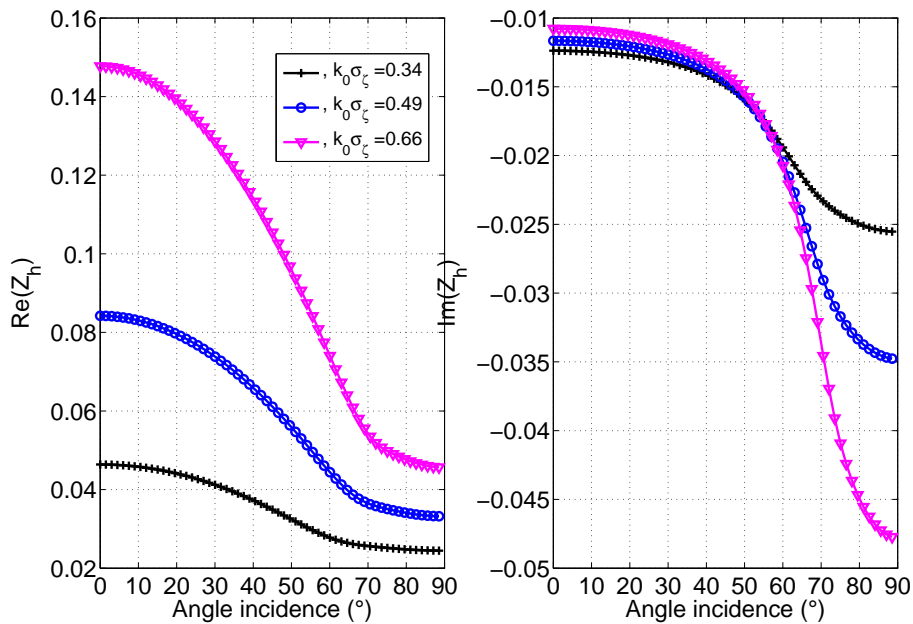


FIG. 2.21 – Même paramètres que pour la figure 2.20 mais pour une surface de mer.

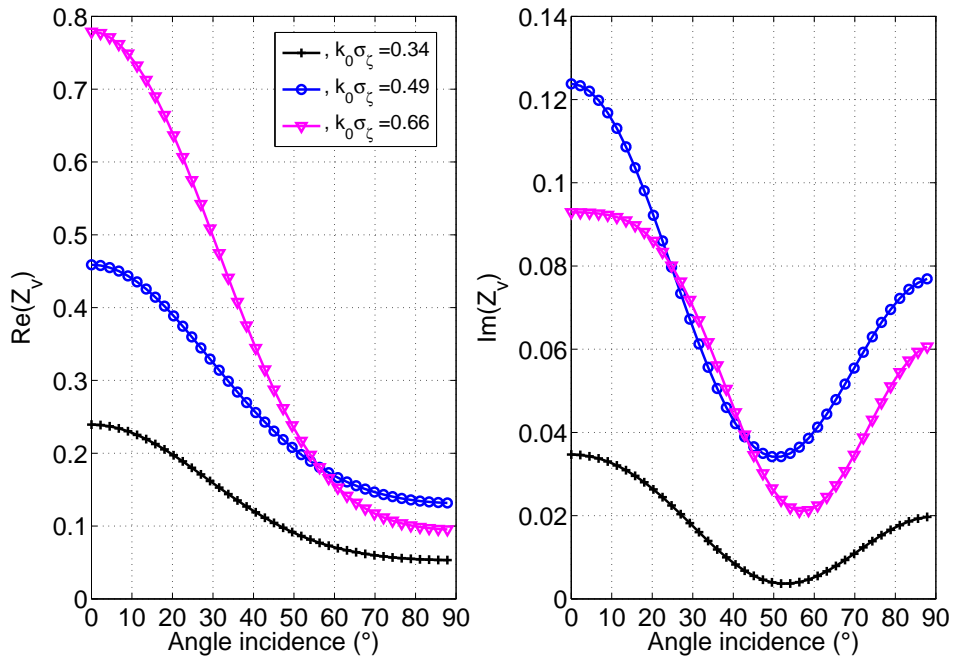


FIG. 2.22 – Mêmes paramètres que pour la figure 2.20, mais pour la polarisation verticale (TM).

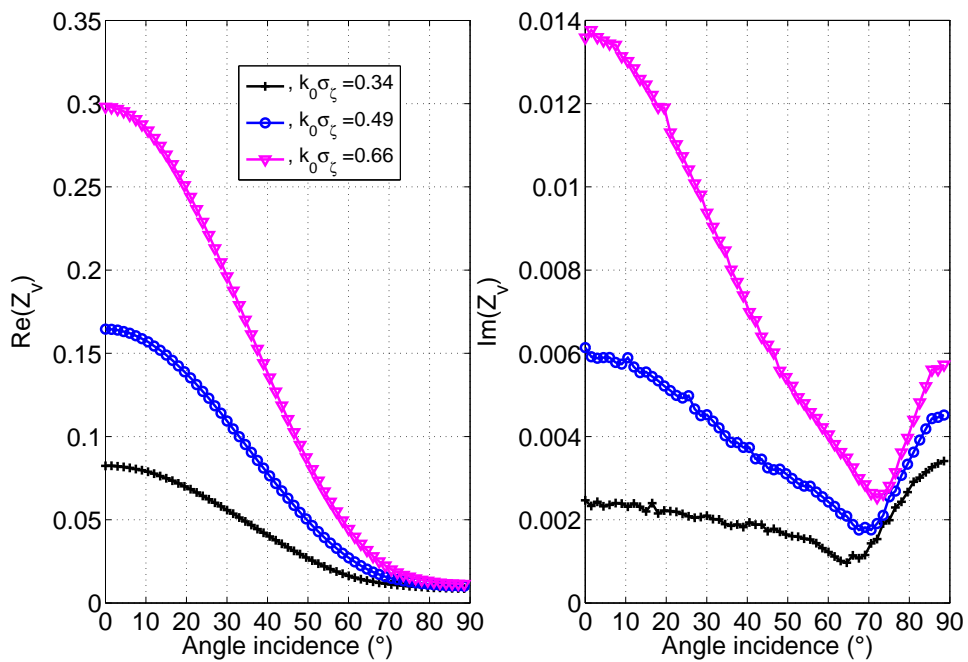


FIG. 2.23 – Même paramètres que pour la figure 2.22 mais pour une surface de mer.

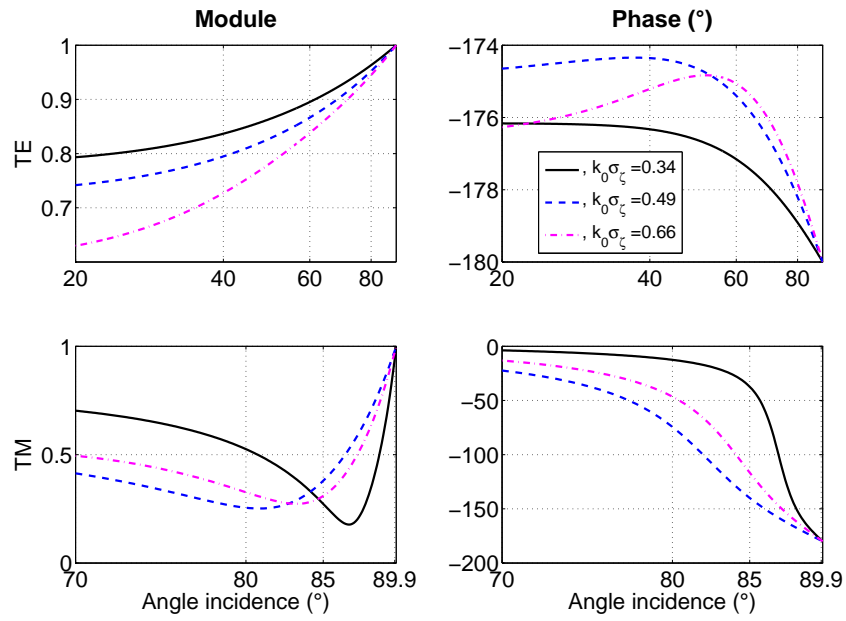


FIG. 2.24 – Coefficient de réflexion $R_p(\kappa)$ pour un spectre des hauteurs Gaussien. Vitesse du vent $U_{10} = \{5, 6, 7\}$ m/s, correspondant à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = \{0.16, 0.23, 0.32\}$ m, respectivement. Longueur de corrélation $l_c = \{1.3, 1.7, 2.2\}$ m. Ecart-type des pentes $\sigma_p = \{0.16, 0.18, 0.2\}$. Fréquence d'émission $f = 100$ MHz.

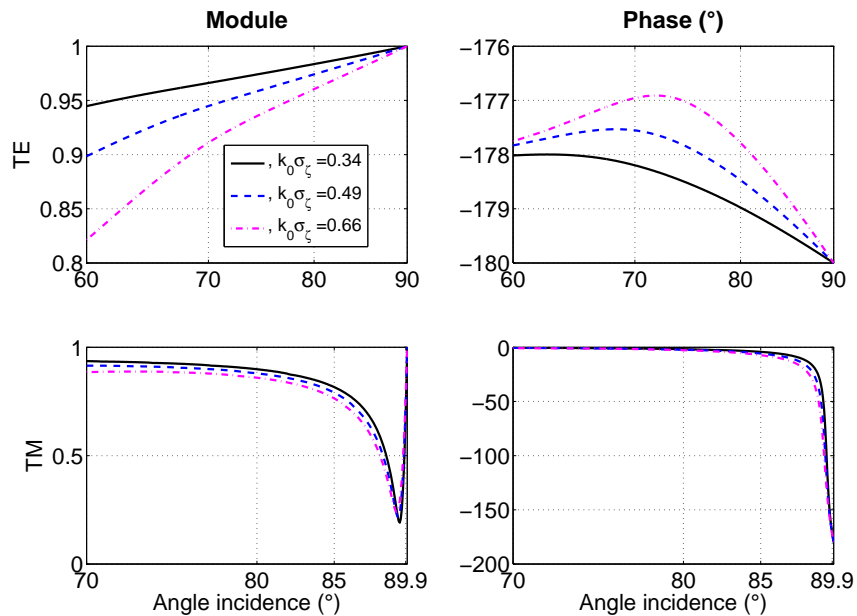


FIG. 2.25 – Mêmes paramètres que la figure 2.24, mais pour une surface de mer.

Contrairement au cas d'une surface PC plane en polarisation verticale (donc Neumann), une surface très conductrice plane, pour la polarisation verticale, présente un angle de Brewster, proche de $\pi/2$ puisque $\theta_{iB} = n_2/n_1$ et n_2 est grand devant $n_1 = 1$ dans notre cas (voir la figure 1.4). On peut observer que le module du coefficient de réflexion présente un minimum local à l'angle de Brewster (comme vu dans la section 1.2.8), et un déphasage de l'ordre de $|\pi|$ pour la polarisation verticale. La polarisation horizontale présente une phase quasi-constante, et un module proche de 1. En traçant les coefficients de réflexion pour une fréquence radar $f = 30$ MHz (non présentés), et pour une surface de mer, il est observé que le minimum local du coefficient de réflexion est plus proche de $\pi/2$ que pour une fréquence $f = 100$ MHz. En effet, comme le montre la figure 1.4 (chapitre un) pour une surface plane très conductrice, lorsque la fréquence diminue, donc la longueur d'onde λ augmente, l'angle de Brewster est décalé vers $\pi/2$.

Facteur de correction

Sur les figures 2.26 et 2.27, les facteurs de correction apparaissant dans les coefficients de diffusion sont tracés. Comme pour le cas d'une surface parfaitement conductrice, on peut voir que l'effet de la diffusion multiple dans le cas de la polarisation horizontale, est prépondérant aux angles d'incidences modérées. En effet le facteur de correction $|F_{p1}(\kappa_0)|^2$ a un module inférieur à l'unité pour un angle de 0° , et croît à mesure que l'angle d'incidence augmente, pour atteindre la valeur 1 à 90° . L'impédance effective $Z_p(\kappa_0)$, implicitement représentée dans $|F_{p1}(\kappa_0)|^2$, modifie donc le coefficient de diffusion puisqu'elle permet d'inclure l'atténuation due à la rugosité.

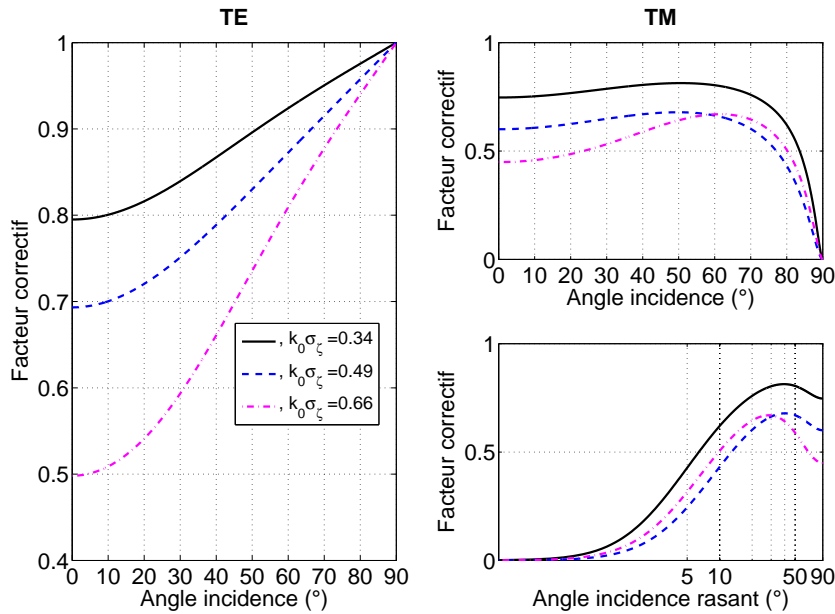


FIG. 2.26 – Facteurs de correction $|F_{p1}(\kappa_0)|^2 = |1/[1 + \eta_v(\kappa_0)]|^2$ issus de (2.105) et (2.106). Vitesse du vent $U_{10} = \{5, 6, 7\}$ m/s, correspondant à un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = \{0.16, 0.23, 0.32\}$ m, respectivement. Longueur de corrélation $l_c = \{1.3, 1.7, 2.2\}$ m. Ecart-type des pentes $\sigma_p = \{0.16, 0.18, 0.2\}$. Fréquence d'émission $f = 100$ MHz.

Sur la figure 2.28, les facteurs de correction pour un fréquence radar $f = 10$ MHz, et pour une surface de mer, sont tracés.

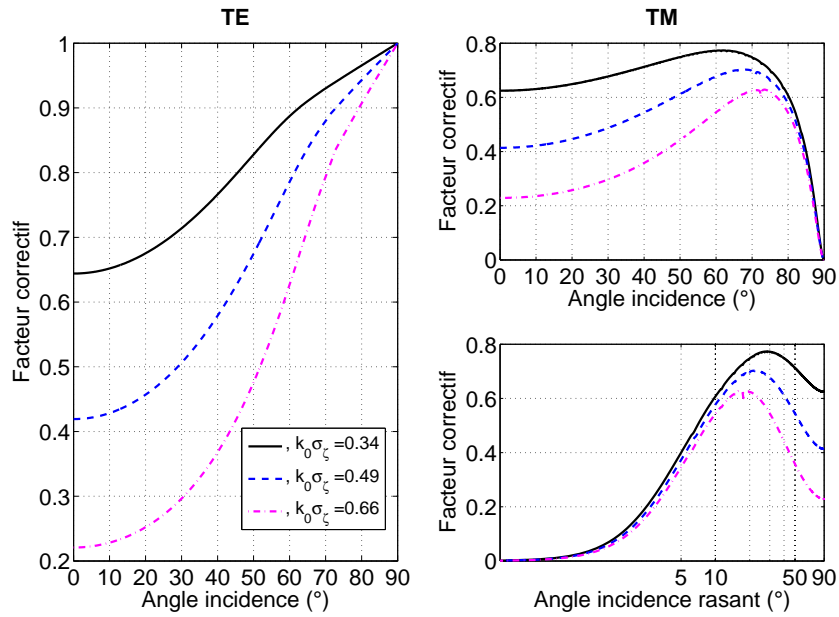


FIG. 2.27 – Mêmes paramètres que pour la figure 2.26 mais pour une surface de mer.

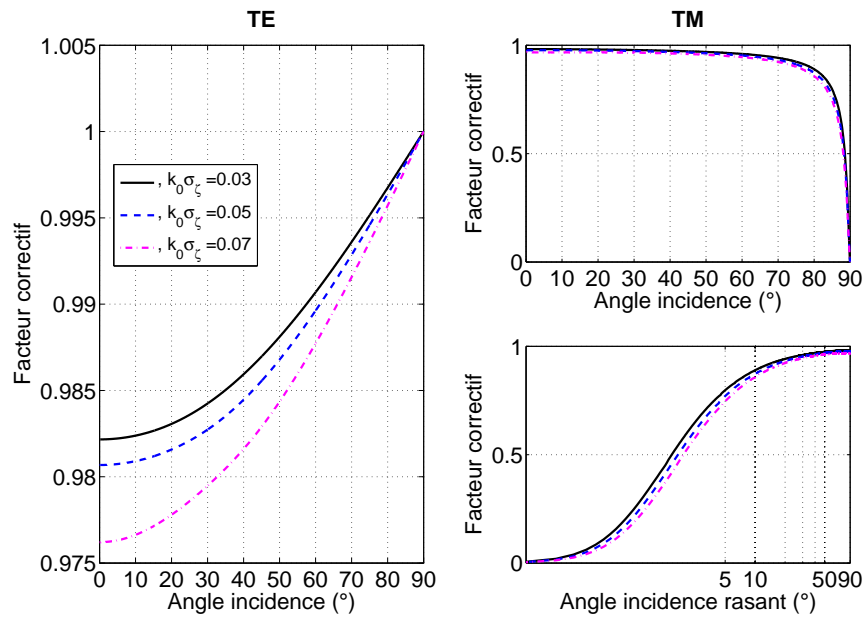


FIG. 2.28 – Mêmes paramètres que pour la figure 2.27 mais pour $f = 10$ MHz.

Pour le cas de la polarisation verticale, le facteur correctif chute conséquemment à l'approche des angles rasants. A l'inverse de la polarisation horizontale, l'effet de la rugosité se trouve surtout à ces incidences. Les observations sont identiques pour les surfaces de corrélation Gaussienne et de mer.

Coefficient de diffusion

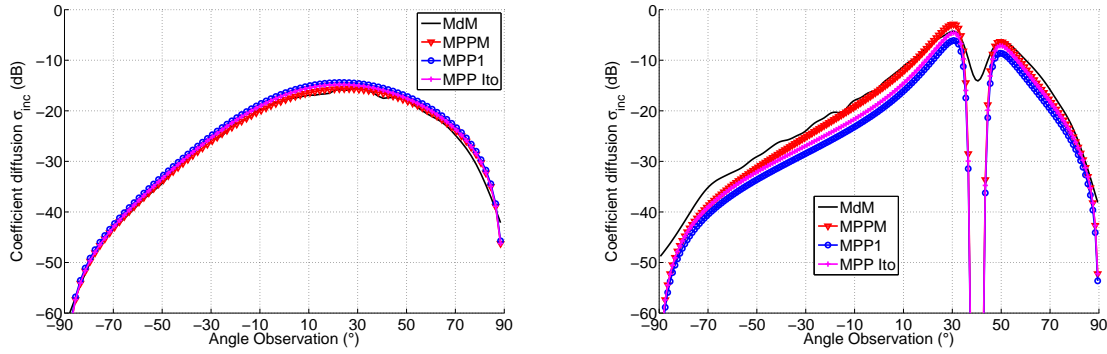


FIG. 2.29 – Coefficient de diffusion pour la polarisation horizontale à partir des équations (2.100), (2.106) et (2.104). $\theta_i = 40^\circ$. $f = 100$ MHz. $\sigma_\zeta = 0.16$ m, correspondant à une vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s. A gauche, pour un spectre Gaussien. A droite, pour un spectre de mer.

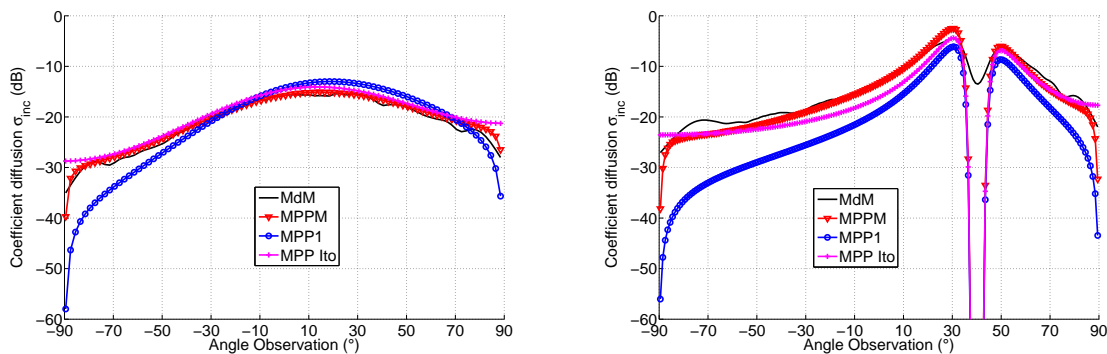


FIG. 2.30 – Coefficient de diffusion pour la polarisation verticale à partir des équations (2.100), (2.105) et (2.103). Paramètres identiques à la figure 2.29. A gauche, pour un spectre Gaussien. A droite, pour un spectre de mer.

Les figures 2.29 à 2.31 montrent les coefficients de diffusion pour le cas d'une surface rugueuse très conductrice. Dans toutes les simulations qui suivent, la méthode de référence (la MdM) a été calculée pour 100 réalisations de la surface. Le pas d'échantillonnage de la surface est $\Delta x = 0.1\lambda$. Le paramètre d'atténuation de l'onde incidente de Thorsos vaut $g = L/6$.

Le raisonnement est le même que pour les coefficients de diffusion obtenus pour le cas PC. On observe néanmoins que la MPPM n'est plus valide dans le cas mer à partir de vitesses de vent U_{10} supérieures à 5 m/s. La MPP classique, quant à elle, reste inférieure à la méthode de référence. La solution de Itô donne de meilleurs résultats. Elle ne prend en compte que la correction (via le facteur de correction) pour l'onde incidente.

Il faut souligner que les coefficients de diffusion pour une fréquence $f = 30$ MHz (non présentés) et pour une surface de mer, ont été simulés. A cette fréquence radar, le modèle reste valide pour une vitesse de vent $U_{10} = 7$ m/s.

Contrairement au cas PC, les coefficients de diffusion pour une fréquence $f = 100$ MHz, et des vitesses de vent $U_{10} = \{6, 7\}$ m/s, sur estiment la MdM. On peut s'interroger sur la nécessité, voire la pertinence, d'utiliser le modèle IBC dans ce cas ci, puisque qu'il donne des résultats difficilement en accord avec la MdM, dans le cas d'un spectre de mer. Il est possible de supposer que l'étude du second ordre de la théorie corrigerait, sinon en partie, les coefficients de diffusion.

Malgré tout, certains résultats sont plus que satisfaisants, et nous garderons tout de même l'approximation IBC pour le chapitre trois, traitant des incidences rasantes. Il est certain que sous incidences rasantes, pour une surface de mer très conductrice, la majeure partie de l'onde incidente est diffusée dans le milieu supérieur, et peu d'énergie est transmise dans le milieu inférieur. Mais, dans le cas d'une surface justement très conductrice, en polarisation verticale, nous verrons dans le chapitre trois qu'un phénomène non négligeable apparaît. C'est pourquoi l'étude IBC a pris ici toute son importance.

On peut dire, à partir des résultats répertoriés ici, et d'autres non présentés, que le modèle nécessite d'être étudié avec soin pour cerner le domaine de validité pour différentes fréquences et vitesses de vent. Il semble, au vue des résultats, que ces deux paramètres sont liés. En effet, pour $f = 100$ MHz, les modèles MPP et MPP modifiée faillissent au-delà d'une vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s. Cela n'est pas le cas pour une fréquence $f = 30$ MHz, même si les modèles sous estiment la méthode de référence. Pour une vitesse de vent de 4 m/s, les coefficients de diffusion sont presque en accord avec la MdM. Les spectres Gaussien, quant à eux, rencontrent quelques soucis en rétro-diffusion, dès lors que la vitesse de vent augmente. En revanche, la MPP modifiée corrige ce problème pour la vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s, pour la polarisation verticale, tandis que la MPP classique sous estime la MdM (figure 2.30).

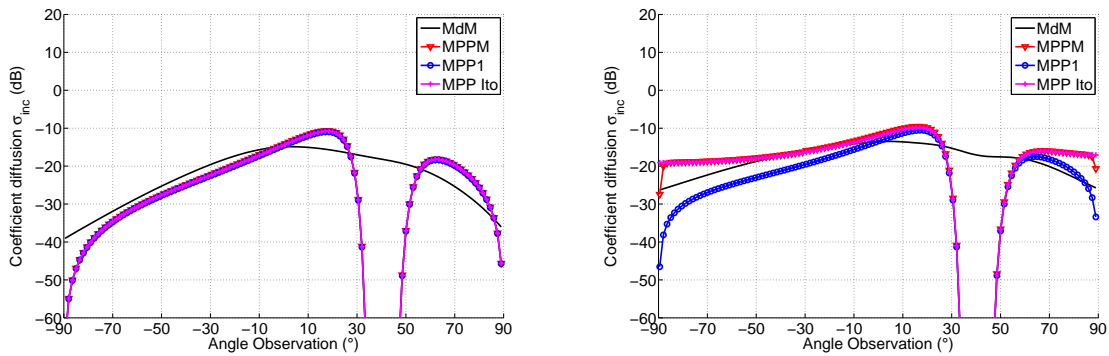


FIG. 2.31 – Coefficient de diffusion en polarisation verticale. A gauche, pour un spectre des hauteurs Gaussien. A droite pour un spectre de mer. Pour une fréquence $f = 10$ MHz, et pour une vitesse de vent $U_{10} = 10$ m/s.

Pour $f = 100$ MHz, le modèle est limité à des vitesses de vent inférieures à 6 m/s. En effet, les facteurs de correction $|1/[1+\eta_p(\kappa_0)]|^2$ restants inférieurs à 1 dans (2.105) et (2.106), le terme au numérateur (qui est différent du cas PC puisqu'il fait intervenir l'impédance de surface $\eta_v(\kappa_0)$ et le nombre d'onde $k_z(\kappa_0)$), joue un rôle dans ce cas. Pour des fréquences moins élevées (figure 2.31), le modèle peut être utilisé pour des vitesses de vent $U_{10} = 10$ m/s. Par exemple, pour une fréquence $f = 30$ MHz, la longueur d'onde $\lambda = 10$ m, et la surface semble moins chahutée, moins rugueuse, au sens électromagnétique des termes, pour l'onde incidente.

2.6 Conclusion

Après avoir introduit la méthode de la diffusion multiple, qui trouve son origine en théorie quantique des champs, ce chapitre a permis d'obtenir une interprétation physique du phénomène de diffusion s'effectuant sur la surface rugueuse. Nous avons abordé la notion d'impédance effective de la surface rugueuse. Nous avons vu que l'impédance pouvait être reformulée afin d'inclure les effets de la rugosité, et donc les effets de la diffusion multiple. Il a été observé que pour un spectre des hauteurs Gaussien, la Méthode des Petites Perturbations Modifiée donnait de bons résultats pour les cas PC et IBC, et augmentait même le domaine de validité de la MPP classique au sens du terme $k_0\sigma\zeta$. En revanche, pour le cas IBC, et pour une surface de mer, son utilisation ne peut dépasser une vitesse de vent de 5 m/s pour un angle d'incidence $\theta_i = 40^\circ$, et une fréquence $f = 100$ MHz. La solution de Itô, quant à elle, donne de bons résultats pour une vitesse de vent au-delà de 5 m/s. En revanche pour des fréquences dans la bande HF, 10 et 30 MHz, la théorie peut s'appliquer pour des vitesses de vent supérieures, ce qui est intuitivement compréhensif, puisqu'à ces fréquences, la surface paraît moins rugueuse pour le champ incident. La théorie développée dans ce chapitre a donc permis de valider l'importance de la prise en compte de l'impédance de surface effective, devant son existence à la présence de la rugosité. Son enjeu prend de l'intérêt lorsque la rugosité augmente, à cause de la vitesse du vent à 10 mètres au dessus de la surface de mer. L'intérêt de ce travail est qu'une surface de mer réaliste a été simulée parallèlement à une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne. Ce chapitre peut être clos en concluant que la méthode analytique présentée donne une bonne approximation de l'énergie diffusée dans tout l'espace angulaire au dessus de la surface, pour des écarts types des hauteurs relativement faibles devant la longueur d'onde, et pour des angles d'incidences modérés. Nous verrons dans le chapitre suivant que l'impédance de surface effective $Z_v(\kappa)$ peut être intégrée à la formulation que nous allons détailler pour les incidences rasantes.

Chapitre 3

Les incidences rasantes.

Sommaire

3.1	Introduction	113
3.2	Phénomènes physiques et rétrodiffusion	114
3.3	Rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une surface conductrice	117
3.3.1	Introduction	117
3.3.2	Un "peu" d'Histoire	117
3.3.3	Onde de surface le long d'une surface plane	120
3.3.4	Interprétation physique de l'onde de surface	128
3.4	Application réelle à une surface rugueuse	131
3.4.1	Introduction	131
3.4.2	Onde de surface le long d'une surface rugueuse	131
3.4.3	Le champ diffusé	133
3.4.4	L'intensité diffusée	134
3.4.5	Coefficient de diffusion incohérent sous incidences rasantes	136
3.5	Simulations numériques	137
3.6	Extensions possibles du modèle	153
3.6.1	Introduction	153
3.6.2	Influence de la courbure de la Terre	153
3.6.3	"Mixed-Path Propagation"	154
3.6.4	Conduits d'évaporation	155
3.6.5	Systèmes de radar réels	157
3.6.6	Conclusion	157
3.7	Conclusion	157

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence que la rugosité de la surface engendrait une modification de son impédance. Ainsi, la méthode des petites perturbations classique est modifiée en ce sens où le coefficient de diffusion devient fonction de l'impédance de surface. L'impédance de surface modifiée rend compte du processus physique de diffusion multiple. Les simulations qui ont été présentées ont permis de valider le modèle asymptotique prenant en compte l'impédance effective de la surface rugueuse, pour des incidences modérées.

L'objet de ce chapitre est d'utiliser cette impédance dans le cadre du radar côtier, observant à des angles d'incidences proches de l'horizontal. On pourrait se convaincre intuitivement qu'à de tels angles, l'énergie envoyée par le radar est uniquement, tout du moins principalement, concentrée dans la direction de propagation avant, après avoir frappée la surface de mer. Mais en réalité, de l'énergie est mesurée dans la direction de rétrodiffusion, configuration dans laquelle le radar observe la surface de mer.

Nous allons donner ici la théorie pour formuler la puissance du signal mesurée par le radar côtier sous incidences rasantes. La solution générale sera donnée à partir du *vecteur de Hertz*, rencontré principalement dans la littérature moins récente. Cependant, des papiers récents traitent des problèmes électromagnétiques similaires à celui qui va être abordé dans ce chapitre, et expriment la solution en terme du vecteur de Hertz, par exemple [138]. La démonstration qui va suivre est valable pour une surface plane très conductrice, et en polarisation verticale, car c'est dans cette configuration qu'apparaît le phénomène d'*onde de surface*. La plupart des radars côtiers fonctionnent dans cette polarisation. Certes, il n'est question ici que d'un problème à deux dimensions, ce qui ne reflète pas la réalité du terrain, mais cette étude permet de rendre compte des phénomènes existants dans la configuration des incidences rasantes. Elle fait, d'ailleurs, toujours l'objet d'études complexes, et ce depuis les travaux de Sommerfeld, que nous présenterons. Nous montrerons à nouveau la défaillance de la MPP classique sous des incidences très rasantes. Nous verrons alors que la prise en compte de l'onde guidée à la surface permet de corriger la méthode classique. Nous calculerons également l'intensité moyenne totale diffusée. Enfin quelques extensions possibles du modèle asymptotique seront abordées.

3.2 Phénomènes physiques et rétrodiffusion

Nous dressons ici un très bref panorama de travaux réalisés sur quelques phénomènes physiques qui peuvent se rencontrer dès lors que l'on traite un problème électromagnétique avec une (ou plusieurs) interface.

Notre étude porte sur la propagation et la diffusion, par une surface rugueuse, d'une onde électromagnétique sous incidences rasantes, c'est à dire pour un angle d'incidence proche de l'horizontale, autrement dit, à environ 90° de la verticale. Le chapitre un a mis en évidence la défaillance de la MPP classique sous incidences rasantes. De nombreux auteurs s'y sont intéressés. Le cadre de l'étude concerne le signal reçu par le radar côtier, dont l'émetteur et le récepteur sont colocalisés. Cette configuration, dite monostatique, impose que le radar ne peut mesurer que l'énergie qui est diffusée par la surface dans la direction de rétrodiffusion. En fait, il existe un phénomène physique dit *onde de surface*, qui est prépondérant sous incidences rasantes.

Ondes de surface

Nous avons discuté, pour la polarisation verticale, que le coefficient de réflexion s'annulait lorsque l'angle d'incidence atteignait l'angle de Brewster. Sous certaines conditions, le coefficient de réflexion R_v peut-il devenir infini (c'est à dire que le dénominateur tend vers 0 et présente donc un pôle) ? Si c'est le cas, cela peut être équivalent à avoir un champ réfléchi E_r fini avec un champ incident E_i s'évanouissant, car $R_v = E_r/E_i \rightarrow \infty$, et représente une onde guidée le long de la surface [18]. Elle est appelée *onde de surface*. On retrouve des applications importantes de ce type d'onde : les ondes guidées dans les fibres optiques, les lignes de transmission, les couches minces de diélectrique revêtant la surface d'un métal... Il existe différents types d'onde de surface et autres ondes guidées, et leur représentation mathématique diffère. Ce sont des ondes dites *complexes* ou *inhomogènes* [18]. Il est montré dans ce cas que les plans à phase constante et à amplitude constante ne coïncident pas [14]. Les ondes de surface sont répertoriées selon leur vecteur d'onde \mathbf{k} . On a la relation $k^2 = \kappa^2 + k_z^2$, où κ est le projeté horizontal

et k_z le projeté vertical de k . Chacune des composantes de k peut être complexe, $\kappa = \kappa_r + i\kappa_i$ et $k_z = k_{zr} + ik_{zi}$. Donc le nombre d'onde $k = k_r + ik_i$ est complexe. Selon le signe de $\kappa_r, \kappa_i, k_{zr}$ et k_{zi} , une variété de types d'ondes existent. Prenons l'onde dont la phase ($\exp(-i(\kappa_r x + k_{zr} z)) = \exp(-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$) progresse le long de la surface ($z = 0$) dans la direction $+x$ ($\kappa_r > 0$). La condition de radiation (pour une dépendance temporelle en $i\omega t$) s'énumère à partir de l'amplitude comme suit :

$$|e^{-ik_z z}| = e^{-k_{iz} z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (3.1)$$

Donc si $k_{iz} > 0$, l'onde s'atténue exponentiellement dans la direction $+z$. Elle est appelée *onde propre*. Si $k_{iz} < 0$, l'amplitude de l'onde croît exponentiellement dans la direction $+z$. C'est une *onde impropre*.

Nous répertorions ici quelques ondes complexes :

- L'onde latérale (lateral wave) : elle est excitée et se propage le long de l'interface de deux milieux diélectriques (possiblement à pertes). A grandes distances de la source, l'amplitude du champ décroît comme le carré de l'inverse de la distance le long de l'interface [134].
- L'onde de fuite (leaky wave) : elle est une onde impropre. Elle s'atténue dans le sens de propagation $+x$, mais son amplitude croît exponentiellement dans la direction $+z$, pour un point $+x$ donné. L'énergie se répand à partir de la surface en $z = 0$ [18].
- L'onde rampante (creeping wave) : décrit l'onde se propageant dans la direction d'azimut sur un cylindre. Cette terminologie regroupe plusieurs modes (Watson modes et Elliot modes) [139].
- L'onde piégée (trapped wave) : onde de surface existante dans les couches diélectriques, ou autres interfaces inductives. C'est une onde dite lente car sa constante de propagation $\kappa_r > k_0$ et donc sa vitesse de phase $v_p = \omega/\kappa_r$ est inférieure à celle de la lumière dans le vide $v_p = \omega/k_0$. Nous en reparlerons dans la section 3.3.3.
- L'onde de Zenneck (Zenneck wave) : tout comme les plasmons de surface, elle ne peut exister que si la surface est illuminée par une source [18]. Zenneck fit part de la possibilité de l'existence d'une onde guidée à l'interface [140].

Bien sûr, chacune de ces ondes a ses applications propres, et a donc son propre état de l'art. Les références citées dans cette section dressent un bref état de l'art pour chacune d'elle. Une étude intéressante détaillée, sur l'onde de Zenneck et l'onde latérale, a été menée par Ishimaru *et al* dans [141].

Rétrodiffusion

L'étude de la *rétrodiffusion* est un sujet également intensément rencontré dans la littérature, et notamment en optique. Dans [142], les auteurs, qu'on ne présente plus, étudient le signal rétrodiffusé d'un réflecteur plan (non parfaitement conducteur) faisant office d'objet enfoui (sur le plan $z = -H$), entre deux milieux diélectriques de permittivités différentes. Le milieu diélectrique supérieur est limité par une surface rugueuse sur le plan moyen $z = 0$, au-dessus de laquelle se trouve l'espace libre. Ils montrent que les coefficients de diffusion σ_{hh} et σ_{vv} sont des fonctions oscillantes, dépendant de la longueur d'ondes λ , de l'angle d'incidence θ_i et de l'épaisseur de la couche H . La cause de ces oscillations sont des interférences entre les ondes diffusées par la surface rugueuse, et les multiples réflexions spéculaires entre les interfaces internes à la couche. Ces interférences sont à la fois responsables de l'existence ou de l'évanouissement du signal rétrodiffusé.

Dans la lettre [143], les auteurs présentent des résultats d'expériences menées sous incidences rasantes, pour un échantillon d'aluminium, dont la surface rugueuse présente un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta \approx 6$ nm, recouvert d'une fine couche de diélectrique. La longueur d'ondes d'expérimentation est $\lambda = 0.6328$ μm . Ils observent, en particulier, un pic de signal dans la direction de rétrodiffusion pour les deux polarisations, horizontale et verticale. Ils comparent leurs résultats avec la MPP.

Le phénomène de rétrodiffusion est donc très important car son effet peut apporter une contribution non

négligeable au signal mesuré par le dispositif expérimental. A noter que les deux références ci-dessus trouvent leur application dans la télédétection sous la surface.

Un mécanisme physique couramment rencontré, et qui a été observé par les physiciens du solide, est les *ondes évanescentes* (figure 3.1), dont la forme est

$$e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} - k_{0z}(\mathbf{k}_\perp)z} \quad \mathbf{R} \in V_0, \quad e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + k_{1z}(\mathbf{k}_\perp)z} \quad \mathbf{R} \in V_1, \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{k}_\perp = \kappa \hat{\mathbf{x}}$ pour un problème à deux dimensions, ou $\mathbf{k}_\perp = \kappa \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ pour un problème à trois dimensions, $k_{0z,1z}(\mathbf{k}_\perp) = \sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 - k_{0,1}^2}$, $\|\mathbf{k}_\perp\| > k_{0,1}$. Elles peuvent se propager le long d'une surface pour une valeur précise $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_{ev\perp}$. Elles s'atténuent exponentiellement lorsque l'on s'écarte de la frontière. A cause de la rugosité de la surface, l'onde évanescente excitée par l'onde incidente peut se transformer en une onde se propageant dans le milieu supérieur, soit en propagation avant, soit en rétrodiffusion (figure 3.1).

