
Introduction 1

CHAPITRE I

Etude du comportement de la mer

I.1 INTRODUCTION.....	5
I.2 GÉNÉRALITÉS.....	5
I.2.1 Formation des vagues	5
I.2.2 Relation de dispersion	6
I.2.2.1 Ondes de gravité.....	6
I.2.2.2 Ondes de capillarité	6
I.2.2.3 Zone de transition.....	7
I.2.2.4 Remarques.....	8
I.2.3 Notion de fetch	9
I.2.4 Conclusion.....	9
I.3 DESCRIPTION PROBABILISTE DE LA MER	9
I.3.1 Rappel sur les processus aléatoires.....	9
I.3.1.1 Statistique d'ordre un	10
I.3.1.2 Statistique d'ordre deux.....	10
I.3.1.3 Processus stationnaire	10
I.3.1.4 Ergodisme.....	11
I.3.1.5 Densité spectrale de puissance.....	11
I.3.1.6 Transformée de Fourier d'un signal cosinusoidal	13
I.3.2 Génération d'une surface	13
I.3.2.1 Généralités	14
I.3.2.2 Applications.....	15
I.3.2.3 Simulations	16
I.3.2.4 Conclusion.....	21
I.3.3 Représentation stochastique de la mer	22
I.3.3.1 Introduction.....	22
I.3.3.2 Modèle composite.....	23
I.3.3.3 Conclusion.....	24
I.4 MODÈLES DE SPECTRE DE MER.....	24
I.4.1 Introduction	24
I.4.2 Vitesse de friction	25
I.4.3 Spectres de gravité.....	25
I.4.4 Spectres globaux : gravité et capillarité.....	28
I.4.4.1 Spectre de Pierson.....	28
I.4.4.2 Spectre de Apel.....	28
I.4.4.3 Spectre de Elfouhaily, Chapron, Katsaros et Vandemark.....	29
I.4.4.4 Simulations	30
I.4.5 Fonctions angulaires	31
I.4.6 Conclusion.....	32

I.5 FONCTION D'AUTOCORRÉLATION	33
I.5.1 Fonction d'autocorrélation spatiale	33
I.5.1.1 Définition générale	33
I.5.1.2 Fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs	35
I.5.1.3 Détermination analytique de l'intégration angulaire	35
I.5.1.4 Intégration numérique en nombre d'onde.....	36
I.5.1.5 Simulation et modélisation	36
I.5.1.6 Conclusion	38
I.5.1.7 Conclusion	39
I.5.2 Variances des pentes.....	39
I.5.2.1 Densité de probabilité des pentes	39
I.5.2.2 Définition des variances et intégration angulaire	40
I.5.2.3 Intégration numérique en nombre d'onde.....	40
I.5.2.4 Simulations	41
I.6 CONCLUSION	41

CHAPITRE II

Fonction d'ombre

II.1 INTRODUCTION	43
II.2 FONCTION D'OMBRE MONOSTATIQUE MONODIMENSIONNELLE DÉCORRÉLÉE	44
II.2.1 Introduction.....	44
II.2.2 Définition de la fonction d'ombre	44
II.2.3 Approches de Wagner, Smith et Ricciardi-Sato.....	46
II.2.4 Application sur un processus décorrélé d'une surface infinie	47
II.2.4.1 Approches de Wagner et Smith pour un processus quelconque.....	48
II.2.4.2 Approche de Ricciardi-Sato pour un processus gaussien	48
II.2.4.3 Simulation.....	48
II.3 FONCTION D'OMBRE MONOSTATIQUE MONODIMENSIONNELLE CORRÉLÉE	51
II.3.1 Expressions des probabilités conditionnelles de Wagner et de Smith	51
II.3.1.1 Wagner	51
II.3.1.2 Smith.....	52
II.3.1.3 Conclusion.....	52
II.3.2 Expressions des fonctions d'ombre de Smith et de Wagner.....	53
II.3.2.1 Fonctions d'ombre moyennées de Wagner et de Smith	53
II.3.2.2 Réduction de l'intervalle d'intégration.....	54
II.3.2.3 Remarques	56
II.3.2.4 Bilan	56
II.3.2.5 Fonction d'ombre numérique : solution de référence	57
II.3.3 Simulations sur une surface infinie.....	59
II.3.3.1 Fonction d'autocorrélation gaussienne.....	59
II.3.3.2 Fonction d'autocorrélation lorentzienne	60
II.3.3.3 Fonctions d'autocorrélation amorties	63

II.3.4 Conclusion.....	65
II.4 FONCTION D'OMBRE BISTATIQUE MONODIMENSIONNELLE	65
II.4.1 Calcul de la fonction d'ombre bistatique.....	65
II.4.1.1 Position du problème.....	65
II.4.1.2 Etude des trois cas.....	66
II.4.1.3 Conclusion.....	66
II.4.2 Application sur la fonction d'ombre de Smith.....	67
II.4.2.1 Solution de référence - algorithme de calcul.....	67
II.4.2.2 Fonction d'ombre décorrélée.....	67
II.4.2.3 Fonction d'ombre corrélée.....	67
II.4.2.4 Simulations sur une surface infinie.....	69
II.4.3 Conclusion.....	71
II.5 FONCTION D'OMBRE BIDIMENSIONNELLE	71
II.5.1 Généralisation des cas monostatique et bistatique sans corrélation.....	71
II.5.1.1 Expression de la densité de probabilité des pentes.....	72
II.5.1.2 Simulations.....	73
II.5.2 Généralisation des cas monostatique et bistatique avec corrélation.....	74
II.5.2.1 Probabilité conjointe des hauteurs et des pentes en coordonnées cartésiennes.....	74
II.5.2.2 Probabilité conjointe des hauteurs et des pentes en coordonnées cylindriques.....	77
II.5.2.3 Probabilité marginale conjointe des hauteurs et des pentes.....	79
II.5.2.4 Probabilité conditionnelle de Smith.....	83
II.5.2.5 Fonction d'ombre de Smith.....	84
II.5.2.6 Simulations.....	85
II.5.3 Conclusion.....	89
II.6 CONCLUSION	90