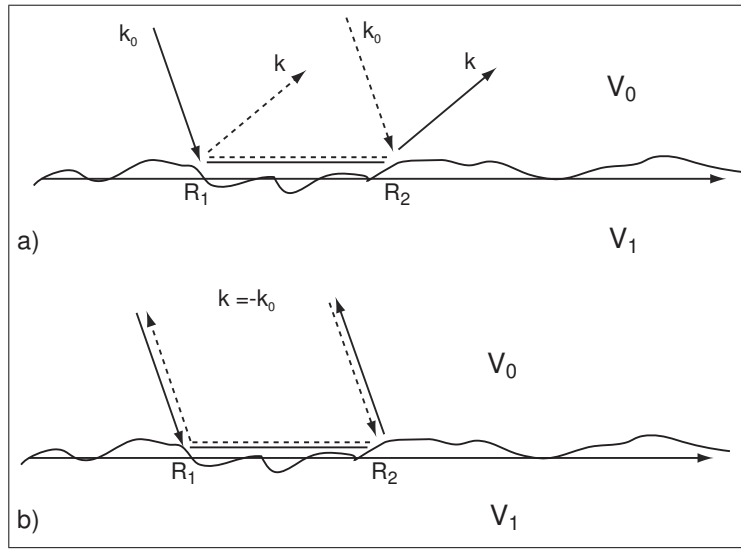


FIG. 3.1 – Double diffusion due aux ondes évanescentes : a) $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k} \neq 0$ b) $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k} = 0$.

Elles n'existent pas pour toutes les longueurs d'onde ni pour tous les matériaux. Dans le cas d'une surface plane, elle n'existent pas pour la cas TE. Pour le cas TM, la continuité de la composante tangentielle E_x à l'interface amène à la condition suivante [18]

$$\frac{k_{0z}(\mathbf{k}_\perp)}{\epsilon_0} = -\frac{k_{1z}(\mathbf{k}_\perp)}{\epsilon_1}. \quad (3.3)$$

Pour une surface plane, il existe un vecteur d'onde \mathbf{k}_\perp défini par la relation de dispersion suivante,

$$\mathbf{k}_\perp^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \quad (3.4)$$

pour laquelle l'onde est évanescente [144], [145], [146]. La condition (3.3) et $k_{0z,1z}(\mathbf{k}_\perp) > 0$ impose que les permittivités doivent être de signe opposé pour que le signal soit rétrodiffusé, c'est à dire que $-\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$.

Les ondes qui vérifient la relation (3.4) sont appelées *polaritons de surface*, et sont des excitations collectives volumiques (d'ions, d'électrons, de trous, ...) d'un matériau. Ils se propagent au voisinage de la surface lorsque la condition (3.3) est remplie. En effet, le métal, aux fréquences optiques, peut avoir

une constante diélectrique avec une partie réelle négative, donc qui permet de vérifier la condition (3.3). Par exemple, l'argent à $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, a une permittivité relative $\epsilon_r = \epsilon_1/\epsilon_0 = -17.2 - i0.498$. Les caractéristiques de l'onde se propageant le long de la surface est similaire à celles des ondes de surface. Elle est appelée *plasmon polariton*. Nous avons choisi, ici, de présenter plus en détail les plasmons car la démonstration est la même que pour l'onde de surface de Zenneck pour les ondes radios se propageant au dessus de la Terre. L'onde de Zenneck et les plasmons de surface sont deux ondes qui ne peuvent exister par elles-mêmes, mais, lorsque la surface est illuminée par une source locale, et que le champ est exprimé dans l'espace de Fourier, ces ondes apparaissent comme des pôles (par exemple dans la fonction de Green ou le coefficient de réflexion) dans le plan complexe de Fourier, et la position de ces pôles influe sur la champ total. Ces ondes sont toutes deux des ondes complexes propres car elles satisfont la condition de radiation (3.1). Les plasmons sont des ondes lentes car leur vitesse de phase est inférieure à celle de la lumière dans le vide car $\Re(\mathbf{k}_{sp\perp}) > k_0$ [18].

On peut également citer Wheelon [147] qui s'est penché sur la rétrodiffusion des ondes électromagnétiques par les fluctuations de l'indice de réfraction dans l'atmosphère, en utilisant l'approximation simple diffusion ou approximation de Born [100].

Comme on le voit, les phénomènes de rétrodiffusion sont abondamment étudiés. L'effet de la rugosité a été démontré dans nombres de papiers, dont quelques-uns ont été référencés ci-dessus. Nous ne présenterons pas toutes les ondes de surfaces. Nous allons voir dans la section suivante que le problème électromagnétique peut être reformulé de sorte qu'apparaisse une onde de surface guidée le long de la surface de mer, et étant de la forme de l'onde de Zenneck.

3.3 Rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une surface conductrice

3.3.1 Introduction

Parce que l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques au-dessus d'une surface est un sujet ancien, comment l'aborder sans parler de ces hommes de renom qui ont contribué, de par leur génie théorique ou pratique, à la compréhension des mécanismes physiques inhérents au problème et régissant la propagation des ondes radios sur la surface de la Terre.

Ils laissent dans leur sillage une littérature scientifique d'une abondance et d'une qualité exceptionnelles. Car les recherches ont été nombreuses, et n'ont pu se réaliser qu'en maîtrisant des outils mathématiques complexes à l'unisson d'intuitions physiques. La découverte des *ondes de surface* ont été l'objet de toutes ces investigations, et l'on peut s'imaginer, à en juger l'innombrable littérature sur ce sujet, que bien des ingénieurs et chercheurs s'y sont creusés la tête. Le paragraphe qui suit leur est consacré, retraçant brièvement le parcours des uns s'appuyant sur les travaux de leurs aînés, des autres en acquiescant, ou en complétant, à leur manière, les recherches de leurs collègues contemporains.

Nous allons dans un premier temps décrire les travaux réalisés pour une surface plane, débutés au début du siècle dernier par Zenneck [140] et Sommerfeld [148]. Par la suite nous citons les nombreux auteurs qui apportèrent une contribution contemporaine à ces travaux, dont entre autres [149], [150], [151], [134]. Indiquons que des corrections ont même été apportées à plusieurs reprises au cours des différentes tentatives de ces chercheurs pour expliquer les phénomènes présents. Les plus connues d'entre elles sont répertoriées dans l'article de Collin [152].

3.3.2 Un "peu" d'Histoire

La propagation des ondes radios est un sujet remportant un fort intérêt depuis plus d'un siècle. Débutant avec les investigations originales de Heinrich Hertz [153], l'influence d'obstacles dans le chemin

de propagation a été une question souvent posée. En particulier, Marconi [154] étudia l'affaiblissement du champ¹ électrique quand une colline se trouve entre les antennes émettrice et réceptrice. Par ailleurs, les conjectures de Nicolas Tesla [155], qualifiées de prophétiques, suggéraient que le signal était guidé, de quelque façon que ce soit, par l'interface air-Terre.

En Italie, en 1900, le jeune Guglielmo Marconi, alors âgé de 21 ans, commença son expérimentation sur la transmission des ondes électromagnétiques, sur quelques kilomètres. Il s'exila en Angleterre, où il entreprit avec succès, de transmettre des signaux sur des distances de l'ordre de la centaine de kilomètres. Sa grande découverte est le résultat de son expérience menée entre Terre-Neuve (Canada) et Cornwall (Cornouailles) en Angleterre, le 12 décembre 1901 : les ondes électromagnétiques peuvent être transmises à travers l'Océan Atlantique, sans que la courbure de la Terre ne soit un obstacle. Son assistant en Cornwall émit le code Morse pour la lettre S, que Marconi reçut, après quelques essais, à Terre-Neuve, soit à plus de 2000 miles (1 mile terrestre international vaut 1609,344 m) de distance. Il est rapporté que la fréquence d'émission utilisée avoisinait 30 kHz, et que l'antenne réceptrice était un long fil tenu en l'air par un cerf-volant. En 1907, la première liaison sans fil était opérationnelle, et reliait Clifton en Irlande à Glaze Bay à Terre-Neuve.

Cette stupéfiante découverte agita les scientifiques qui émirent de nombreuses hypothèses à propos du mécanisme de propagation des ondes électromagnétiques. A cette époque (en 1901), l'existence possible de l'ionosphère n'avait pas encore été établie. Cette possibilité fut abordée par Oliver Heaviside qu'une année plus tard [156]. On cherchait donc à expliquer les observations de Marconi en terme d'ondes guidées le long de la surface de la Terre. Zenneck tout d'abord [140] montra que les équations de Maxwell pouvaient fournir une solution pour une onde guidée par une interface plane séparant deux milieux homogènes, et pouvant se propager sur de longues distances. Cette onde, appelée depuis onde de surface de Zenneck, est polarisée de sorte que le vecteur champ magnétique est parallèle à l'interface. De plus elle est liée à l'interface puisque l'amplitude du champ décroît avec la distance de l'interface. Elle est une *onde rapide*, comme les modes rencontrés dans les guides d'ondes, car sa vitesse de phase est supérieure à celle d'une onde plane. Zenneck et Hack montrèrent que le vecteur électrique d'une telle onde trace une ellipse étroite, inclinée légèrement dans la direction de propagation [157]. Ils supposèrent que les caractéristiques de l'onde de surface de Zenneck étaient en accord avec le comportement des ondes électromagnétiques à la surface de la terre.

Puis, Sommerfeld [148] entreprit d'analyser la radiation d'un dipôle Hertzien vertical dans l'air, au dessus d'un milieu homogène de conductivité finie. Il obtint des expressions exactes pour les composantes du champ sous forme d'intégrales. Sommerfeld évalua ces intégrales à l'aide d'une méthode asymptotique, en supposant que l'indice de réfraction du demi-espace inférieur homogène était très supérieur à l'unité. Afin de donner un sens physique à sa solution, il divisa l'expression du champ en une *onde d'espace* et une *onde de surface*. Ces deux parties, selon Sommerfeld sont nécessaires pour satisfaire les équations de Maxwell et les conditions aux limites appropriées. Il montra que la partie *onde de surface* de sa solution avait presque les mêmes propriétés que l'onde de surface plane de Zenneck. L'amplitude du champ varie à l'inverse de la racine carrée de la distance horizontale à partir du dipôle source. De plus, c'était une *onde rapide*, décroissant exponentiellement avec la hauteur au dessus de l'interface. L'onde de surface de Sommerfeld (où la forme radiale de l'onde de Zenneck) a été considérée pendant quelque temps comme la composante prédominante du champ émis par un dipôle vertical au-dessus d'une surface conductrice plane. Quelque temps après, Hermann Weyl reformula le problème d'un dipôle au dessus d'un milieu conducteur [158]. Sa solution s'écrivait comme un spectre d'ondes planes, qui, même sous une forme différente, étant équivalente à l'intégrale de Sommerfeld. La solution de Weyl était dans une forme convenable pour pouvoir obtenir une expression asymptotique du champ à grandes distances de la source. Mais l'onde radiale de Zenneck n'apparaît pas dans sa formulation. Six ans plus tard, Sommerfeld publie un papier monumental qui étend considérablement ses premières analyses [159]. Comme

¹Pour être exact, on retrouve dans la littérature de l'époque le terme *field strength*.

dans sa publication de 1909, sa solution asymptotique comporte une fonction erreur dont l'argument est la racine carrée d'une quantité complexe. C'est dans le choix de la branche² correcte (contrairement à 1909, base de ce qui alimenta de nombreux papiers futurs sur sa fameuse *erreur de signe*) de la racine carrée que son papier prend tout son intérêt. Comme point de départ, van der Pol et Niessen [160] utilisent la représentation de Weyl et obtinrent des expressions sensiblement plus générales et plus commodes pour le champ d'un dipôle au dessus d'un demi-espace homogène. Une autre approche a été adoptée par Wise [161], qui obtint rigoureusement un développement en séries pour le champ. Les résultats de ces investigateurs peuvent être vus comme une modeste généralisation du travail original de Sommerfeld. Pendant ce temps, un ensemble de courbes présentant l'atténuation de l'onde de surface était proposé par Rolf [162]. Malheureusement, il s'appuya sur la formule donnée dans le papier de 1909 de Sommerfeld. Par conséquent, ses courbes étaient erronées.

Les controverses sur l'erreur³ faite par Sommerfeld dans son papier de 1909, ont été nombreuses. La première rapportée explicitement est l'oeuvre d'un éminent ingénieur radio aux USA à l'époque (1935), Kenneth Norton, qui en fit état dans une lettre parue dans *Nature* [163]. Cependant, malgré les correspondances entre Norton et Sommerfeld, ce dernier ne sembla jamais reconnaître qu'il eut fait une erreur [164]. Il rejeta la faute sur Rolf et autres utilisateurs de sa formule qui auraient mal interprété son onde de surface. Récemment, Collin semble avoir réconcilié tout le monde, en clamant -non sans avoir repris étape par étape la démonstration de Sommerfeld de 1909- que la solution de Sommerfeld a certaines limitations inhérentes, mais qu'elles sont dues à son développement asymptotique, et non le résultat d'une erreur de signe [152]. Puis Norton fit part de ses recherches et de son concept d'ondes d'espace et de surface dans [150]. A la même période, un ingénieur des Laboratoires Bell, Charles Burrows, trouva que les résultats de Weyl, van der Pol et Niessen, eux mêmes concordant avec ceux de Norton, différaient de ceux de Sommerfeld. Cette différence était exactement le terme de l'*onde de surface de Sommerfeld*. Il entreprit des mesures du champ à une fréquence de 150 MHz, sur une distance variant jusqu'à 2000 m, au-dessus du lac Seneca, dans l'état de New York [93]. Il montra que les résultats du champ en fonction de la distance s'accordaient avec la théorie de Weyl et Norton, mais étaient différents des mesures de Rolf. Une décennie plus tard, Kahan et Eckart adressèrent un papier dans la revue *Physical Review* montrant théoriquement que l'onde de surface de Sommerfeld ne pouvait exister car la condition de radiation n'était pas remplie [165]. Leur résultat concordait avec la théorie de Weyl et les mesures de Burrows. Malgré la formidable théorie de Sommerfeld, son papier de 1909 aura fait couler beaucoup d'encre.

Ainsi, les pionniers Sommerfeld et Zenneck, de par leurs résultats théoriques obtenus apportèrent une considérable crédibilité à la vision (et à l'expérimentation) de Marconi sur le fait que l'onde électromagnétique était guidée le long de la surface. La section suivante tente d'apporter un bref résumé des maints travaux réalisés par les nombreux auteurs s'étant intéressés au sujet durant tout le siècle dernier. Siècle qui aura donc été témoin de réelles avancées dans la compréhension des phénomènes physiques intervenant dans la propagation des ondes le long de la surface de la Terre. Des auteurs tels que King [151], Wait [149] ont été très productif dans ce domaine.

Le lecteur trouvera dans [134] des références nombreuses laissées par l'auteur. De même, l'article de Oliner [166] retrace un siècle de recherches et d'applications du guidage des ondes, et le papier de Schelkunoff tente d'apporter une signification sur les propriétés physiques des différentes ondes de surfaces rencontrées le long d'interface, de câbles, ou dans une couche de diélectrique [167].

²Cette notion sera introduite ultérieurement.

³Sommerfeld aurait placé l'argument de la fonction erreur complémentaire dans le mauvais quadrant du plan complexe (à titre indicatif, le facteur temporel qu'il employa était $\exp(+i\omega t)$), ce qui eut pour conséquence que le module de la fonction d'atténuation comportant l'onde de surface, que nous verrons dans la section suivante, excédait 1, ce qui ne se peut dans ce cadre.

3.3.3 Onde de surface le long d'une surface plane

Le cadre de notre étude est l'évaluation du champ diffusé par une surface de mer et mesuré par une antenne dont la hauteur est de l'ordre de la longueur d'onde émise. La configuration du système antenne-point de diffusion sur la mer est telle que la mesure se fait en champ lointain. De ce fait, l'angle d'incidence est très proche de l'horizontale. Nous devons donc prendre en compte, dans la mesure du champ diffusé, l'onde se propageant le long de la surface, mise en évidence expérimentalement par Marconi au début du siècle dernier.

Les études théoriques de ce phénomène ont été nombreuses. Dans la littérature, les composantes du champ sont toutes exprimées en terme du vecteur de Hertz. Nous allons donc reprendre ici une partie de la théorie en terme de ce vecteur. Ce qui suit est issu en partie des travaux originaux de Sommerfeld, et repris par les auteurs cités auparavant.

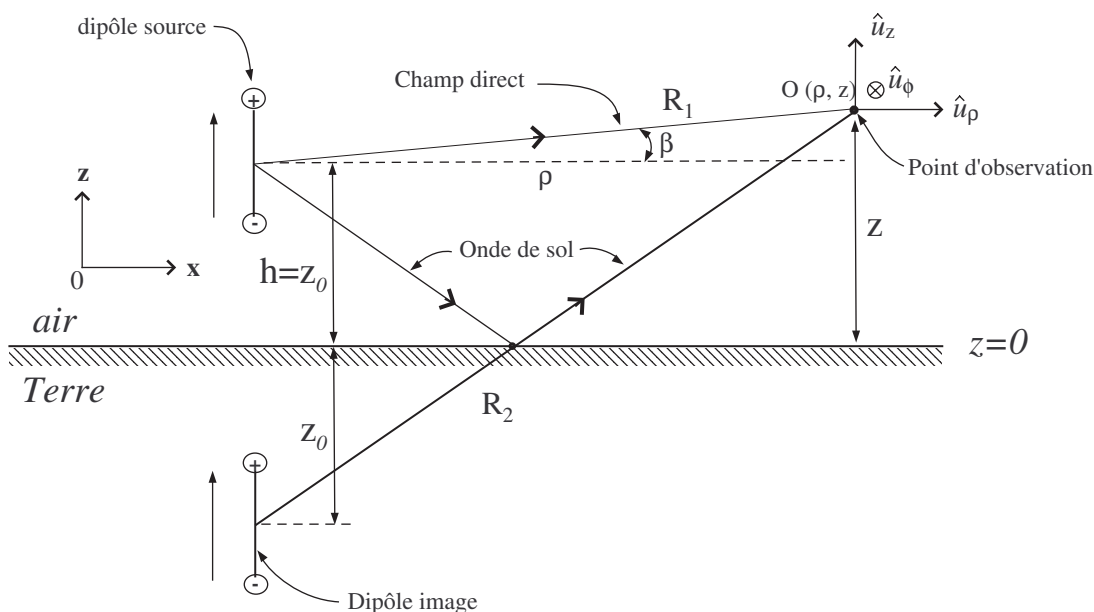


FIG. 3.2 – Représentation d'un dipôle vertical au-dessus d'une surface d'impédance Z_s . Problème initial en coordonnées cylindriques posé par A. Sommerfeld en 1909.

Examinons le problème de la figure 3.2. Dans l'air, la composante verticale scalaire Π_z du vecteur de Hertz $\mathbf{\Pi}$ satisfait l'équation d'Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k_0^2)\Pi_z = -\delta(R - R_0), \quad (3.5)$$

où r_0 est situé en $x = 0$ et $z_0 = h$, où h est la hauteur du dipôle source. Nous pouvons écrire Π_z comme la somme d'une onde primaire Π_p , dont la solution de l'équation (3.5) est

$$\Pi_p = \frac{e^{-ik_0|R-R_0|}}{4\pi|R-R_0|}, \quad (3.6)$$

et d'une onde diffractée Π_s . En effet, lorsque deux (ou plus) ondes sont présentes simultanément au même endroit, l'onde résultante est la somme de chacune des ondes individuelles : c'est le principe de superposition linéaire. Il stipule qu'une solution d'une équation différentielle peut aussi l'être par le principe de superposition qui consiste à obtenir, à partir d'une famille de solutions, de nouvelles solutions en procédant une somme ou une intégration. Donc, nous l'avons vu dans le chapitre un, équation (1.46),

en tout point du demi-espace supérieur, la solution de l'équation d'Helmholtz est la somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchie

$$\Pi_z = \Pi_p + \Pi_s. \quad (3.7)$$

Pour satisfaire les conditions aux limites, on peut exprimer (3.6) en termes d'ondes cylindriques dont les nombres d'ondes radiaux κ sont les mêmes dans les milieux supérieur et inférieur. Un champ électromagnétique à l'intérieur d'un milieu homogène et isotrope peut être représenté par la superposition de fonctions d'onde cylindriques élémentaires. Ainsi, le potentiel de Hertz satisfaisant l'équation d'Helmholtz pour des ondes primaires dans les régions I et II (voir figure 3.3), s'écrit respectivement :

$$\Pi_p = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa}{ik_z} e^{-ik_z(z-h)} J_0(\kappa\rho) d\kappa, \quad (3.8)$$

$$\Pi_p = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa}{ik_z} e^{-ik_z(h-z)} J_0(\kappa\rho) d\kappa, \quad (3.9)$$

où $\rho = \sqrt{R_1^2 - (z-h)^2} = \sqrt{R_2^2 - (z+h)^2}$. Pour les deux régions I et II, nous pouvons écrire :

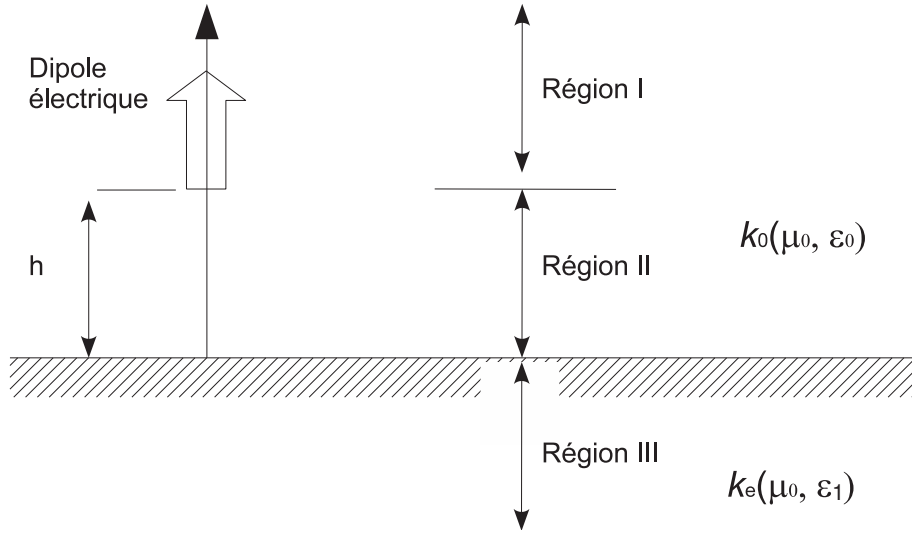


FIG. 3.3 – Dipôle vertical au-dessus du sol, et régions de propagation.

$$\Pi_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa}{ik_z} R(\kappa) e^{-ik_z(z+h)} J_0(\kappa\rho) d\kappa, \quad (3.10)$$

Dans la région III, il n'y a pas d'onde primaire, et donc, l'onde diffractée satisfait l'équation d'onde :

$$(\nabla^2 + k_e^2)\Pi_s = 0, \quad (3.11)$$

$$\Pi_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa}{ik_z} T(\kappa) e^{ik_{ze}z - ik_z h} J_0(\kappa\rho) d\kappa, \quad (3.12)$$

où $\kappa^2 + k_{ze}^2 = k_e^2 = n^2 k_0^2$. Le terme $-ik_z$ dans (3.8), (3.9) et (3.10) représente une onde sortante dans la direction $+z$ et $\Re(k_z) > 0$, $\Im(k_z) < 0$. De même, pour (3.12), l'onde sortante dans la direction $-z$ satisfaisant les conditions aux limites nécessite l'utilisation du terme $+ik_{ze}$.

Les équations (3.8)-(3.12) représentent les expressions complètes des champs, exprimés en termes de deux fonctions inconnues, $R(\kappa)$ et $T(\kappa)$. Ces deux inconnues sont déterminées à partir des conditions aux limites à $z = 0$. Dans de nombreux articles, il est question du vecteur de Hertz. Celui-ci est en fait

une forme combinée des potentiels scalaire et vecteur et de la condition de Lorentz [18]. A partir de ce vecteur, toutes les composantes du champ peuvent être déduites. En effet, celui-ci permet d'exprimer communément les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} (voir annexe E). Une seule équation vectorielle est alors obtenue :

$$\nabla^2 \Pi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (3.13)$$

à partir de laquelle tous les champs électromagnétiques peuvent être déduits :

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \Pi) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi = \nabla \wedge \nabla \wedge \Pi - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \varepsilon_0 \nabla \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Le vecteur \mathbf{P} est appelé le vecteur électrique de polarisation et est égal au moment du dipole par unité de volume de la source excitante. Dans le cas du régime harmonique, l'opérateur dérivation $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$, on a alors

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \Pi) - k_0^2 \Pi = \nabla \wedge \nabla \wedge \Pi - \frac{\mathbf{J}}{i\omega \varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \nabla \wedge \Pi \quad (3.15)$$

où $k_0^2 = \omega^2/c^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$.

Les expressions des champs électrique et magnétique sont exprimés à l'aide du potentiel de Hertz (3.15) dans tout l'espace supérieur comme

$$E_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Pi_z, \quad H_\phi = -i\omega \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_z, \quad E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \Pi_z. \quad (3.16)$$

Les conditions de passages sont que les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues à l'interface. A cause de la symétrie du problème, les seules composantes tangentielles sont E_ρ et H_ϕ . Ainsi, nous avons [168] :

$$E_\rho^0 = E_\rho^1 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Pi_z^{(\text{II})} = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Pi_z^{(\text{III})} \quad \text{à} \quad z = 0, \quad (3.17)$$

où $\Pi_z^{(\text{II})}$ et $\Pi_z^{(\text{III})}$ représente Π_z dans les régions (II) et (III). Pour la composante du champ magnétique, nous avons :

$$H_\phi^0 = H_\phi^1 \Rightarrow -i\omega \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_z^{(\text{II})} = -i\omega \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_z^{(\text{III})} \quad \text{à} \quad z = 0. \quad (3.18)$$

Les relations (3.17) et (3.18) sont valables pour toutes les valeurs de $\rho = \sqrt{R_2^2 - (z+h)^2}$ et peuvent par conséquent être intégrées par rapport à ρ . Les fonctions et leurs dérivées s'annulent lorsque $\rho \rightarrow \infty$ de sorte que la constante d'intégration doit être nulle (la condition de radiation est alors vérifiée). Les conditions aux limites sont alors à

$$\frac{\partial}{\partial z} \Pi_z^{(\text{II})} = \frac{\partial}{\partial z} \Pi_z^{(\text{III})} \quad \text{et} \quad \Pi_z^{(\text{II})} = n^2 \Pi_z^{(\text{III})} \quad \text{à} \quad z = 0. \quad (3.19)$$

Les équations de dispersion pour les nombres d'ondes k_0 et k_e sont données par : $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ et $k_e = k_0 \times n$ où $n = \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon_{r1} + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}$.

Le vecteur de Hertz résultant, à partir de (3.6), (3.8), (3.9), (3.10) et (3.12), s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi_z = & \left(\frac{I_{dl}}{i\omega \varepsilon_0} \right) \left[\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\kappa \rho) e^{-ik_z |z-h|} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z}}_{\text{excitation primaire}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty R(\kappa) J_0(\kappa \rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z} \right] \quad \text{pour} \quad z > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

et

$$\Pi_z = \left(\frac{I_{dl}}{i\omega\varepsilon_0} \right) \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty T(\kappa) J_0(\kappa\rho) e^{-ik_{ze}z - ik_z h} \frac{\kappa d\kappa}{i} \right] \quad \text{pour } z < 0. \quad (3.21)$$

L'élément de courant électrique source s'écrit

$$\frac{I_{dl}}{i\omega\varepsilon_0} = \frac{I_{dl}}{i\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = -iI_{dl}k_0Z_0. \quad (3.22)$$

Nous pouvons maintenant obtenir les expressions des fonctions $R(\kappa)$ et $T(\kappa)$ à l'interface. Nous utilisons les expressions de continuité à l'interface (3.19), et des expressions pour les potentiels des régions II et III (3.9), (3.10) et (3.12), donnant le vecteur de Hertz résultant (3.20) et (3.21). La relation de gauche dans (3.19) présente une difficulté. En effet, si on dérive l'excitation primaire (3.8) sous le signe intégrale par rapport à z , et que l'on pose $z = 0$ (puisque l'on est à l'interface), alors l'intégrale diverge. On passe outre cette difficulté en négligeant l'excitation primaire dans (3.20) car Sommerfeld a montré que

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ik_0R}}{R} \right) \right]_{z=0} = \left[\frac{d}{dR} \left(\frac{e^{-ik_0R}}{R} \right) \frac{z}{R} \right]_{z=0} = 0. \quad (3.23)$$

Nous obtenons alors le système d'équations aux inconnues $R(\kappa)$ et $T(\kappa)$. La résolution du système nous permet d'obtenir

$$R(\kappa) = \frac{n^2k_z - k_{ze}}{n^2k_z + k_{ze}}, \quad (3.24)$$

$$T(\kappa) = \frac{2k_z}{n^2k_z + k_{ze}}, \quad (3.25)$$

Par conséquent, la solution du problème original est

$$\begin{aligned} \Pi_z = \left(\frac{I_{dl}}{i\omega\varepsilon_0} \right) & \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\kappa\rho) e^{-ik_z|z-h|} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{n^2k_z - k_{ze}}{n^2k_z + k_{ze}} J_0(\kappa\rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{jk_z} \right] \quad \text{pour } z > 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

et

$$\Pi_z = \left(\frac{I_{dl}}{i\omega\varepsilon_0} \right) \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\kappa\rho) \frac{2k_z}{n^2k_z + k_{ze}} e^{-ik_{ze}z - ik_z h} \frac{\kappa d\kappa}{i} \right] \quad \text{pour } z < 0. \quad (3.27)$$

Considérons maintenant l'équation (3.20) sans le terme $I_{dl}/i\omega\varepsilon_0$. Nous pouvons écrire, dans (3.7)

$$\Pi_p = \frac{e^{-ik_0|R-R_0|}}{4\pi|R-R_0|} \quad \text{et} \quad \Pi_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{n^2k_z - k_{ze}}{n^2k_z + k_{ze}} J_0(\kappa\rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z}. \quad (3.28)$$

Π_p représente l'onde directe non perturbée par la surface, de l'antenne source vers le point d'observation, et Π_s l'onde réfléchie. ρ est la projetée horizontale de $R_1 = |R - R_0|$, où R_0 est le point source, et R est le point d'observation. Pour évaluer l'intégrale en champ lointain, i.e. $k_0R_1 \gg 1$, le point d'observation est éloigné, il est pratique de convertir les bornes d'intégration ($0 \rightarrow \infty$) en ($-\infty \rightarrow +\infty$) dans l'optique d'appliquer la méthode du point selle pour des intégrales de cette forme. Pour cela, l'identité suivante est utilisée :

$$J_0(\kappa\rho) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(\kappa\rho) + H_0^{(2)}(\kappa\rho)]. \quad (3.29)$$

Après quelques manipulations mathématiques, l'équation d'onde (3.28) pour l'onde réfléchie s'écrit alors [168] :

$$\Pi_s = \frac{1}{8\pi} \int_C \frac{n^2k_z - k_{ze}}{n^2k_z + k_{ze}} H_0^{(2)}(\kappa\rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z}. \quad (3.30)$$

Nous venons de donner un bref résumé pour formuler le champ diffracté Π_s par la surface en une forme s'étendant de $]-\infty; +\infty[$ dans le plan complexe κ , de sorte que la méthode du point selle puisse être appliquée.

Etudions d'abord l'intégrale (3.30) lorsque le point d'observation est placé en champ lointain, c'est-à-dire $|k_0 R| \gg 1$. La forme asymptotique de la fonction de Hankel [13] est alors :

$$H_0^{(2)}(\kappa\rho) = \left(\frac{2}{\pi\kappa\rho}\right)^{1/2} e^{-i\kappa\rho+i\pi/4}. \quad (3.31)$$

L'intégrale (3.30) en champ lointain s'écrit alors :

$$\Pi_s = \frac{1}{8\pi} \int_C \frac{n^2 k_z - k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} \sqrt{\frac{2}{\kappa\rho\pi}} e^{i\pi/4} e^{-i\kappa\rho - ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z}. \quad (3.32)$$

Posons

$$F(\kappa) = \frac{1}{8\pi} \frac{n^2 k_z - k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} \sqrt{\frac{2}{\kappa\rho\pi}} e^{i\pi/4} \frac{\kappa}{ik_z}. \quad (3.33)$$

La méthode du point selle permet l'évaluation suivante :

$$\int_C F(\kappa) e^{-i\kappa\rho - ik_z(z+h)} d\kappa \approx F(k_0 \sin \theta) \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 R_2}} k_0 \cos \theta e^{-ik_0 R_2 + i\pi/4}, \quad (3.34)$$

où

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}, \quad z+h = R_2 \cos \theta, \quad \rho = R_2 \sin \theta. \quad (3.35)$$

A l'aide des expressions (3.35), nous avons alors, avec la substitution de (3.34) dans (3.33) :

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{n^2 k_0 \cos \theta - \sqrt{n^2 k_0^2 - k_0^2 \sin^2 \theta}}{n^2 k_0 \cos \theta + \sqrt{n^2 k_0^2 - k_0^2 \sin^2 \theta}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 \sin \theta R_2 \sin \theta}} k_0 \cos \theta \\ &\times \frac{k_0 \sin \theta}{ik_0 \cos \theta} \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 R_2}} e^{i\pi/4} e^{-ik_0 R_2 + i\pi/4}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

qui devient

$$\Pi_s = \left(\frac{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right) \frac{e^{-ik_0 R_2}}{4\pi R_2}, \quad (3.37)$$

où nous avons substitué $k_z = k_0 \cos \theta$ et $k_{ze} = \sqrt{n^2 k_0^2 - (\kappa = k_0 \sin \theta)^2}$. R_2 est la distance entre le point source-image et le point d'observation. L'équation (3.37) est une onde sphérique prenant pour origine des phases le point image, mais dont l'amplitude est affectée du coefficient de réflexion $R(\theta)$. Le coefficient de réflexion est exactement le même que celui d'une onde plane illuminant une surface plane. En effet, parce que la technique du point selle est valide en champ lointain de la source, l'onde est supposée se comporter localement comme une onde plane. Nous pouvons alors écrire le champ total dans le demi-espace supérieur :

$$\Pi_z = \Pi_p + \Pi_s = \frac{e^{-ik_0 R_1}}{4\pi R_1} + R(\theta) \frac{e^{-ik_0 R_2}}{4\pi R_2}. \quad (3.38)$$

Notons maintenant que lorsque la source et le point d'observation sont proches de la surface, alors $R_1 = R_2 = R$ et à grande distance, $\theta \rightarrow \pi/2$. Par conséquent, $R(\theta) \rightarrow -1$. Donc l'expression (3.38) s'approche de zéro sur la surface et loin de la source. En général, une onde sphérique du type e^{-ikR}/R

doit s'annuler à l'interface entre deux milieux différents. Mais les ondes du type $1/R^2$ ne s'annulent pas. C'est le problème central posé par Sommerfeld, et qui consiste à déterminer le champ sur la surface. Pour cela, exprimons (3.38) sous une forme décomposée. En effet nous pouvons décomposer le coefficient de réflexion (3.24) dans le champ total (3.26) en éléments simples de la forme :

$$R(\kappa) = \frac{n^2 k_z - k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} = 1 - \frac{2k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}}. \quad (3.39)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \Pi_z = & \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\kappa\rho) e^{-ik_z|z-h|} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\kappa\rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z} \right] \\ & - 2 \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} J_0(\kappa\rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z} \end{aligned} \quad \text{pour } z > 0, \quad (3.40)$$

où par convenance, nous avons posé $I_{dl}/(i\omega\varepsilon_0) = 1$. L'équation (3.39) peut également s'écrire :

$$R(\kappa) = \frac{n^2 k_z - k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} = \frac{1 - \eta_v^0(\kappa)}{1 + \eta_v^0(\kappa)} = 1 - 2 \frac{\eta_v^0(\kappa)}{1 + \eta_v^0(\kappa)} \quad (3.41)$$

où $\eta_v^0(\kappa) = \frac{k_0 Z_v^0(\kappa)}{k_z(\kappa)}$ et est donnée dans (2.79). L'exposant 0 indique le cas d'une surface plane. En substituant les équations (3.8) à (3.12) dans (3.40), nous avons

$$\Pi_z = \frac{e^{-ik_0 R_1}}{4\pi R_1} + \frac{e^{-ik_0 R_2}}{4\pi R_2} - 2P. \quad (3.42)$$

Le premier terme de (3.42) est l'onde se propageant dans l'espace "non perturbé" (sans frontières) du point source au point d'observation. Le second terme représente l'onde voyageant du point image physique de la source au point d'observation⁴, le troisième terme étant l'onde de surface. On peut raisonner de la sorte : les deux premiers termes représentent la situation pour une surface parfaitement conductrice. Le troisième terme est donc le terme correcteur pour l'imperfection⁵ de la surface. Comme nous l'avons précédemment, nous pouvons exprimer P , à l'aide de la fonction de Hankel $H_0^{(2)}(\kappa\rho)$, comme

$$P = \frac{1}{8\pi} \int_C \frac{k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} H_0^{(2)}(\kappa\rho) e^{-ik_z(z+h)} \frac{\kappa d\kappa}{ik_z}. \quad (3.43)$$

L'intégrale P (3.43) peut être approchée, avec (3.31), par

$$P \approx \frac{1}{8\pi} \int_C \frac{k_{ze}}{n^2 k_z + k_{ze}} \left(\frac{2}{\pi\kappa\rho} \right)^{1/2} \frac{e^{i\pi/4}}{ik_z} e^{-i\kappa\rho - ik_z(z+h)} \kappa d\kappa. \quad (3.44)$$

Tout le problème est maintenant d'évaluer l'intégrale P . En effet, puisqu'elle représente la correction entre le champ totale pour une surface parfaitement conductrice, et le champ total pour une surface hautement (mais pas parfaitement) conductrice, dû à la conductivité de la surface, elle décrit donc le champ *sur* la surface, en champ lointain, pour $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ et $R_1 \approx R_2$. L'intervalle d'intégration de la variable κ s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. On peut donc montrer que le point selle donnant le chemin d'intégration de la plus forte pente (obtenue par la méthode du point selle classique), de l'intégrale de P est proche du pôle de l'intégrande⁶ $(n^2 k_z + k_{ze})k_z = 0$ (on remarque que l'expression du pôle est identique à (3.3)

⁴Cette décomposition est issue de la théorie de l'optique géométrique.

⁵On entend par imperfection que la conductivité de la surface est grande mais finie, au point qu'elle soit considérée comme hautement conductrice, ce qui est différent de parfaitement conductrice.

⁶Notons que puisque $k_{ze} = \sqrt{(nk_0)^2 - \kappa^2} = nk_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n}\right)^2}$, alors le pôle a aussi pour expression $k_z + \frac{k_0}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n}\right)^2} = 0$.

pour déterminer la constante de propagation de l'onde Zenneck). Pour résoudre l'intégrale P , on utilise donc la méthode du point selle modifiée.

Il est en particulier important de noter en premier lieu que l'intégrale (3.43) contient $\kappa = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$. Ceci nous amène à la question suivante : doit-on prendre $k_{z1} = +\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$ ou $k_{z2} = -\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$? Les points de branche sont à $\kappa = \pm k_0$. Il en est de même pour $\kappa = \sqrt{k_e^2 - k_{ze}^2} = \sqrt{n^2 k_0^2 - k_{ze}^2}$ et les points de branche sont à $\kappa = \pm k_e$. Notons également que le remplacement de la fonction de Bessel par la fonction de Hankel a ajouté un nouveau point de branche en $\kappa = 0$.

Pour une valeur de κ , nous pouvons avoir deux valeurs de k_z . C'est le cas de l'exemple simple $y^2 = x$. y peut prendre soit la valeur $y_1 = +\sqrt{x}$ soit $y_2 = -\sqrt{x}$. On appelle ces points "les branches" de y . Si y est une fonction complexe d'une variable complexe x , alors chaque branche est représentée par un plan complexe. Nous appelons ces plans d'une fonction multiforme⁷ les *surfaces de Riemann*. Une construction topologique de la surface de Riemann pour $k_z = \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$ est illustrée sur la figure (3.4).

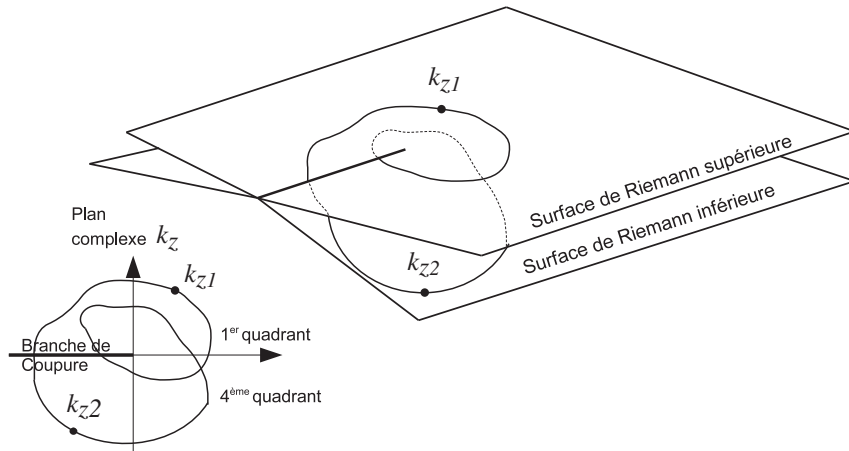


FIG. 3.4 – Interprétation des surfaces de Riemann pour $k_z = \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$.

Nous introduisons ici la notion de "branche de coupure" ou "ramification". Les points sont donc deux déterminations de la fonction multiforme $k_z = +\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$. Pour savoir quel point k_{z1} ou k_{z2} choisir, nous traçons cette branche de coupure à partir de l'origine le long des réels négatifs dans le plan complexe κ . La surface supérieure (figure 3.4) représente k_{z1} et la surface inférieure représente k_{z2} . Ces deux surfaces sont jointes à la branche de coupure. Lorsque celle-ci est traversée, nous utilisons k_{z2} . Si elle est traversée une seconde fois, nous retournons à la première surface de Riemann et utilisons k_{z1} . Si l'expression (3.43) représente une situation physique d'une onde diffusée sur une surface, alors cette onde doit être une onde sortante et aucune onde ne doit revenir de l'infini : c'est la condition de radiation. Le contour d'intégration de (3.43) doit donc être choisi de sorte qu'il traverse les valeurs de k_z satisfaisant la condition de radiation à l'infini. Puisque l'intégrande est de la forme $e^{-ik_z z}$, la condition de radiation pour $z > 0$ se formule ainsi :

$$\left| e^{-ik_z z} \right| = e^{\Im m(k_z)z} \rightarrow 0 \quad \text{quand } z \rightarrow +\infty \quad (3.45)$$

imposant donc que $\Im m(k_z) < 0$. De plus, pour $z > 0$, la progression de la phase (donc la partie $e^{\Re e(k_z)z}$) de l'onde sortante doit être positive, ce qui est vérifiée pour $\Re e(k_z) > 0$. Donc, k_z à choisir doit être dans le quatrième quadrant du plan complexe (partie inférieure droite sur figure 3.4), ce qui correspond à la surface de Riemann supérieure. Cette surface satisfaisant ces conditions est appelée surface de Riemann

⁷Une fonction est *multiforme* si au moins un élément du domaine définition a au moins deux images.

propre, sur laquelle $\Im m(k_z) < 0$ et $\Im m(k_{ze}) < 0$. Dans notre cas, il y a quatre surfaces de Riemann, dont une seule satisfait les conditions de rayonnement

$$|e^{-ik_z z}| = e^{\Im m(k_z)z} \rightarrow 0 \quad z \rightarrow +\infty \quad (3.46)$$

$$|e^{ik_{ze}z}| = e^{-\Im m(k_{ze})z} \rightarrow 0 \quad z \rightarrow -\infty. \quad (3.47)$$

Cette surface est propre. Les trois autres surfaces de Riemann sont impropres car elles ne satisfont pas les conditions de radiation à l'infini. Ishimaru montre dans [18] que le contour original d'intégration se trouve bien sur la surface de Riemann propre.

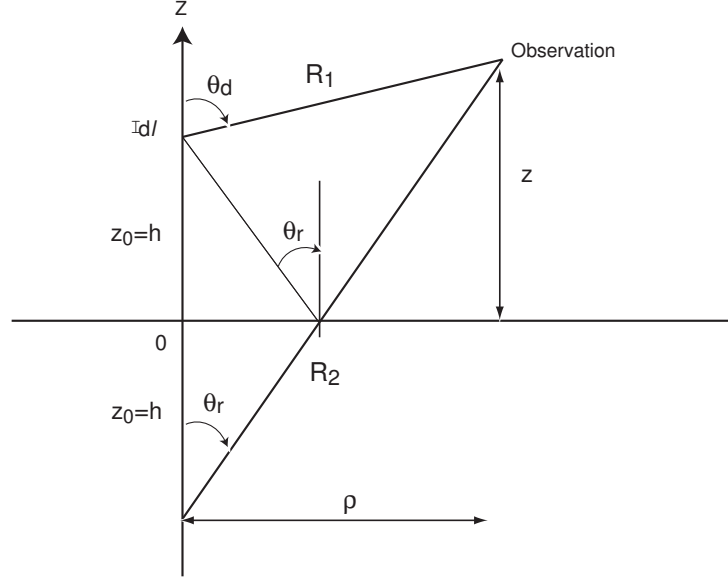


FIG. 3.5 – Configuration géométrique.

Lorsque l'angle d'incidence $\theta_r \rightarrow \pi/2$, le pôle du coefficient de réflexion en polarisation verticale approche le point selle, et leurs contributions ne peuvent être séparées. Dans ce cas, les techniques du point selle classiques ne sont plus applicables et une technique alternative est nécessaire. Une petite partie de la démonstration de la méthode du point selle modifiée est présentée en Annexe F. Pour une surface conductrice séparant deux demi-espaces (milieux semi-infinis), l'intégrale P s'exprime alors :

$$P \approx -i\sqrt{\pi w} e^{-w} \operatorname{erfc}(i\sqrt{w}) \frac{e^{-ik_0 R_2}}{R_2}, \quad (3.48)$$

où w est la distance⁸ *numérique* et est donnée par :

$$w = -\frac{ik_0 R_2}{2 \sin^2 \theta_r} (\cos \theta_r + Z_v^0(\kappa))^2 \quad \text{avec} \quad \cos \theta_r = \frac{z+h}{R_2} \quad \text{et} \quad \sin \theta_r = \frac{\rho}{R_2}, \quad (3.49)$$

laquelle devient, $\theta_r \rightarrow \pi/2$:

$$w = -\frac{ik_0 R_2}{2} (Z_v^0(\kappa))^2, \quad (3.50)$$

où Z_v^0 est l'impédance effective (complexe) de surface pour une surface plane.

⁸Elle est en fait appelée abusivement ainsi dans la littérature et correspond à la différence de phase entre l'onde en espace libre et l'onde de surface. Elle n'est donc pas homogène à une distance.

En sachant que le pôle (le nombre d'onde vertical) pour une surface plane est donné par la relation $k_{zp}^0 = -k_0 Z_v^0$, et en considérant que l'émetteur et le récepteur sont proches de la surface⁹ et par le changement de variable $k_{zp} = k_0 \cos \alpha_p$, nous pouvons réécrire [169] :

$$w = ik_0 R_2 \cos(\alpha_p - \theta) - ik_0 R_2, \quad (3.51)$$

où α_p est donné dans (F.22). Lorsque l'émetteur et le récepteur sont sur la surface (ou proche au sens de la longueur d'onde émise), la fonction de Green pour le champ total pour une surface plane s'écrit :

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \approx 2G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^I)F(w), \quad (3.52)$$

où \mathbf{r}_0^I est le point source image, et $F(w)$ est appelée fonction d'atténuation, terme que l'on retrouve abondamment dans la littérature [149], [152], [169]... Celle-ci s'exprime comme suit :

$$F(w) = 1 - i\sqrt{\pi w}e^{-w}\operatorname{erfc}(-i\sqrt{w}). \quad (3.53)$$

Ainsi une solution approchée pour une onde guidée à l'interface est obtenue. Elle est dépendante des positions de la source et de l'observation et de l'impédance de la surface.

3.3.4 Interprétation physique de l'onde de surface

Nous venons d'effectuer un bref état de l'art des travaux théoriques réalisés pour un dipôle vertical rayonnant au dessus d'une surface plane de conductivité finie. Le but de ces travaux étaient de montrer l'existence d'une onde de surface, comme étant en accord avec les observations expérimentales de Marconi, et de l'exprimer théoriquement. Les démonstrations demeurent bien plus complexes, et le lecteur pourra consulter les papiers originaux cités dans l'introduction. Puis, à partir du vecteur de Hertz, les composantes du champ (en coordonnées cylindriques) sont déterminées à l'aide des relations de continuités (3.16). En effectuant les opérations dérivées sur le vecteur de Hertz (3.42) solution du problème, on obtient les composantes du champ [170].

Il est intéressant de donner la solution que Norton obtient [150] car son formalisme est général et est valide pour n'importe quelle hauteur d'émetteur ou de récepteur. Sa solution, qui contient explicitement une onde directe, une onde réfléchie et une onde de surface, s'écrit, en terme du potentiel de Hertz, et de la fonction d'atténuation $F(w)$ (3.53)

$$\Pi_z = \frac{I_{dl}\mu_0}{4\pi} \left[\frac{e^{-ik_0 R_1}}{R_1} + R_v \frac{e^{-ik_0 R_2}}{R_2} + (1 - R_v)F(w)e^{-ik_0 R_2} R_2 \right], \quad (3.54)$$

où R_v est le coefficient de réflexion de Fresnel pour la polarisation verticale, donné dans (1.64) que Norton écrit sous la forme

$$R_v = \frac{\cos \theta_r - v\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta_r}}{\cos \theta_r + v\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta_r}} \quad (3.55)$$

où $v = k_0/k_1 = 1/n$, et θ_r est représenté sur la figure 3.5. w est la distance numérique que l'on peut écrire sous forme polaire $|w| \exp(i\phi_w)$. Lorsque $0 \leq \phi_w \leq \frac{\pi}{2}$, une onde de surface appelée *onde de surface piégée* (trapped surface wave) apparaît [171], [172]. Si $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_w \leq 0$, seule l'*onde de surface de Norton* [89] existe. Ces résultats ont été donnés par King pour un milieu homogène [173]. De la valeur de w dépend la convergence de la fonction d'atténuation $F(w)$ car elle contient la fonction

⁹Si l'émetteur et le récepteur sont proches ou sur la surface alors $\sin \theta_r \rightarrow 1$ et $\cos \theta_r \rightarrow 0$.

erreur complémentaire erfc (voir annexe F), qui, pour pouvoir être programmée numériquement, est décomposée en série [174]

$$\begin{aligned} F(w) &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[i \frac{\pi^{1/2} w^{m+1/2}}{m!} + \frac{4^{m+1} (m+1)!}{(2m+2)!} w^{m+1} \right] \\ &= 1 - i(\pi w)^{1/2} - 2w + i(\pi w^3)^{1/2} + \frac{4w^2}{3} - i \frac{(\pi w^5)^{1/2}}{2} - \frac{8w^3}{15} + \dots \end{aligned} \quad (3.56)$$

pour $|w| \rightarrow 0$. Lorsque $|w|$ est grand ($\rightarrow \infty$), ce qui revient à dire que $k_0 R_2$ est grand d'après (3.49), la série converge lentement et donc il faut plus de termes pour que la série donne des résultats corrects. L'auteur [171] montre qu'alors les séries suivantes sont obtenues

$$F(w) = -\frac{1}{2w} - \frac{1 \times 3}{(2w)^2} - \frac{1 \times 3 \times 5}{(2w)^3} - \dots \quad (3.57)$$

pour $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_w \leq 0$ et

$$F(w) = -2i(\pi w)^{1/2} e^{-w} - \frac{1}{2w} - \frac{1 \times 3}{(2w)^2} - \frac{1 \times 3 \times 5}{(2w)^3} - \dots, \quad (3.58)$$

pour $0 \leq \phi_w \leq \frac{\pi}{2}$. Le terme $-2i(\pi w)^{1/2} e^{-w}$ pour $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_w \leq 0$ dans (3.58) est prédominant à courtes distances, et disparaît exponentiellement quand celles-ci augmentent. La composante du champ associée à ce terme est l'onde de surface piégée, tandis que la composante du champ associée aux termes restants de (3.58) ou l'équation complète (3.57), est l'onde de surface de Norton. Donc ces deux ondes de surfaces co-existent lorsque la surface est hautement inductive (tableau 3.1).

A partir du vecteur de Hertz, solution du problème, (3.54), et des relations (3.16) donnant les composantes du champ déduites de (E.10), on peut écrire :

$$E_z = \frac{-iI_{dl}k_0Z_0}{4\pi} \left[\sin^2 \theta_d \frac{e^{-ik_0R_1}}{R_1} + R_v \sin^2 \theta_r \frac{e^{-ik_0R_2}}{R_2} + (1 - R_v)F(w) \sin^2 \theta_r \frac{e^{-ik_0R_2}}{R_2} \right], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{iI_{dl}k_0Z_0}{4\pi} \left[\sin \theta_d \cos \theta_d \frac{e^{-ik_0R_1}}{R_1} + R_v \sin \theta_r \cos \theta_r \frac{e^{-ik_0R_2}}{R_2} \right. \\ &\quad \left. - (1 - R_v)F(w)v(1 - v^2 \sin^2 \theta_r)^{1/2} \sin \theta_r \frac{e^{-ik_0R_2}}{R_2} \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$H_\phi = \frac{iI_{dl}k_0}{4\pi} \left[\sin \theta_d \frac{e^{-ik_0R_1}}{R_1} + R_v \sin \theta_r \frac{e^{-ik_0R_2}}{R_2} + (1 - R_v)F(w) \sin \theta_r \frac{e^{-ik_0R_2}}{R_2} \right]. \quad (3.61)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre un, section 1.2, \mathbf{E} est en V/m et \mathbf{H} est en A/m.

Les relations trigonométriques sont représentées sur la figure 3.5

$$\sin \theta_d = \frac{\rho}{R_1}, \quad \cos \theta_d = \frac{z - h}{R_1}, \quad (3.62)$$

et

$$\sin \theta_r = \frac{\rho}{R_2}, \quad \cos \theta_r = \frac{z + h}{R_2}. \quad (3.63)$$

Hautement capacitif	Capacitif	Inductif (homogène)	Hautement inductif
$-\pi/2 \leq \arg(Z_v^0) < -\pi/4$	$-\pi/4 \leq \arg(Z_v^0) < 0$	$0 \leq \arg(Z_v^0) \leq \pi/4$	$\pi/4 \leq \arg(Z_v^0) < \pi/2$
$-3\pi/2 \leq \phi_w < -\pi$	$-\pi \leq \phi_w < -\pi/2$	$-\pi/2 \leq \phi_w \leq 0$	$0 \leq \phi_w < \pi/2$

TAB. 3.1 – Classification de l'argument de l'impédance de surface effective Z_v^0 et de l'argument de la distance numérique w ($\arg(w) = \phi_w$), pour une surface plane passive [173] et une dépendance temporelle $\exp(+i\omega t)$.

Les distances radiales sont

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (z - h)^2}, \quad (3.64)$$

et

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (z + h)^2}. \quad (3.65)$$

Pour une surface plane homogène, il a été montré que le champ issu d'un dipôle vertical est constitué d'une onde directe, une onde réfléchie et une onde de surface associée à la fonction d'atténuation $F(w)$. Ces trois ondes interfèrent, entraînant des minima et des maxima du champ à des positions particulières du récepteur [172]. Les deux ondes directe et réfléchie sont les ondes d'espace. On peut se rendre compte de l'importance de l'onde de surface comme suit : supposons que l'émetteur et le récepteur sont très proches ou sur le sol, alors

$$R_1 = R_2 = \rho, \quad \sin \theta_d = \sin \theta_r = 1, \quad \cos \theta_d = -\cos \theta_r \quad R_v = -1, \quad (3.66)$$

et (3.59), (3.60) et (3.61) se réduisent à

$$E_z = \frac{-iI_{dl}k_0Z_0}{2\pi} F(w) \frac{e^{-ik_0\rho}}{\rho}, \quad (3.67)$$

$$E_r = \frac{-iI_{dl}k_0Z_0}{2\pi} F(w) v(1 - v^2 \sin^2 \theta_r)^{1/2} \frac{e^{-ik_0\rho}}{\rho}, \quad (3.68)$$

$$H_\phi = \frac{iI_{dl}k_0}{2\pi} F(w) \frac{e^{-ik_0\rho}}{\rho}. \quad (3.69)$$

Les deux composantes d'espace se sont annulées l'une à l'autre. L'onde de surface est la seule composante restante, et contient donc la puissance. Puisque l'onde de surface est dominante lorsque l'émetteur et le récepteur sont proches de la surface, la valeur du champ dépend de la fréquence, de la distance, des hauteurs des antennes émettrice et réceptrice, et des propriétés électriques de la mer, à travers la fonction d'atténuation $F(w)$. La fonction $F(w)$ vaut 1 pour la distance numérique $w = 0$, et si la surface est hautement conductive ($0 \leq \arg(w) \leq \pi/2$), alors l'onde de surface suit un comportement en $-2i(\pi w)^{1/2}e^{-w}$ dans (3.58) à de courtes distances, là où prédomine l'onde de surface piégée. Sa décroissance est en $1/\sqrt{\rho}$. A de plus grandes distances, $F(w)$ suit une loi en $-1/2w$ (Wait [170] montre que c'est le cas lorsque $|w| > 1/(2 \cos \phi_w)$), là où l'onde de surface piégée disparaît, et l'onde de surface de Norton contribue le plus. Le champ décroît en $1/\rho^2$. A des distances intermédiaires, les deux ondes de surface interfèrent l'une et l'autre. Ces interférences sont visibles sur les résultats numériques dans [170]. Pour une surface capacitive, il n'existe pas d'onde de surface piégée, et seule l'onde de surface de Norton contribue, et le terme $F(w) \frac{e^{-ik_0\rho}}{\rho}$ suit une loi en $1/\rho^2$.

A une distance d de la source, lorsque la hauteur z du point d'observation augmente, alors la distance R_2 entre le point image de la source et le point d'observation est augmentée à $R_2 = \sqrt{d^2 + (h + z)^2}$.

Et, $\cos \theta_r = (h + z)/R_2$ est augmenté et $\sin \theta_r = d/R_2$ est réduit. Ceci en résulte que $|w| = -\frac{ik_0 R_2}{2 \sin^2 \theta_r} (\cos \theta_r + Z_v^0(\kappa))^2$ augmente avec z , alors que ϕ_w diminue. Donc, si la surface est hautement inductive ($0 \leq \phi_w < \pi/2$) (voir tableau 3.1), et en intervenant sur l'augmentation de la hauteur de l'antenne réceptrice, alors on peut atteindre une valeur de ϕ_w dans le domaine $-\pi/2 \leq \phi_w \leq 0$, où seule l'onde de surface de Norton existe. Si le sol est capacitif, augmenter la hauteur d'observation z le rendra encore plus capacitif. Donc, à des hauteurs z suffisamment grandes, $F(w)$ suit une loi en $1/R_2$, et le champ associé à l'onde de surface en $1/R_2^2$. De plus, les deux ondes d'espace ne s'annulent plus l'une et l'autre, mais suivent un comportement en $1/R_1$ et $1/R_2$ pour l'onde directe et l'onde réfléchie, respectivement. Elles dominent donc graduellement l'onde de surface à mesure que la hauteur du récepteur augmente.

Ce que nous avons décrit ici n'est qu'un mince panorama de ce qui existe dans la littérature à ce sujet. Les articles [175], [176], [177], [178], [179], [180] sont quelques références où le lecteur pourra y trouver un aperçu, ancien ou récent. Cette formulation n'a pas d'applications en pratique, puisque une surface géométriquement plane n'existe pas réellement. Il est intéressant de constater qu'avec l'ère du numérique, des auteurs tentent, avec succès, de résoudre numériquement l'intégrale de Sommerfeld dans (3.28) [181], [182].

La section suivante traite de notre sujet d'étude. En effet, la littérature présentant les travaux d'une onde de surface sur une surface plane est abondante. Néanmoins, l'étude de cette onde de surface sur une surface rugueuse est plus récente et donc possède un état de l'art moins dense. On peut toutefois s'appuyer sur les travaux réalisés pour une surface plane car la différence intervient dans l'impédance de surface $Z_v(\kappa)$ qui contient alors l'information sur la rugosité.

3.4 Application réelle à une surface rugueuse

3.4.1 Introduction

Si on considère une source et un point d'observation loin de la surface, l'onde incidente est plane et le champ diffusé résulte en une partie cohérente (la moyenne) $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ et une partie incohérente (partie fluctuante) $G_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ rayonnant loin de la surface. Si la surface est plane, la composante incohérente du champ est absente. Lorsque la rugosité de la surface augmente, le champ cohérent diminue, et la composante incohérente devient dominante. Lorsque l'émetteur et le point d'observation sont tous deux situés près de la surface rugueuse conductive, on ne peut plus considérer seulement les ondes propagatives réelles qui se propagent le long de la surface, mais il faut prendre en compte également la propagation de l'onde complexe, incluant à la fois les champs cohérent et incohérent. Le champ diffusé par la surface est alors la contribution des radiations cohérente et incohérente, et la possibilité d'une onde de surface se propageant le long de celle-ci.

Maintenant que les travaux originaux pour une surface plane ont été brièvement présentés, il faut adapter les résultats à une surface rugueuse, ce à quoi sont consacrées les sections suivantes.

3.4.2 Onde de surface le long d'une surface rugueuse

La surface de mer étant rugueuse, il convient d'adapter les formulations précédentes, valides pour une surface plane. En effet, la rugosité fait intervenir le phénomène de diffusion, qui favorise l'existence d'un signal rétrodiffusé vers le radar.

En revanche, la démonstration pour l'obtention de la fonction d'atténuation $F(w)$ et son résultat pour une surface rugueuse, reste identique à l'expression pour une surface plane (3.53) puisque la forme de

départ de l'intégrale P à évaluer avec la méthode du point selle reste $I = \int_C F(\alpha) e^{-jk_0 R_2 \cos(\alpha-\theta)} d\alpha$. Le pôle de Sommerfeld s'écrit, à partir du dénominateur du coefficient de réflexion (2.28), ou (3.44),

$$k_z + k_0 Z_v(\kappa) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + \eta_v(\kappa) = 0, \quad (3.70)$$

mais l'impédance de surface effective $Z_v(\kappa)$ n'est plus celle d'une surface plane, $Z_v^0(\kappa)$, mais fait intervenir la rugosité, à travers le spectre des hauteurs de la surface, et qui a été vue dans le chapitre deux (équation (2.86), avec $\eta_v(\kappa) = k_0 Z_v(\kappa)/k_z(\kappa)$).

A partir de l'expressions du pôle ($\eta_v(\kappa) = -1$) de Sommerfeld (3.70) et de l'expression de l'impédance effective $Z_v(\kappa)$ (2.86), obtenue dans le chapitre deux, on détermine le nouveau nombre d'onde vertical de l'onde de surface k_{zp} pour une surface rugueuse :

$$-1 = \frac{\frac{k_0}{k_z(\kappa)} Z_v^0(\kappa) - \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') M_1(\kappa, \kappa') d\kappa'}{1 + \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') \alpha_0 d\kappa'}, \quad (3.71)$$

ce qui devient

$$-1 - \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') \alpha_0 d\kappa' + \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') M_1(\kappa, \kappa') d\kappa' = \frac{k_0}{k_z(\kappa)} Z_v^0(\kappa). \quad (3.72)$$

d'où

$$k_{zp} = \frac{-k_0 Z_v^0}{1 - \int L(\kappa', \kappa) \tilde{W}(\kappa - \kappa') [M_1(\kappa, \kappa') - \alpha_0] d\kappa'}. \quad (3.73)$$

La constante de propagation κ_p de l'onde de Zenneck est alors obtenue par

$$\kappa_p = \sqrt{k_0^2 - k_{zp}^2}. \quad (3.74)$$

La distance numérique w , à partir de k_{zp} et κ_p , est donnée par (F.24) en coordonnées cartésiennes

$$w = ik_0 R_2 - i[\kappa_p(x - x_0) + k_{zp}(z + z_0)]. \quad (3.75)$$

Dans (3.73), notons que pour une surface plane, le spectre des hauteurs de la surface $\tilde{W}(\kappa - \kappa') = 0$, et dans ce cas le pôle $k_{zp} = -k_0 Z_v^0(\kappa)$. L'intégrale au dénominateur représente donc l'influence de la rugosité.

La fonction de Green pour le champ total cohérent au-dessus d'une surface rugueuse, lorsque l'on approche de l'incidence rasante, $k_0 \approx \kappa$, d'où $R_1 \approx R_2$, s'écrit :

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \approx 2G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0^I) F(w), \quad (3.76)$$

avec la fonction $F(w)$ donné en (3.53), où la différence avec une surface plane intervient dans le pôle k_{zp} et la constante de propagation κ_p , eux-mêmes intervenant dans la distance numérique w , et \mathbf{r}_0^I est le point source image. Dans le cas de la configuration présentée figure 3.5, on peut écrire (3.76) comme

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \approx 2G^{(0)}(R_2) F(w). \quad (3.77)$$

3.4.3 Le champ diffusé

Dans la section 3.5, des simulations numériques vont être présentées. Elles ont pour but de valider la Méthode des Petites Perturbations Modifiée prenant en compte l'onde de surface. Puisque le champ d'application concerne le radar côtier, les simulations seront pour des fréquences appartenant à la bande HF (3 – 30 MHz). Nous ne rappelons pas la théorie ici puisqu'elle est inspirée du chapitre deux, lequel est basé sur la méthode développée par Fuks et Freilikher à partir de la théorie quantique des champs. En développant les conditions aux limites en terme de la hauteur ζ de la surface, les auteurs dans [183] obtiennent l'expression du champ diffusé en champ lointain, à partir de (2.55). Cette formulation a été reprise récemment dans [184], pour le cas d'une surface monodimensionnelle, dans la direction de rétrodiffusion. Elle va nous permettre d'effectuer une comparaison du champ diffusé avec la méthode de référence FBSA, dans le but de valider, la MPP modifiée incluant la fonction d'atténuation $F(w)$. La formulation permet de simuler le champ diffusé pour une seule réalisation de la surface. Celle donnée dans (3.76) est l'expression analytique pour le champ cohérent $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ calculée à partir de la théorie vue dans le chapitre deux. La fonction d'atténuation, comme nous l'avons vu pour une surface plane, doit jouer un rôle majeur, dans le champ diffusé résultant, lorsque les points source et observation sont proches de la surface. L'expression analytique de la MPP, qui sera utilisée ici pour la comparaison avec la méthode numérique, s'écrit

$$\psi_s(\mathbf{r}) = -\frac{i2k_0}{\pi} \int \frac{e^{-i2k_0 r}}{r} \zeta(x) \phi_{vv}(\alpha) \cos \alpha dx, \quad (3.78)$$

où r est la distance du point source à un point du plan $z = 0$ de la surface, comme indiqué figure 3.6, α est l'angle rasant local.

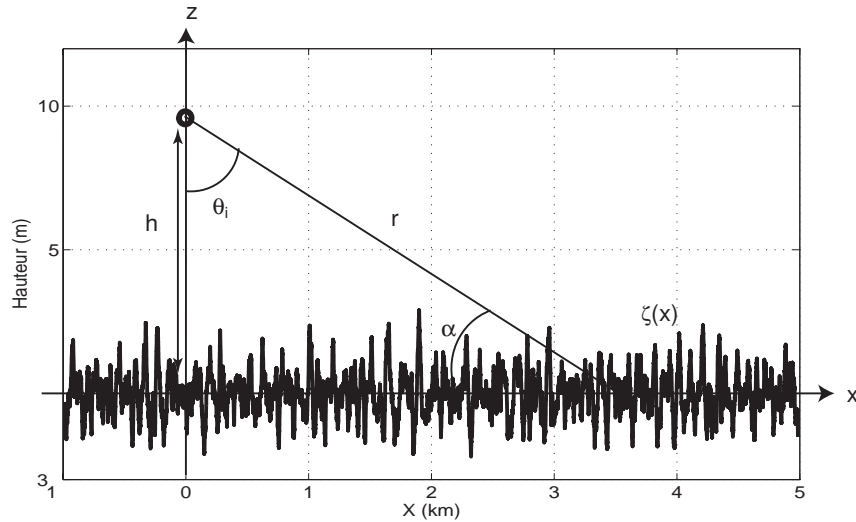


FIG. 3.6 – Configuration d'un dipôle en monostatique au-dessus d'une surface de mer.

Le coefficient $\phi_{vv}(\alpha)$ s'exprime en termes de la permittivité complexe $\epsilon = \epsilon_r + i\sigma/(\omega\epsilon_0)$ de la surface, et de l'angle rasant, comme [185], [183],

$$\phi_{vv}(\alpha) = \sin^2 \alpha \frac{(\epsilon - 1)[\epsilon(1 + \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha]}{[\epsilon \sin \alpha + (\epsilon - \cos^2 \alpha)^{1/2}]}. \quad (3.79)$$

Si la surface est parfaitement conductrice, $\epsilon \rightarrow \infty$, $\phi_{vv}(\alpha)$ a un comportement en α^2 aux angles rasants. De plus, comme discuté dans le chapitre un, à partir des observations de Barrick [88] (voir figure 1.16),

le comportement devient en α^4 en rétrodiffusion. Sous incidences rasantes, l'onde de surface de Norton est le mode propagatif dominant [150], [90]. Le coefficient $\phi_{vv}(\alpha)$ s'écrit alors [184]

$$\phi_{vv}(\alpha) = |F(w)|^2(1 + \cos^2 \alpha), \quad (3.80)$$

où

$$w = -\frac{ik_0 r Z_v^2(\kappa)}{2} \left(1 + \frac{h}{Z_v(\kappa)r}\right)^2. \quad (3.81)$$

Pour une surface plane, l'impédance effective (donnée dans (2.79)) vaut $Z_v^0(\kappa) = \frac{1}{n} ((nk_0)^2 - \kappa^2)^{1/2} = \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n}\right)^2\right)^{1/2}$ [134] qui est une autre façon d'écrire le coefficient de réflexion de Fresnel $R_v^0 = \frac{1 - Z_v^0 \frac{k_z}{k_0}}{1 + Z_v^0 \frac{k_z}{k_0}}$. Elle peut être simplifiée sous incidences rasantes puisque $\kappa \rightarrow k_0$. Ainsi, l'impédance de surface $Z_v(\kappa)$ calculée pour le cas d'une surface très conductrice prenant en compte la rugosité, dans le chapitre deux, va être incorporée au modèle (3.80).

3.4.4 L'intensité diffusée

Nous avons vu que la rugosité faisait intervenir la composante incohérente du champ. A partir du champ diffusé on peut déduire l'intensité diffusée totale (équation (2.94)). Celle-ci se décompose, tout comme le champ, en une partie cohérente (équation (2.95)) et une partie incohérente (équation (2.96)). Lorsque la rugosité augmente, ou lorsque les points source et observation sont proches de la surface, la partie incohérente de l'intensité est dominante, par rapport à la partie cohérente. Cette section est consacrée au calcul de l'intensité diffusée totale, pour la méthode numérique FBSA, à partir de l'expression du champ diffusé (1.95).

L'intensité totale est exprimée à partir du vecteur de Poynting sous sa forme rigoureuse (1.98)

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2Z_0 k_0} (\psi_s(\mathbf{r}) \nabla_r \psi_s^*(\mathbf{r})), \quad (3.82)$$

où les parties réelle et imaginaire sont prises en compte puisque, rigoureusement, en champ proche, la propagation fait intervenir les ondes complexes, vues à la section 3.2, lesquelles contribuent au signal.

Pour la méthode numérique, nous allons calculer rigoureusement le vecteur de Poynting, qui sera utilisé pour la méthode de référence FBSA. En revanche, pour la MPP (équation (3.78)), le calcul de $\nabla_r \psi_s^*(\mathbf{r})$ n'est pas trivial, et par conséquent, nous n'utiliserons que la représentation en champ lointain du champ diffusé. Pour information, l'intensité diffusée en champ lointain (c'est à dire lorsque les points source et observation sont situés loin de la surface) est donnée, dans la direction de rétrodiffusion, dans [183]

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{4k_0^2}{\pi^2} \int \frac{dx}{r^2} |\phi_{vv}(\alpha)|^2(\alpha) \tilde{W}(-2\kappa_0). \quad (3.83)$$

Le champ diffusé $\psi_s(\mathbf{r})$ a été exprimé dans le chapitre un (équation 1.95)

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] \quad \forall \mathbf{r} \in V_0, \quad (3.84)$$

où \mathbf{r}' est un point de la surface et $\mathbf{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$ est le point d'observation. L'opérateur dérivé, au point d'observation \mathbf{r} , se décompose comme suit

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.85)$$

De plus,

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|), \quad (3.86)$$

avec

$$u = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}, \quad (3.87)$$

où z' est la hauteur $\zeta(x')$ d'un point de la surface S . Introduisons les définitions utiles ici pour calculer les dérivées. La dérivée d'une fonction composée s'écrit

$$\frac{\partial f(v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.88)$$

De même,

$$\frac{\partial(vw)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} w + v \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v/w}{\partial x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} w - v \frac{\partial w}{\partial x}}{v^2}, \quad \frac{\partial v^n}{\partial x} = n \frac{\partial v}{\partial x} v^{n-1}. \quad (3.89)$$

Ainsi, dans (3.87), pour la variable x ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}}{\partial x} = \frac{x - x'}{u}. \quad (3.90)$$

Pour la fonction de Hankel, les relations suivantes sont nécessaires [174]

$$\frac{d}{dz} H_n^{(1)}(z) = \frac{n}{z} H_n^{(1)}(z) - H_{n+1}^{(1)}(z), \quad (3.91)$$

d'où se déduit, pour $n = 0$

$$\frac{d}{dz} H_0^{(1)}(z) = -H_1^{(1)}(z), \quad (3.92)$$

et pour $n = 1$

$$\frac{d}{dz} H_1^{(1)}(z) = \frac{1}{z} H_1^{(1)}(z) - H_2^{(1)}(z). \quad (3.93)$$

De plus,

$$H_{n-1}^{(1)}(z) + H_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{2n}{z} H_n^{(1)}(z), \quad (3.94)$$

d'où, pour $n = 1$

$$H_0^{(1)}(z) + H_2^{(1)}(z) = \frac{2}{z} H_1^{(1)}(z). \quad (3.95)$$

$\nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ peut maintenant se déduire de (3.88), (3.90) et (3.92) :

$$\nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 u)}{u} [\hat{\mathbf{x}}(x - x') + \hat{\mathbf{z}}(z - \zeta(x'))]. \quad (3.96)$$

Comme $\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $\hat{\mathbf{n}}' = \frac{-\zeta'(x')\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + (\zeta'(x'))^2}}$ alors

$$\frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} = -\frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0 u)}{u} \frac{[-\zeta'(x')(x - x') + (z - \zeta(x'))]}{\sqrt{1 + (\zeta'(x'))^2}}. \quad (3.97)$$

La surface est illuminée par un point source de coordonnées $r_0 = (x_0, z_0)$, et dont l'abscisse x_0 est prise comme origine du repère en $\hat{\mathbf{x}}$. Puisque le problème est bidimensionnel, ce point source est la fonction

de Hankel $\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0u)$. La puissance de l'onde incidente a été donnée dans (1.90). Pour le point source de l'étude, elle s'écrit

$$\begin{aligned} P_{inc}(\mathbf{r}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\mathbf{S}_i(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0} \\ &= - \frac{-1}{2Z_0k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{inc}(\mathbf{r}) [\nabla_r \psi_{inc}^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{z}}]_{z=0}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Puisque $\psi_{inc} = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0u)$, (3.98) devient, en s'aidant de (3.96)

$$\begin{aligned} P_{inc}(\mathbf{r}) &= - \frac{1}{32Z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(H_0^{(1)}(k_0u) \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{H_1^{(1)}(k_0u)}{u} [\hat{\mathbf{x}}(x_0 - x') + \hat{\mathbf{z}}(z_0 - \zeta(x'))] \right]_{z=0}^* \cdot \hat{\mathbf{z}} \right). \end{aligned} \quad (3.99)$$

En notant que la puissance incidente est évaluée sur le plan moyen $z = 0$, donc $\zeta(x') = 0$, (3.99) devient

$$P_{inc}(\mathbf{r}) = - \frac{z_0}{32Z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{H_0^{(1)}(k_0u)}{u} \left[H_1^{(1)}(k_0u) \right]^*. \quad (3.100)$$

La puissance incidente (3.100) est ensuite mise en oeuvre numériquement car une solution analytique n'est pas simple.

Il faut maintenant déterminer la puissance diffusée. Pour cela, avec (3.82) et (3.84)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s(\mathbf{r}) &= - \frac{1}{2Z_0k_0} \left\{ \int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] \right. \\ \nabla_r \left(\int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] \right)^* &\left. \right\} \quad \forall \mathbf{r} \in V_0 \end{aligned} \quad (3.101)$$

Il faut calculer les termes $\nabla_r \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'}$ et $\nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pour obtenir le terme $\nabla_r \psi_s^*(\mathbf{r})$. L'annexe G présente une partie des calculs pour la détermination de l'expression de $\Gamma(\mathbf{r})$

L'expression (G.7) est la forme exacte de l'intensité du champ diffusé $|\psi_s \psi_s^*|$. Pour obtenir l'intensité moyenne du champ diffusé $\langle |\psi_s \psi_s^*| \rangle$, on moyenne sur plusieurs réalisations de la surface. L'intensité moyenne incohérente, ou composante diffuse, se déduit de la différence entre l'intensité moyenne totale $\Gamma(\mathbf{r})$, issue de (G.6), et de l'intensité moyenne cohérente $\Gamma_{coh}(\mathbf{r})$:

$$\Gamma_{incoh}(\mathbf{r}) = \langle |\psi_s|^2 \rangle - |\langle \psi_s \rangle|^2. \quad (3.102)$$

3.4.5 Coefficient de diffusion incohérent sous incidences rasantes

Il est intéressant ici de faire part des travaux des auteurs les plus actifs dans le domaine ces dernières années. Dans [133], ils développent l'équation de Bethe-Salpeter pour l'intensité incohérente que nous avons vue au chapitre deux. Pour prendre en compte l'effet de la proximité de la surface, puisque les points source et observations en sont proches, ils évaluent l'équation de Bethe-Salpeter de façon similaire à la solution de Sommerfeld. Une nouveau coefficient de diffusion est déduit :

$$\sigma_{vv}(\kappa, \kappa_0) = \frac{2\pi}{k_0} |\kappa_0 \kappa_d - k_z^2(\kappa_0) - ik_z(\kappa_0) \alpha_0 \eta_v(\kappa_0)|^2 |F(w) F(w_0)|^2 \tilde{W}(\kappa_d), \quad (3.103)$$

où $\kappa_d = \kappa_1 - \kappa_0$. Ils incluent les fonctions d'atténuation $F(w)$ et $F(w_0)$, dépendant des hauteurs de l'observation et de la source, respectivement, ainsi que de leur distance horizontale. Ils ne présentent cependant pas de comparaisons entre leur modèle analytique et une méthode rigoureuse, telle que la FBSA. On peut alors noter que la différence entre le coefficient de diffusion (2.105) obtenu pour des incidences modérées et le coefficient de diffusion (3.103) se trouve entre les termes $1 + \eta_v(\kappa)$ en incidence modérées, et $F(w)$ sous incidences rasantes. Quelques simulations pour le cas d'un spectre Gaussien et d'un spectre de mer seront présentées pour le coefficient de diffusion (3.103) dans la section suivante.