CHAPITRE III

Rayonnement infrarouge de la surface de la mer

III.1 INTRODUCTION	91
III.2 PRÉLIMINAIRES.....	92
III.2.1 Diffraction par une facette.....	92
III.2.2 Définitions.....	93
III.2.2.1 Le corps noir.....	93
III.2.2.2 Loi de Wien.....	93
III.2.2.3 Les corps réels : l'émissivité.....	94
III.2.2.4 Coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission.....	94
III.2.2.5 Les coefficients de réflexion de Fresnel.....	95
III.2.2.6 Indice de réfraction de la mer.....	95
III.2.3 Conclusion.....	96
III.3 ÉMISSIVITÉ BIDIMENSIONNELLE D'UNE SURFACE ALÉATOIRE.....	96
III.3.1 Émissivité monodimensionnelle d'une surface rugueuse.....	96

III.3.1.1 Géométrie du problème.....	97
III.3.1.2 Émissivité moyennée sur les pentes de la surface.....	97
III.3.1.3 Émissivité moyennée normalisée de la surface.....	98
III.3.1.4 Conclusion	99
III.3.2 Émissivité bidimensionnelle d'une surface rugueuse	99
III.3.2.1 Géométrie du problème.....	99
III.3.2.2 Détermination de l'émissivité.....	99
III.3.3 Émissivité de la mer calculée avec la fonction d'ombre de Smith décorrélée.....	100
III.3.3.1 Calculs	100
III.3.3.2 Cas particuliers.....	101
III.3.3.3 Simulations de l'émissivité de la mer	102
III.3.3.4 Simulations de la température apparente	107
III.3.4 Émissivité de la mer obtenue avec la fonction d'ombre de Smith corrélée.....	112
III.3.4.1 Calculs	112
III.3.4.2 Remarque	112
III.3.4.3 Simulations.....	113
III.3.5 Conclusion.....	115
III.4 RÉFLECTIVITÉ BIDIMENSIONNELLE D'UNE SURFACE ALÉATOIRE	115
III.4.1 Réflectivité monodimensionnelle d'une surface rugueuse	115
III.4.2 Réflectivité bidimensionnelle d'une surface rugueuse	117
III.4.2.1 Géométrie du problème.....	117
III.4.2.2 Détermination de la réflectivité	117
III.4.2.3 Remarques.....	119
III.4.2.4 Fonction d'ombre bidimensionnelle de Smith sans corrélation.....	120
III.4.2.5 Simulations.....	120
III.4.3 Conclusion.....	123
III.5 MODÉLISATION D'UNE SCÈNE THERMIQUE MARINE	123
III.5.1 Expression du signal reçu.....	125
III.5.2 Approche qualitative de la transmission atmosphérique.....	126
III.5.2.1 Absorption par les constituants gazeux	126
III.5.2.2 La diffusion	127
III.5.3 Approche quantitative de la transmission atmosphérique.....	127
III.5.3.1 Coefficient de transmission de la vapeur d'eau	127
III.5.3.2 Coefficient de transmission du dioxyde de carbone.....	129
III.5.3.3 Coefficient de transmission de la diffusion.....	129
III.5.3.4 Exemples	131
III.5.4 Simulations.....	133
III.6 CONCLUSION.....	139

Conclusion - Perspectives141

Annexe 1 : Fonctions d'ombre monodimensionnelles monostatiques de Wagner et de Smith d'un processus décorrélé.....	145
Annexe 2 : Fonction d'ombre monodimensionnelle monostatique de Ricciardi-Sato d'un processus gaussien décorrélé ...	149
Annexe 3 : Probabilité conditionnelle monodimensionnelle de Wagner d'un processus gaussien corrélé.....	153

Annexe 4 : Probabilité conditionnelle monodimensionnelle de Smith d'un processus gaussien corrélé.....	155
Annexe 5 : Fonction d'ombre monodimensionnelle bistatique décorrelée de Smith d'un processus gaussien.....	157
Annexe 6 : Éléments de la matrice de covariance bidimensionnelle en coordonnées cylindriques	159
Annexe 7 : Probabilité conditionnelle bidimensionnelle de Smith d'un processus gaussien corrélé.....	163
Bibliographie :	165

INTRODUCTION

Dans l'histoire des sciences, la théorie du rayonnement infrarouge est récente. Elle a atteint son apogée avec le physicien allemand M. Planck qui introduisit la théorie des quanta.