3.5 Simulations numériques

Cette partie est consacrée aux résultats numériques à partir de la théorie vue précédemment. On considère une surface monodimensionnelle. Pour se rapprocher le plus possible à la réalité, le profil des hauteurs de mer de Elfouhaily *et al*, introduit dans le chapitre un, est utilisé, toujours en parallèle d'une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne. La hauteur du dipôle électrique verticale est de 10 mètres, reflétant celle d'un radar côtier. La méthode de référence est la FBSA. Elle a été d'un fort intérêt, puisque comme il a été discuté dans la chapitre un, elle est de complexité $\mathcal{O}(N)$, où N est le nombre d'échantillons de la surface. Les travaux réalisés ici sont inspirés de Toporkov *et al* [184], et sur la théorie originale de Bass *et al* [183]. La configuration monostatique du dipôle impose que la hauteur de l'émetteur est identique à la hauteur du récepteur, donc $z_0 = h = 10$ mètres. La méthode de référence est la FBSA. Nous en avons discuté dans le chapitre un. Elle trouve son intérêt ici puisque les surfaces générées peuvent atteindre une longueur d'une vingtaine de kilomètres. Pour un pas d'échantillonnage $\Delta x = 0.1\lambda$, et $N = \frac{L=20.10^3}{\Delta x=0.1\lambda}$, le nombre d'échantillons de la surface est alors de l'ordre $N = 200000/\lambda$.

La figure 3.7 correspond à une corrélation des hauteurs Gaussienne, et l'écart-type des hauteurs σ_ζ varie de 0.0 à 0.3 m. La figure 3.8 est pour une surface de mer, et la vitesse de vent U_{10} varie de 0 à 6 m/s. Les figures montrent également le nombre d'onde k_0 en espace libre. Les figures 3.7 et 3.8 présentent des courbes pour la constante de propagation κ_p de l'onde de Zenneck, déterminée à partir du pôle de Sommerfeld (singularité au dénominateur du coefficient de réflexion donnée par $k_z + k_0 Z_v(\kappa) = 0$) et l'impédance effective dans leurs plans complexes respectifs, pour des surfaces plane et rugueuse. Le pôle k_{zp} est exprimé dans (3.73) et la constante de propagation κ_p , dans (3.74). Les fréquences sont 5, 10 et 50 MHz. En dessous de 5 MHz, la surface est très peu perturbée, comparativement à la longueur d'onde, et au-delà de 100 MHz, la théorie perturbative n'est plus applicable.

A mesure que la rugosité augmente, donc σ_ζ augmente, la position du pôle s'éloigne de celui d'une surface plane, car la partie imaginaire augmente. La partie réelle, quant à elle, est légèrement inférieure à k_0 , ce qui a été démontré par Zenneck pour une surface plane, et vérifie donc bien que la vitesse de phase $v_p = \omega / \Re(\kappa_p)$ est supérieure à celle de la lumière dans le vide [134]. La partie réelle de κ_p n'est pas affectée par la modification de la rugosité. L'impédance effective voit sa partie imaginaire (négative) augmenter, donc la surface devient plus inductive. A cause de la rugosité, il y a donc plus d'énergie réactive emmagasinée par la surface. Globalement, le module de l'impédance effective $|Z_v(\kappa)|$ augmente avec la rugosité, et ce d'autant plus que la fréquence est grande. Le même comportement est observé pour les deux types de surface.

Le module de la fonction d'atténuation, $|F(w)|$ pour les fréquences 5, 10, et 50 MHz, est tracé, pour une surface plane et une surface rugueuse dont la corrélation des hauteurs est Gaussienne (figure 3.9), d'écart-types des hauteurs $\sigma_\zeta = 0.2$ m, une longueur de corrélation $l_c = 2$ m, et $\epsilon = 80 + i4/(\omega\epsilon_0)$, et une surface de mer (figure 3.10), dont la vitesse de vent à 10 mètres au dessus de la surface est $U_{10} = 5$ m/s. Comme discutée précédemment pour une surface plane (section 3.3.3), $|F(w)|$ vaut 1 pour de courtes distances, puis s'atténue à grandes distances. Comme il peut l'être attendu intuitivement, les résultats

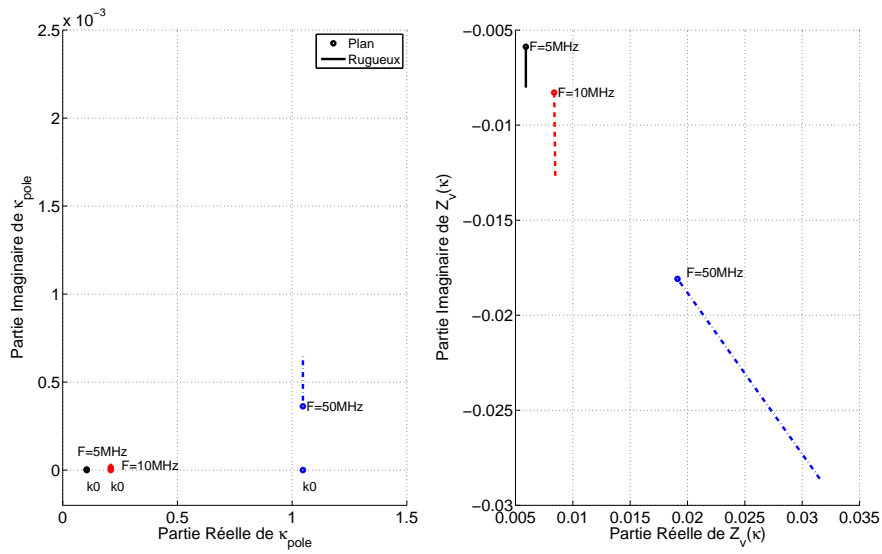


FIG. 3.7 – Constante de propagation κ_p de l’onde de surface de Zenneck et impédance effective $Z_v(\kappa)$ pour une corrélation des hauteurs Gaussienne. $\epsilon = 80 + i7.2 \times 10^{10}/f(\text{Hz})$.

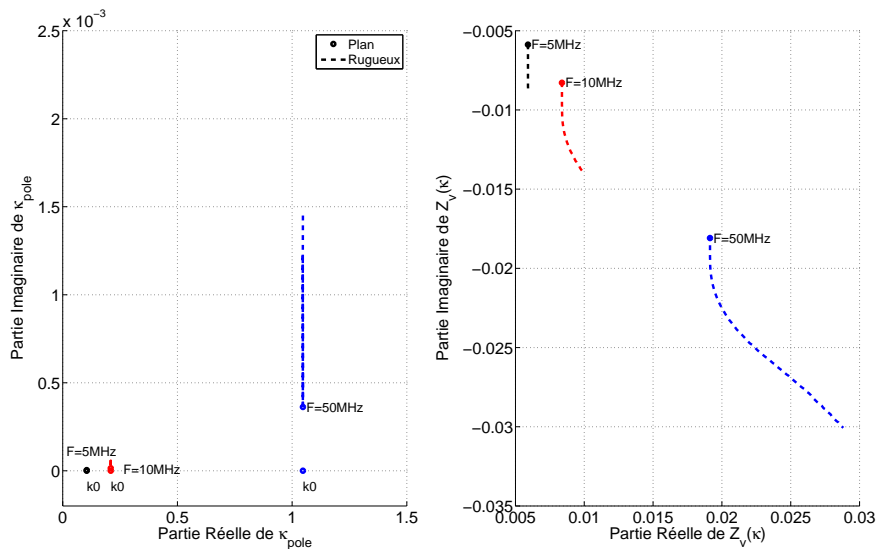


FIG. 3.8 – Même paramètres que la figure 3.7, mais pour une surface de mer.

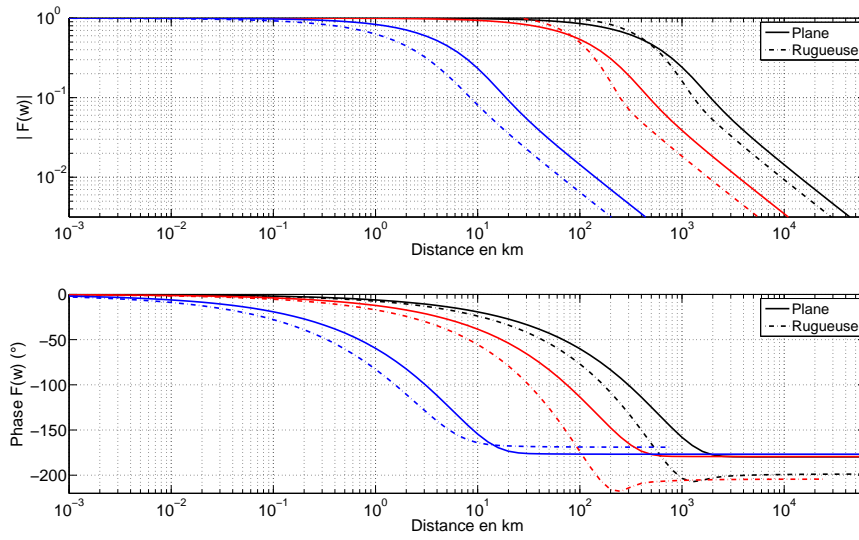


FIG. 3.9 – Fonction d'atténuation $F(w)$ pour une corrélation des hauteurs Gaussienne. Courbes de gauche à droite : $f = 50, 10, 5$ MHz. $\epsilon = 80 + i7.2 \times 10^{10}/f(\text{Hz})$.

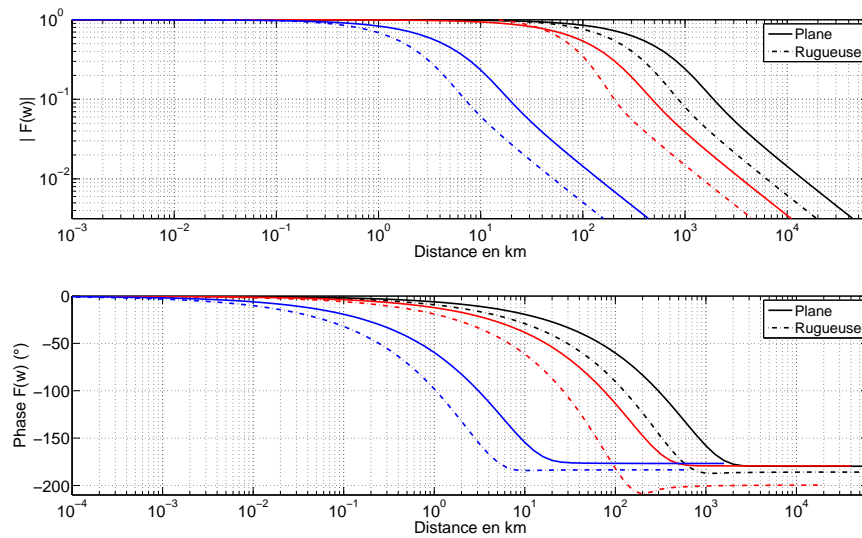


FIG. 3.10 – Même paramètres que la figure 3.9, mais pour une surface de mer.

montrent que la rugosité atténue plus rapidement l'onde de surface associée à la fonction d'atténuation, et donc le champ cohérent puisque l'on a vu précédemment (section 3.3.3) que sous incidences rasantes, le champ consistait dans sa majeure partie en l'onde de surface. En effet, puisque la rugosité fait augmenter $|Z_v(\kappa)|$ (comme observé sur les figures 3.7 et 3.8), alors la distance numérique $|w|$ dans (3.49) augmente également. La surface étant inductive, c'est à dire que $-\pi/4 \leq \arg(Z_v(\kappa)) \leq 0$, alors la fonction d'atténuation $F(w)$ se décompose en la série (3.57), et donc s'atténue plus vite que pour une surface plane. De plus, la phase de la fonction d'atténuation tourne de 0 à -180° le long de la surface.

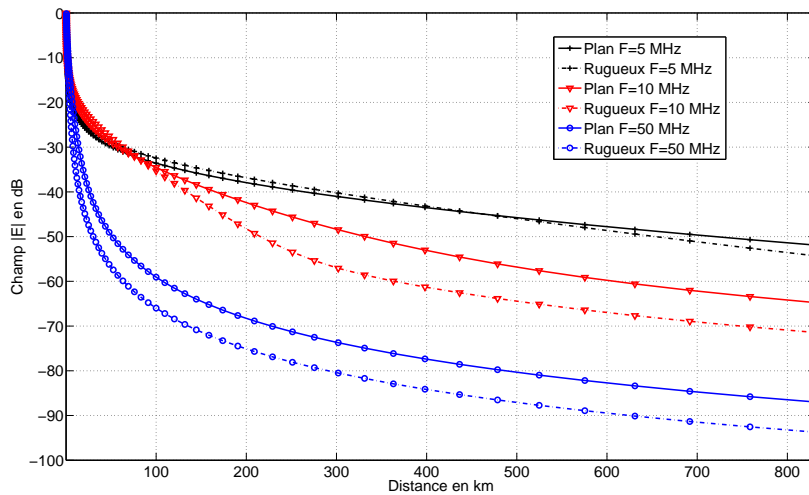


FIG. 3.11 – Champ diffusé le long de la surface à partir de (3.104). $\epsilon = 80 + i7.2 \times 10^{10}/f(\text{Hz})$.

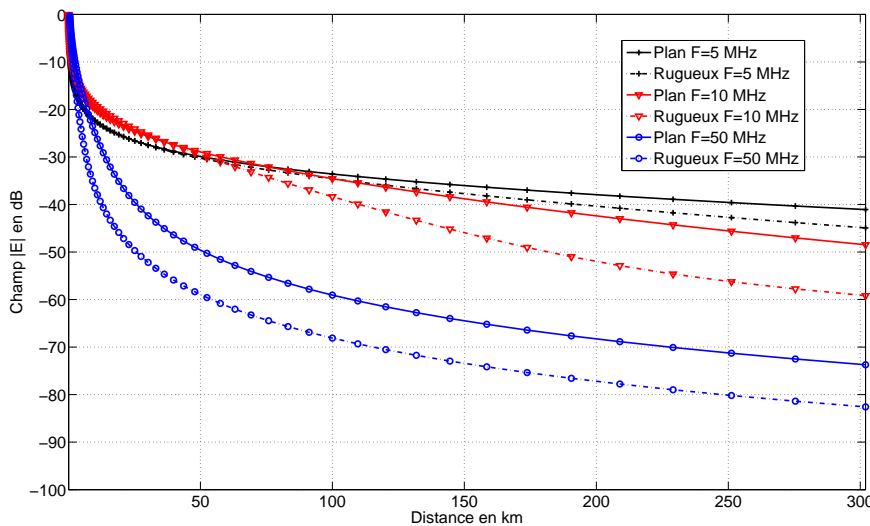


FIG. 3.12 – Paramètres identiques à la figure 3.11, mais pour une surface de mer.

L'onde de surface est atténuée plus rapidement pour des fréquences élevées. A 10 MHz, l'onde de surface contribue (le module $|F(w)| \approx 0.1$) jusqu'à plus de 1000 km ! Pour une fréquence de 1 MHz, l'effet de la rugosité est faible car les fonctions d'atténuation plane et rugueuse sont presque confondues. Cela se comprend puisque la longueur d'onde à cette fréquence vaut $\lambda = 300$ m, et, comparativement,

l'écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = 0.2$ m est très faible.

Nous allons maintenant simuler le champ magnétique H_y le long de la surface. Nous pouvons écrire, en fonction de la fonction d'atténuation, [171], à partir de (3.76)

$$H_y(\mathbf{r}) = \frac{ik_0 I_{dl}}{2\pi} F(w) G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (3.104)$$

où la fonction de Green en espace libre $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ en 2D est exprimée par la fonction de Hankel $H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|)$, et où, par convenance, nous avons pris $I_{dl} = 1$ A et $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Sur les figures 3.11 et 3.12, le champ le long de la surface ($z_0 = h \rightarrow 0$) sont tracés, à partir de (3.104), pour une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne et une surface de mer. La rugosité, comme constaté avec la fonction d'atténuation, atténue plus rapidement le champ diffusé. Cependant, on peut remarquer que le champ pour une surface rugueuse est supérieur à celui pour une surface plane jusqu'à une certaine distance. Cette distance est plus petite pour le cas d'une surface de mer que pour une corrélation des hauteurs Gaussienne. Cela s'explique sur les figures 3.9 et 3.10, où les fonctions d'atténuation pour une surface rugueuse ont un module légèrement supérieur à celui d'une surface plane (lorsque $|F(w)| \rightarrow 1$). Ce phénomène est plus prononcé pour une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne.

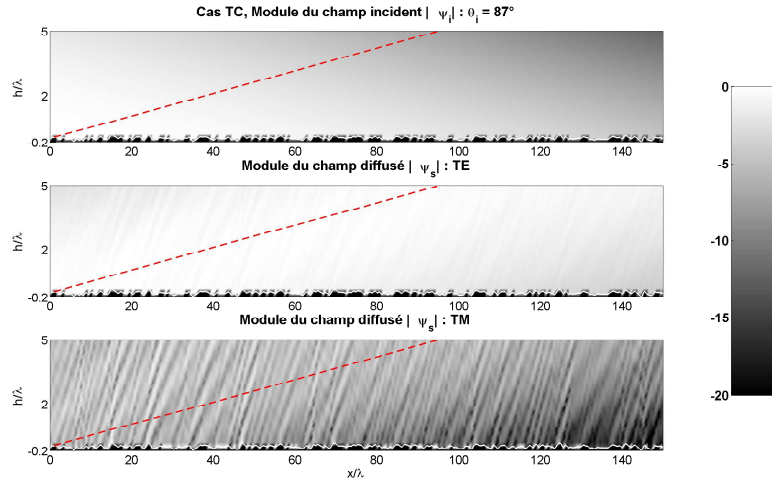


FIG. 3.13 – Cartographie du champ diffusé. Angle d'incidence $\theta_i = 87^\circ$. Corrélation des hauteurs Gaussienne. $\lambda = 30$ m, soit $f = 10$ MHz. Permittivité électrique de la mer $\epsilon = 80 + i7200$. $L = 1200\lambda$. $g = 200\lambda$. $l_c = 0.66\lambda$. $\sigma_\zeta = 0.066\lambda$. $\sigma_p = 0.1414$. $\Delta_x = 0.1\lambda$.

La figure 3.13 montre le champ diffusé déterminé à partir de la FBSA, pour un angle d'incidence $\theta_i = 87^\circ$. La corrélation des hauteurs est Gaussienne. Il est possible d'observer que dans la polarisation horizontale (TE), la majeure partie du champ diffusé est répartie autour de la direction spéculaire (l'angle de diffusion $\theta_s = 87^\circ$). On ne retrouve pas ce comportement pour la polarisation verticale (TM). En effectuant un agrandissement (figure 3.14) loin du centre $X = 0$ de la surface (autour de $X = 15$ km), on remarque que pour la polarisation verticale, de l'énergie reste localisée le long de la surface, ce que n'exhibe pas la polarisation horizontale. L'onde de surface pour la polarisation verticale, discutée plus tôt, est mise en évidence ici.

Sur la figure 3.15, sont représentés les champs diffusés pour les polarisations horizontale et verticale. L'abscisse est fixée, et la hauteur d'observation est variable. On peut voir que le champ diffusé dans le cas de la polarisation verticale (TM), pour une abscisse donnée, présente des oscillations. Celles-ci

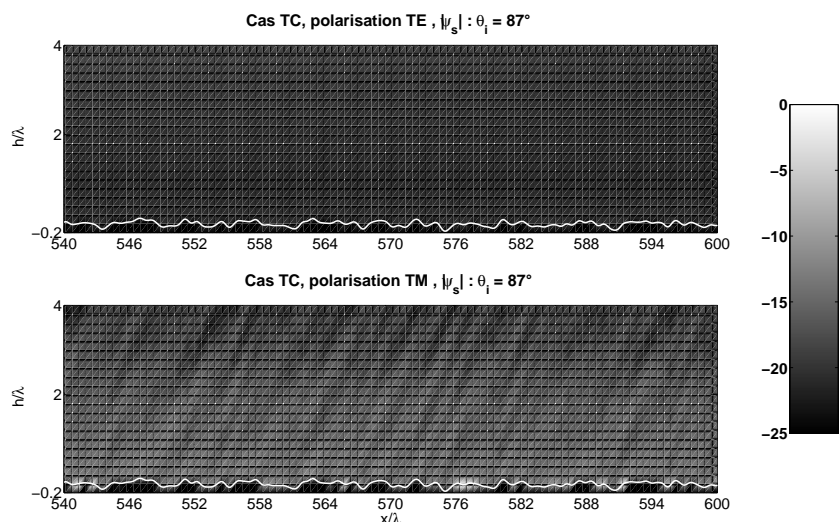


FIG. 3.14 – Fenêtre à une abscisse $X \approx 18$ km du centre de la surface (grande distance), à partir de la figure 3.13.

s'expliquent par les interférences entre l'onde de surface et l'onde réfléchie, comme discuté plus haut. Ce phénomène n'apparaît pas dans la polarisation horizontale (TE). Ces oscillations existent lorsque la hauteur de l'observation est de sorte que les ondes d'espace ne s'annulent pas, et alors l'onde de surface et l'onde réfléchie interfèrent. A mesure que la hauteur d'observation diminue pour tendre finalement vers la surface, les deux ondes d'espace s'annulent et l'onde de surface est la seule composante contribuant au champ diffusé, et les oscillations sont atténuées (même si les ondes d'espace tendent à s'annuler, le champ réfléchi contribue un peu, car on peut apercevoir des oscillations proches de la surface). Il est important également de remarquer qu'à une distance $X = 9$ km ($X = 300\lambda$) de la source, (figure 3.15), le champ diffusé pour la polarisation horizontale est supérieur à celui pour la polarisation verticale. A une distance plus grande de la source, ici $X = 12$ km ($X = 400\lambda$) et $X = 18$ km ($X = 300\lambda$), le champ diffusé pour la polarisation verticale est plus important que pour la polarisation horizontale lorsque le point d'observation est proche de la surface. Cette observation a été faite précédemment sur les cartographies 3.14, et confirme l'existence d'une onde guidée le long de l'interface rugueuse en polarisation verticale. Cependant, à mesure que le point d'observation entre dans la zone de la direction spéculaire, le champ diffusé pour la polarisation horizontale est alors le plus énergétique.

La figure 3.16 présente les coefficients de diffusion bistatiques pour les polarisations horizontale et verticale, obtenus pour une réalisation de la surface. La légende indique le critère de conservation de l'énergie. Il est possible d'apercevoir le pic de diffusion dans la direction spéculaire $\theta_s = 87^\circ$. La polarisation verticale est plus énergétique en rétrodiffusion, que la polarisation horizontale.

Il s'agit maintenant d'étudier le signal rétrodiffusé par une surface rugueuse. La configuration est celle présentée sur la figure 3.6. La FBSA est utilisée comme méthode de référence. Elle est intéressante ici car les longueurs de surface générées et donc le nombre d'échantillons, sont importants. La méthode des petites perturbations classique (MPP) est comparée avec la méthode des petites perturbations modifiée (MPPM), prenant en compte l'onde de surface, car aux distances observées, l'angle rasant $\alpha \rightarrow 0$, et donc l'angle d'incidence est très rasant. Dans ce cas là, nous avons vu que la fonction d'atténuation, comprenant l'onde de surface, était la partie dominante du champ diffusé. La fonction d'atténuation est calculée à partir de la distance numérique (3.81). La méthode des petites perturbations modifiée, pour

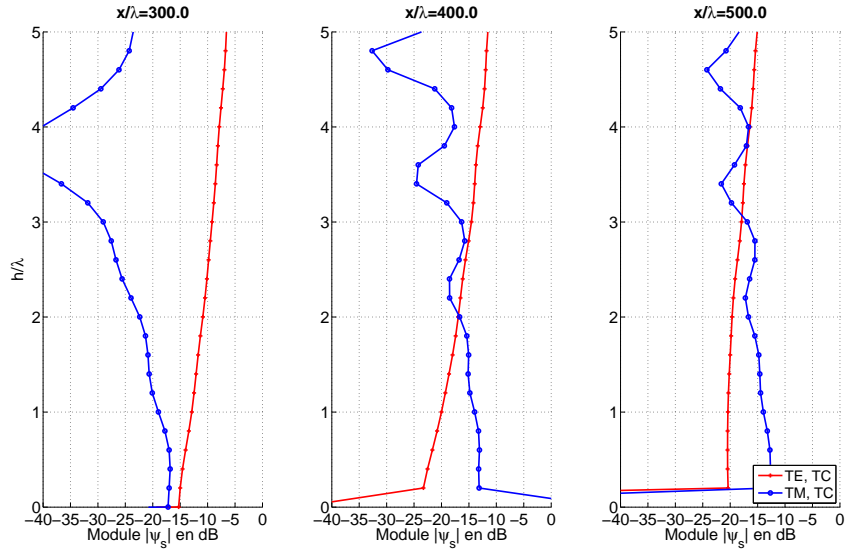


FIG. 3.15 – Champ diffusé pour des abscisses $X = 9, 12$ et 15 km. Hauteur d’observation variable. Mêmes paramètres que la figure 3.13. En abscisse, le module du champ diffusé.

une impédance de surface plane $Z_v^0(\kappa) = \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n} \right)^2 \right)^{1/2}$ est également tracé.

Sur la figure 3.17, le champ rétrodiffusé, à partir de (3.78), est tracé pour une fréquence $f = 15$ MHz, et un écart-type des hauteurs $\sigma_\zeta = 0.2$ m, correspondant à une vitesse de vent $U_{10} = 5$ m/s. La permittivité diélectrique est celle d’une surface de mer et vaut dans ce cas $\epsilon = 80 + i4800$. La MPP classique sous-estime la réponse au signal incident donnée par la FBSA. Les résultats montrent que jusqu’à une vingtaine de kilomètres, la distance numérique w dans (3.81) estime bien la méthode de référence. L’agrandissement fait sur la figure 3.18 montre quelques similitudes dans la forme du signal entre la FBSA et la MPPM.

Les figures 3.22 et 3.25 présentent le champ dans la direction de rétrodiffusion pour une fréquence $f = 10$ MHz, soit $\lambda = 30$ m, et pour une surface de mer. C’est la configuration d’un radar côtier HF. La vitesse de vent est respectivement $U_{10} = 5$ m/s et $U_{10} = 6$ m/s. La permittivité électrique vaut maintenant $\epsilon = 80 + i7200$. La MPP modifiée prenant en compte l’onde de surface concorde avec la FBSA. A cette fréquence, il est observé que l’impédance de surface plane $Z_v^0(\kappa)$ a le même rôle que l’impédance de surface prenant en compte la rugosité $Z_v(\kappa)$. En revanche, nous avons constaté que lorsque la fréquence augmente, donc la longueur d’onde diminue, la MPP modifiée avec l’impédance d’une surface plane et l’impédance d’une surface rugueuse dans la distance numérique (3.81) sous-estime la FBSA. Des simulations non présentées montrent que la MPP modifiée avec la distance numérique (3.75) se confond avec la FBSA à de grandes distances (≈ 12 km).

L’avantage de la méthode analytique est évidente ici. Comme le montre les figures précédentes 3.11 et 3.12, il est possible de déterminer le champ à de très grandes distances (800 km), avec des temps de calcul raisonnables. En effet, l’obtention des résultats a été presque instantané. Le temps de calcul dépend principalement du nombre d’échantillons pour l’intégration numérique de $\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa'$ dans l’impédance de surface $Z_v(\kappa)$. Quelques centaines suffisent à donner une convergence appréciable vers la solution de référence. L’angle rasant est donné par $\alpha = \tan^{-1}(h/X)$, et par exemple, pour une distance $X = 5$ km, $\alpha = \tan^{-1}(10/5 \cdot 10^3) \approx 0.1146^\circ$, soit $\theta_i = 89.88^\circ$. On peut voir sur les figures qu’à cette distance, le champ rétrodiffusé en polarisation verticale avoisine -100 dB. Les méthodes numérique et analytique (modifiée) prédisent donc un signal non négligeable, bien que l’écart-type des hauteurs σ_ζ soit faible

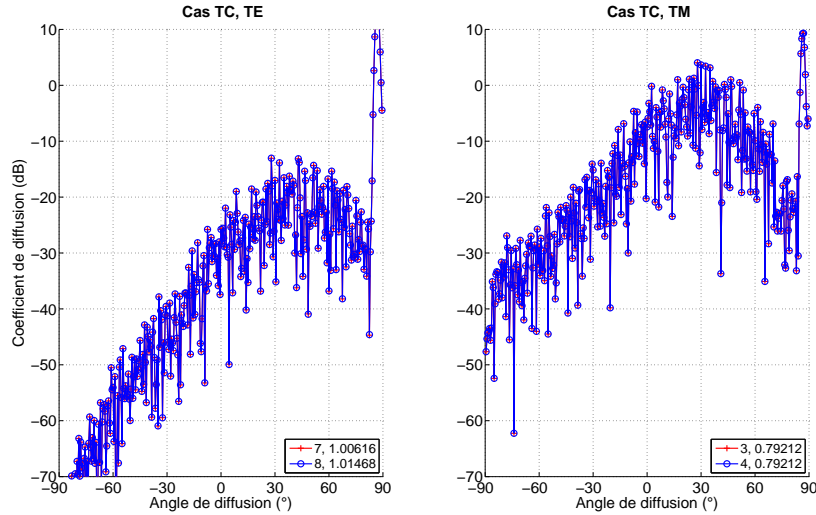


FIG. 3.16 – Coefficient de diffusion pour une réalisation de la surface. Paramètres identiques à la figure 3.13.

devant la longueur d'onde λ .

Sur les figures 3.19, 3.23 et 3.26, nous présentons l'intensité totale moyenne du champ $\Gamma(\mathbf{r}) = \langle |\psi_s(\mathbf{r})\psi_s^*(\mathbf{r})| \rangle$ en rétrodiffusion, à partir de (3.83) et (G.7). Une expression analytique pour l'intensité moyenne pour la MPP (3.83), issue de [183] n'est mathématiquement pas aisée puisqu'elle fait intervenir la fonction d'atténuation. Il faut alors faire appel à la théorie multiple vue dans le chapitre deux. Nous avons alors préféré effectuer le calcul numériquement, par convenance avec la FBSA. L'intensité totale du champ diffusé de cette-dernière est simulée à partir de (G.7), c'est à dire en faisant plusieurs réalisations de la surface, puis en moyennant sur ces réalisations. Les mêmes observations que pour la champ diffusé peuvent être faites. L'intensité calculée avec la MPP classique sous-estime celle obtenue avec la FBSA à l'aide de (G.7).

Il est intéressant de faire part ici du résultat de Toporkov qui simule la MPP classique et la MPP modifiée pour une vitesse de vent $U_{10} = 20$ m/s, avec le modèle de mer de Pierson-Moskowitz. L'écart-type des hauteurs est alors $\sigma_\zeta = 2.13$ m. Son résultat montre que la MPP classique ne sous-estime plus la méthode de référence (il utilise la MOMI, voir chapitre un section 1.5.4) [184]. Au vu des simulations précédentes, on peut affirmer que la MPP modifiée, sans la correction pour l'impédance de surface due à la rugosité, donne de bons résultats. En complément, les simulations de Toporkov montrent que la correction apportée par l'impédance de surface, donc prenant en compte la rugosité, est surtout intéressante pour des écarts-types des hauteurs, donc des vitesses de vent, plus importants ($\sigma_\zeta > 2$ m, ou $U_{10} > 20$ m/s), car la forme du signal rétrodiffusé est en accord avec la méthode de référence, ce que ne propose pas la MPP classique.

Les figures 3.20, 3.21 et 3.28 présentent la polarisation horizontale, pour le cas d'une corrélation des hauteurs Gaussienne et une surface de mer. Dans cette polarisation, il n'y a pas d'onde de surface, et donc seule la MPP classique a été simulée. Elle estime bien la méthode de référence. De plus, comme il en a été fait mention dans le chapitre un, le signal rétrodiffusé est moins énergétique qu'en polarisation verticale.

Les simulations précédentes ont permis de valider la MPP combinée avec la fonction d'atténuation, lorsque l'incidence est rasante, et très rasante. Elles ont également montré la défaillance de la MPP classique, pour la polarisation verticale. Nous pouvons désormais étudier le coefficient de diffusion sous

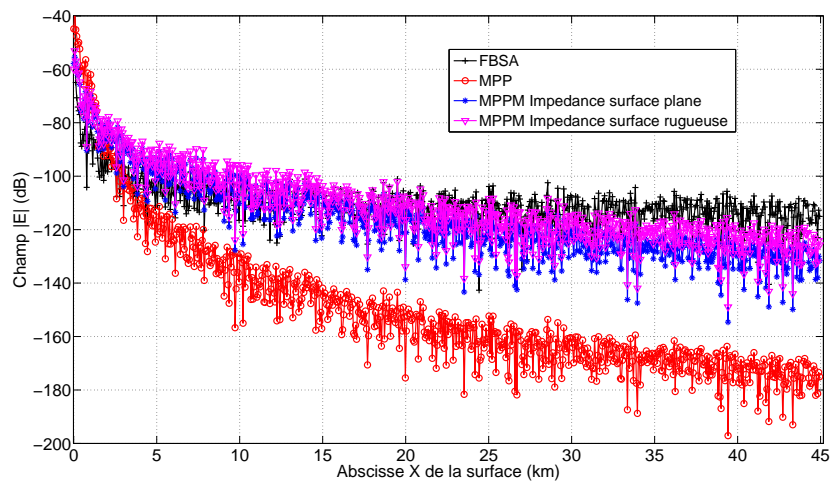


FIG. 3.17 – Champ rétrodiffusé. $\lambda = 20$ m. $l_c = 2$ m. Polarisation verticale. Corrélation des hauteurs Gaussienne.

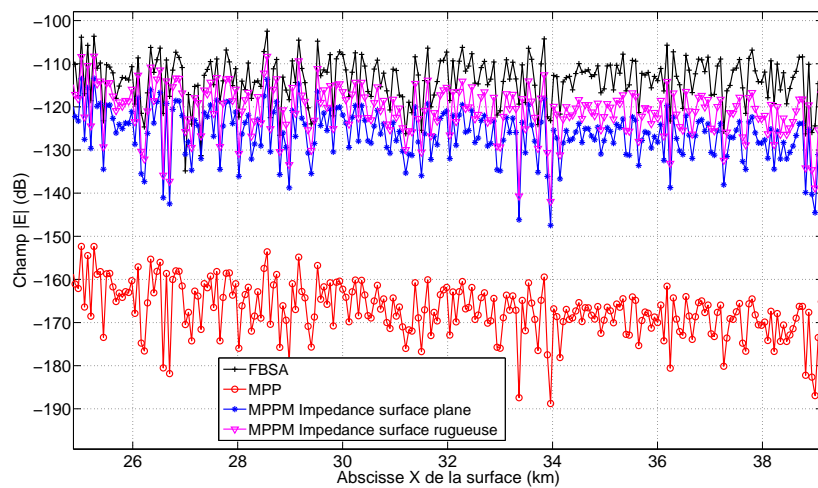


FIG. 3.18 – Agrandissement de la figure 3.17.

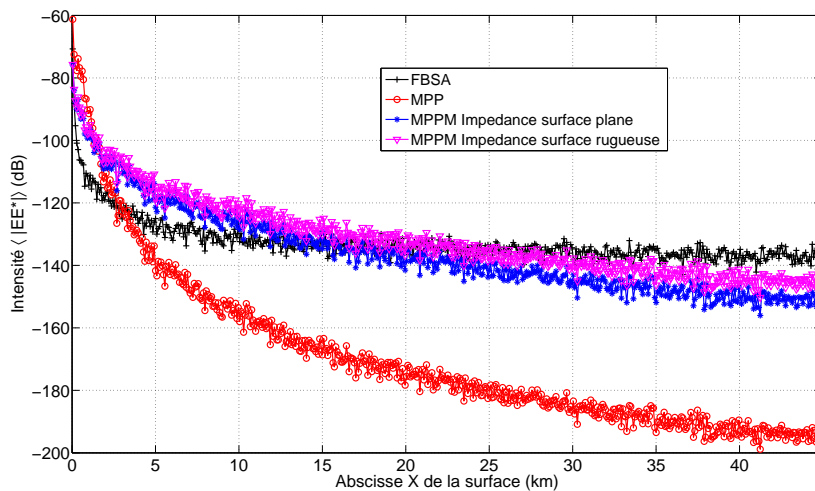


FIG. 3.19 – Intensité moyenne du champ rétrodiffusé. Paramètres identiques à la figure 3.17.

incidences rasantes, pour la polarisation verticale. Celui-ci est donné dans (3.103). Sur les figures 3.31 et 3.32, les coefficients de diffusion pour la polarisation verticale sont tracés, en rétrodiffusion, pour une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne, et une surface de mer, respectivement, en fonction de l'angle rasant. La hauteur $z_0 = h$ du point source-observation est variable : $h = \{0.01\lambda, 0.05\lambda, 0.1\lambda, 0.5\lambda\}$.

Comme il est observé sur les figures 3.31 et 3.32, et comme Barrick le mentionne dans [88], le modèle classique pour la polarisation verticale, prévoit une décroissance rapide sous incidences rasantes dans la direction de rétrodiffusion, ce que contredit la méthode des petites perturbations modifiée. Pour des hauteurs de source supérieures à 0.5λ , la MPP modifiée en champ lointain (vue dans le chapitre deux : équation (2.105)) doit être utilisée. Par exemple, les fréquences auxquelles nous travaillons (la bande HF 3 – 30 MHz) dans les simulations précédentes, le rapport h/λ , avec pour rappel $h = 10$ m, est proche de 0.5, et donc le modèle modifiée en champ lointain (2.105)), pourrait s'appliquer. Si la hauteur de source est inférieure à 10 m, aux mêmes fréquences, alors la fonction d'atténuation prend plus d'importance puisque le rapport h/λ diminue, et donc le niveau du coefficient de diffusion augmente comme le présente les figures citées ci-dessus. Cela se comprend intuitivement puisque le point d'observation (co-localisé avec le point source) est plus proche de la surface, et donc *capte* plus l'énergie diffusée par la surface et véhiculée par l'onde de surface. Cependant, pour aller plus loin dans l'investigation et être plus précis quant aux validités des modèles, il faudrait présenter des angles très rasants ($> 89.5^\circ$). Pour le cas d'une surface de mer, figure 3.32, le comportement est quelque peu différent. Contrairement à la MPP classique, et au cas des hauteurs de corrélation Gaussienne, la MPP modifiée avec la fonction d'atténuation $F(w)$ ne chute pas rapidement à l'approche des angles rasants. La MPP modifiée en champ lointain peut même être utilisée pour des angles d'incidence allant jusqu'à 86° . Au-delà, le modèle avec la fonction d'atténuation est le plus approprié. Des simulations précédentes, il ressort que la MPP classique pour la polarisation horizontale concorde avec la méthode de référence FBSA. Sur les figures 3.29 et 3.30, les coefficients de diffusion, en rétrodiffusion, pour la MPP classique et la MPP modifiée en champ lointain (Far Field) sont présentés. Pour des angles d'incidences $\theta_i > 87^\circ$, les deux méthodes sont confondues. Pour $80^\circ < \theta_i < 87^\circ$, elles diffèrent, mais cela reste minime. On remarque également, comme prévu par la théorie (voir chapitre un, section 1.6.1), que la polarisation horizontale décroît plus rapidement sous incidences rasantes que la polarisation verticale. Observation qui a été rapportée d'expérimentations faites par exemple dans [186] ou [187].

Ainsi, dans cette section, nous avons mis en évidence l'effet, non négligeable, de la fonction d'atté-

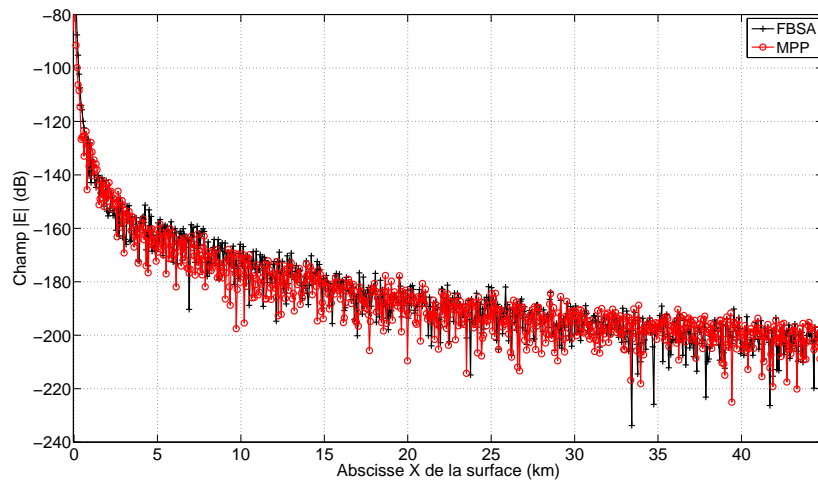


FIG. 3.20 – Paramètres identiques à la figure 3.17, pour la polarisation horizontale.

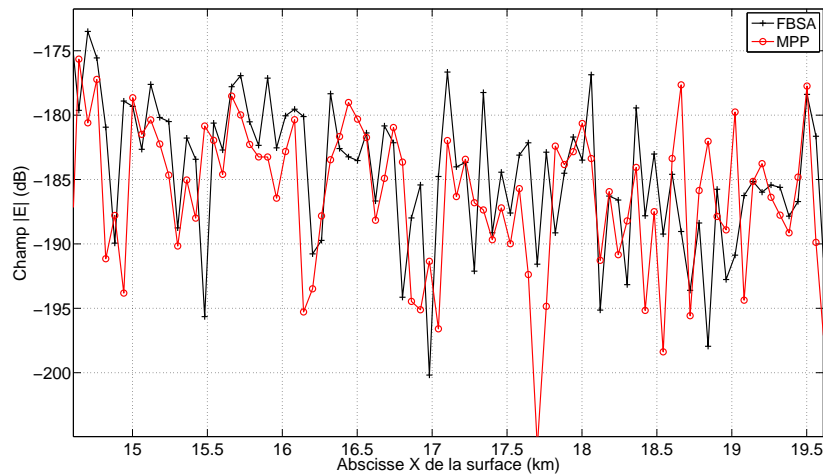


FIG. 3.21 – Agrandissement de la figure 3.20.

nuation $F(w)$, comportant l'onde de surface, dans l'expression du champ diffusé, pour une corrélation des hauteurs Gaussienne et une surface de mer. Cet effet est également observé dans [171], où l'auteur présente des courbes pour la composante verticale E_z du champ électrique totale en polarisation verticale (dans cette polarisation le champ est décomposé en H_y , E_x et E_z), pour des distances allant jusqu'à 1000 km. Ces résultats montrent les fréquences $f = 1, 10$ et 100 MHz, pour une surface de constantes $\epsilon = 4$ et $\sigma = 0.01$. Un résultat important apparaît à une fréquence $f = 1$ MHz : le champ total est plus important lorsque le point d'observation est sur la surface ($z = 0$), que lorsque ce même point d'observation est placé à une hauteur $z = 800$ pieds (≈ 240 m). Pour des fréquences élevées ($f > 100$ MHz), lorsque les points source et d'observation sont au-dessus de la surface ($z = 240$ m), et pour de courtes distances, le champ total présente des oscillations, qui apparaissent également pour le cas parfaitement conducteur. Les minima de ces oscillations sont plus importants dans le cas parfaitement conducteur.

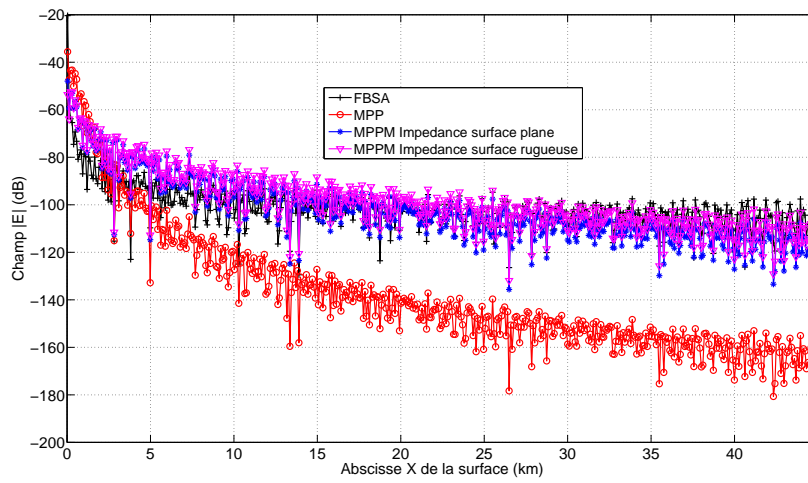


FIG. 3.22 – Champ diffusé dans la direction de rétrodiffusion. $\lambda = 30$ m. Vitesse du vent $U_{10} = 5$ m/s. Polarisation verticale. Surface de mer.

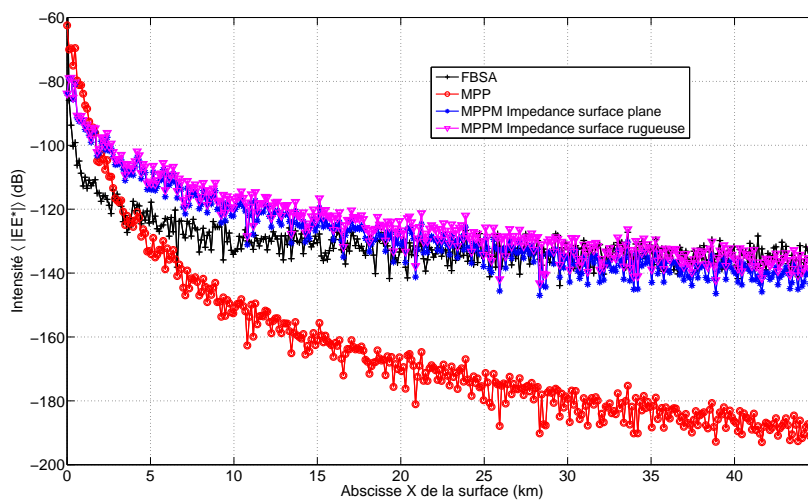


FIG. 3.23 – Intensité du champ rétrodiffusé. Paramètres identiques à la figure 3.22.

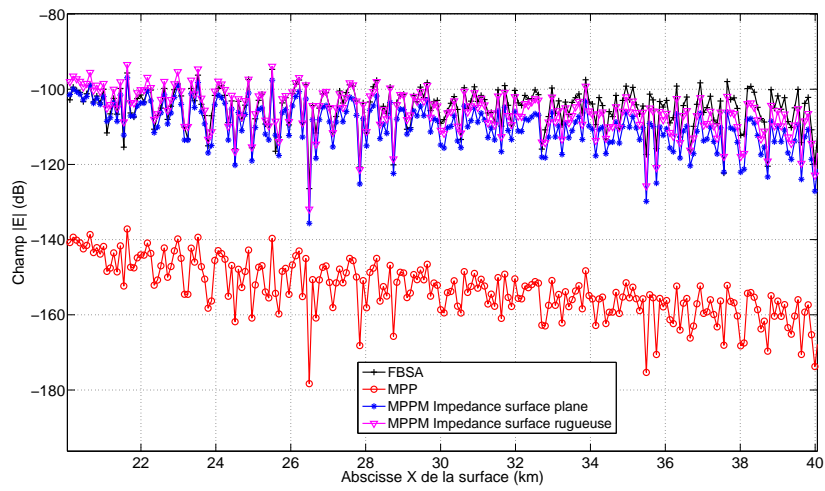
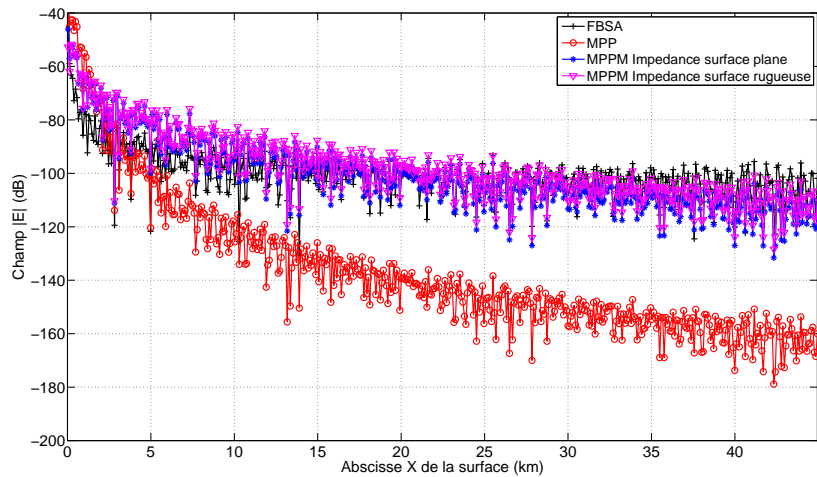


FIG. 3.24 – Agrandissement de la figure 3.22.

FIG. 3.25 – Champ diffusé en rétrodiffusion. $\lambda = 30$ m. Vitesse du vent $U_{10} = 6$ m/s. Polarisation verticale. Surface de mer.

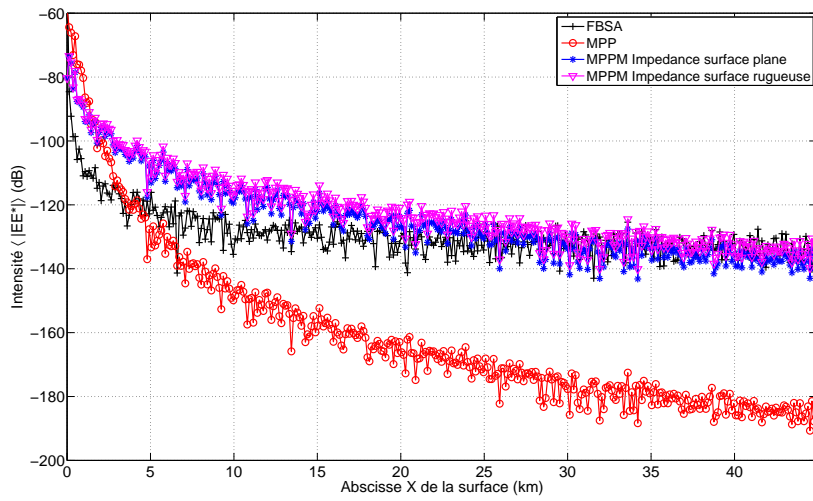


FIG. 3.26 – Intensité du champ rétrodiffusé. Paramètres identiques à la figure 3.25.

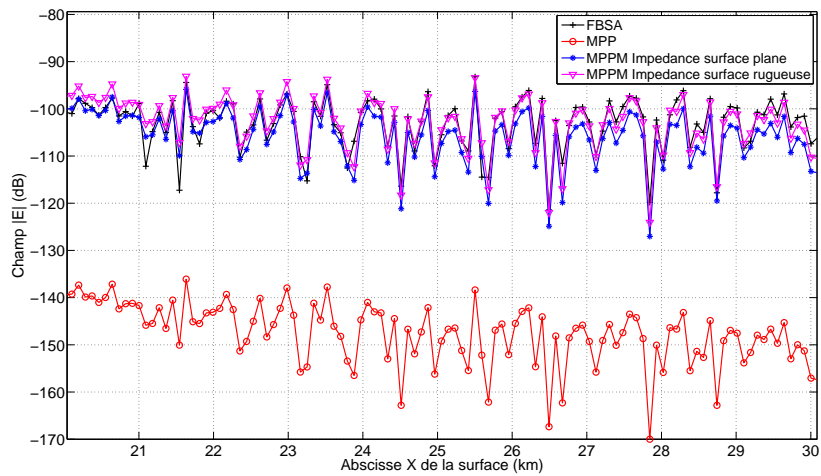


FIG. 3.27 – Agrandissement de la figure 3.25.

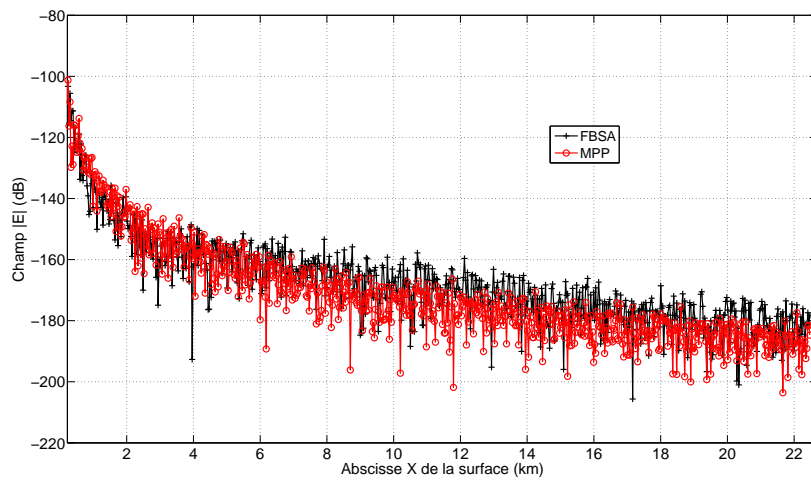


FIG. 3.28 – Champ diffusé dans la direction de rétrodiffusion. $\lambda = 15$ m. Vitesse du vent $U_{10} = 6$ m/s. Polarisation horizontale. Surface de mer.

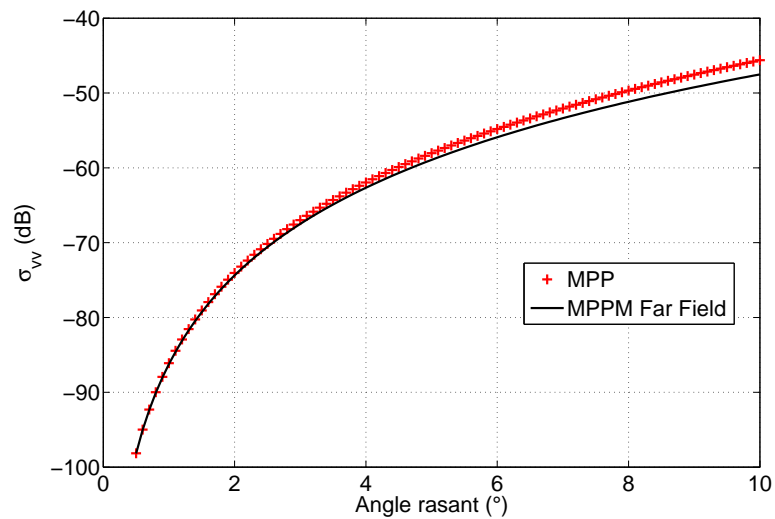


FIG. 3.29 – Coefficient de diffusion pour la polarisation horizontale pour une une corrélation des hauteurs Gaussienne. $\epsilon = 80 + i720$.

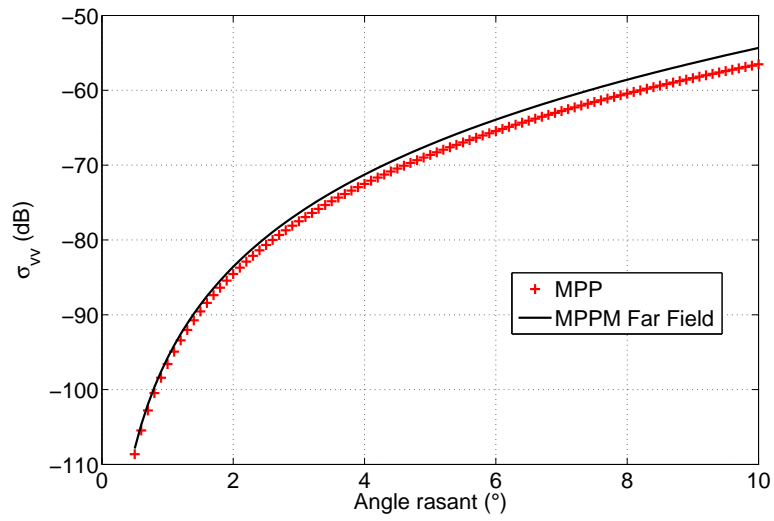
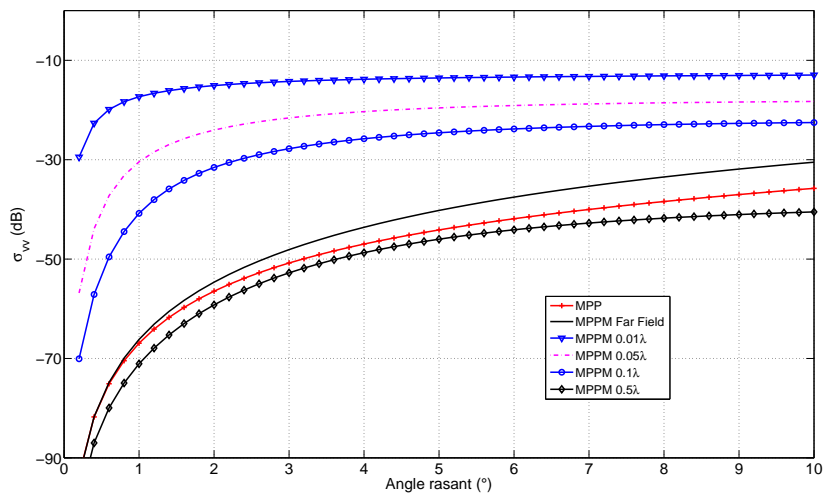


FIG. 3.30 – Même paramètres que la figure 3.29, mais pour une surface de mer.


 FIG. 3.31 – Coefficient de rétrodiffusion $\sigma_{vv}(\kappa, \kappa_0)$ pour la polarisation verticale pour une une corrélation des hauteurs Gaussienne. $\epsilon = 80 + i720$. Hauteur $z_0 = h$ source-observation variable $\{0.01\lambda, 0.05\lambda, 0.1\lambda, 0.5\lambda\}$. $l_c = 2.24/k_0$.

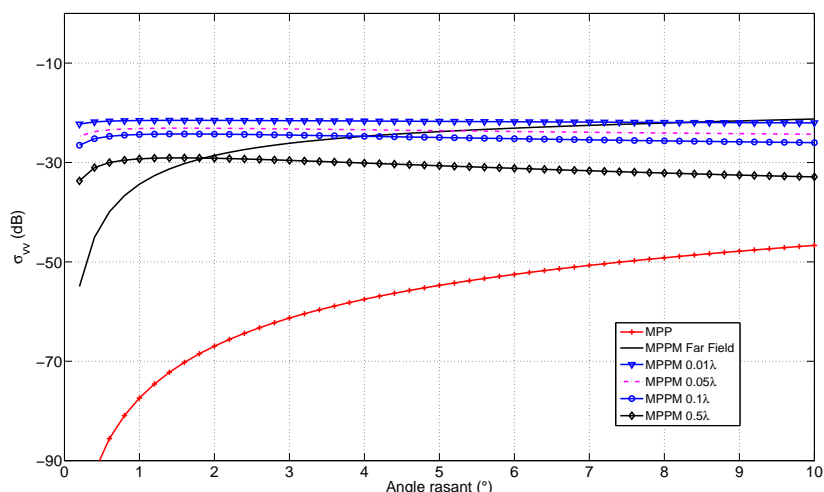


FIG. 3.32 – Même paramètres que la figure 3.31, mais pour une surface de mer.

3.6 Extensions possibles du modèle

3.6.1 Introduction

L'étude menée dans ce manuscrit demande plus d'investigations pour le cas d'une surface monodimensionnelle. Bien sûr, l'objectif est d'obtenir un modèle pour une géométrie à deux dimensions. Ainsi, les termes de polarisations croisées (*cross-polarisation*) HV et VH sont pris en compte. Les expressions des coefficients de diffusion pour les termes de polarisations croisées pour la MPP classique peuvent être fidèlement retrouvées dans [100]. Des simulations pour la méthode MPP classique se trouvent dans [2]. Nous avons décidé de placer des perspectives de ce travail dans ce chapitre, car, elles sont nombreuses, la littérature est abondante à leur sujet, et à en voir les papiers publiés récemment, par exemple [175], le sujet est loin d'être totalement épuisé. En réalité, la propagation des ondes sous incidence rasante est confrontée à l'inhomogénéité de l'impédance de la surface, au rayon de courbure de la Terre, aux conduits d'évaporation au-dessus de la surface de mer, pour ne citer que quelques problèmes. L'objectif final est de déterminer un modèle combinant les effets de la diffusion des ondes due à la rugosité de la surface et la propagation des ondes dans le conduit. Le problème ainsi formulé est la combinaison de deux études générales : la diffusion des ondes par une surface rugueuse, et la propagation des ondes au-dessus d'une surface rugueuse, dans un milieu inhomogène.

3.6.2 Influence de la courbure de la Terre

Par exemple, des auteurs se sont intéressés à l'influence de la courbure de la Terre. [188], [89], [189]. Le champ électrique a alors une nouvelle expression en terme de la fonction de Hankel sphérique $H_\nu^{(2)}(k_0 a)$, où a est le rayon de courbure de la Terre. La localisation des pôles discrets en $\nu = \nu_s$ donne la variation angulaire de la propagation. L'approximation du terme $k_0 a H_\nu^{(2)}(k_0 a)$ fait intervenir la fonction de Airy, qui satisfait à une équation différentielle (dite équation de Stokes) [89], [134]. Pour de grandes distances, l'émetteur et le récepteur sont hors de la ligne de vue de l'un et l'autre, et la propagation est dite au-delà de l'horizon. La méthode employée par les auteurs est d'obtenir une série en sommant les résidus aux pôles t_s de l'équation différentielle formée par la fonction de Airy et sa dérivée première.

Cette série est connue dans la littérature sous l'appellation *série de résidus*, [190]. Ainsi, la fonction d'atténuation $F(w)$ pour une surface plane est modifiée en une fonction d'atténuation $W(x, q)$ prenant en compte la sphéricité de la Terre. Bremmer obtint la série suivante, dont la convergence a été vérifiée pour de grandes distances,

$$\begin{aligned} W(x, q) &= F(w) - \frac{\delta^3}{2} \left(1 - i(\pi w)^{1/2} - (1 + 2w)F(w) \right) \\ &+ \delta^6 \left[1 - i(\pi w)^{1/2}(1 - w) - 2w + \frac{5}{6}w^2 + \left(\frac{w^2}{2} - 1 \right) F(w) \right] \\ &+ \mathcal{O}(\delta^9) + \mathcal{O}(\delta^{12}), \dots, \end{aligned} \quad (3.105)$$

où $\delta^3 = -1/(2q^3) = i/(k_0 a Z_v^3)$, et a est le rayon de courbure la Terre.

3.6.3 “Mixed-Path Propagation”

Dans beaucoup de problèmes traitant de la propagation des ondes de surface, il faut considérer la surface comme inhomogène. Par exemple, ce cas de figure apparaît lorsque l'onde radio passe de la surface de mer à une surface recouverte de glace, où de la surface de mer à la côte. . . Les impédances de chaque partie (glace, mer, côte) sont donc différentes, et on ne peut plus considérer la surface comme homogène. Par exemple, pour la mer : $\epsilon = 80$, $\sigma = 4$ S/m, et pour la Terre : $\epsilon = 10$, $\sigma = 9 \times 10^{-3}$ S/m. L'auteur

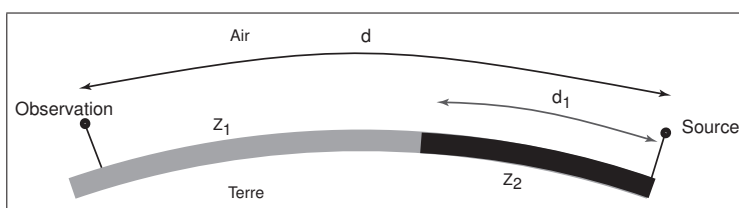


FIG. 3.33 – Terrain courbé, avec deux sections d'impédance de surface Z_1 (la mer) et Z_2 (la côte).

Wait, à partir des travaux originaux [191] a été très actif dans ce domaine [134], [89], repris par exemple par [192]. Il utilise le modèle prenant en compte la courbure de la Terre vue auparavant, et l'étend à une surface inhomogène. Il obtient ainsi une nouvelle formulation pour la fonction d'atténuation modifiée $W(x, q)$, prenant cette fois en compte la courbure de la Terre, et la modification de l'impédance [188], sous forme d'une équation intégrale. Pour une surface à deux impédances (figure 3.33), représentant par exemple la côte (impédance Z_2) et la mer (impédance Z_1), la fonction d'atténuation s'écrit [188]

$$W'(d, Z_2, Z_1) \cong W(d, Z_1) - \left(\frac{ik_0 d}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_0} \right) \int_0^{d_1} \frac{W(d - \alpha, Z_1) W'(\alpha, Z_2, Z_1)}{[\alpha(d - \alpha)]^{1/2}} d\alpha \quad d_1 > 0 \quad (3.106)$$

et $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 120\pi$. L'équation intégrale peut être résolue numériquement. Cependant, pour la propagation des ondes radios rencontrant une jonction mer-côte (littoral), l'auteur *et al* ci-dessus, ont obtenu une approximation, en introduisant des changements de variable (sur α) et de paramètres (sur Z_1, Z_2, d, d_1) dans (3.106). L'équation intégrale se ramène donc à une intégrale à calculer, pour rendre compte de la variation du champ électrique lorsque l'observateur “traverse” le littoral. La figure 3.34 montre l'influence d'une jonction côte-mer sur la fonction d'atténuation W , donc son influence sur le champ se propageant le long de la surface.

Il pousse également son investigation en plaçant des élévations brusques de terrain avec changement d'impédance (figure 3.35), pouvant représenter la côte, sur laquelle repose le radar, et la surface de mer [193].

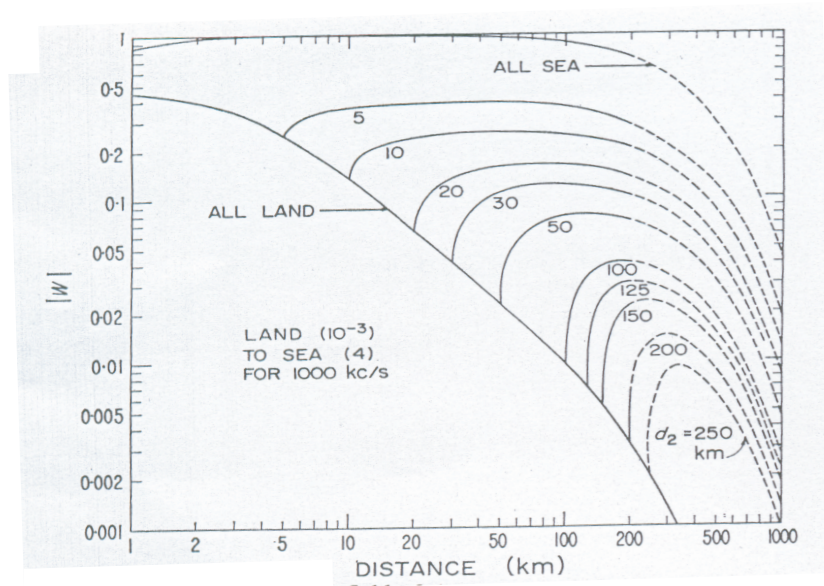


FIG. 3.34 – Amplitude de la fonction d'atténuation W en fonction de la distance pour la propagation de la terre (*land*, de conductivité $\sigma = 10^{-3}$ S/m (terre pauvrement conductrice) et de permittivité $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 15$, vers la mer (*sea*), de conductivité $\sigma = 4$ S/m et de permittivité $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 80$. Le littoral est à une distance d_2 de l'émetteur, lui-même disposé sur la terre. La fréquence d'utilisation est 1 MHz (1000 kilocycles/s). Figure issue de [188].

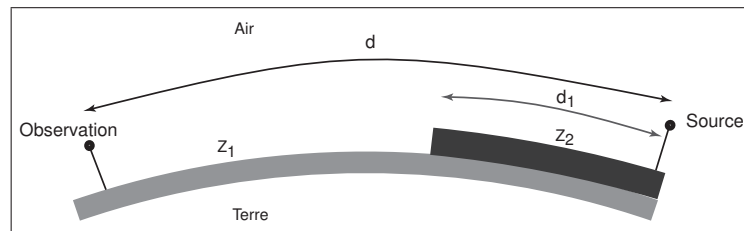


FIG. 3.35 – Terrain courbé, avec élévation brusque et modification de l'impédance Z de la surface.

3.6.4 Conduits d'évaporation

Un phénomène important intervenant dans le guidage des ondes radios sur la surface de mer est le conduit d'évaporation, qui se retrouve par exemple en permanence dans les régions subtropicales de l'Océan Pacifique. Sa formation est due à la vapeur d'eau, résultat du contact de l'air et la surface de mer [194], [195]. L'indice de réfraction $n(z)$ décroît avec la hauteur z au-dessus de la surface. Il se forme des conduits d'évaporation sur la surface de mer, qui se comportent comme un guide d'onde à la surface (figure 3.36). Ce phénomène est à prendre particulièrement en compte dans les bandes centimétrique et millimétrique. Des conduits de surface prennent également effet vers quelques centaines des MHz. On peut par exemple citer Awadallah [196] qui étudie la propagation au-dessus d'une surface rugueuse, dans un milieu d'indice de réfraction $n^2(z) = 1 - \epsilon z$, où ϵ est une constante appelée paramètre du conduit et z la hauteur au-dessus de la surface. Il utilise la méthode des fonctions de Green. La fonction de Green exacte pour le milieu du conduit est exprimée en une combinaison de fonctions de Airy. Puisque la fonction de Green est difficile à évaluer numériquement car l'intégrande oscille rapidement, elle est évaluée asymptotiquement par la méthode du point selle et de la plus forte pente (saddle point and steepest descent method). La fonction de Green G pour le milieu inhomogène est solution de l'équation

de Helmholtz scalaire

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(z)G = -\delta(x - x')\delta(z - z'). \quad (3.107)$$

L'évaluation mathématique n'est pas aisée ici puisqu'il n'y a plus un seul point selle et un pôle, comme nous l'avons vu pour le calcul de l'onde de surface par exemple, mais des points selles voisins (*nearby saddle points*), qui peuvent être complexes. Son étude rend bien compte de la complexité des mécanismes physiques mis en jeu. Par exemple, un de ces phénomènes physiques est la réflexion des rayons sur les caustiques¹⁰ causant des interférences avec le trajet direct entre la source et l'observation (figures 4-12, 4-18 et 4-19 de [196]). Il expose cependant la difficulté dans l'évaluation de la fonction de Green, lorsque le profil de l'indice de réfraction est celui rencontré dans les conduits d'évaporation du type de ceux présentés dans [195], c'est-à-dire ayant une dépendance logarithmique en fonction de la hauteur.

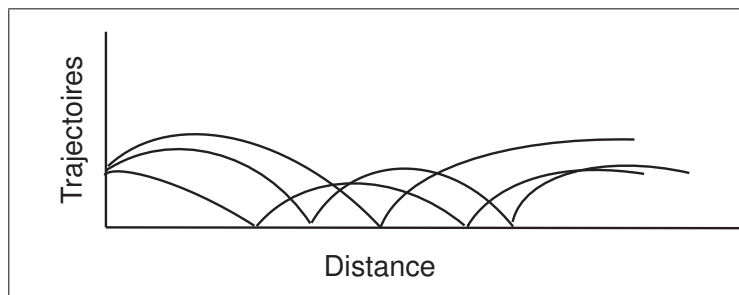


FIG. 3.36 – Représentation des trajectoires suivies par les rayons guidés dans un conduit d'évaporation.

Citons également Fuks *et al.* [197] qui ont proposé de modéliser un guide d'ondes, dont les limites seraient des surfaces rugueuses placées en $z = 0$ et $z = a$. Leur modèle pourrait s'appliquer à des structures naturelles telles que le guide d'ondes terre-ionosphère, les conduits troposphériques¹¹, ... Leur théorie s'appuie sur la diffusion multiple par une surface rugueuse étudiée dans le deuxième chapitre de ce manuscrit, avec les fonctions de Green, et qui a été développée pour la première fois dans le cas Dirichlet [111]. Ils utilisent l'équation de Dyson et l'approximation de Bourret, vues au chapitre deux, pour calculer le champ cohérent dans le guide d'ondes. Un deuxième article de ces mêmes auteurs traite de l'intensité du champ véhiculant dans ce guide d'ondes naturel.

On retrouve également dans la littérature une méthode populaire pour résoudre le problème de la propagation d'ondes en présence d'une surface rugueuse, lorsque la propagation avant est prédominante (cas du radar côtier) : la Parabolic Wave Equation (PWE) introduite par Leontovich et Fock en 1946. Elle est résolue principalement par un algorithme *Fourier split-step*, développé par Hardin et Tappert (1973). L'essence de cet algorithme est qu'il décompose, dans l'espace de Fourier, la solution en deux termes (*split-step*) : l'un comprend la solution pour un espace homogène, ne prenant donc en compte que l'effet de la diffusion par la surface, l'autre incluant l'effet de l'indice de réfraction $n^2(x, z)$ du milieu où l'onde se propage. Des simulateurs ont même été développés récemment à l'aide de Matlab [198]. Dans [199], les auteurs utilisent la PWE combinée avec la MdM et le principe de réciprocité, pour calculer le courant de surface sur un bateau, et réfléchi vers le radar.

¹⁰La limite au-delà de laquelle les ondes sont évanescentes car la propagation n'est pas permise, à cause du changement de signe de l'indice de réfraction, est appelée caustiques en théorie de l'optique géométrique.

¹¹L'ionosphère est la partie de l'atmosphère située entre 60 et 600 kilomètres d'altitude. La troposphère est la partie de l'atmosphère située entre la surface du sol et une altitude d'environ 10 kilomètres.

3.6.5 Systèmes de radar réels

En réalité, il existe des radars HF à ondes de surface (HFSWR), (figure 3.37). Ce sont des radars dotés de capacités de détection à très basse altitude au-dessus de la mer. Leur portée est de quelques centaines de kilomètres, variable selon le type de cible et l'état de la mer qui peut dégrader la qualité de la propagation. Le principe du radar HF à ondes de surface connaît des applications dans le domaine de l'océanographie (mesure des vents et des courants à la surface), et dans le domaine de la surveillance de cibles non coopératives (alerte vis à vis d'avions basse altitude, détection de bateaux, ...). Leur fonctionnement est donné dans [200].

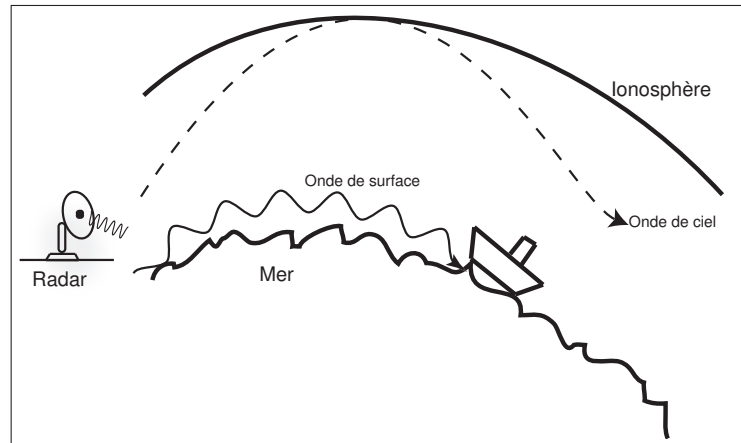


FIG. 3.37 – Configuration réelle d'un radar côtier. Onde de surface émise par un HFSWR.

3.6.6 Conclusion

Ces perspectives sont un bref aperçu des théories déjà existantes, et qui pourraient être appliquées au cas d'une surface de mer, décrite par le modèle de Elfouhaily. Il faudrait les incorporer à la méthode des petites perturbations, mais pour le moment, il n'existe pas de modèle numérique prenant en compte tous ces phénomènes, et il ne serait donc pas possible de valider ou non la méthode analytique. De plus, il faudrait regarder de près les variations de l'état de la surface de mer avec la distance, ou encore prendre en compte l'influence de l'ionosphère, car la propagation étudiée ici ne prend pas en compte les réflexions sur celle-ci, puisque nous n'avons travaillé que sur l'onde de sol. Elle est importante car de jour, la propagation peut atteindre 400 kilomètres. L'étude peut également s'étendre au radar à impulsions, ou aux variations temporelles de l'indice de réfraction du milieu de propagation. Comme on peut le constater, le sujet reste très ouvert, mais de nombreuses théories existent déjà [100], [125], [99]. Citons le livre de Fock, dans lequel une grande partie est consacrée à la propagation troposphérique des ondes radios [201]. Puis, la méthode et les phénomènes maîtrisés pour le problème à deux dimensions peuvent être étendus au cas réel à trois dimensions.

3.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la transmission et réception des ondes radios au-dessus de la surface de mer. La solution d'un dipôle au-dessus d'une surface plane de conductivité finie est d'abord donnée en terme du vecteur de Hertz. La connaissance de ce-dernier permet de déduire les champs magnétique et électrique, solution de l'équation de propagation dans le milieu de propagation. Dans la littérature, cette

terminologie est très illustrée. L'étude d'une telle configuration, nous l'avons vu, a fait l'objet de travaux intenses depuis plus d'un siècle. Une onde guidée à l'interface émerge donc mathématiquement de la solution. Elle est dénommée onde de surface. Puis, la solution a été adaptée à une surface rugueuse. La principale modification apparaît dans l'impédance de surface, puisque l'effet de la diffusion multiple, dû à la rugosité, est alors pris en compte. Des simulations sont présentées pour le cas de figure du radar côtier. Habituellement, celui-ci fonctionne à une dizaine de MHz, et en polarisation verticale. Il mesure l'énergie réfléchie dans la direction de rétrodiffusion par la surface de mer qu'il a "illuminée" au préalable. Sa hauteur (une dizaine de mètres) implique que l'onde de surface contribue majoritairement à l'énergie totale mesurée. Cela a ainsi pu être vérifié numériquement avec la méthode asymptotique des Petites Perturbations Modifiée prenant en compte à la fois l'effet de la diffusion multiple, et l'onde de surface. La comparaison de cette méthode rapide a été faite avec la méthode de référence : la FBSA. En effet, la hauteur du radar et les distances simulées amènent à des angles d'incidences supérieurs à 89.5° car $\theta_i = \tan^{-1} \frac{10\text{km}}{10\text{m}} \approx 89.94^\circ$. La MPP classique s'est montrée défailante à de tels angles d'incidences. Ces résultats ont été obtenus à la fois pour une surface de corrélation des hauteurs Gaussienne, très utilisée dans la littérature, et pour une surface de mer réaliste [29], peu investiguée dans la littérature. Cette étude a donc montré, et validé l'importance de l'onde de surface dans une telle configuration. Basées sur ces observations, des études complémentaires, pour se rapprocher toujours plus du cas réel, peuvent être menées. Quelques-une d'entre elles ont été répertoriées dans la dernière section de chapitre.

Conclusion et perspectives

Dans le premier chapitre ont d'abord été dressés quelques rappels d'électromagnétisme pour l'appréhension du problème. Nous avons mis l'accent sur l'approche par la fonction de Green, qui est à la base de l'étude faite dans le second chapitre, et est un outil mathématique pour la résolution de l'équation de propagation. D'autres concepts fondamentaux dans la théorie de la diffusion par des surfaces rugueuses ont également été abordés, dont, entre autres, le critère de Rayleigh, qui permet de quantifier le degré de rugosité d'une surface. Une notion également importante qui a été évoquée est l'onde incidente atténuée de Thorsos, utilisée lors des simulations numériques, satisfaisant à la fois au concept d'onde plane et à l'atténuation des effets de bords imposés par la troncature de la surface générée numériquement. Puis, nous avons fait quelques rappels statistiques dans le but de caractériser et générer numériquement une surface de densité de probabilité des hauteurs gaussienne. Par ailleurs, deux types de spectre des hauteurs ont été présentés. Le premier, le spectre Gaussien est abondamment rencontré dans la littérature, notamment en optique. Le second, le spectre de Elfouhaily permet de générer une surface de mer réaliste. C'est ce-dernier, peu investigué dans la littérature, qui apporte une contribution originale aux travaux effectués dans cette thèse.