En 1800 l'astronome W. Herschell (1738-1822), en déplaçant un thermomètre à alcool sur le spectre solaire décomposé à l'aide d'un prisme dispersif, du violet vers le rouge, constate que la température augmente et présente un maximum bien au-delà du rouge où l'oeil ne peut discerner aucun éclaircissement. Il montra ainsi que la lumière du soleil contient des rayons invisibles à l'oeil nu, c'est-à-dire dont la longueur d'onde est supérieure à $0,75 \mu\text{m}$ (limite supérieure du rouge), ce sont les infrarouges. En 1864, J. Tyndall (1820-1893) montre expérimentalement que lorsque la température augmente, le rayonnement émis devient visible et la puissance émise augmente considérablement. Ces données expérimentales ont permis à J. Stefan (1835-1893) d'établir la loi selon laquelle, la puissance émise par un corps est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température absolue. L. Boltzmann (1844-1906) en 1894 démontre théoriquement ces résultats à partir des travaux de J.C. Maxwell (1831-1879), en considérant que le rayonnement infrarouge obéit aux lois de l'électromagnétisme. Enfin en 1901, en introduisant la théorie des quanta, M. Planck (1858-1947) publie la loi donnant la luminance spectrale du corps noir en fonction de la longueur d'onde et de la température absolue. C'est le début de la physique quantique. La formule de Lord Rayleigh (1842-1919) et J. Jeans (1877-1946) établie en 1900 donnait la luminance du corps noir pour les hautes longueurs d'onde, alors que la formule empirique de W. Wien de 1896 (1864-1920) la donnait pour les faibles longueurs d'onde.

Ainsi le rayonnement du corps noir est parfaitement connu. Malheureusement le corps noir est un corps théorique, mais dès 1859 G. Kirchhoff (1824-1887) montre par des raisonnements thermodynamiques que la luminance d'un corps réel s'obtient en multipliant la luminance du corps noir par son émissivité. L'émissivité est donc une grandeur intrinsèque au corps. L'ensemble de ces résultats théoriques montrent qu'à température ambiante les corps rayonnent dans le proche infrarouge, globalement compris entre 2 et $15 \mu\text{m}$.

Cette évolution scientifique s'est accompagnée de progrès technologiques sur la mesure du rayonnement infrarouge. En 1830 les premiers détecteurs basés sur le principe des thermocouples apparaissent, puis dès 1880 la naissance des matériaux photorésistants conduit à l'utilisation des bolomètres (matériaux pour lesquels la résistance électrique varie avec la température). Au début du XXème siècle, la naissance de la mécanique quantique, permet de développer des capteurs quantiques.

Ces détecteurs, en raison de leur sensibilité élevée et de leur temps de réponse bref, ont permis le développement des systèmes d'imagerie thermique, basés sur la détection du rayonnement infrarouge émis par la matière entre 2 et 15 μm . L'association de tels capteurs aux progrès de l'informatique et des micro-processeurs font de la technologie infrarouge un instrument très puissant dans l'investigation des phénomènes physiques. C'est ainsi par exemple que l'infrarouge passif est aujourd'hui largement utilisé pour la surveillance, la détection, la reconnaissance, l'identification et la poursuite dans un environnement de système d'arme, et que le rayonnement laser (technique active) est utilisé pour la télémétrie, la vélocimétrie, l'illumination et le guidage. Dans le cas de l'infrarouge passif, la mesure de l'image thermique, résultant des contrastes de température ou d'émissivité, est la méthode la plus employée. Ces contrastes thermiques sont liés aux transferts d'énergie entre les objets et le fond qui l'entoure.

Le fait que la longueur d'onde en optique est de l'ordre du micromètre, alors qu'en radar elle peut s'étendre du centimètre au mètre, permet d'offrir en infrarouge une résolution spatiale fiable, capable d'assimiler des détails de petites dimensions. Pour une surface caractérisée par un spectre micro-onde (longueur d'onde de coupure basse supérieure au millimètre), la diffusion en infrarouge est quasiment inexistante, car le rayon de courbure moyen de la surface est très grand devant la longueur d'onde. En revanche pour des radars fonctionnant dans le domaine des micro-ondes (ondes centimétriques), la diffusion est importante. Les dispositifs infrarouges sont petits (caméra infrarouge) alors que les radars sont beaucoup plus encombrants. Néanmoins avec l'arrivée des antennes imprimées cette tendance diminue. Un autre avantage est que la plupart des dispositifs infrarouges fournissent ou exploitent des images directement traitables par un opérateur humain (observation directe de la scène thermique). L'infrarouge correspond au rayonnement des corps à température ambiante, une observation passive de ce corps permet donc de le visualiser. En radar, pour détecter une cible, il faut émettre un signal radar, ce qui implique que l'émetteur peut devenir détectable. Par contre, l'inconvénient majeur de l'infrarouge est le rayonnement parasite émis par l'environnement de l'objet à détecter.

Le but de cette thèse est de modéliser le rayonnement infrarouge de la surface de la mer mesuré par le détecteur. Il est composé du rayonnement intrinsèque de la surface de l'océan, caractérisé par l'émissivité, du rayonnement atmosphérique réfléchi sur la surface, déterminé par la réflectivité, et du rayonnement atmosphérique.

Le premier chapitre introduit les concepts mathématiques utilisés pour décrire une surface stochastique. En théorie, l'océan est décrit par un processus stochastique stationnaire et ergodique du second ordre. Cette représentation nécessite la connaissance du spectre ou de la fonction d'autocorrélation obtenue par transformée de Fourier inverse du spectre, et de la densité de probabilité des hauteurs de la vague. La littérature fournit le spectre, ainsi la fonction d'autocorrélation est modélisée rigoureusement en coordonnées cylindriques [17]-[18]. La variance des pentes est également calculée [21]. Cette grandeur est introduite dans la fonction d'ombre.

Le creux des vagues implique que lorsque la surface de la mer est éclairée, une partie de celle-ci est invisible par l'observateur. La grandeur quantifiant ce phénomène est la fonction d'ombre définie comme le rapport de la surface illuminée sur la surface totale. L'ombre est un paramètre pertinent dans la détermination du rayonnement d'une surface. Les premiers scientifiques ayant travaillé sur ce sujet sont Wagner [22] et Smith [23]-[24]. Leurs approches supposent que la densité de probabilité conjointe des hauteurs et des pentes de la surface est décorrélée et gaussienne, ce qui implique que la fonction d'ombre est indépendante de la fonction d'autocorrélation. De plus leur formalisme ne s'applique qu'à une surface monodimensionnelle. Le but du second chapitre est donc d'exprimer dans le cas monodimensionnel, la fonction d'ombre de Wagner et de Smith en considérant un processus gaussien corrélé [25], puis de valider le modèle obtenu.

La fonction d'ombre analytique exacte, donnée par une série, est celle de Ricciardi et Sato [27]-[28]. Elle est également étudiée. Enfin les résultats monodimensionnels corrélé et décorrélé sont étendus au cas bidimensionnel. Ainsi les fonctions d'ombre monostatique et bistatique monodimensionnelle et bidimensionnelle sont déterminées analytiquement, selon une fonction d'autocorrélation quelconque et pour une longueur d'observation donnée.

Dans le dernier chapitre, l'émissivité et la réflectivité d'une surface stochastique bidimensionnelle sont calculées. Leur détermination est basée sur la loi de Kirchhoff, et la théorie de l'optique géométrique. Cette dernière délimite la validité du modèle en longueur d'onde par rapport au rayon de courbure de la surface. Quelques articles sur le calcul de l'émissivité ont été publiés. Chacun d'entre eux impose des hypothèses : la surface est considérée monodimensionnelle [36]-[37], l'effet de l'ombre n'est pas pris en compte [36]-[38], et dans [33] la fonction d'ombre monodimensionnelle est utilisée pour quantifier l'ombre d'une surface bidimensionnelle. Dans l'ensemble de ces articles la polarisation n'est pas introduite. Ainsi nous avons développé un modèle, qui englobe l'émissivité et la réflectivité, basé sur [33], mais qui supprime l'ensemble des hypothèses, en incluant la fonction d'ombre bidimensionnelle. C'est un des aspects novateurs de ce travail. De plus nous avons introduit la polarisation qui permet d'enrichir le traitement. Des simulations sont réalisées sur la mer, selon différents paramètres : angle d'incidence, direction d'observation par rapport au vent, vitesse du vent, longueur d'onde, polarisations verticale et horizontale. Enfin une scène thermique est simulée en incluant le rayonnement atmosphérique [34].

CHAPITRE I

ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA MER

I.1 INTRODUCTION

La première partie de ce chapitre aborde les concepts fondamentaux introduits dans l'étude du comportement de la surface de la mer, caractérisée par les régimes de capillarité et de gravité. La représentation déterministe de la mer est très complexe à modéliser en raison des phénomènes non linéaires de transfert d'énergie entre les vagues. L'océan présente un aspect désordonné, une approche probabiliste est donc utilisée. Le second paragraphe aborde cet aspect. Cette approche nécessite la connaissance du spectre de mer bidimensionnel, qui donne la répartition de l'énergie des vagues en fonction du nombre d'onde et de la direction par rapport au vent. C'est l'objet de la troisième partie.

La dernière partie constitue l'originalité de ce chapitre. Elle présente la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs de la mer. Contrairement à la littérature, Celle-ci est modélisée [18]-[19] à partir du spectre de Elfouhaily, Chapron, Katzaros et Vandemark [11] établi en 1997, en tenant compte des propriétés générales du spectre. Ce calcul est nécessaire car la fonction d'autocorrélation intervient dans la détermination de la fonction d'ombre avec corrélation. Elle peut être également introduite dans le calcul du champ électromagnétique diffusé par une surface océanique [10], [19]. Les variances des pentes sont également déterminées [21], afin de caractériser la densité de probabilité des pentes.

I.2 GÉNÉRALITÉS

Le premier paragraphe introduit la formation des vagues. Dans le second, la relation de dispersion régissant les vagues de gravité et de capillarité est explicitée. Enfin la notion de fetch est introduite.

I.2.1 Formation des vagues

Si un vent commence à souffler sur une mer calme, des vagues de courte longueur d'onde naissent, appelées également vaguelettes, risées ou vagues de capillarité. La force de restauration de ces vagues est principalement la tension superficielle.

Après formation, leur amplitude et leur longueur d'onde vont augmenter par des transferts d'énergie non linéaires et par recouvrement. Ces ondes sont nommées vagues de gravité, car elles sont entretenues par la force de gravité.

Si le vent souffle pendant un temps suffisant, les vagues vont atteindre un régime stationnaire. S'il arrête de souffler, les ondes de courte longueur d'onde s'évanouissent rapidement, tandis que les ondes longues s'atténuent très lentement, et peuvent se propager sur de grandes distances.

On distingue généralement deux types de mer : la mer du vent et la houle. La mer du vent se définit comme l'ensemble des vagues levées par le vent dans leur zone de formation. La houle correspond à une ancienne mer du vent, avec des vagues plutôt régulières d'amplitude et de période sensiblement constantes. En outre leur période est toujours plus grande que celle de la mer du vent.