Nous avons ensuite présenté les modèles employant des hypothèses simplificatrices, qualifiés de modèles asymptotiques. Une section a été consacrée à une énumération, non exhaustive, de méthodes asymptotiques, avec l'accent mis plus particulièrement sur les plus anciennes d'entre elles : la Méthode des Petites Perturbations (MPP) et l'Approximation du Plan Tangent (APT). Nous avons montré, à l'aide du critère de Rayleigh que dans le cadre de la surveillance de la surface de mer par un radar côtier, la Méthode des Petites Perturbations était justifiée. Elle s'applique lorsque les irrégularités de la surface sont petites devant la longueur d'onde, et consiste à développer l'expression du champ en terme des hauteurs de la surface.

Des méthodes numériques, basées sur les équations intégrales ont été recensées. Elles sont un outil important car elles font office de méthodes de référence pour valider les méthodes asymptotiques. La Méthode des Moments (Mm) pour un milieu homogène est utilisée ici. Ensuite, en combinant la méthodologie de la MPP au théorème d'extinction et à l'onde incidente atténuée, nous avons développé et obtenu les champs sur la surface jusqu'au second ordre, et pour le cas d'une permittivité électrique relative équivalente à celle d'une surface de mer réelle. La comparaison avec la méthode de référence, développée au laboratoire, a montré une concordance significative sous incidences modérées. Une section a également fait part des travaux réalisés sur le domaine de validité de la MPP, par les auteurs les plus actifs dans le domaine. Nous avons terminé en concluant que la MPP, alors dite "classique" pour des raisons qui deviendront évidentes par la suite, n'est plus valide sous incidences rasantes, configuration à laquelle se trouve confronté le radar côtier.

Le deuxième chapitre donne une interprétation physique du processus de diffusion. Le principe s'appuie sur la théorie originale de la propagation des ondes en milieu inhomogène, la méthode des diagrammes, connue en théorie quantique des champs. Ce formalisme est mis en place à partir des fonctions de Green, exposées au premier chapitre. Une équation de type Lipmann-Schwinger est alors obtenue. A partir de celle-ci, les expressions pour la moyenne et la corrélation statistiques du champ sont déduites.

Elles portent les noms d'équations de Dyson et Bethe-Salpter, respectivement. Ces deux expressions sont ensuite approximées à l'aide des diagrammes, afin d'en faciliter leur manipulation. Ce chapitre est construit comme suit : d'une part, une partie de la théorie pour le cas d'une surface parfaitement conductrice (PC), donc répondant aux conditions aux limites de Neumann et Dirichlet, est exposée ; puis d'autre part, le cas d'une surface de mer très conductrice (TC) est traité.

L'équation de Dyson pour le champ cohérent a permis d'obtenir une impédance effective de surface, permettant de reformuler les coefficients en réflexion dans les deux polarisations, horizontale et verticale. Ainsi, pour donner une courte illustration, dans le cas d'une surface plane, l'angle de Brewster vaut 90° . L'existence d'irrégularités sur la surface déplace l'angle de Brewster de quelques dixièmes de degrés en dessous de 90° . Cet angle particulier se retrouve alors dans la gamme des incidences rasantes qui sont étudiées dans le chapitre trois. Une nouvelle expression est obtenue pour les coefficients de diffusion. Ces derniers ont alors la forme de ceux pour la MPP classique, mais un terme supplémentaire apparaît, lequel comporte intrinsèquement l'impédance effective de surface. Nous avons renommé cette formulation MPP modifiée. Finalement, les coefficients de diffusion sont tracés, pour la MPP classique, vue au premier chapitre, la MPP modifiée, et la méthode des moments. Il est alors montré que la prise en compte de l'impédance effective de surface améliore sensiblement le domaine de validité de la MPP.

Le troisième et dernier chapitre traite de la configuration du radar côtier qui observe la mer à des angles d'incidences proches de l'horizontale.

Nous avons tout d'abord présenté en partie les travaux réalisés par Sommerfeld (1909) et autres contributions majeures apportées par les nombreux auteurs qui suivirent. Leurs études ont permis d'apporter une meilleure compréhension du mécanisme de la propagation des ondes au-dessus de la surface de la Terre. La formulation, originellement proposée pour une surface plane très conductrice en polarisation verticale, est résumée. L'information importante à retenir est l'existence d'une onde de surface, exprimée sous une forme appelée fonction d'atténuation. On déduit alors une fonction d'atténuation pour une surface rugueuse. Elle incorpore l'impédance effective de surface obtenue dans le second chapitre. Des résultats numériques ont été présentés pour les fonctions d'atténuation d'une surface plane et d'une surface rugueuse, pour des fréquences comprises dans la bande de fréquences d'utilisation du radar côtier. Les surfaces générées sont de grandes dimensions. Le nombre d'inconnues N à traiter est alors accru. La méthode numérique développée au laboratoire, la Forward-Backward Spectral Acceleration (FBSA), est intéressante dans ce cas de figure puisque elle est de complexité $\mathcal{O}(N)$. Nous présentons des résultats pour le champ et l'intensité rétrodiffusés. Les simulations pour une surface de corrélation des hauteurs gaussienne, et une surface de mer, montrent que la MPP faillit sous incidences rasantes, tandis que la MPP modifiée prenant en compte l'onde de surface et l'impédance effective de surface déterminée au chapitre deux donne des résultats en accord avec la FBSA.

Quelques perspectives ont été présentées dans la section intitulée *extensions possibles*. On pourrait toutefois ajouter une nouvelle perspective qui serait de déterminer la puissance rétrodiffusée à l'aide du modèle asymptotique dans le cas où la mer est recouverte, en un endroit, d'une nappe de pétrole. Par exemple, le modèle "mixed-path" présenté dans la section mentionnée auparavant pourrait être intéressant. De nombreuses voies sont donc à explorer.

Annexe A

Théorie perturbative

Dans cette Annexe, un résumé de la MPP, dite classique développée par Rice est présenté. Le lecteur pourra par exemple consulter [3], [11], [15], [5] pour une présentation détaillée. Les coefficients de diffusion sont donnés pour les ordres un et deux. La théorie des perturbations suppose que le champ diffracté s'exprime comme

$$\psi_{sc}(\mathbf{r}) = \psi_{sc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi_{sc}^{(1)}(\mathbf{r}) + \psi_{sc}^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \quad (\text{A.1})$$

Nous avons vu que le champ diffusé pouvait se mettre sous la forme

$$\psi_{sc}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa e^{i\kappa x + ik_z(\kappa)z} R(\kappa, \kappa_0), \quad (\text{A.2})$$

où l'hypothèse de Rayleigh a été invoquée puisque le champ diffusé est exprimé en un spectre d'ondes planes sortantes. La théorie perturbative consiste à développer les fonctions exponentielles $e^{-ik_z(\kappa_0)\zeta(x)}$ et $e^{+ik_z(\kappa)\zeta(x)}$ en une série de puissance

$$e^{\pm ik_z(\kappa)\zeta(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\pm ik_z(\kappa)\zeta(x)]^m}{m!}, \quad (\text{A.3})$$

où le terme $k_z\zeta \ll 1$. De même, l'amplitude de diffusion $R(\kappa, \kappa_0)$ est développée sous la forme

$$R(\kappa, \kappa_0) = R^{(0)}(\kappa, \kappa_0) + R^{(1)}(\kappa, \kappa_0) + R^{(2)}(\kappa, \kappa_0) + \dots \quad (\text{A.4})$$

Puis, en faisant usage du vecteur de Poynting (donné ici pour la polarisation horizontale) pour le champ diffusé

$$\langle \mathbf{S}_s(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \rangle_{incoh} = \Re e \left[\frac{i}{2\omega\mu} \left\langle \psi_{sc}(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_{sc}^*(\mathbf{r})}{\partial z} \right\rangle \right], \quad (\text{A.5})$$

on en déduit le coefficient de diffusion incohérent $\sigma(\kappa, \kappa_0)$. Ce-dernier est donné directement dans le paragraphe suivant, pour les cas d'une surface PC et diélectrique, aux ordres un et deux, pour les polarisations horizontale et verticale.

Nous pouvons définir le coefficient de diffusion bistatique incohérent jusqu'à l'ordre 2 par

$$\sigma_\alpha(\kappa, \kappa_0) = \sigma_\alpha^{(1)}(\kappa, \kappa_0) + \sigma_\alpha^{(2)}(\kappa, \kappa_0). \quad (\text{A.6})$$

En PC, les coefficients de diffusion bistatique à l'ordre 1, sont respectivement, polarisations horizontale et verticale

$$\sigma_h^{(1)}(\kappa, \kappa_0) = 4k_0^3 \cos^2 \theta_s \cos \theta_i \tilde{W}(\kappa - \kappa_0), \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_v^{(1)}(\kappa, \kappa_0) = \frac{4k_0(\kappa\kappa_0 - k_0)^2}{\cos \theta_i} \tilde{W}(\kappa - \kappa_0) \quad (\text{A.8})$$

Afin que l'onde soit diffusée de la direction incidente κ_0 vers la direction diffuse κ la surface doit fournir la composante spectrale $\kappa - \kappa_0$. C'est le phénomène de diffusion de Bragg.

Physiquement, le signal rétro-diffusé est proportionnel à la portion du spectre de la surface rugueuse où $\kappa = -\kappa_0$, c'est à dire $\Xi = \kappa - \kappa_0 = -2k_0 \sin \theta_i$, où Ξ est le nombre d'onde spatial de la surface [90]. Par conséquent le signal rétro-diffusé vient du spectre avec un nombre d'ondes de période d dans la direction x telle que $\Xi = 2\pi/d = -2k_0 \sin \theta_i$. Ainsi, deux rayons frappants la surface et séparés de la distance d (figure A.1) produisent un déphasage de 2π .

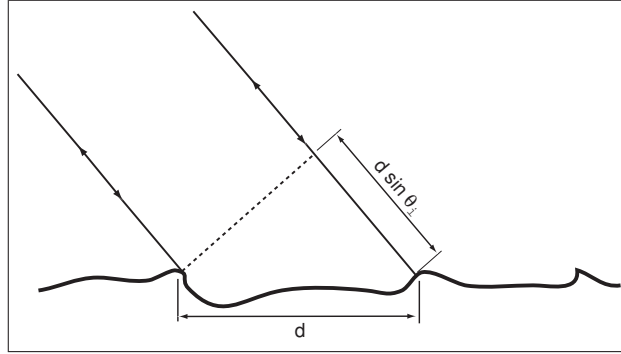


FIG. A.1 – Rétro-diffusion due à la portion du spectre avec une période d telle que $2d \sin \theta_i$ est égale à la longueur d'onde λ .

Les coefficients de diffusion bistatiques en co-polarisation à l'ordre 2 pour une surface parfaitement conductrice sont [71]

$$\sigma_\alpha^{(2)}(\kappa, \kappa_0) = \frac{k_0 \cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} \Re \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa' \tilde{W}(\kappa - \kappa') \tilde{W}(\kappa' - \kappa_0) [A_\alpha(\kappa, \kappa')^2 + A_\alpha(\kappa, \kappa') A_\alpha^*(\kappa, -\kappa' + \kappa + \kappa_0)] \right\}, \quad (\text{A.9})$$

où

$$A_\alpha(\kappa, \kappa') = \begin{cases} 2k_z(\kappa_0)k'_z(\kappa') & \text{pour } \alpha = h \\ \frac{2}{k_z(\kappa)k'_z(\kappa')} (k_0^2 - \kappa\kappa')(\kappa'\kappa_0 - k_0^2) & \text{pour } \alpha = v \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

La convergence de la série qui serait obtenue en ajoutant les termes d'ordres supérieurs à la série perturbative est contrainte à l'extrême complexité et lourdeur des calculs. Pourtant Johnson [50] a développé récemment cette série perturbative à l'ordre 3. Il est de toute manière montré que la série converge bien à l'ordre un pour la condition sur la rugosité $k_0\sigma_\zeta \ll 1$. Dans cette thèse, nous ne nous intéressons qu'au cas où la surface est très conductrice (approximation haute impédance) et parfaitement conductrice. On pourrait tout aussi bien orienter l'étude vers le cas où le milieu inférieur serait diélectrique. Des études de ce type se retrouvent pour la surface de la Terre, ou encore les couches de substrat [202]. C'est d'ailleurs pour cette configuration que Johnson, cité ci-dessus, a développé la MPP diélectrique à l'ordre 3. A titre indicatif, nous donnons ici les coefficients de diffusion bistatiques pour une surface rugueuse

1D diélectrique¹ [2], [71], [95], [100]

$$\sigma^{(1)}(\kappa, \kappa_0) = \frac{4k_0 \cos \theta_s}{\cos \theta_i} |f_\alpha(\kappa, \kappa_0)|^2 \widetilde{W}(\kappa - \kappa_0), \quad (\text{A.11})$$

avec

$$f_\alpha = f_h = \frac{k_1^2 - k_0^2}{(k_z + k_{1z})} \frac{k_{0z}}{(k_{1zi} + k_{0z})} \quad (\text{A.12})$$

$$f_\alpha = f_v = \frac{k_1^2 - k_0^2}{(k_1^2 k_z + k_0^2 k_{1z})} \frac{k_0^2 k_{0z}}{(k_1^2 k_{0z} + k_0^2 k_{1zi})} \left[\frac{k_1^2}{k_0^2} \kappa \kappa_0 - k_{1z} k_{1zi} \right], \quad (\text{A.13})$$

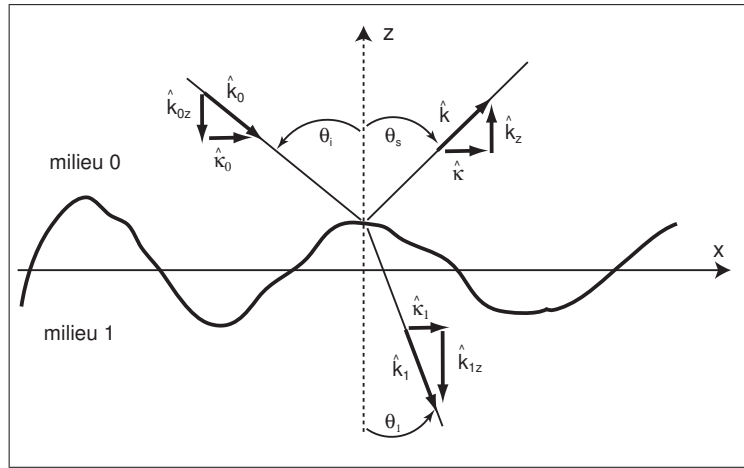


FIG. A.2 – Surface diélectrique et vecteurs d'ondes incident, réfléchi et transmis.

pour les polarisations TE et TM respectivement. Les relations pour les vecteurs d'ondes (figure A.2)

$$\begin{cases} k_1 = n_1 k_0 = \sqrt{\epsilon} k_0, & k_{1z} = n_1 k_0 \cos \theta_1 \\ \kappa = k_0 \sin \theta_s \\ k_{1z0} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i} \end{cases}.$$

A l'ordre 2, les coefficients de diffusion bistatique s'expriment comme

$$\sigma_\alpha^{(2)}(\kappa, \kappa_0) = \frac{k_0 \cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa' \widetilde{W}(\kappa - \kappa') \widetilde{W}(\kappa' - \kappa_0) A_\alpha(\kappa, \kappa', \kappa_0) \right. \\ \left. \times [A_\alpha^*(\kappa, \kappa', \kappa_0) + A_\alpha^*(\kappa, \kappa - \kappa' + \kappa_0, \kappa_0)] \right\}, \quad (\text{A.14})$$

où

$$A_\alpha(\kappa, \kappa', \kappa_0) = \frac{k_{0z}}{k_{0z} + k_{1zi}} \left(\frac{k_1^2 - k_0^2}{k_{1z} + k_z} \right) [k_{1zi} + k_{1z}] \\ - \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{1zi}} \left(\frac{k_1^2 - k_0^2}{k_{1z} + k_z} \right) \left(\frac{k_1^2 - k_0^2}{k_{1z}' + k_z'} \right), \quad (\text{A.15})$$

¹Pour alléger la notation, nous avons adopté la définition générale $k_z =^{def} k_z(\kappa)$ et $k_{0z} =^{def} k_z(\kappa_0)$.

pour la polarisation horizontale, et pour la polarisation verticale² :

$$\begin{aligned}
A_\alpha(\kappa, \kappa', \kappa_0) = & -\frac{k_0}{k_z} \left(\frac{k_1^2 - k_0^2}{k_0^2 k_{1z} + k_1^2 k_z} \right) \left(\frac{1}{k_0^2 k_{1zi} + k_1^2 k_{0z}} \right) k_1^2 k_0 k_z k_{0z} (k_{1zi} + k_{1z}) \\
& - \frac{2k_0}{k_z} \left(\frac{k_1^2 - k_0^2}{k_0^2 k_{1z} + k_1^2 k_z} \right) \left(\frac{1}{k_0^2 k_{1zi} + k_1^2 k_{0z}} \right) k_z k_{0z} \\
& \left[\left(\frac{1}{k_1^2 k'_z + k_0^2 k'_{1z}} \right) \left(\frac{k_1^2}{k_0} (k_1^2 - k_0^2) \kappa \kappa_0 \kappa'^2 \right. \right. \\
& - \kappa \kappa' k_0 k_1^2 (k'_{1z} + k'_z) k_{1zi} - \kappa_0 \kappa' k_0 k_1^2 (k'_{1z} + k'_z) k_{1z} \\
& \left. \left. - k_0 k'_z k'_{1z} (k_1^2 - k_0^2) k_{1z} k_{1zi} \right) \right]. \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Ces relations peuvent être utilisées pour déterminer les coefficients de diffusion pour le cas d'une surface très conductrice ($n = \sqrt{\epsilon} \gg 1$).

²En interchangeant κ et κ_0 avec la variable muette κ' , les auteurs [71] vérifient la propriété de réciprocité dans les différentes représentations de $A_\alpha(\kappa, \kappa', \kappa_0)$.

Annexe B

Evaluation du pôle de l'impédance effective de surface $Z_{v1}(\kappa)$ pour le cas Neumann

Cette annexe présente une façon de s'affranchir du pôle apparaissant dans l'intégrande de l'impédance effective de surface $Z_{v1}(\kappa)$ dans le cas de la condition aux limites de Neumann (équation (2.30)), donnée par

$$Z_{v1}(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa'}{k_0 k_z(\kappa')} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa'). \quad (\text{B.1})$$

En écrivant $Z_{v1}(\kappa) = \alpha_{v1}(\kappa) + j\beta_{v1}(\kappa)$, on obtient, à partir de (2.30)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{v1}(\kappa) = \int_{-k_0}^{+k_0} \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{k_0^2 - \kappa'^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa') \\ \beta_{v1}(\kappa) = - \int_{-\infty}^{-k_0} \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{\kappa'^2 - k_0^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa') \\ \quad - \int_{k_0}^{\infty} \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{\kappa'^2 - k_0^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa') \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

Pour $\kappa' = \pm k_0$, le dénominateur de l'intégrande s'annule, impliquant que l'intégrande diverge. Afin de remédier à cet effet, nous utilisons un changement de variable. Pour plus d'aisance, nous pouvons séparer la partie réelle $\alpha_{v1}(\kappa)$

$$\begin{aligned} \alpha_{v1}(\kappa) &= \int_{-k_0}^0 \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{k_0^2 - \kappa'^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa') \\ &\quad + \int_0^{k_0} \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{k_0^2 - \kappa'^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa'). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En notant que $\sqrt{k_0^2 - \kappa'^2} = \sqrt{(k_0 - \kappa')(k_0 + \kappa')}$, nous faisons le changement de variable $u_1 = \sqrt{k_0 + \kappa'}$ (le pôle est $\kappa' = -k_0$) pour la première intégrale dans l'équation (B.3) et $u_2 = \sqrt{k_0 - \kappa'}$ (le pôle est $\kappa' = +k_0$) dans la seconde intégrale de (B.3). Ceci amène au résultat suivant

$$\begin{aligned} \alpha_{v1}(\kappa) &= \sum_{s=\pm} \int_0^{\sqrt{k_0}} \frac{du}{k_0 \sqrt{-u^2 + 2k_0}} \\ &\quad \times [k_0^2 + s\kappa(k_0 - u^2)]^2 \tilde{W}(\kappa + s[k_0 - u^2]). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Considérons maintenant la partie imaginaire $\beta_{v1}(\kappa)$

$$\begin{aligned} \beta_{v1}(\kappa) = & - \int_{-\infty}^{-k_0} \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{\kappa'^2 - k_0^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa') \\ & - \int_{k_0}^{\infty} \frac{d\kappa'}{k_0 \sqrt{\kappa'^2 - k_0^2}} (k_0^2 - \kappa\kappa')^2 \tilde{W}(\kappa - \kappa'). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La limite d'intégration de la première intégrale dans (B.5) peut être exprimée de la même manière que la seconde en utilisant la transformation $\kappa' \rightarrow -\kappa'$. En posant $u = \sqrt{\kappa'^2 - k_0^2}$, le pôle $\sqrt{\kappa'^2 - k_0^2}$ est substitué par $\sqrt{u^2 + k_0^2}$, où la variable $u \in [0; +\infty[$. Comme pour la partie réelle, la partie imaginaire s'exprime de la manière suivante

$$\begin{aligned} \beta_{v1}(\kappa) = & - \sum_{s=\pm} \int_0^{+\infty} \frac{du}{k_0 \sqrt{k_0^2 + u^2}} \\ & \times \left[k_0^2 + s\kappa \sqrt{k_0^2 + u^2} \right]^2 \tilde{W} \left(\kappa + s\sqrt{k_0^2 + u^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Il est clairement observable que dans l'intégrande de $Z_{v1}(\kappa)$, il n'y a pas de pôle traversé ou approché. Il est également intéressant de noter que pour la partie réelle de (2.30), pour un spectre des hauteurs Gaussien (2.45) et $\kappa = 0$ (correspondant à une incidence normale), l'intégrale peut s'exprimer sous la forme fermée (*closed-form*) suivante

$$\alpha_{v1}(\kappa) = \xi \sigma_h^2 k_0^2 \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} I_0 \left(\frac{\xi^2}{2} \right), \quad (\text{B.7})$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro, et $\xi = k_0 l_c / 2$.

Annexe C

Quelques notions sur les diagrammes de Feynmann

L'approche par les diagrammes de Feynmann, formalisme issu de la théorie quantique des champs, a été adaptée pour l'étude de la propagation des ondes en milieu aléatoire [106] et à la diffusion des ondes par des surfaces rugueuses par Freilikher et Fuks [111].

L'idée dans cette annexe est de ne présenter qu'une partie de la théorie, sans entrer dans les détails. Soit la série de Neumann obtenue à partir du développement formel $G = \sum_{n=0}^{\infty} (G^{(0)}V)^n G^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = & G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \\
 & + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \\
 & + \dots + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) \\
 & G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \dots V(\mathbf{r}_n) G^{(0)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_0) + \dots
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Représentons maintenant cette série par des diagrammes :

- La fonction de Green en espace libre $G^{(0)}$ est représentée par une ligne.
- L'opérateur aléatoire (ou potentiel de surface) $V(\mathbf{r}_k)$ est représenté par un point.

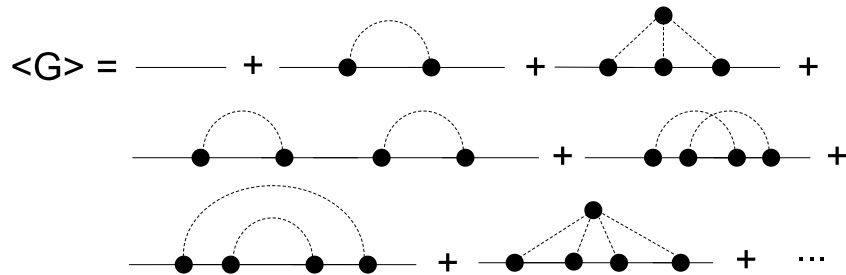


FIG. C.1 – Développement en diagrammes de la moyenne statistique de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ de l'expression (C.1).

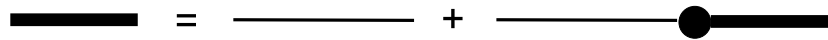
Le champ cohérent $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ est déterminé à partir de la moyenne statistique de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ où, par exemple, le deuxième graphe dans le terme de droite de la figure (C.1) a pour expression :

$$\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) \rangle \tag{C.2}$$

et le quatrième graphe du terme de droite :

$$\int dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times G^{(0)}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) G^{(0)}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0) \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) \rangle \langle V(\mathbf{r}_3) V(\mathbf{r}_4) \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Un graphe dont on ne peut diviser les parties sans casser la connection représentant la corrélation entre les opérateurs aléatoires $V(\mathbf{r}_k)$ et $V(\mathbf{r}_{k+1})$ est un graphe dit “irréductible” ou “fortement connecté”. C’est par exemple le cas du deuxième graphe du terme de droite de la figure (C.1). Les autres graphes, comme le quatrième du terme de droite de la figure (C.1), sont dits “réductibles” ou “faiblement connectés”.



$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 M \langle G \rangle$$

FIG. C.2 – Représentation de l’équation de Dyson au premier ordre.

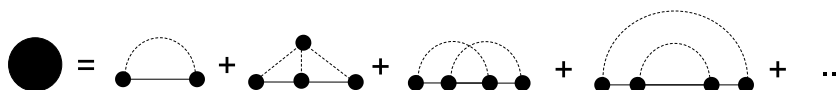


FIG. C.3 – Représentation de l’opérateur de masse de l’équation de Dyson.

L’approximation de Bourret¹ permet de passer de l’équation non linéaire exacte de Dyson [204]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int dr_1 dr_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle \mathcal{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (\text{C.4})$$

à l’expression

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int dr_1 dr_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (\text{C.5})$$

Notons que les graphes faiblement connectés peuvent être obtenus en connectant des graphes fortement connectés entre eux. C’est-à-dire que l’on pourrait connecter entre eux les deuxième et quatrième graphes du terme de droite de la figure (C.1). Ceci nous mène à la constatation suivante [101], [71] : l’itération d’une équation opérateur ou d’une équation intégrale, où l’opérateur est représenté par un graphe irréductible, reproduira des graphes réductibles. Par conséquent, lorsque nous construisons une équation intégrale ou une équation opérateur, seuls les graphes irréductibles ont besoin d’être représentés. On peut donc définir un opérateur, dit opérateur de masse (figure C.3) dans la théorie des champs quantiques, constitué uniquement de graphes irréductibles, et dont l’itération reproduira les graphes réductibles de la figure (C.1).

¹Cette approximation est aussi connue sous le nom d’approximation bilocale [71] ou d’approximation lissée au premier ordre. La validité de cette approximation est mise en évidence dans [101] où il est démontré que la convergence de la nouvelle série approchée s’opère lorsque un critère, appelé nombre de Reynolds R , incluant entre autres l’opérateur $V(\mathbf{r})$, vérifie $R \ll 1$. Ce critère est une condition nécessaire et suffisante pour la validité de l’approximation lissée au premier ordre. L’approximation de Bourret est basée sur la supposition suivante que l’opérateur de Masse représenté sur la figure C.3 peut s’écrire au premier ordre par $\langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) \rangle \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rangle$. Elle a également été étudiée par Kraichnan [203].

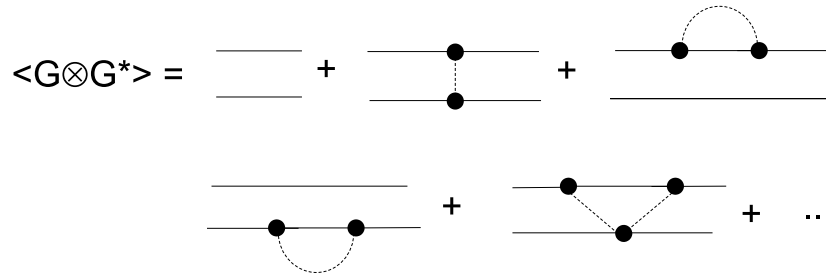


FIG. C.4 – Développement en diagrammes de la moyenne statistique d’ordre deux (l’intensité) du champ $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ à partir de l’expression (C.1).

Pour l’intensité moyenne du champ, on peut reprendre le raisonnement de l’équation de Dyson. Par exemple, le deuxième graphe du terme de droite du développement de la figure (C.4) est dit irréductible ou fortement connecté ; le troisième graphe est dit faiblement connecté ou réductible.

De même que pour l’équation de Dyson ci-dessus, nous pouvons définir un opérateur regroupant la somme de tous les graphes fortement connectés. Il est appelé opérateur intensité, analogue à l’opérateur de masse de l’équation de Dyson. L’équation de Bethe-Salpeter [131] est une équation exacte pour le

$$\langle G \otimes G^* \rangle = \text{---} + \text{---} \blacksquare \langle G \otimes G^* \rangle$$

FIG. C.5 – Représentation de la partie intégrale de l’équation de Bethe-Salpeter (deuxième membre de droite dans l’équation 2.35).

moment d’ordre deux du champ. L’opérateur intensité est sous la forme d’une série. Elle doit être approximée à un ordre fini pour obtenir une expression plus aisée à utiliser. Une approximation commune est connue sous le nom d’approximation en “échelle”, et retient seulement le premier terme de la série de la figure C.6 :

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle \approx \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}'_1) \rangle \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_0) \rangle. \quad (\text{C.6})$$

La forme exacte de l’équation de Bethe-Salpeter est donnée en annexe D, expression (2.93).

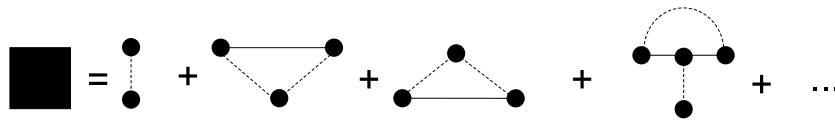


FIG. C.6 – L’opérateur intensité de la fonction de cohérence mutuelle incohérente Γ_f .

Ces développements nous permettent donc d’obtenir une forme approximative du champ cohérent et de l’intensité moyenne du champ. Le premier nous permettra de déterminer le nouveau coefficient de réflexion $R(\kappa)$ pour une surface rugueuse. Le second nous donnera l’intensité moyenne du champ intervenant dans la relation du coefficient de diffusion $\sigma(\kappa_1, \kappa_0)$. Nous pourrions pousser l’étude jusqu’à l’approximation “croisée”. C’est la théorie dite cyclique [38], qui permet de prendre en compte la rétro-diffusion (l’excitation de plasmons de surface rencontrés en optique par exemple).

Le lecteur est vivement conseillé de consulter le résumé, traitant de la propagation d’ondes en milieu

aléatoire (dont la diffusion multiple par une surface rugueuse, cadre de l'étude, en est dérivée), présenté dans [124]. L'auteur y fait part également de l'étude de la convergence de la série, qui est non triviale.

Annexe D

Equation de Bethe-Salpeter

Dans cette annexe, l'intensité incohérente du champ diffusé pour la polarisation verticale dans le cas d'une surface très conductrice est calculée, afin d'en déduire le coefficient de diffusion bistatique. Le cas Neumann s'en déduit. La démarche pour la polarisation horizontale est similaire. Soit l'équation pour l'intensité incohérente au premier ordre (2.99) :

$$\begin{aligned} \Gamma_f = & \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'_1 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_1) \rangle \left\langle \left(\zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_0 \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right. \\ & \times \left. \left(\zeta'_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1'^2} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial x_1'} \frac{\partial}{\partial x_1'} + \alpha_0 \zeta'_1 \frac{\partial}{\partial z_1'} \right) \right\rangle \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_0) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Dans la suite de la démonstration, nous posons par simplicité, dans (2.97) et (2.98), les nombres d'onde verticaux suivants :

$$\begin{cases} k_z(\kappa) = k_z, \\ k_z(\kappa_1) = k_{1z}. \end{cases}$$

De la même manière que pour l'équation de Dyson, les dérivées du potentiel $V(\mathbf{r}_1)$ opèrent sur $\langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle$ (équation (2.98)), et celles de $V(\mathbf{r}'_1)$ opèrent sur $\langle G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_0) \rangle$, conduisant à¹ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_f = & \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x'_1 \left[\frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}(\kappa, z, z_1) e^{i\kappa(x-x_1)} \mathrm{d}\kappa \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int \tilde{G}(\kappa', z', z'_1) e^{i\kappa'(x'-x'_1)} \mathrm{d}\kappa' \right]^* \times \\
& \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa''(x_1-x'_1)} \mathrm{d}\kappa'' \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_{1z}} \left\{ \left((-ik_{1z})^2 - (i\kappa_1 \kappa_{1\zeta 1}) \right) \left[e^{ik_{1z}|z_1-z_0|} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. R(\kappa_1) e^{ik_{1z}(z_0+z_1)} \right] + (-i\alpha_0 k_{1z}) \left[e^{ik_{1z}|z_1-z_0|} - R(\kappa_1) e^{ik_{1z}(z_0+z_1)} \right] \right\} \right. \\
& \left. \times e^{i\kappa_1(x_1-x_0)} \mathrm{d}\kappa_1 \right] \times \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_{1z}} \left\{ \left((-ik'_{1z})^2 - (i\kappa'_1 \kappa'_{1\zeta' 1}) \right) \left[e^{ik'_{1z}|z'_1-z'_0|} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z}(z'_0+z'_1)} \right] + (-i\alpha_0 k'_{1z}) \left[e^{ik'_{1z}|z'_1-z'_0|} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z}(z'_0+z'_1)} \right] \right\} e^{i\kappa'_1(x'_1-x'_0)} \mathrm{d}\kappa'_1 \right]^* . \tag{D.2}
\end{aligned}$$

De la même manière que pour la résolution de l'équation de Dyson, nous pouvons dire que la moyenne statistique intervenant dans les fonctions de Green $\langle G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \rangle$ de (D.3), s'effectue sur le coefficient de réflexion $R(\kappa)$. En procédant de la même manière que pour la résolution de l'équation de Dyson, inspirée de Itô et Ishimaru, les dérivées sont d'abord effectuées, et les hauteurs $z_{i,j}$ des points sur la surface rugueuse sont ramenées sur le plan moyen $z = 0$. Ceci conduit à :

$$\begin{aligned}
\Gamma_f = & \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x'_1 \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_z} \left[e^{ik_z z} + R(\kappa) e^{ik_z z} \right] e^{i\kappa(x-x_1)} \mathrm{d}\kappa \right] \times \\
& \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_z} \left[e^{ik'_z z'} + R(\kappa') e^{ik'_z z'} \right] e^{i\kappa'(x'-x'_1)} \mathrm{d}\kappa' \right]^* \frac{1}{2\pi} \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa''(x_1-x'_1)} \mathrm{d}\kappa'' \times \\
& \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_{1z}} \left\{ \left((-ik_{1z})^2 - (i\kappa_1 \kappa_{1\zeta 1}) \right) \left[e^{ik_{1z}z_0} + R(\kappa_1) e^{ik_{1z}z_0} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. (-i\alpha_0 k_{1z}) \left[e^{ik_{1z}z_0} - R(\kappa_1) e^{ik_{1z}z_0} \right] \right\} e^{i\kappa_1(x_1-x_0)} \mathrm{d}\kappa_1 \right] \times \\
& \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_{1z}} \left\{ \left((-ik'_{1z})^2 - (i\kappa'_1 \kappa'_{1\zeta' 1}) \right) \left[e^{ik'_{1z}z'_0} + R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z}z'_0} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. (-i\alpha_0 k'_{1z}) \left[e^{ik'_{1z}z'_0} - R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z}z'_0} \right] \right\} e^{i\kappa'_1(x'_1-x'_0)} \mathrm{d}\kappa'_1 \right]^* . \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant effectuer un changement de coordonnées, permettant de réduire le nombre d'intégrations dans Γ_f . Ce changement de coordonnées est illustré figure D.1 (l'angle d'incidence θ_i est noté θ_1 , et l'angle de diffusion θ_s est noté θ_2).

¹Les variables $\kappa_{1\zeta 1}$ et $\kappa'_{1\zeta' 1}$ ont été obtenues lorsque nous avons effectué les dérivées partielles $\partial\zeta_1/\partial x_1$ au point \mathbf{r}_1 et $\partial\zeta'_1/\partial x'_1$ au point \mathbf{r}'_1 des potentiels de surface $V(\mathbf{r}_1)$ et $V(\mathbf{r}'_1)$. Le nombre d'onde $\kappa_{1\zeta 1}$ correspond au nombre d'onde κ'' du spectre des hauteurs $\tilde{W}(\kappa'')$. La notation en $\kappa_{1\zeta 1}$ a été choisie pour plus de clarté et ne pas confondre avec la notation en prime (ζ') si κ'' était utilisé.

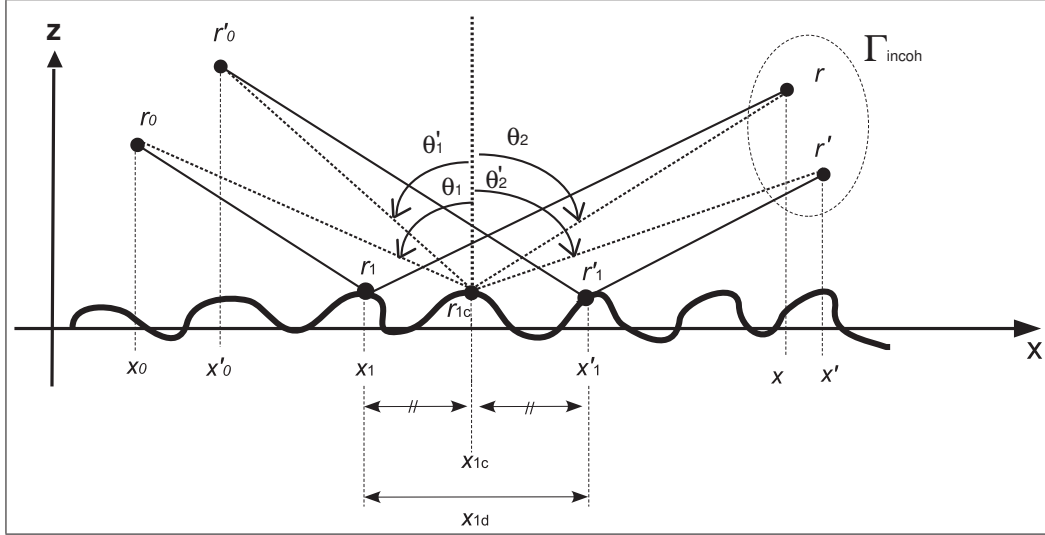


FIG. D.1 – Représentation de la transformation de coordonnées.

La transformation nous donne :

$$\kappa_c = \frac{\kappa + \kappa'}{2}, \quad x_{1c} = \frac{x_1 + x'_1}{2}, \quad \kappa_d = \kappa - \kappa', \quad x_{1d} = x_1 - x'_1. \quad (\text{D.4})$$

De la même manière :

$$\kappa_{1c} = \frac{\kappa_1 + \kappa'_1}{2}, \quad \kappa_{1d} = \kappa_1 - \kappa'_1. \quad (\text{D.5})$$

En regroupant les termes en exponentielle, Γ_f s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_f = & \int dx_1 dx'_1 \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int d\kappa \frac{i}{2k_z} \left[e^{ik_z z} + R(\kappa) e^{ik_z z} \right] \right] \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int d\kappa' \frac{i}{2k'_z} \left[e^{ik'_z z'} + R(\kappa') e^{ik'_z z'} \right] \right]^* \frac{e^{i\kappa(x-x_1)} e^{-i\kappa'(x'-x'_1)}}{e^{-i\kappa x_1 + i\kappa' x'_1} e^{i\kappa x - i\kappa' x'}} \right\} \times \\ & \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_{1z}} \left\{ \left((-ik_{1z})^2 - (i\kappa_1 \kappa_{1\zeta_1}) \right) \left[e^{ik_{1z} z_0} + R(\kappa_1) e^{ik_{1z} z_0} \right] + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (-i\alpha_0 k_{1z}) \left[e^{ik_{1z} z_0} - R(\kappa_1) e^{ik_{1z} z_0} \right] d\kappa_1 \right] \right\} \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_{1z}} \left\{ \left((-ik'_{1z})^2 - (i\kappa'_1 \kappa'_{1\zeta'_1}) \right) \left[e^{ik'_{1z} z'_0} + R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z} z'_0} \right] + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (-i\alpha_0 k'_{1z}) \left[e^{ik'_{1z} z'_0} - R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z} z'_0} \right] d\kappa'_1 \right] \right\}^* \frac{e^{i\kappa_1(x_1-x_0)} e^{-i\kappa'_1(x'_1-x'_0)}}{e^{-i\kappa_1 x_1 - i\kappa'_1 x'_1} e^{-i\kappa_1 x_0 + i\kappa'_1 x'_0}} \right\} \times \\ & \frac{1}{2\pi} \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa''(x_1-x'_1)} d\kappa''. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Après de simples manipulations, nous avons :

$$\begin{cases} e^{-i\kappa x_1 + i\kappa' x'_1} = e^{-i\kappa_c x_{1d} - i\kappa_d x_{1c}} \\ e^{i\kappa_1 x_1 - i\kappa'_1 x'_1} = e^{i\kappa_{1c} x_{1d} + i\kappa_{1d} x_{1c}} \\ e^{i\kappa''(x_1 - x'_1)} = e^{i\kappa'' x_{1d}}. \end{cases}$$

Le changement de variables² nécessite le calcul du déterminant du Jacobien dont la définition est $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$. Les éléments d'intégration dx_1 et dx'_1 deviennent :

$$\frac{\partial(x_{1c}, x_{1d})}{\partial(x_1, x'_1)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{1c}} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_{1c}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{1d}} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_{1d}} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial x_1}{\partial x_{1c}} \frac{\partial x'_1}{\partial x_{1d}} - \frac{\partial x_1}{\partial x_{1d}} \frac{\partial x'_1}{\partial x_{1c}} \right| = 1,$$

d'où

$$dx_1 dx'_1 = dx_{1d} dx_{1c}. \quad (\text{D.8})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_f = & \int dx_{1c} dx_{1d} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int d\kappa \frac{i}{2k_z} \left[e^{ik_z z} + R(\kappa) e^{ik_z z} \right] \right] \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int d\kappa' \frac{i}{2k'_z} \left[e^{ik'_z z'} + R(\kappa') e^{ik'_z z'} \right] \right]^* e^{-i\kappa_c x_{1d} - i\kappa_d x_{1c}} e^{i\kappa x - i\kappa' x'} \right\} \times \\ & \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_{1z}} \left\{ \left((-ik_{1z})^2 - (i\kappa_1 \kappa_{1\zeta 1}) \right) \left[e^{ik_{1z} z_0} + R(\kappa_1) e^{ik_{1z} z_0} \right] + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (-i\alpha_0 k_{1z}) \left[e^{ik_{1z} z_0} - R(\kappa_1) e^{ik_{1z} z_0} \right] d\kappa_1 \right] \right\} \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_{1z}} \left\{ \left((-ik'_{1z})^2 - (i\kappa'_1 \kappa'_{1\zeta 1}) \right) \left[e^{ik'_{1z} z'_0} + R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z} z'_0} \right] + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (-i\alpha_0 k'_{1z}) \left[e^{ik'_{1z} z'_0} - R(\kappa'_1) e^{ik'_{1z} z'_0} \right] d\kappa'_1 \right] \right\}^* e^{i\kappa_{1c} x_{1d} + i\kappa_{1d} x_{1c}} e^{-i\kappa_1 x_0 + i\kappa'_1 x'_0} \right\} \times \\ & \frac{1}{2\pi} \int \tilde{W}(\kappa'') e^{i\kappa'' x_{1d}} d\kappa''. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Par définition, la fonction de Dirac s'écrit :

$$\delta(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \kappa x} dx, \quad (\text{D.10})$$

²La transformation de variables pour une double intégrale a pour définition [21]

$$\iint_{(D)} f(x_1, x'_1) dx_1 dx'_1 = \iint_{(\Gamma)} f[\varphi(x_{1c}, x_{1d}), \psi(x_{1c}, x_{1d})] \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x_{1c}, x_{1d})} \right| dx_{1c} dx_{1d}, \quad (\text{D.7})$$

où les fonctions $x_1 = \varphi(x_{1c}, x_{1d}) = x_{1c} + \frac{1}{2}x_{1d}$ et $x'_1 = \psi(x_{1c}, x_{1d}) = x_{1c} - \frac{1}{2}x_{1d}$, et les dérivées partielles sont continues à l'intérieur du domaine d'intégration (Γ) .

impliquant que

$$\int e^{-i\kappa_c x_{1d}} e^{i\kappa_{1c} x_{1d}} e^{i\kappa'' x_{1d}} \mathbf{d}x_{1d} = \int e^{(-\kappa_c + \kappa_{1c} + \kappa'') i x_{1d}} \mathbf{d}x_{1d} = 2\pi \delta(-\kappa_c + \kappa_{1c} + \kappa''). \quad (\text{D.11})$$

L'argument de la fonction de Dirac est imposé comme tel :

$$\delta(-\kappa_c + \kappa_{1c} + \kappa'') = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa'' + \kappa_{1c} - \kappa_c = 0 \Rightarrow \kappa'' = \kappa_c - \kappa_{1c} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En intégrant d'abord (D.9) selon x_{1d} , puis selon κ'' , on obtient $\tilde{W}(\kappa'')$, que l'on peut réécrire sous la forme $\tilde{W}(\kappa_c - \kappa_{1c})$. Il est utile pour le développement de rappeler aussi que l'on avait posé au départ $\kappa_{1\zeta 1} = \kappa''$.

Nous avons montré dans (2.78) que l'on pouvait écrire les termes $\frac{1+R(\kappa)}{2} = \frac{1}{1+\eta_v(\kappa)}$ et $\frac{1-R(\kappa)}{2} = -\frac{\eta_v(\kappa)}{1+\eta_v(\kappa)}$. Ainsi, Γ_f se réécrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_f = & \int \mathbf{d}x_{1c} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int \mathbf{d}\kappa \frac{i}{2k_z} \left[\frac{2}{1+\eta_v(\kappa)} e^{ik_z z} \right] e^{+i\kappa x} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int \mathbf{d}\kappa' \frac{i}{2k'_z} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left[\frac{2}{1+\eta_v(\kappa')} e^{ik'_z z'} \right] e^{+i\kappa' x'} \right]^* e^{-i(\underbrace{\kappa - \kappa'}_{\kappa_d}) x_{1c}} 2\pi \delta(-\kappa_c + \kappa_{1c} + \kappa'') \right\} \times \\ & \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k_{1z}} \left\{ \left((-ik_{1z})^2 - (i\kappa_1 \kappa_{1\zeta 1}) \right) \left[\frac{2}{1+\eta_v(\kappa_1)} e^{ik_{1z} z_0} \right] + \right. \right. \right. \\ & (-i\alpha_0 k_{1z}) \left. \left. \left[2 \frac{\eta_v(\kappa_1)}{1+\eta_v(\kappa_1)} e^{ik_{1z} z_0} \right] e^{-i\kappa_1 x_0} \mathbf{d}\kappa_1 \right] \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{i}{2k'_{1z}} \left\{ \left((-ik'_{1z})^2 - (i\kappa'_1 \kappa'_{1\zeta 1}) \right) \left[\frac{2}{1+\eta_v(\kappa'_1)} e^{ik'_{1z} z'_0} \right] + \right. \right. \right. \\ & (-i\alpha_0 k'_{1z}) \left. \left. \left[2 \frac{\eta_v(\kappa_1)}{1+\eta_v(\kappa_1)} e^{ik'_{1z} z'_0} \right] e^{-i\kappa'_1 x'_0} \mathbf{d}\kappa'_1 \right] e^{+i(\underbrace{\kappa_1 - \kappa'_1}_{\kappa_{1d}}) x_{1c}} \right\} \times \\ & \left. \frac{1}{2\pi} \int \tilde{W}(\kappa'') \mathbf{d}\kappa'' \right. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

La fonction de la forme :

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{d}\kappa \frac{1}{1+\eta_v(\kappa)} e^{ik_z(\kappa)z + i\kappa x} \quad (\text{D.13})$$

est évaluée en champ lointain (pour $\|\mathbf{k}_0 \mathbf{r}\| \gg 1$) à l'aide de la méthode du point selle, et devient

$$F(r, \theta) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+\eta_v(k_0 \sin \theta)} k_0 \cos \theta \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{ik_0 r - i\pi/4}, \quad (\text{D.14})$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$F(r, \theta) \approx \frac{-2ik_0 \cos \theta}{1+\eta_v(k_0 \sin \theta)} G^{(0)}(r), \quad (\text{D.15})$$

où $G^{(0)}(r) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{ik_0 r - i\pi/4}$ et se trouve être la fonction de Green en espace libre, dans l'approximation du champ lointain. De même, on peut écrire

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int d\kappa \frac{\eta_v(\kappa)}{1 + \eta_v(\kappa)} e^{ik_z(\kappa)z + i\kappa x}, \quad (\text{D.16})$$

qui devient après la même évaluation :

$$F(r, \theta) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\eta_v(k_0 \sin \theta)}{1 + \eta_v(k_0 \sin \theta)} k_0 \cos \theta \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{ik_0 r - i\pi/4}, \quad (\text{D.17})$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$F(r, \theta) \approx \frac{-2ik_0 \cos \theta \eta_v(k_0 \sin \theta)}{1 + \eta_v(k_0 \sin \theta)} G^{(0)}(r). \quad (\text{D.18})$$

On pose, à partir de la figure D.1, les angles $\theta_s \equiv \theta_2$, $\theta_i \equiv \theta_1$, et les constantes de propagation $\kappa_0 = k_0 \sin \theta_i$ et $\kappa_1 = k_0 \sin \theta_s$. L'intensité incohérente Γ_f (D.12) peut finalement s'écrire sous la forme compacte suivante

$$\Gamma_f^{ff} = 2\pi \int dx_{1c} F(r_s, \theta_s) F^*(r'_s, \theta'_s) \tilde{W}(\theta_s, \theta'_s, \theta_i, \theta'_i) F(r_i, \theta_i) F^*(r'_i, \theta'_i), \quad (\text{D.19})$$

où r_i correspond à la distance entre le point source \mathbf{r}_0 et le point de la surface \mathbf{r}_{1c} , et r_s est la distance entre le point de la surface \mathbf{r}_{1c} et le point d'observation \mathbf{r} . La remarque est similaire pour les points en prime ($'$). On peut alors écrire :

$$F(r_i, \theta_i) \approx [\kappa_0(\kappa_1 - \kappa_0) - k_z^2(\kappa_0) - ik_z(\kappa_0)\alpha_0\eta_v(\kappa_0)] \frac{-2ik_z(\kappa_0)\eta_v(\kappa_0)}{1 + \eta_v(\kappa_0)} G^{(0)}(r_i), \quad (\text{D.20})$$

où $k_z(\kappa_0) = k_0 \cos \theta_i$ et $k_0 \sin \theta_i = \kappa_0$. De la même manière,

$$F(r_s, \theta_s) \approx \frac{-2ik_z(\kappa_1)}{1 + \eta_v(\kappa_1)} G^{(0)}(r_s). \quad (\text{D.21})$$

L'expression (D.19) est l'intensité diffusée Γ_f^{ff} en champ lointain (point d'observation très au dessus de la surface, et l'exposant ff signifie *far field*).

L'intensité mutuelle incohérente s'exprime en fonction du coefficient de diffusion comme [98], [205] :

$$\Gamma_f^{ff} = \int \frac{dx_{1c}}{2\pi} |G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 |G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)|^2 \sigma(\kappa_0, \kappa_1). \quad (\text{D.22})$$

Si l'on pose $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0$, nous avons dans ce cas, dans (D.19) $F(r_s, \theta_s) F^*(r'_s, \theta'_s) = |F(r_s, \theta_s)|^2$ et $F(r_i, \theta_i) F^*(r'_i, \theta'_i) = |F(r_i, \theta_i)|^2$. En identifiant alors avec (D.22), le coefficient de diffusion en champ lointain en polarisation verticale s'exprime comme :

$$\sigma_{vv}^{incoh}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{8\pi}{k_0} \frac{|\kappa_0(\kappa_1 - \kappa_0) - k_z^2(\kappa_0) - ik_z(\kappa_0)\alpha_0\eta_v(\kappa_0)|^2}{|1 + \eta_v(\kappa_0)|^2 |1 + \eta_v(\kappa_1)|^2} \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0), \quad (\text{D.23})$$

et en polarisation horizontale [133], à partir de Γ_f exprimé avec le potentiel perturbateur V_{TE} de (2.53), mais non donné dans ce manuscrit :

$$\sigma_{hh}^{incoh}(\kappa_1, \kappa_0) = \frac{8\pi}{k_0} \frac{|\beta_0(\kappa_0(\kappa_1 - \kappa_0) - k_z^2(\kappa_0))\eta_h(\kappa_0) - ik_z(\kappa_0)|^2}{|1 + \eta_h(\kappa_0)|^2 |1 + \eta_h(\kappa_1)|^2} |k_z(\kappa_1)|^2 \tilde{W}(\kappa_1 - \kappa_0). \quad (\text{D.24})$$

Annexe E

Potentiels scalaire et vectoriel

Les équations de Maxwell sont des équations différentielles vectorielles, et chacune de ces équations représente trois équations scalaires pour chacune des trois composantes orthogonales. Il est pratique de réduire le problème vectoriel en un problème scalaire avec quelques équations seulement. Nous supposons le milieu isotrope, homogène, et non dispersif. Par conséquent, μ et ε sont scalaires et constants. A partir de (1.4), et se rappelant que la divergence du rotationnel d'un vecteur est nulle, \mathbf{B} peut s'exprimer par le rotationnel d'un vecteur arbitraire \mathbf{A} , appelé *potentiel vecteur* :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (\text{E.1})$$

Dans l'équation de Maxwell (1.2), en remplaçant \mathbf{B} par l'expression du potentiel vecteur (E.1), et en utilisant la définition $C_1(\nabla \wedge \mathbf{U}_1) + C_2(\nabla \wedge \mathbf{U}_2) = \nabla \wedge (C_1 \mathbf{U}_1 + C_2 \mathbf{U}_2)$, il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \mathbf{A}) &= 0, \\ \nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Par définition, le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire est nul, le terme entre parenthèses de l'équation (E.2) peut alors être remplacé par le gradient d'une fonction scalaire arbitraire, appelée *potentiel scalaire* :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (\text{E.3})$$

Introduisons la condition de Lorentz, donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (\text{E.4})$$

où $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ et l'opérateur dérivation $\partial/\partial t = i\omega$.

Dans de nombreux articles, il est question du vecteur de Hertz. Celui-ci est en fait une forme combinée des potentiels scalaire et vecteur et de la condition de Lorentz. A partir de ce vecteur, toutes les composantes du champ peuvent être déduites. En effet, nous allons voir que celui-ci permet d'exprimer communément les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} . Soit le vecteur de Hertz électrique $\mathbf{\Pi}$ tel que :

$$\mathbf{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \varphi = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (\text{E.5})$$

de sorte qu'en intégrant (E.5) dans la condition de Lorentz (E.4), celle-ci s'en trouve satisfaite. De plus, combinons la densité de courant électrique \mathbf{J} et la densité de charge électrique ρ , de sorte que l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{E.6})$$

soit satisfaite, en introduisant \mathbf{P} :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{E.7})$$

Nous obtenons alors une seule équation vectorielle

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{\Pi} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad (\text{E.8})$$

à partir de laquelle tous les champs électromagnétiques peuvent être déduits, selon les expressions (E.3) et (E.1)

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{\Pi} = \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{\Pi} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \varepsilon_0 \nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \quad (\text{E.9})$$

Le vecteur \mathbf{P} est appelé le vecteur électrique de polarisation et est égal au moment du dipole par unité de volume de la source excitante. Dans le cas du régime harmonique, l'opérateur dérivation $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$, on a alors¹

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - k_0^2 \mathbf{\Pi} = \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{\Pi} - \frac{\mathbf{J}}{i\omega \varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \nabla \wedge \mathbf{\Pi} \quad (\text{E.10})$$

où $k_0^2 = \omega^2/c^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$.

¹L'opération $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi})$ s'écrit encore $\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}$, où $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ et $\mathbf{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$. Cependant, on peut tout aussi bien calculer les composantes de \mathbf{H} à l'aide de (E.10), et obtenir les composantes de \mathbf{E} à partir de la relation $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{i\omega \varepsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Annexe F

Evaluation de l'intégrale de l'onde de surface par la méthode du point selle pour une surface plane

Nous avons vu que le champ global s'écrit (3.42) :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G(R_1) + G(R_2) - 2P = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{-ikR_2}}{R_2} - 2P \right], \quad (\text{F.1})$$

avec :

$$P = \int_0^{+\infty} \frac{\eta_v^0(\kappa)}{1 + \eta_v^0(\kappa)} e^{-ik_z(z+z_0)} J_0(\kappa\rho) \frac{\kappa}{k_z} d\kappa \quad (\text{F.2})$$

où $J_0(\kappa\rho)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro, solution de l'équation d'onde réécrite en coordonnées cylindriques. Comme nous pouvons le constater, le terme P est exprimé en coordonnées cylindriques de par la présence de la fonction de Bessel. Ce choix est justifié par la suite pour l'évaluation de l'intégrale par la méthode du *point selle* (appelée *saddle-point* dans la littérature). $\eta_v(\kappa)$ dans (F.2) est donné, pour une surface plane, par :

$$\eta_v^0(\kappa) = \left(\frac{k_0}{k_z} \right) \left(\frac{Z_1}{Z_0} \right) = \left(\frac{k_0}{k_z} \right) Z_v^0(\kappa),$$

$$\text{où}^1 \left(Z_1/Z_0 \right) = Z_v^0(\kappa) = 1/n \left(1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Le terme $1 + \eta_v^0(\kappa)$ intervenant au dénominateur dans l'intégrale de P est appelé pôle de Sommerfeld². Nous cherchons ici à déterminer le pôle. Les dénominateurs des coefficients de réflexion en polarisations horizontale et verticale s'écrivent respectivement, à partir de (2.27) et (2.28)

$$\begin{cases} k_0 + k_z(\kappa) Z_h^0(\kappa) = 1 + \eta_h^0(\kappa) = 0 & \text{Cas TE} \\ k_z(\kappa) + k_0 Z_v^0(\kappa) = 1 + \eta_v^0(\kappa) = 0 & \text{Cas TM,} \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

¹ n étant l'indice de réfraction du milieu inférieur, dans notre cas (i.e. celui de la mer), donc n est complexe.

²Nous pouvons noter que le champ cohérent $\langle G \rangle$ pour la surface rugueuse se comporte exactement de la même manière que pour le cas de la fonction de Green pour la surface déterministe (i.e. le cas plan). La différence vient du fait que dans le cas de la surface rugueuse, l'impédance de surface Z_1 devient différente de ci-dessus, et nécessite d'être résolue par l'équation de Dyson. Une fois celle-ci achevée, nous obtenons un nouveau coefficient de réflexion, un nouveau pôle de Sommerfeld, et une nouvelle onde de Zenneck. Nous l'abordons dans la section 3.4.2.

où $Z_{v,h}^0(\kappa) = (Z_1/Z_0) = 1/n \left(1 - \left(\frac{\kappa}{k_0 n}\right)^2\right)^{1/2}$ et $k_z = k_0 \cos \theta$. Les conditions sur les impédances pour qu'un pôle existe sont :

$$1 + \eta_{v,h}^0(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{k_0}{k_z} Z_h^0(\kappa) = 0 & \text{Cas TE} \\ 1 + \frac{k_z}{k_0} Z_v^0(\kappa) = 0 & \text{Cas TM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_h^0(\kappa) = \frac{1}{\cos \theta} & \text{Cas TE} \\ Z_v^0(\kappa) = \cos \theta & \text{Cas TM} \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

Or $\cos \theta \leq 1$, et $|Z_{h,v}(\kappa)| < 1$. Dans le cas TE, il est peu probable qu'un pôle soit traversé, puisque $1/\cos \theta \geq 1$. En revanche, pour le cas TM, la polarisation verticale, il est fort probable que le pôle soit traversé. Nous en déduisons que le pôle est pris en considération par le contour d'intégration seulement dans le cas TM (Ishimaru [18] le démontre également pour les plasmons de surface, l'équivalent aux fréquences optiques de l'onde de surface de Zenneck en ondes radios). Il intervient donc dans l'évaluation de l'intégrale en polarisation verticale, et, comme nous allons le voir par la suite, il se trouve proche du point selle.

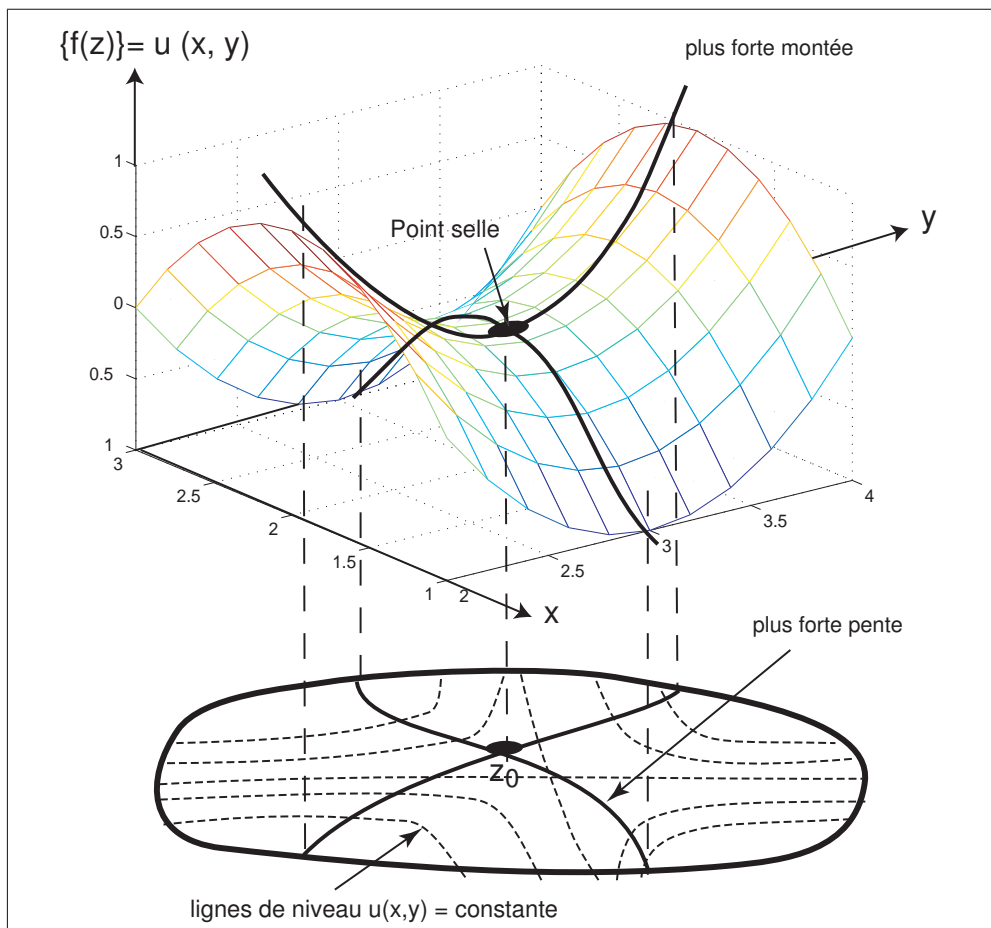


FIG. F.1 – Représentation d'une "fonction selle" (l'intégrale P) et de son "point selle".

$|Z_v^0(\kappa)| < 1$, autrement dit, $|n| \gg 1$, impliquant que la surface est très conductrice ; et nous nous placerons dans l'approximation du champ lointain donné par³ $k_0 R \gg 1$. La présence du pôle dans l'intégrale nous contraint à évaluer un nouveau contour d'intégration excluant celui-ci. Nous effectuons d'abord un changement de variables : $\kappa = k_0 \cos \alpha$, $k_z = k_0 \sin \alpha$ (voir figure 2.16) ; posons que

³ R représente la distance entre R_0 et R .

$Z_v^0(\kappa) = \sin \alpha_0$, où α_0 est complexe, et $J_0(\kappa\rho) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(\kappa\rho) + H_0^{(2)}(\kappa\rho)]$ où $H_0^{(1)}(\kappa\rho)$ et $H_0^{(2)}(\kappa\rho)$ sont les fonctions de Hankel de première et seconde espèce à l'ordre 0. On peut montrer d'après [174] que $H_0^{(2)}(\kappa\rho) = -H_0^{(1)}(-\kappa\rho)$. D'après la condition de rayonnement à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi - ik_0 \psi \right) = \mathcal{O}(1/\sqrt{r}). \quad (\text{F.5})$$

ψ peut être remplacé par les fonctions de Hankel ci-dessus puisqu'elles sont solutions de l'équation de propagation dont l'inconnue est ψ . Il vient alors que $H_0^{(2)}(\kappa\rho)$ ne vérifie pas la condition (F.5) pour $\kappa\rho \gg 1$ (condition de champ lointain). L'intégrale P a maintenant la forme suivante :

$$P = \frac{k_0 Z_v^0(\kappa)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 \cos \alpha e^{ik_0(z+z_0) \sin \alpha} H_0^{(1)}(k_0 \rho \cos \alpha)}{(k_0 \sin \alpha + k_0 \sin \alpha_0) k_0 \sin \alpha} d\alpha \frac{d\kappa}{d\alpha}. \quad (\text{F.6})$$

Les calculs pour aboutir à l'évaluation de l'intégrale P étant longs, nous présentons ci-après les principaux changements et approximations utilisés, avant de donner la version finale de l'évaluation de P :

$\frac{d\kappa}{d\alpha} = -k_0 \sin \alpha$ et $(\sin \alpha + \sin \alpha_0) = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \alpha_0}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right)$. Les bornes d'intégration deviennent $]-i\infty; \pi + i\infty[$ (α est alors complexe). La fonction de Hankel, pour l'approximation en champ lointain $k_0 r \gg 1$ ($\kappa\rho \gg 1$ est équivalent en incidences rasantes puisque dans ce cas $\kappa \approx k_0$), a pour expression asymptotique au premier terme $H_0^{(1)}(k_0 \rho \cos \alpha) \approx \left[\frac{2}{\pi k_0 \rho \cos \alpha} \right]^{1/2} \exp(ik_0 \rho \cos \alpha + i\frac{\pi}{4})$. En projetant maintenant ρ sur R_1 de la figure (3.2), nous avons le projeté horizontal, en coordonnées cylindriques $\rho = -R_1 \cos \beta$, de même pour $(z + z_0) = R_2 \sin \beta$; et en substituant $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ ainsi que $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$, la nouvelle formulation de P est :

$$P = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{Z_v^0(\kappa)}{2} \left(\frac{k_0}{2\pi\rho} \right)^{1/2} \int_{-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{(\cos \alpha)^{1/2} e^{-ik_0 R_1 \cos(\beta - \alpha)}}{\cos \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \alpha_0}{2} \right)} d\alpha. \quad (\text{F.7})$$

La distance émetteur-récepteur est grande devant les hauteurs de ces derniers par rapport à la surface $z = 0$ (voir figure 3.2). En conséquence, β tend vers 0. Dans la région où $(\beta - \alpha) \approx \pi$, l'exponentielle varie *lentement* dans l'intégrale. En effet, l'argument de l'exponentiel tend alors vers $k_0 R_1$ qui est très supérieur à 1. Or l'exponentiel croît de plus en plus lentement selon que son argument grandit. En dehors de cette région, elle varie *rapidement*, puisque $k_0 R_1 \cos(\beta - \alpha)$ est plus petit que $k_0 R_1$, donc l'exponentiel croît plus rapidement. Nous avons la forme :

$$P = \int_C g(z) e^{-ik_0 f(z)} dz = \int_C g(z) e^{-ik_0(u(x,y) + iv(x,y))} dz, \quad (\text{F.8})$$

qui est la forme type de l'intégrale se résolvant par la méthode du point selle (qui impose de développer $f(z)$ en série de Taylor et de déterminer le nouveau contour d'intégration). La fonction $f(z)$ est dérivable en un point z_s si

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_s + \Delta z) - f(z_s)}{\Delta z} \quad (\Delta z \text{ arbitraire et complexe}) \quad (\text{F.9})$$

existe [21]. Si elle est dérivable en tout point z du domaine \mathcal{D} , alors elle est dérivable sur \mathcal{D} . Elle est analytique en un point $z = z_s$ si elle est dérivable au voisinage de z_s . La méthode du point selle, où méthode de la plus forte pente, consiste à déterminer le contour d'intégration d'une telle fonction analytique afin de satisfaire les conditions suivantes [206] :

- le contour doit être choisi tel que $u(x, y)$ ait un maximum au point selle, et que l'amplitude de $f(z)$ décroît rapidement loin du point selle, pour négliger la contribution des régions lointaines par rapport aux régions proches du point selle,

– le contour doit passer par le point selle de façon à ce que $v(x, y)$ soit une constante.

La seconde condition mène au chemin de la plus forte pente et donne son nom à la méthode⁴. Les lignes pour lesquelles $u(x, y)$ est constante sont appelées lignes de niveau de la fonction $e^{f(z)}$. Sur ces lignes, $e^{f(z)}$ a une amplitude constante. Les conditions de Cauchy-Riemann⁵ garantissent que les courbes $u = \text{constante}$ sont orthogonales aux courbes $v = \text{constante}$.

L'intégrande (F.7) est évaluée au point selle, c'est-à-dire : si z_s est le point selle (ou valeur stationnaire), alors $\frac{d}{dz}f(z)|_{z=z_s} = 0$ (condition de Cauchy-Riemann) et $\frac{d^2}{dz^2}f(z)|_{z=z_s} \neq 0$. Ici, les conditions sont vérifiées pour $z_s = \pi$ puisque $\frac{d}{dz} \cos z_s = -\sin z_s = -\sin \pi = 0$ et $\frac{d^2}{dz^2} \cos(z_s)|_{z_s=\pi} \neq 0$. La partie dont la contribution est la plus importante dans l'intégrale est celle proche et contenant le point selle π , qui se trouve dans la région variant lentement. Donc le terme $\cos(\beta - \alpha)$ est le contributeur principal de l'intégrale. Nous pouvons le développer en série de Taylor autour du point selle :

$$f(z) = f(z_s) + \frac{1}{2}(z - z_s)^2 f''(z_s) + \dots \quad (\text{F.11})$$

Nous venons de montrer que la partie imaginaire de $f(z)$ est une constante donnant le chemin de la plus forte pente passant par le point selle z_s , alors

$$\Im m(f(z)) = \Im m(f(z_s)). \quad (\text{F.12})$$

L'intégrale (F.7) pour P est maintenant sous une forme autorisant l'utilisation de la méthode d'intégration du point selle. La technique usuelle est de déformer le contour (qui dans le cas présent longe l'axe des imaginaires négatifs, puis est le long de l'axe réel de 0 à π , puis le long de $\pi + i\infty$, ligne parallèle à l'axe des imaginaires positifs) en un contour de la plus forte pente. Ce nouveau contour doit permettre l'intégration sans couper un point de branche, connectant les surfaces de Riemann entre elles, ce qui aurait pour conséquence de basculer l'intégration sur une surface de Riemann impropre, ne satisfaisant alors plus les conditions de radiation [171], [207]. Posons $f(z) = \cos(\beta - \alpha)$. Nous avons alors $-i\Im m(f(z)) = -i\Im m(\cos(\beta - \alpha)) = -i[\Im m(f(z_s) + \frac{1}{2}(z - z_s)^2 f''(z_s))]$. Après quelques manipulations, il vient $-i\Im m(f(z_s)) = -i[i\Re e(\cos(\beta - \alpha))]$; puis en posant $\frac{1}{2}(z - z_s)^2 f''(z_s) = \tau^2$, et $\cos(\beta - \alpha) = +1$, et⁶ $(\cos \pi)'' = +1$ au point selle, on obtient $-i\Im m(f(z)) = 1 - i\tau^2 = -i \cos(\beta - \alpha)$ [208]. Après le changement de variable et détermination des nouvelles bornes d'intégration, une intégrale du type (que l'on retrouve dans P , équation (F.7), sans le dénominateur),

$$I = \int_{-i\infty}^{\pi+i\infty} G(\cos \alpha) e^{-ik_0 R_1 \cos(\beta-\alpha)} d\alpha, \quad (\text{F.13})$$

où $G(\cos \alpha)$ est une fonction non rationnelle, qui varie lentement à $\beta = \alpha$ s'écrit

$$I = (2i)^{1/2} e^{-ik_0 R_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\cos \alpha) e^{-k_0 R_1 \tau^2}}{\sqrt{1 - i\tau^2/2}} d\tau. \quad (\text{F.14})$$

Dans le nouveau contour (déformé), obtenu dans (F.14), il faut prendre les singularités de l'intégrande qui sont traversées. Dans le cas des pôles, $2i\pi$ multiplié à la somme des résidus est ajouté à la nouvelle intégrale [208]. L'étape finale dans cette procédure classique est de développer le terme $\frac{G(\cos \alpha) e^{-k_0 R_1 \tau^2}}{\sqrt{1 - i\tau^2/2}}$

⁴Une courbe $v = \text{constante}$ est partout tangentielle au gradient de u , ∇u . Ainsi, la courbe $v = \text{constante}$ est la courbe donnant le chemin de la plus forte pente à partir du point selle.

⁵Les conditions de Cauchy-Riemann sont données par [13] :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{F.10})$$

⁶Puisqu'au point selle $z_s = \pi$ nous avons, (F.12), $\Im m(f(z)) = \Im m(f(z_s))$, alors $f''(z_s) = (\cos \pi)''$.

en puissance de τ (série de Laurent), permettant ainsi à l'intégration d'être effectuée terme par terme. Le terme principal de ce développement asymptotique est

$$(2i\pi)^{1/2} e^{-ik_0 R_1} (k_0 R)^{-1/2} G(\cos \beta). \quad (\text{F.15})$$

Comme cela est souvent le cas, le point selle ne peut être séparé des pôles de l'intégrande. En effet dans le problème présent,

$$G(\cos \alpha) = \frac{(\cos \alpha)^{1/2}}{\cos\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\right)}, \quad (\text{F.16})$$

et, contrairement à l'équation (F.13) qui est valide pour un point selle isolé, ici $G(\cos \alpha)$ possède un pôle en $\alpha = \pi + \alpha_0$ qui est proche du point selle $\alpha = \beta \approx \pi$ puisque α_0 est petit. L'intégrande ne varie pas lentement près du point selle, comme c'était le cas pour (F.13), puisque le pôle $\cos\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right)$ intervient. Le terme en sinus au dénominateur n'intervient pas puisqu'au point selle, il vaut environ 1. L'intégrale à étudier devient

$$I = \int_{-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{e^{-ik_0 R_1 \cos(\beta-\alpha)}}{\cos\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right)} d\alpha. \quad (\text{F.17})$$

La modification nécessaire pour traiter le reste de l'intégrale (F.7) par la méthode du point selle a été développée par Van de Waerden [209] et Clemmow [210]. En faisant la déformation du contour usuelle via la substitution $\cos(\beta - \alpha) = 1 - i\tau^2$, l'intégrale P devient :

$$I = -2e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-ik_0 R_1} \sqrt{2} \cos \frac{(\beta - \alpha)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik_0 R_1 \tau^2}}{\tau^2 + i2 \left[\cos \frac{(\beta-\alpha)}{2} \right]^2} d\tau. \quad (\text{F.18})$$

Dans ce nouveau contour, nous pouvons voir qu'il ne traverse pas de pôles puisque⁷ τ^2 est positif. L'intégrale est maintenant du type :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x\tau^2}}{\tau^2 + c} d\tau. \quad (\text{F.19})$$

Par changement de variable et en utilisant des propriétés telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\tau^2} d\tau = \left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}$; $\text{erfc}(y_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y_0}^{+\infty} e^{-y^2} dy$, où $\text{erfc} = 1 - \text{erf}$ est la fonction erreur complémentaire, la forme finale de l'intégrale P est alors [149] :

$$P \approx i(\pi w)^{1/2} e^{-w} \text{erfc}(-i\sqrt{w}) \frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1}, \quad (\text{F.20})$$

que l'on peut écrire encore

$$P \approx i(\pi w)^{1/2} e^{-w} \text{erfc}(-i\sqrt{w}) G_p(R_1), \quad (\text{F.21})$$

où, sous incidences rasantes, l'on peut dire que $R_1 \approx R_2$, et où w est la distance numérique donnée par $-\frac{ik_0 R_2}{2} [Z_v^0(\kappa)]^2 \left(1 + \frac{z-h}{Z_v^0(\kappa) R_1}\right)^2$.

Il est intéressant ici de recenser les travaux de Collin [152] et Ishimaru [18]. L'étude menée par ces auteurs permet de connaître la constante de propagation κ_p de l'onde de surface. Le contour original, sur la surface de Riemann propre⁸, celle qui satisfait à la condition de radiation, est déformé en un chemin

⁷Puisqu'au point selle, $z_s = \pi$ alors $f''(z_s) > 0$, et $(z - z_s)^2 > 0$ donc $\tau^2 = (1/2)(z - z_s)^2 f''(z_s) > 0$ et $\tau^2 \in \mathbb{R}$ donc est sur l'axe des réels ; alors que $i2 \left[\cos \frac{(\beta-\alpha)}{2} \right]^2 \in \mathbb{C}$ et ne traverse pas l'axe des réels.

⁸L'intégrande contient le terme κ dans l'exponentielle. On peut se demander quelle solution choisir entre $\kappa = +\sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ et $\kappa = -\sqrt{k_0^2 - k_z^2}$. Dans la théorie de l'intégration de Riemann, lorsque κ est une fonction complexe de k_z , elle-même une variable complexe, chaque solution est représentée dans un plan complexe différent, appelé *surface de Riemann*. Dans le cadre des intégrales pour le calcul de la diffraction d'ondes, ces surfaces doivent physiquement obéir à la condition de radiation à l'infini pour opérer le contour d'intégration : lorsque $z \rightarrow \infty$, l'onde est atténuée si $|\exp(-ik_z z)| = \exp(\Im m k_z) z \rightarrow 0$, donc si $\Im m(k_z) < 0$. Lorsque cette condition est remplie, la surface de Riemann est dite *propre*. Les branches de coupure permettent de passer d'une surface de Riemann à l'autre.

de la plus forte pente (Steepest Descent Path : SDC sur la figure F.2) Le pôle α_p dans son plan complexe α est représenté sur la figure F.2, et donne la constante de propagation de l'onde de surface de Zenneck $\kappa_p = k_0 \sin \alpha_p$. Elle est aussi donnée par la relation (3.74).

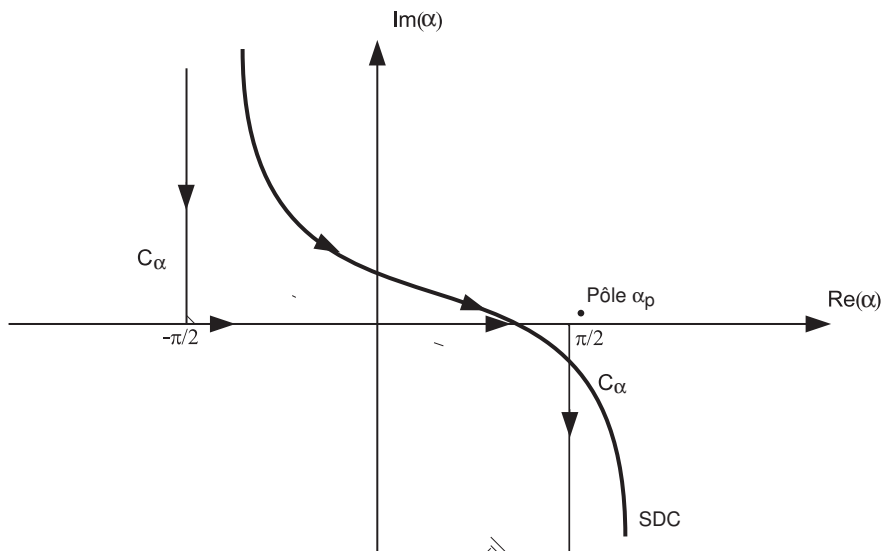


FIG. F.2 – Nouveau contour d'intégration pour l'évaluation du point selle : contour de la plus forte pente.