I.2.2 Relation de dispersion

Contrairement aux ondes électromagnétiques se propageant dans le vide, les ondes de surface des océans sont dispersives, c'est-à-dire que leur vitesse de propagation varie avec la longueur d'onde.

I.2.2.1 Ondes de gravité

Les ondes de gravité sont gouvernées par un équilibre entre la gravité et l'inertie des vagues. Dans l'approximation linéaire, la pulsation de l'onde ω en rad/s s'exprime par l'équation de base suivante [1], [2] :

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (I.1)$$

où $g = 9,81 \text{ms}^{-2}$ représente l'accélération de la pesanteur, k la norme du vecteur d'onde en rad/m tel que $k = 2\pi/\lambda$, λ la longueur d'onde en mètre, et d la profondeur de l'eau en mètre. En eau profonde ($kd > 3$) l'équation (I.1) devient :

$$\omega = \sqrt{gk} \approx 3,13\sqrt{k} \quad (I.2)$$

La vitesse de phase en m/s est définie par :

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \approx 1,25\sqrt{\lambda} \quad (I.3)$$

Puisque la vitesse de phase des ondes de gravité est proportionnelle à la racine carrée de la longueur d'onde, les ondes de courte longueur d'onde se propagent moins vite que les ondes de longueur d'onde supérieure.

I.2.2.2 Ondes de capillarité

Le comportement des ondes de capillarité est caractérisé par la relation de dispersion suivante [1], [3] :

$$\omega^2 = \frac{\tau}{\rho} k^3 \tanh(kd) \quad (I.4)$$

où $\tau = 74 \cdot 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ est la tension superficielle de la surface de l'eau, et $\rho = 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ sa masse volumique dans les conditions normales de température et de pression. En eau profonde l'équation (I.4) s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{\tau}{\rho} k^3 \approx 7,4 \times 10^{-5} k^3 \quad (I.5)$$

La vitesse de phase en eau profonde est :

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{\tau k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\tau}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{21,6 \times 10^{-3}}{\sqrt{\lambda}} \quad (I.6)$$

Contrairement aux ondes de gravité, la célérité des ondes de capillarité est inversement proportionnelle à la racine carrée de la longueur d'onde.

1.2.2.3 Zone de transition

Dans la zone de transition, la vitesse de phase en eau profonde est donnée par :

$$v_{ph}^2 = \frac{g}{k} + \frac{\tau k}{\rho} \quad (I.7)$$

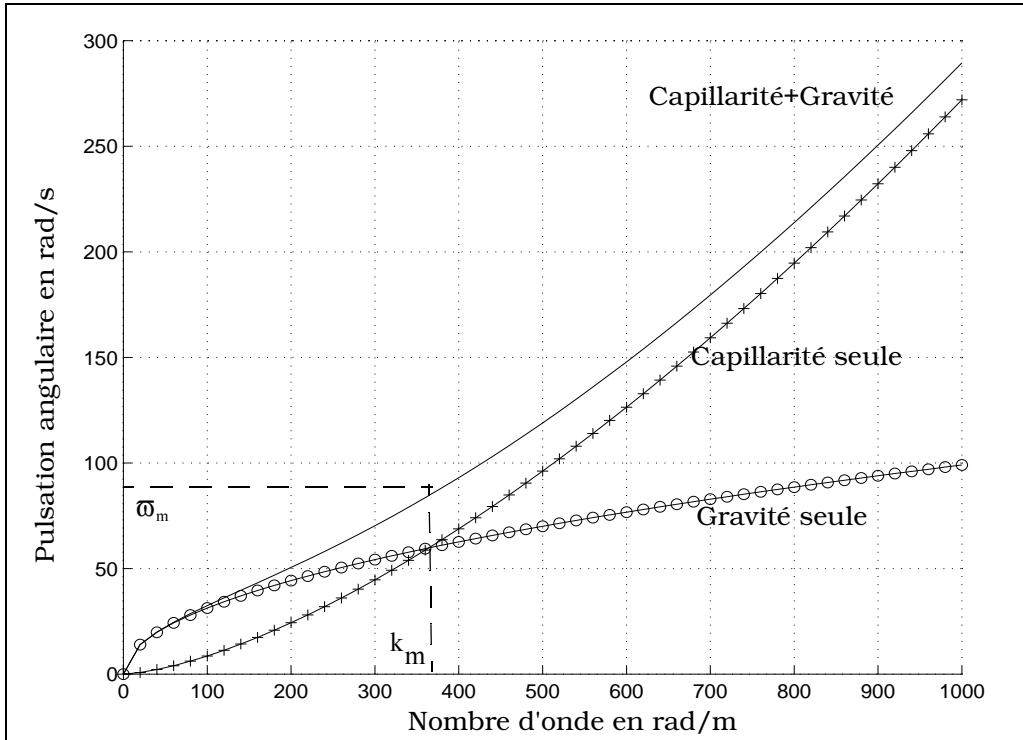
La vitesse minimale v_{phm} est obtenue en dérivant l'expression (I.7) par rapport à k et en l'annulant, soit :

$$k_m = \sqrt{\frac{g\rho}{\tau}} \Rightarrow v_{phm} = \sqrt[4]{\frac{4g\tau}{\rho}} \quad \text{et} \quad \omega_m = \sqrt{2gk_m} \quad (I.8)$$

soit $k_m = 364 \text{ rad/m}$, $v_{phm} = 23 \text{ cm/s}$, $\omega_m = 84,5 \text{ rad/s}$ et $\lambda_m = 1,73 \text{ cm}$. Finalement la pulsation ω , la vitesse de phase v_{ph} , et la vitesse de groupe v_g de l'onde s'écrivent en eau profonde :