Les auteurs [152] et [18] obtiennent le pôle α_p dans le plan α , dans lequel $\kappa = k_0 \sin \alpha$. La distance numérique vaut $w = k_0 R_2 s_p^2 / 2$, avec $s_p = 2 \exp(-i\pi/4) \sin((\alpha_p - \theta)/2)$, et α_p s'écrit

$$\alpha_p \approx \pi/2 + 1/n. \quad (\text{F.22})$$

La distance numérique w est donnée par [18],

$$w = ik_0 R_2 \cos(\alpha_p - \theta) - ik_0 R_2, \quad (\text{F.23})$$

ce qui donne, en coordonnées cartésiennes,

$$w = ik_0 R_2 - i[\kappa_p(x - x_0) + k_{zp}(z + z_0)]. \quad (\text{F.24})$$

w représente la différence entre la constante de propagation pour l'onde de surface de Zenneck, et l'onde en espace libre. Lorsque le pôle α_p est situé en dessous du contour original d'intégration, l'onde de surface P a pour forme [18]

$$P \approx -i(\pi w)^{1/2} e^{-w} \operatorname{erfc}(i\sqrt{w}) G_p(R_1), \quad (\text{F.25})$$

et si le pôle est au-dessus du contour original d'intégration, ce qui est le cas ici,

$$P \approx i(\pi w)^{1/2} e^{-w} \operatorname{erfc}(-i\sqrt{w}) G_p(R_1). \quad (\text{F.26})$$

Maintenant que l'approximation pour l'onde de surface P a été obtenue, la distance numérique w à injecter dans l'argument de la fonction erfc est calculée à partir du pôle (3.70), permettant de déterminer k_{zp} et $\kappa_p = \sqrt{k_0^2 - k_{zp}^2}$ [169].

La démonstration reste identique dans le cas d'une surface rugueuse. On obtient alors la même fonction d'atténuation. La différence se trouve dans le pôle α_p , dont la position dans le plan complexe est modifiée

par la rugosité, donc la constante de propagation de l'onde de surface $\kappa_p = k_0 \sin \alpha_p$ est modifiée. L'observation importante faite dans [158], puis, plus récemment par [134], est que l'onde de surface de Zenneck n'a pas de contribution majeure dans le champ total, sauf peut-être pour de courtes distances, où $|w|$ est relativement petit. Collin [152], quant à lui, montre que le long de la surface, à grande distance de la source, le terme dominant dans l'expansion en série de la fonction erreur complémentaire a une dépendance en $1/R_2^2$. Il conclut alors qu'il n'y a pas de terme représentant l'onde de surface de Zenneck qui décroît comme $\frac{e^{\text{Re}(i\kappa_p r)}}{\sqrt{r}}$. En revanche, il retrouve l'onde de surface de Norton.

Le lecteur avisé qui désire se documenter plus amplement sur la méthode de la plus forte pente peut s'orienter vers [207], [211], [212], [213], [188], [214] ou encore [208].

Annexe G

Calcul de $\nabla_r \left[\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]$ pour la détermination de l'intensité totale $\Gamma(\mathbf{r})$

Dans cette annexe, le calcul de $\nabla_r \left[\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]$ est effectué, pour la détermination de l'intensité totale diffusée $\Gamma(\mathbf{r})$ par la surface rugueuse. En partant du vecteur de Poynting (3.82) et du principe de Huygens (3.84), on obtient :

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2Z_0 k_0} \left\{ \int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] \nabla_r \left(\int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] \right)^* \right\} \quad \forall \mathbf{r} \in V_0. \quad (\text{G.1})$$

Le terme $\nabla_r G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ a été obtenu dans (3.96). Il reste à déterminer sa dérivée au point d'observation \mathbf{r} , pour le point de la surface \mathbf{r}' fixé. A l'aide des relations (3.88), (3.89) et (3.93), on obtient pour la dérivée selon x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] &= \frac{ik_0}{4} \left(\left[\frac{H_1^{(1)}(k_0 u)}{k_0 u^2} - \frac{H_2^{(1)}(k_0 u)}{u} \right] \right. \\ &\quad \times (k_0(x-x')) \frac{-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))}{u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2}} \\ &\quad \left. + H_1^{(1)}(k_0 u) \left(\frac{-\zeta(x')u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2} - [-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))](x-x')}{u^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

De la même manière, on a pour la dérivée selon z

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] &= \frac{ik_0}{4} \left(\left[\frac{H_1^{(1)}(k_0 u)}{k_0 u^2} - \frac{H_2^{(1)}(k_0 u)}{u} \right] \right. \\ &\quad \times (k_0(z-\zeta(x'))) \frac{-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))}{u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2}} \\ &\quad \left. + H_1^{(1)}(k_0 u) \left(\frac{-u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2} - [-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))](z-\zeta(x'))}{u^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

A partir de la relation (3.95), on s'affranchit de la fonction de Hankel de seconde espèce $H_2^{(1)}(k_0u)$ en la remplaçant par

$$H_2^{(1)}(k_0u) = \frac{2H_1^{(1)}(k_0u)}{k_0u} - H_0^{(1)}(k_0u), \quad (\text{G.4})$$

on obtient, pour $\nabla_r [\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]]$

$$\begin{aligned} \nabla_r [\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{r'} G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= \frac{ik_0}{4} \left(\left[\frac{-H_1^{(1)}(k_0u)}{k_0u^2} + \frac{H_0^{(1)}(k_0u)}{u} \right] \right. \\ &\times (k_0 [(x-x') + (z-\zeta(x'))]) \frac{-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))}{u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2}} \\ &\quad \left. + H_1^{(1)}(k_0u) \left(u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2} [-\zeta(x') + 1] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{[-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))][(x-x') + (z-\zeta(x'))]}{u} \right) \right) \times \frac{1}{u^2}. \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Puisque l'intensité totale est donnée par [4]

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| S_s(\mathbf{r}), \quad (\text{G.6})$$

on peut écrire, en reprenant (G.1)

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}) &= \left[u \int_{S^+} dS' \left[\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left\{ u \int_{S^+} dS' \psi(\mathbf{r}') \frac{ik_0}{4} \left(\left[\frac{-H_1^{(1)}(k_0u)}{k_0u^2} + \frac{H_0^{(1)}(k_0u)}{u} \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \times (k_0 [(x-x') + (z-\zeta(x'))]) \frac{-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))}{u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2}} \\ &\quad \left. \left. + H_1^{(1)}(k_0u) \left(u\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2} [-\zeta(x') + 1] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{[-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))][(x-x') + (z-\zeta(x'))]}{u} \right) \right) \times \frac{1}{u^2} \right\}^* \\ &\quad \left. - \left[u \int_{S^+} dS' \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \frac{ik_0}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_0u)}{u} \frac{[-\zeta'(x')(x-x') + (z-\zeta(x'))]}{\sqrt{1+(\zeta'(x'))^2}} \right]^* \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Bibliographie

- [1] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Dover, New York, volume 2, 1945.
- [2] F. T. Ulaby, R. K. Moore, and A. K. Fung. *Theory of Microwave Remote Sensing, Active and Passive, Volume 2, Radar Remote Sensing and Surface Scattering and Emission Theory*. Artech House, Norwood, 1982.
- [3] L. Tsang, J.A. Kong, and R. Shin. *Scattering of electromagnetic waves : Theories and applications, volume 1*. Wiley series on remote sensing, 2000.
- [4] L. Tsang, J.A. Kong, and R. Shin. *Scattering of Electromagnetic Waves : Numerical simulations, volume 2*. Wiley series on remote sensing, 2000.
- [5] J. A. Ogilvy. *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*. Institute Of Physics publishing, 1991.
- [6] F.G. Bass and I.M. Fuks. *Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*. Pergamon, 1979.
- [7] J.P. Perez, R. Carles, and R. Fleckinger. *Electromagnétisme : Fondements et Applications, 4^e édition*. Dunod, 2002.
- [8] Jr. F.W. Byron and R.W. Fuller. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover publication, inc., New York, 1969.
- [9] V. Smirnov. *Cours de Mathématiques Supérieures (tome 3, 2e partie)*. Mir, 1989.
- [10] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light. 6th Edition*. Pergamon press, 1990.
- [11] M. Nieto-Vesperinas. *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. Wiley and Sons, Inc., 1991.
- [12] K. D. Ward, R. J. A. Tough, and S. Watts. *Sea Clutter Scattering : the K Distribution and Radar Performance*. The Institution of Engineering and Technology, London, 2006.
- [13] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic press inc., 3rd edition, 1985.
- [14] J. A. Stratton. *Théorie de l'Electromagnétisme*. Dunod, 1960.
- [15] A. G. Voronovich. *Wave Scattering from Rough Surfaces*. Springer Series on wave phenomena, Springer-Verlag, 1994.
- [16] P. Beckmann and A. Spizzichino. *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*. Oxford : Pergamon, 1963.
- [17] A. Soubret. *Diffusion des ondes électromagnétiques par des milieux et des surfaces aléatoires : étude des effets cohérents dans le champ diffusé*. PhD thesis, Université de Marseille, 2001.
- [18] A. Ishimaru. *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering*. Prentice Hall, 1991.
- [19] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York, 1949.
- [20] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and sons, inc., 1975.
- [21] I. N. Bronshtein and K. A. Semendyayev. *Handbook of Mathematics*. Springer, 1997.

-
- [22] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, and C. K. Krichbaum. *Radar Cross Section Handbook*. Plenum press, 1970.
- [23] E. I. Thorsos. The validity of the perturbation approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86 :261–277, 1989.
- [24] D. A. Kapp. *A new method to calculate wave scattering from rough surfaces at low grazing angles*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Va., 1995.
- [25] H. Braunisch, Y. Zhang, C. O. Ao, S-E. Shih, Y. E. Yang, K-H. Ding, J. A. Kong, and L. Tsang. Tapered wave with dominant polarization state for all angles of incidence. *IEEE Transactions on antennas and Propagation*, 48(7) :1086–1096, 2000.
- [26] C. Bourlier. Diffusion électromagnétique par des interfaces rugueuses séparées par des milieux homogènes : application à la télédétection océanique microondes et infrarouge (Habilitation à Diriger des Recherches), Université de Nantes. 2007.
- [27] O. M. Phillips. The equilibrium range in the spectrum of wind generated waves. *Journal of Fluid Mechanical*, 4 :426–434, 1958.
- [28] G. Susbielles and C. Bratu. *Vagues et Ouvrages Pétroliers en Mer*. Edition Technip, 1981.
- [29] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark. A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. *Journal of Geophysical Research*, 102(C7) :15781–15796, 1997.
- [30] D. M. Milder. An improved formalism for wave scattering from rough surface. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89 :529–541, 1991.
- [31] E. Bahar. Radio wave propagation in stratified media with nonuniform boundaries and varying electromagnetic parameters : full wave analysis. *Canadian Journal of Physics*, 50 :3132–3142, 1972.
- [32] A. K. Fung and G.W. Pan. An integral equation method for rough surface scattering. *Proc. Int. Symp. on multiple scattering of waves in random media and random surfaces*, pages 701–714, 1986.
- [33] T. Elfouhaily, S. Guignard, R. Awadallah, and D. R. Thompson. Local and non-local curvature approximation : a new asymptotic theory for wave scattering. *Waves in Random Media*, 8 :321–338, 2003.
- [34] C. Bourlier, N. Déchamps, and G. Berginc. Comparison of asymptotic backscattering models (SSA, WCA, and LCA) from one-dimensional gaussian ocean-like surfaces. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 53(5) :1640–1652, 2005.
- [35] T. M. Elfouhaily and C. A. Guérin. A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces. *Waves in Random Media*, 14 :1–40, 2004.
- [36] J. H. Nakayama, H. Ogura, and B. Matsumoto. A probabilistic theory of scattering from a random rough surface. *Radio Science*, 15 :1049–1057, 1980.
- [37] E. I. Thorsos and D. R. Jackson. Studies of scattering theory using numerical methods. *Waves in Random Media*, 3 :165–190, 1991.
- [38] A. Ishimaru and L. Tsang. Backscattering enhancement of random discrete scatterers. *Journal of the Optical Society of America A*, 1(8) :836–839, 1984.
- [39] J. A. Sánchez-Gil, A. A. Maradudin, J. Q. Lu, V. D. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich. Scattering of electromagnetic waves from a bounded medium with a random surface. *Physical Review B*, 50(20) :15353–15368, 1994.
- [40] L. M. Brekhovskikh. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 23 :275–304 (In Russian), 1952.
-

-
- [41] M. A. Isakovich. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 23 :305–314 (In Russian), 1952.
- [42] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard. Bistatic scattering coefficient from one- and two-dimensional random surfaces using the stationary phase and scalar approximation with shadowing effect : comparisons with experiments and application to the sea surface. *Waves in Random Media*, 11 :119–147, 2001.
- [43] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard. Theoretical study of the Kirchhoff integral from two-dimensional randomly rough with shadowing effect : application on the backscattering coefficient for a perfectly-conducting surface. *Waves in Random Media*, 11 :91–118, 2001.
- [44] E. I. Thorsos. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1) :78–92, 1988.
- [45] R. D. Kodis. A note on the theory of scattering from irregular surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14 :77, 1966.
- [46] D. E. Barrick. Rough surface scattering based on the specular point theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 16 :449–454, 1968.
- [47] G. C. Brown, V. Celli, M. Haller, and A. Marvin. Vector theory of light scattering from a rough surface : unitarity and reciprocal expansions. *surface science*, 136 :381–397, 1984.
- [48] F. Toigo, A. M. Marvin, V. Celli, and N. R. Hill. Optical properties of rough surfaces : General theory and the small roughness limit. *Physical Review B*, 15(12) :5618–5626, 1977.
- [49] A. R. McGurn and A. A. Maradudin. Perturbation theory results for the diffuse scattering of light from two-dimensional randomly rough metal surfaces. *Waves in Random Media*, 6 :251–267, 1996.
- [50] J. T. Johnson. Third order small perturbation method for scattering from dielectric rough surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 16(11) :2720–2736, 1999.
- [51] A. Soubret, G. Berginc, and C. Bourrely. Application of reduced rayleigh equations to electromagnetic wave scattering by two-dimensional randomly rough surfaces. *Physical Review B*, 63 :1–20, 2001.
- [52] A. R. McGurn, A. A. Maradudin, and V. Celli. Localization effects in the scattering of light from a randomly rough grating. *Physical Review B*, 31(8) :4866–4871, 1985.
- [53] G. A. Farias and A. A. Maradudin. Surface plasmons on a randomly rough surface. *Physical Review B*, 28(10) :5675–5687, 1983.
- [54] I. Simonsen and A. A. Maradudin. Numerical simulation of electromagnetic waves scattering from planar dielectric films deposited on rough perfectly conducting substrates. *Optics Communications*, 162 :99–111, 1999.
- [55] A. M. Marvin and F. Toigo. Van der waals interaction between a point particle and a metallic surface. I. theory. *Physical Review A*, 25(2) :782–802, 1982.
- [56] A. Madrazo and A. A. Maradudin. Numerical solutions of the reduced rayleigh equation for the scattering of electromagnetic waves from rough dielectric films on perfectly conducting substrates. *Optics Communications*, 134 :251–263, 1997.
- [57] J. W. Wright. A new model for sea clutter. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 16 :217–223, 1968.
- [58] B. F. Kur’yanov. *English Transl. : Sov. Phys. Acoust.*, 8 :252–257, 1963.
- [59] A. G. Voronovich. Theory of sound scattering by a free corrugated surface. *Soviet Physics-Acoustics*, 30 :444, 1984.
- [60] R. Dashen and D. Wurmser. Approximate representations of the scattering amplitude. *Journal of Mathematical Physics*, 32(4) :986–996, 1991.
-

-
- [61] P. M. Morse and H. Feschbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Book company, Inc., 1953.
- [62] H. Sverdrup and W. Munk. *Wind, Sea and Swell : Theory of Relations for Forecasting*. USNHO, Pub., 1947.
- [63] R. F. Millar. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 65 :773–791, 1969.
- [64] I. Simonsen. A random walk through surface scattering phenomena : theory and phenomenology. pages 99–111, 2005.
- [65] D. Maystre and M. Cadilhac. Singularities of the continuation of fields and validity of Rayleigh’s hypothesis. *Journal of Mathematical Physics*, 26(9) :2201–2204, 1985.
- [66] S. O. Rice. Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 4 :351–378, 1951.
- [67] W.C. Meecham. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28 :370–377, 1956.
- [68] J. Shen and A. A. Maradudin. Multiple scattering of waves from random rough surfaces. *Physical Review B*, 22(9) :4234–4240, 1980.
- [69] C. Lopez, F. J. Yndurain, and N. Garcia. Iterative serie for calculating the scattering of waves from a hard corrugated surface. *Physical Review B*, 18 :970–972, 1978.
- [70] J.-J. Greffet. Scattering of electromagnetic waves by rough dielectric surfaces. *Physical Review B*, 37(11) :6436–6441, 1988.
- [71] L. Tsang, J.A., Kong, and R. Shin. *Scattering of Electromagnetic Waves : Advanced topics, volume 3*. Wiley series on remote sensing, 2000.
- [72] M. Nieto-Vesperinas. Depolarization of electromagnetic waves scattered from slightly rough random surfaces : a study by means of the extinction theorem. *Journal of the Optical Society of America*, 72(5) :539–547, 1982.
- [73] N. Morita, N. Kumagai, and J. R. Mautz. *Integral Equation Methods for Electromagnetics*. Artech House, Boston, 1990.
- [74] N. Déchamps. *Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d’une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles*. PhD thesis, Université de Nantes, 2004.
- [75] F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, Piscataway, 1993.
- [76] J. C. West and J. M. Sturm. On iterative approaches for electromagnetic rough-surface scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(8) :1281–1288, 1999.
- [77] D.A. Kapp and G.S. Brown. A new numerical method for rough surface scattering calculations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(5) :711–721, 1996.
- [78] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G.J. St-Cyr. Forward-backward : a new method for computing low-grazing-angle scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44 :722–729, 1996.
- [79] L. Tsang, C.H. Chang, and H. Sangani. A banded matrix iterative approach to Monte Carlo simulations of scattering of waves by largescale random rough surface problems : TM case. *Electronics Letters*, 29 :166–167, 1993.
- [80] L. Tsang, C.H. Chang, and K. Pak. Monte Carlo of largescale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the bmia/canonical grid method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8) :851–859, 1995.
- [81] H. T. Chou and J. T. Johnson. A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the forward-backward method. *Radio science*, 33(5) :1277–1287, 1998.
-

-
- [82] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G.J. St-Cyr. Forward-backward method for scattering from imperfect conductors. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(1) :101–107, 1998.
- [83] N. Déchamps and C. Bourlier. Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-Inside-Layer Expansion method combined to the Forward-Backward Novel Spectral Acceleration. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 50(12) :3576–3586, 2007.
- [84] D. E. Barrick. Grazing behavior of scatter and propagation above any rough surface. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 46 :73–83, 1998.
- [85] D.E. Barrick and R. Fitzgerald. The failure of “classic” perturbation theory at a rough neumann boundary near grazing. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(9) :1452–1460, 2000.
- [86] I. M. Fuks, V. I. Tatarskii, and D. E. Barrick. Behavior of scattering from a rough surface at small grazing angles. *Wave in random media*, 9 :295–305, 1999.
- [87] J. M. Soto-Crespo, M. Nieto-Vesperinas, and A. T. Friberg. Scattering from a slightly rough random surfaces : a detailed study on the validity of the small perturbation method. *Journal of the Optical Society of America*, 7(7) :1185–1201, 1990.
- [88] D. E. Barrick. Near-grazing illumination and shadowing of rough surfaces. *Radio science*, 30(3) :563–580, 1995.
- [89] J. R. Wait. *On the theory of radio propagation over a slightly roughened curved earth, in Electromagnetic Probing in Geophysics*. Ed. Boulder, CO : Golem, 1971.
- [90] D.E. Barrick. Theory of HF and VHF propagation across the rough sea. The effective surface impedance for a slightly rough highly conducting medium at grazing incidence. *Radio Science*, 6(5) :517–526, 1971.
- [91] M. I. Charnotskii. Wave scattering by periodic surface at low grazing angles : single grazing mode. *Progress in Electromagnetics Research*, 26 :1–41, 2000.
- [92] M. J. Kim, H. M. Berenyi, R. E. Burge, and S. Tajbakhsh. Region of validity of perturbation theory for dielectrics and finite conductors. *Waves in Random Media*, 5 :305–327, 1995.
- [93] C. R. Burrows. Radio propagation over plane earth- field strength curves. *Bell System Technical Journal*, 16 :45–77 et 1203–1236, 1937.
- [94] M. J. Kim and A. Stoddart. Region of validity of perturbation theory. *Waves in Random Media*, 3 :325–342, 1993.
- [95] C.H. Chan, L. Tsang, and Q. Li. Monte Carlo simulations of large-scale one-dimensional random rough surface scattering at near-grazing incidence : penetrable case. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(1) :142–149, 1998.
- [96] H. J. Mametsa, F. Koudogbo, and P. F. Combes. Application of IEM and radiative transfer formulations for bistatic scattering of rough surfaces. *IEEE International Geoscience And Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, 2002.
- [97] C. Bourlier and G. Berginc. Microwave analytical backscattering models from randomly rough anisotropic sea surface - comparison with experimental data in C and Ku bands. *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 37 :31–78, 2002.
- [98] A. Ishimaru, J. D. Rockway, and Y. Kuga. Rough surface Green’s function based on first-order modified perturbation and smoothed diagram methods. *Wave in Random Media*, 10 :17–31, 2000.
- [99] V. I. Tatarskii. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. New York, Dover, 1967.
- [100] A. Ishimaru. *Wave propagation and Scattering in Random Media, Volume 2*. Academic press, 1997.
-

-
- [101] U. Frisch. *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1968.
- [102] W. C. Hoffman. The electromagnetic field in a randomly inhomogeneous medium. *IEEE Transactions*, 7 :301–306, 1959.
- [103] S. Pratt. Scattering in the Born approximation. *Michigan State University*, 2001.
- [104] D. Courjon and C. Bainier. *Le Champ Proche Optique : théorie et applications*. Springer-Verlag France, 2001.
- [105] S. Durant. *Propagation de la lumière en milieu aléatoire*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2003.
- [106] R. C. Bourret. Stochastically perturbed fields with applications to wave propagation in random media. *Nuove Cimento*, 26 :1–31, 1962.
- [107] R. C. Bourret. Propagation of randomly perturbed fields. *Canadian Journal of Physics*, 40 :782–790, 1962.
- [108] K. Furutsu. On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium. *J. Res. Natl. Bur. Standards Sect. D*, 67 :303–323, 1963.
- [109] V. I. Tatarskii. Propagation of electromagnetic waves in a medium with strong dielectric-constant fluctuations. *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.*, 46 :1399–1411, 1964.
- [110] F. G. Bass. Boundary conditions for the average electromagnetic field on a surface with random roughness and impedance fluctuations. *Izv. VUZ'ov Radiophysic.*, 26(3) :72–78, 1960.
- [111] V. D. Freilikher and I. M. Fuks. Green's function method for the Helmholtz equation with perturbed boundary conditions. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 13 :73–79, 1970.
- [112] G. G. Zipfel and J. A. DeSanto. Scattering of a scalar wave from a random rough surface : A diagrammatic approach. *Journal of Mathematical Physics*, 13(12) :1903–1911, 1972.
- [113] J. A. DeSanto. Green's function for electromagnetic scattering from a random rough surface. *Journal of Mathematical Physics*, 15(3) :283–288, 1974.
- [114] M. Zuniga, J. A. Kong, and L. Tsang. Depolarization effects in the active remote sensing of random media. *Journal of Applied Physics*, 51(5) :2315–2325, 1980.
- [115] Y. Q. Jin and J. A. Kong. Ladder and cross terms in the second-order distorted Born approximation. *Journal of Mathematical Physics*, 26(5) :994–1011, 1985.
- [116] J. A. DeSanto. Scattering from a random rough surface : Diagram methods for elastic media. *Journal of Mathematical Physics*, 14(11) :1566–1573, 1973.
- [117] S. Mudaliar. Diffuse wave in a random medium layer with rough boundaries. *Wave in Random Media*, 11 :45–60, 2001.
- [118] J. B. Keller. *Wave Propagation in Random Media*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1962.
- [119] J. B. Keller and F. C. Karal. Effective dielectric constant, permeability, and conductivity of a random medium and the velocity and attenuation of the coherent waves. *Journal of Mathematical Physics*, 7 :661–670, 1966.
- [120] A. R. Wenzel. Smoothed boundary conditions for randomly rough surfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 15(3) :317–323, 1974.
- [121] J. G. Watson and J. B. Keller. Rough surface scattering via the smoothing method. *Journal of Acoustical Society of America*, 75 :1705–1708, 1984.
- [122] J. G. Watson and J. B. Keller. Reflection, scattering and absorption of acoustic waves by rough surfaces. *Journal of Acoustical Society of America*, 198.
-

-
- [123] G. S. Brown. Application of the Integral Equation Method of Smoothing to random surface scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 32(12) :1308–1312, 1984.
- [124] N. Blaunstein. Theoretical aspects of wave propagation in random media based on quantity and statistical field theory. *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 47 :135–191, 2004.
- [125] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii. *Principle of Statistical Radiophysics, volume 3*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [126] J. A. DeSanto. Relation between the connected diagram and smoothing methods for rough surface scattering. *Journal of Mathematical Physics*, 27(1) :377–379, 1986.
- [127] H. Feshbach. On the perturbation of boundary conditions. *Physical Review*, 65(11) :307–318, 1944.
- [128] S. Ito. Analysis of scalar wave scattering from a slightly rough random surfaces : a multiple scattering theory. *Radio Science*, 20(1) :1–12, 1985.
- [129] K. Furutsu. Operator methods for time-dependent waves in random media with applications to the case of random particles. *Journal of Mathematical Physics*, 21(12) :2764–2779, 1980.
- [130] H. Ogura and N. Takahashi. Scattering, radiation and propagation over two-dimensional random surface : stochastic functional approach. *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 14 :89–180, 1996.
- [131] E. E. Salpeter and H. A. Bethe. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review*, 84 :1232–1242, 1951.
- [132] A. S. Bryukhovetskii, V. M. Tigrov, and I. M. Fuks. Effective impedance tensor of statistically rough ideally conducting surfaces. *Radiophysics in Quantum Electronics*, pages 703–708, 1985.
- [133] A. Ishimaru, J.D. Rockway, Y. Kuga, and S. Lee. Transverse electric and transverse magnetic Green's function for coherent and incoherent propagation over a finitely conducting rough surface. *Radio Science*, 37(3) :1–13, 2002.
- [134] J.R. Wait. The ancient and modern history of EM ground-wave propagation. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 40(5) :7–24, 1998.
- [135] D. T. Moroney and P. J. Cullen. The Green function perturbation method for solution of electromagnetic scattering problems. *PIER*, 15 :221–252, 1997.
- [136] C. E. Mandt, L. Tsang, and A. Ishimaru. Copolarized and depolarized backscattering enhancement of random discrete scatterers of large size based on second-order ladder and cyclical theory. *Journal of Optical Society of America A*, 7(4) :585–591, 1990.
- [137] S. Kobayashi, S. Tanelli, and E. Im. Second-order multiple scattering theory associated with backscattering enhancement for a millimeter wavelength weather radar with a finite beam width. *Radio Science*, 40(RS 6015) :1–16, 2005.
- [138] O. M. Abo-Seida, S. T. Bishay, and K. M. El-Morabie. Far-field radiated from a vertical magnetic dipole in the sea with a rough upper surface. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(8) :2135–2142, 2006.
- [139] R. Parkyns and D. R. Jackson. The relation between creeping waves, leaky waves, and surface waves. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(3) :898–907, 2005.
- [140] J. Zenneck. Propagation of plane EM waves along a plane conducting surface. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 28 :846–866, 1907.
- [141] A. Ishimaru, J. R. Thomas, and S. Jaruwatanadilok. Electromagnetic waves over half-space metamaterials of arbitrary permittivity and permeability. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(3) :915–921, 2005.
-

-
- [142] D. G. Blumberg, V. Freilikher, I. Fuks, Y. Kaganovskii, A. A. Maradudin, and M. Rosenbluh. Effects of roughness on the retroreflection from dielectric layers. *Waves in Random Media*, 12 :279–292, 2002.
- [143] Z-H. Gu, I. M. Fuks, and M. Ciftan. Enhanced backscattering at grazing angles. *Optics Letters*, 27(23) :2067–2068, 2002.
- [144] H. Raether. *Surface plasmons*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [145] D. N. Mirlin and A. A. Maradudin. *Surface Polaritons, Chapter 1*. eds, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [146] V.M. Agranovich and L. Mills. *Surface Polaritons, Chapter 10*. eds, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [147] A. D. Wheelon. Backscattering by turbulent irregularities : a new analytical description. *Proceedings of the IEEE*, 60(3) :252–265, 1972.
- [148] A. N. Sommerfeld. Propagation of waves in wireless telegraphy. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 28 :665–737, 1909.
- [149] J.R. Wait. *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. Pergamon Press, 1962.
- [150] K. A. Norton. The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 25(9) :1203–1236, 1937.
- [151] R. W. P. King. Electromagnetic field of a vertical dipole over an imperfectly conducting half-space. *Radio Science*, 25(2) :149–160, 1990.
- [152] R. E. Collin. Hertzian dipole radiating over a lossy Earth or sea : some early and late 20th-century controversies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(2) :64–79, 2004.
- [153] H. Hertz. *Electric Waves*. London, Macmillan and Co, 1893.
- [154] G. Marconi. Wireless telegraphy. *Journal of IEE (UK)*, 28 :273–315, 1899.
- [155] N. Tesla. Art of transmitting electrical energy through natural mediums. *US Patent 787 412*, 1905.
- [156] O. Heaviside. *The Theory of Telegraphy*. Encyclopedia Britannica, 1902.
- [157] F. Hack. Propagation of em waves over a plane conductor. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 27 :27–37, 1908.
- [158] H. Weyl. The propagation of electromagnetic waves over a plane conductor. *Annalen der Physik*, 60 :481–500, 1919.
- [159] A. N. Sommerfeld. Propagation of waves in wireless telegraphy. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 81 :1135–1153, 1926.
- [160] B. Van der Pol and K. F. Niessen. The propagation of electromagnetic waves over a plane earth. *Annalen der Physik*, 6 :273–294, 1930.
- [161] W. H. Wise. The grounded condenser antenna radiation formula. *Proceedings of the IRE*, 19 :1684, 1931.
- [162] B. Rolf. Graphs to Prof. Sommerfeld’s attenuation formula for radio waves. *Proceedings of the IRE*, 18 :391–402, 1930.
- [163] K. A. Norton. Propagation of radio waves over a plane earth. *Nature, London*, 135 :954, 1935.
- [164] A. N. Sommerfeld. Letter to K. A. Norton from the Zirmerhof, Tyrol. September, 5, 1937.
- [165] T. Kahan and G. Eckart. On the electromagnetic surface wave of Sommerfeld. *Physical Review*, 76(3) :406–410, 1949.
- [166] A. A. Oliner. Historical perspectives on microwave field theory. *IEEE on Microwave Theory and Techniques*, 32(9) :1022–1045, 1984.
-

-
- [167] S. A. Schelkunoff. Anatomy of surface waves. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, pages 133–139, 1959.
- [168] KR. Problems of wireless telegraphy, <http://kr.cs.ait.ac.th/radok/math/mat10/61.htm>.
- [169] A. Ishimaru, J. D. Rockway, Y. Kuga, and S. Lee. Sommerfeld and Zenneck wave propagation for a finitely conducting one-dimensional rough surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(9) :1475–1484, 2000.
- [170] J. R. Wait. *Electromagnetic Surface Waves*. ed. J. A. Staxton, vol. 1, Academic Press, New York, 1964.
- [171] J. R. Wait. *Electromagnetic Wave Theory*. Harper and Row, New York, 1985.
- [172] T. S. MacLean. *Radiowave Propagation Over Ground*. London, Chapman and Hall, 1993.
- [173] R. W. P. King. Electromagnetic wave propagation over a constant impedance plane. *Radio Science*, 4 :255–268, 1969.
- [174] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1970.
- [175] R. E. Collin. Some observations about the near zone electric field of a hertzian dipole above a lossy earth. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(4) :313–3137, 2004.
- [176] R. W. P. King. New formulas for the electromagnetic field of a vertical electric dipole in a dielectric or conducting half-space near its horizontal interface. *Journal of applied Physics*, 53(12) :8476–8482, 1982.
- [177] I. V. Lindell and E. Alanen. Exact image theory for the Sommerfeld half-space problem, part 2 : vertical electric dipole. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 32(8) :841–847, 1984.
- [178] Z. Wu. Application of radio-ground wave propagation theory to the tomographic imaging of ground surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(9) :1384–1392, 2000.
- [179] H. Bremmer. The surface-wave concept in connection with propagation trajectories associated with the Sommerfeld problem. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, pages 175–182, 1959.
- [180] J. R. Wait. Asymptotic theory for a dipole radiation in the presence of a lossy slab lying on a conducting half-space. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 15(5) :645–648, 1967.
- [181] M. P. Rancic and P. D. Rancic. Vertical dipole antenna above a lossy half-space : efficient and accurate approximation for the Sommerfeld’s integral. *European Conference on Antennas and Propagation, Nice, 2006*.
- [182] I. L. Koh and Y. Lee. Exact formulation of a Sommerfeld integral for the impedance half-space problem. *IEEE Antennas and Propagation Symposium, 2006*.
- [183] F. G. Bass, I. M. Fuks, I. E. Ostrovski A. I. Kalmykov, and A. D. Rosenberg. Very high frequency radiowave scattering by a disturbed sea surface. part 1 : Scattering from a slightly disturbed boundary. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 16(5) :554–559, 1968.
- [184] J. V. Toporkov and M. A Sletten. Numerical study of wide-band low-grazing hf clutter from ocean-like surfaces. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1A* :388–391, 2005.
- [185] G. R. Valenzuela. Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves- a review. *Boundary-Layer Meteorol.*, 13 :61–85, 1978.
- [186] D. B. Trizna and D. J. Carlson. Studies of dual polarized low grazing angle radar sea scatter in nearshore regions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 34(3) :747–757, 1996.
- [187] W. S. Ament. Airborne radiometeorological research. *Proceedings of the IRE*, 47 :756–761, 1959.
-

-
- [188] J. R. Wait. *Theory of Ground Wave Propagation, in Electromagnetic Probing in Geophysics*. The Golem Press, Boulder, CO., 1971.
- [189] D.E. Barrick. First-order theory of MF/HF/VHF scatter from the sea. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 20 :2–10, 1972.
- [190] H. Bremmer. Applications of operational calculus to groundwave propagation, particularly for long waves. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 6 :267–274, 1958.
- [191] E. L. Feinberg. On the propagation of radio waves along an imperfect surface. *Journal of Physics of Moscow*, 8 :317–330, 1944.
- [192] T. Kawano and T. Ishihara. Ground wave propagation over a homogeneous impedance surface and a mixed-path with inhomogeneous impedance surfaces including tropospheric ducting effect. *IEEE Antennas and Propagation Symposium, Boston*, 2006.
- [193] D. A. Hill and J. R. Wait. Ground wave propagation over a mixed path with an elevation change. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30(1) :139–141, 1982.
- [194] E. E. Gossard. Clear weather meteorological effects on propagation at frequencies above 1 GHz. *Radio Science*, 16(5) :589–608, 1981.
- [195] A. Kukushkin. *Radio Wave*. Wiley-VCH, Verlag GmbH and Co., Weinheim, 2004.
- [196] R. S. Awadallah. *Rough surface scattering and propagation over rough surface terrain in ducting environments*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [197] F. G. Bass, V. D. Freilikher, and I. M. Fuks. Propagation in statistically irregular waveguides. Part 1 : average field. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 22(2) :278–288, 1974.
- [198] F. Akleman and L. Sevgi. A novel MoM- and SSPE-based groundwave-propagation field-strength prediction simulator. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 49(5) :69–82, 2007.
- [199] V. Fabbro, P. F. Combes, and N. Guillet. Apparent radar cross section of a large target illuminated by a surface wave above sea. *Progress in Electromagnetics Research*, 50 :41–60, 2005.
- [200] M. Lesturgie. Contribution de la technologie radar HF à ondes de surface à la surveillance maritime depuis le littoral. *Office National d’Etudes et Recherches Aérospatiales*, pages 1–7.
- [201] V. A. Fock. *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*. Pergamon Press, 1965.
- [202] C. A. Guérin and A. Sentenac. Second-order perturbation theory for scattering from heterogeneous rough surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(7) :1251–1260, 2004.
- [203] R. H. Kraichnan. Dynamics of nonlinear stochastic systems. *Journal of Mathematical Physics*, 2(1) :124–148, 1961.
- [204] F. J. Dyson. The radiation theory of Tomonaga, Schwinger, and Feynmann. *Physical Review*, 75 :468–502, 1949.
- [205] S. J. Anderson, I. M. Fuks, and J. Praschifka. Multiple scattering of HF radio waves propagating across the sea surface. *Wave in random media*, 8 :283–302, 1998.
- [206] E. Yamashita. *Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems*. Artech house, 1987.
- [207] W. C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Press series on Electromagnetic Waves, New York, 1995.
- [208] L. P. Felsen and N. Marcuvitz. *Radiation and Scattering of Waves*. IEEE Press, 1994.
- [209] B. L. Van der Waerden. On the method of saddle points. *Applied Science Research*, 2B :33–43, 1951.
- [210] P. C. Clemmow. Some extensions to the method of integration by steepest descents. *Quart. Journal of Mechanical and Applied Mathematics*, 3 :241–260, 1950.
-

-
- [211] P. Puhakka. Lecture of asymptotic evaluation of integrals, University of Helsinki (Finlande). 2005.
- [212] Simon J.A. Malham. Lecture : An introduction to asymptotic analysis, Heriott-Watt University, Edinburgh (UK). 2004.
- [213] K. M-K. Yip. Lecture of qualitative asymptotic analysis of complex functions, Yale University, New Haven, USA.
- [214] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Piscataway, N.J., 1991.
- [215] M. Nieto-Vesperinas. *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. Wiley, New York, 1991.
- [216] C. Bourlier. Diffraction EM par des obstacles, cours optionnel du Master Recherche, Ecole Doctorale de l'Université de Nantes. 2004-2005.
- [217] T. A. Leskova, A. A. Maradudin, and I. V. Novikov. Scattering of light from the random interface between two dielectric media with low contrast. *Journal of the Optical Society of America*, 17(7) :1288–1300, 2000.
- [218] C.D. Moss, T.M. Grzegorzczuk, H.C. Han, and J.A. Kong. Forward-backward method with spectral acceleration for scattering from layered rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 54(3) :1006–1016, 2006.
- [219] Y. Brelet and C. Bourlier. Bistatic scattering from a sea-like one-dimensional rough surface with the perturbation theory. *IEEE International Geoscience And Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, 2008.
- [220] H-T. Chou and J. T. Jonhson. Formulation of forward-backward method using novel spectral acceleration for the modelling of scattering from impedance rough surfaces. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(1) :605–621, 2000.
- [221] Y. Brelet, N. Déchamps, C. Bourlier, and J. Saillard. Surface wave propagation above a one-dimensional rough sea surface at grazing angles. *22nd Progress in Electromagnetic Research Symposium*, 2007.
- [222] Y. Brelet and C. Bourlier. SPM numerical results from an effective surface impedance for a one-dimensional perfectly conducting rough sea surface. *Progress in Electromagnetics Research*, PIER 81 :413–436, 2008.
- [223] V. I. Tatarskii and M. I. Charnotskii. On the universal behavior of scattering from a rough surface for small grazing angles. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(1) :67–71, 1998.

[]