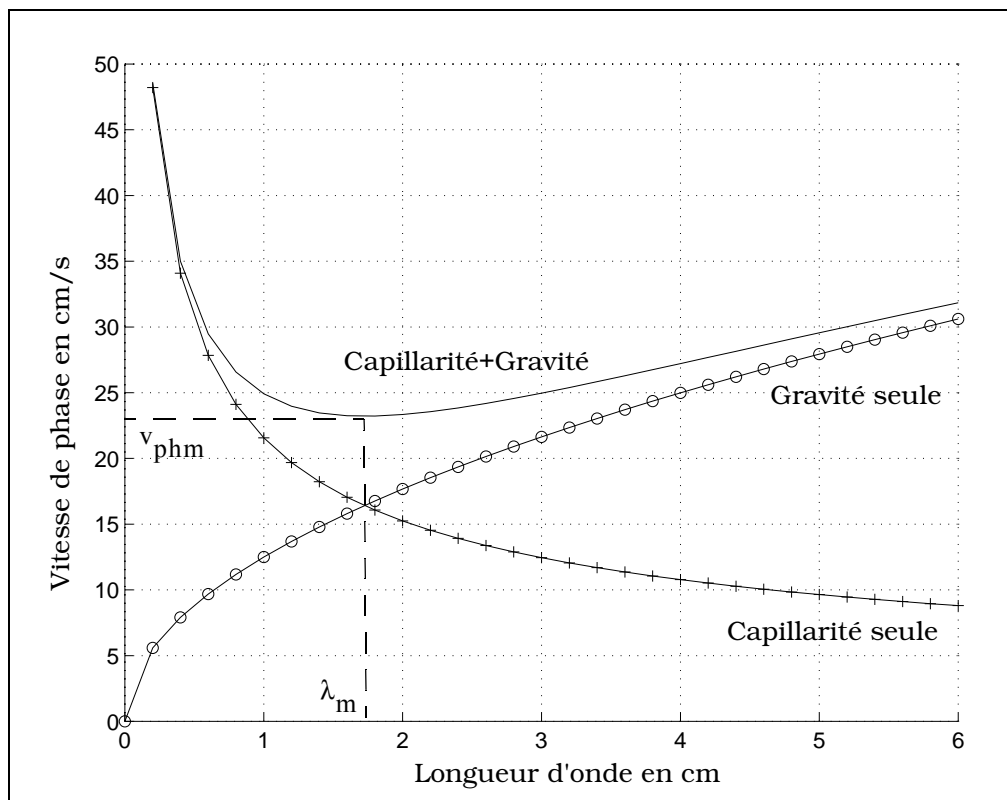
$$\omega^2 = gk \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2} \right) \quad v_{ph} = \sqrt{\frac{g}{k} \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2} \right)} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{g + 3g \frac{k^2}{k_m^2}}{\sqrt{gk \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2} \right)}} \quad (I.9)$$

Le graphe I.1 représente les variations de la pulsation angulaire en fonction du nombre d'onde.



Graphe I.1 Variation de la pulsation angulaire en fonction du nombre d'onde

Le graphe I.2 donne les variations de la vitesse de phase en fonction de la longueur d'onde. On note que pour les courtes longueurs d'onde, ce sont les vagues de capillarité qui prédominent, tandis que pour les grandes longueurs d'onde, ce sont les ondes de gravité qui l'emportent.



Graph I.2 Variation de la vitesse de phase en fonction de la longueur d'onde

I.2.2.4 Remarques

La relation de dispersion (I.2) régissant les vagues de gravité, en eau profonde, s'écrit en tenant compte des phénomènes non linéaires [11] :

$$\omega^2 = gk \left(1 + a^2 k^2 + \frac{5}{4} a^4 k^4 \right) \quad (I.10)$$

où a représente l'amplitude de l'onde. Lorsque $ak \ll 1$, c'est-à-dire dans le cas où la longueur d'onde est grande devant l'amplitude de l'onde, on retrouve l'expression (I.2). Par exemple, en ajoutant le premier terme $a^2 k^2$, on crée une crête plus aiguë et un creux plus aplati (figure I.1). Ce phénomène est observé en pratique.

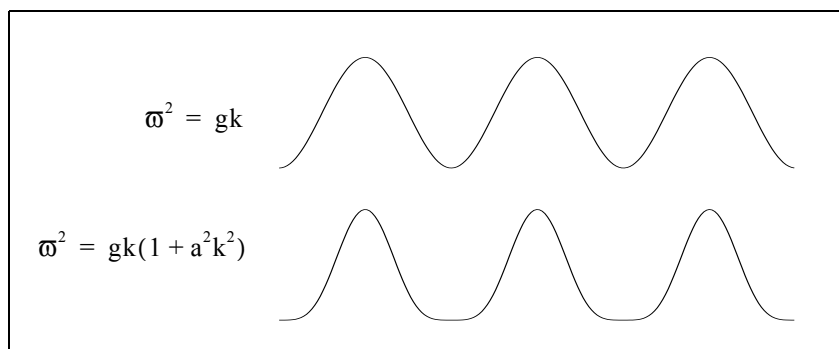


Figure I.1 Illustration de l'effet non linéaire

I.2.3 Notion de fetch

L'état de la mer en un point donné ne dépend pas uniquement de la force du vent soufflant localement, mais aussi de la distance appelée fetch [4] sur laquelle le vent a agi. Cette distance est celle parcourue par la vague sous ce vent (figure I.2).

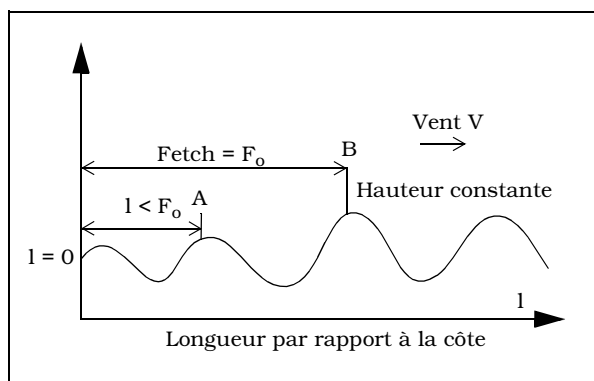


Figure I.2 Illustration du fetch

Soit un vent de vitesse constante V commençant à souffler de la côte vers un point situé à une distance quelconque de la côte. Si cette distance est très grande (point B), les vagues atteindront une amplitude maximale ne dépendant que de la vitesse V du vent. Les vagues auront crû sur un fetch F_0 de longueur liée à V . En revanche si le point est proche de la côte (point A), le fetch sera alors plus petit et l'amplitude des vagues dépendra de la distance à la côte. Ainsi, pour des vagues de célérité donnée, il apparaît une limite mobile qui sépare une zone pour laquelle la hauteur des vagues dépend de la distance à la côte (régime transitoire), d'une autre où la hauteur n'est fonction que de la vitesse du vent (régime stationnaire).

I.2.4 Conclusion

Les ondes en chaque point de la surface résultent donc d'une sommation d'ondes générées localement par le vent, et d'ondes provenant de régions et de directions autres. Ces interactions rendent le phénomène très difficile à quantifier. De plus, le mouvement de la surface de la mer est gouverné dans le cas général par un système d'équations non linéaires découlant des lois de l'hydrodynamique. La résolution de ce système est très complexe et nécessite des approximations. L'océan présente un état chaotique, c'est pourquoi une approche probabiliste est utilisée.

I.3 DESCRIPTION PROBABILISTE DE LA MER

Dans cette partie, les caractéristiques d'un processus aléatoire sont rappelées. Puis les méthodes utilisées pour générer une surface sont exposées. Cette opération est nécessaire au calcul de la fonction d'ombre numérique introduite dans le second chapitre. De nombreux exemples sont traités. Dans le dernier paragraphe les résultats sont appliqués sur le comportement de la mer.

I.3.1 Rappel sur les processus aléatoires

Un processus aléatoire (figure I.3) [6] peut être représenté par une famille de fonctions réelles ou complexes notée $\{x(t, \xi)\}$, où t est le temps et ξ l'élément des espaces des épreuves. Il existe deux façons de décrire un signal aléatoire (figure I.3) :

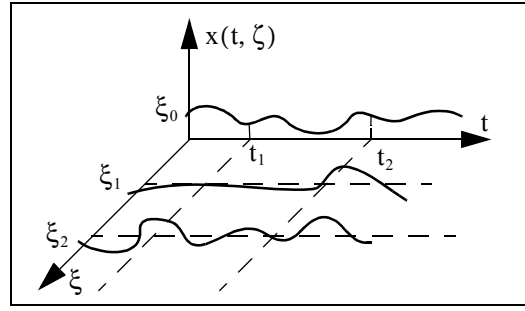


Figure I.3 Processus aléatoire

- pour un ξ_i donné, $x(t, \xi_i)$ est un signal réel aléatoire noté $x_i(t)$, considéré par convention de puissance moyenne finie. L'observation de ce signal (analyse ou mesure) permet de déterminer certaines caractéristiques, appelées moyennes temporelles : valeur moyenne (composante continue), valeur quadratique moyenne.

- à chaque instant donné t_i , le processus $x(t_i, \xi)$ est une variable aléatoire (VA) notée x_i . Son comportement statistique est décrit par sa fonction de répartition $F(x_i, t_i)$ ou par sa densité de probabilité $p(x_i, t_i)$. La connaissance de ces lois permet d'accéder aux principaux moments de la VA.

I.3.1.1 Statistique d'ordre un

La valeur moyenne statistique de la VA x_i est le moment d'ordre un :

$$m_x(t_i) = \int x_i p(x_i, t_i) dx_i = E[x_i(t_i)] \quad (\text{I.11})$$

E est appelée espérance mathématique. En général $m_x(t_1) \neq m_x(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$. Le moment centré du second ordre (variance) vaut :

$$\sigma_x(t_i) = E\{[x_i - m_x(t_i)]^2\} = E[x_i^2] - m_x(t_i)^2 = \int [x_i - m_x(t_i)]^2 p(x_i, t_i) dx_i \quad (\text{I.12})$$

$\sigma_x(t_i)$ mesure la dispersion de l'écart entre la VA et sa moyenne statistique.

I.3.1.2 Statistique d'ordre deux

Considérons deux variables aléatoires $x_1 = x(t_1)$ et $x_2 = x(t_2)$. La fonction d'autocorrélation notée R_0 est définie par:

$$R_0(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \iint x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{I.13})$$

I.3.1.3 Processus stationnaire

Un processus aléatoire est stationnaire au sens strict du terme, si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps. Il est stationnaire du deuxième ordre si ses statistiques d'ordre un et deux sont invariantes dans le temps. La densité de probabilité et la fonction d'autocorrélation ne dépendent plus que de l'écart $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_0(t_1, t_2) = R_0(\tau) \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_x(t_i) = m_x \\ \sigma_x(t_i) = \sigma_x \end{cases} \quad \forall t_i \quad (\text{I.14})$$

Un processus aléatoire est stationnaire au sens large, si sa valeur moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont constantes au cours du temps. En pratique $R_0(\tau)$ permet de donner une indication sur la rapidité de la variation du signal.

Un phénomène physique aléatoire n'est jamais rigoureusement stationnaire. Il possède une phase transitoire d'établissement au moment de sa création. Il est également souvent influencé à certaines époques de son histoire par l'évolution du système auquel il est associé.

1.3.1.4 Ergodisme

Un processus aléatoire est ergodique si toutes les valeurs moyennes statistiques s'identifient aux valeurs moyennes temporelles. Il existe différents niveaux n d'ergodisme.

$$\bar{x}^n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^n(t) dt = \int x^n p(x) dx \quad (I.15)$$

Lorsque l'ergodicité est vérifiée, l'estimation des propriétés statistiques de $x(t, \xi)$ est réalisée à partir d'une observation unique de $x(t)$. Par exemple la fonction d'autocorrélation pour un processus stationnaire et ergodique s'écrit :

$$R_0(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (I.16)$$

L'hypothèse d'ergodisme est souvent difficile à vérifier. La stationnarité n'entraîne pas l'ergodisme comme le montre la figure I.4.

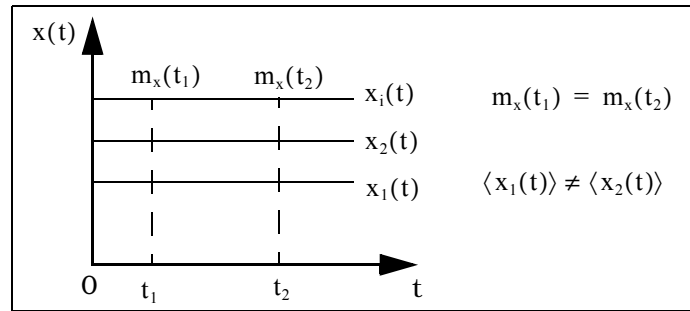


Figure I.4 Signal stationnaire non ergodique

1.3.1.5 Densité spectrale de puissance

Le spectre $S_0(f)$ d'un processus aléatoire stationnaire est la transformée de Fourier TF de sa fonction d'autocorrélation $R_0(\tau)$ (théorème de Wiener-Khintchine).

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad \text{inversement} \quad R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (I.17)$$

soit :

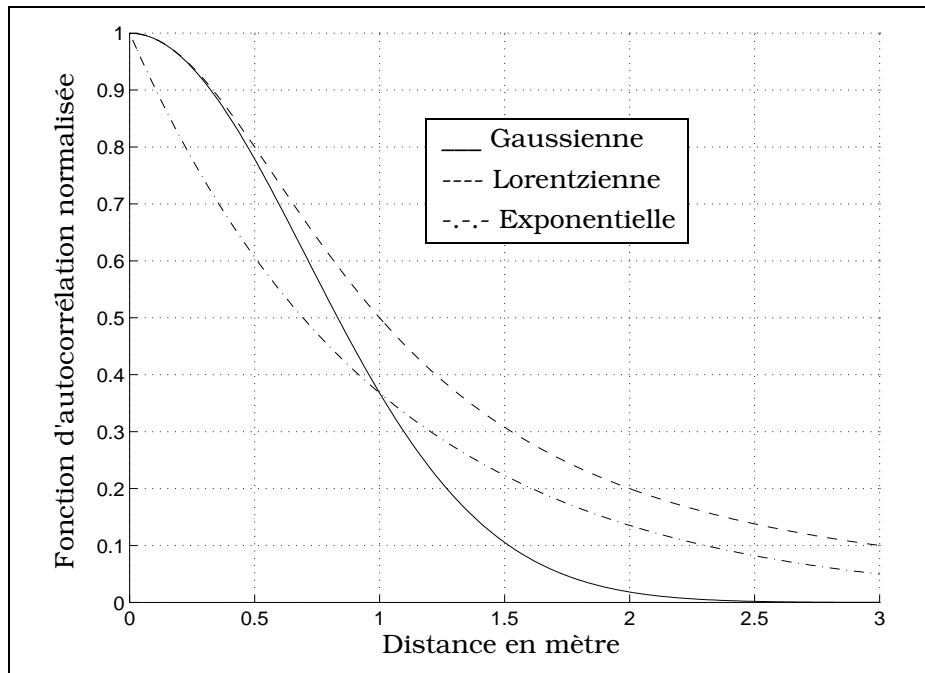
$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau \quad (I.17a)$$

Le spectre est donc réel, si le second terme de l'équation (I.17a) est nul, ce qui implique une fonction d'autocorrélation paire. Cette propriété devra être appliquée lors de la modélisation de la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs de la mer. La variance ou puissance du signal ω^2 s'obtient à partir du spectre par :

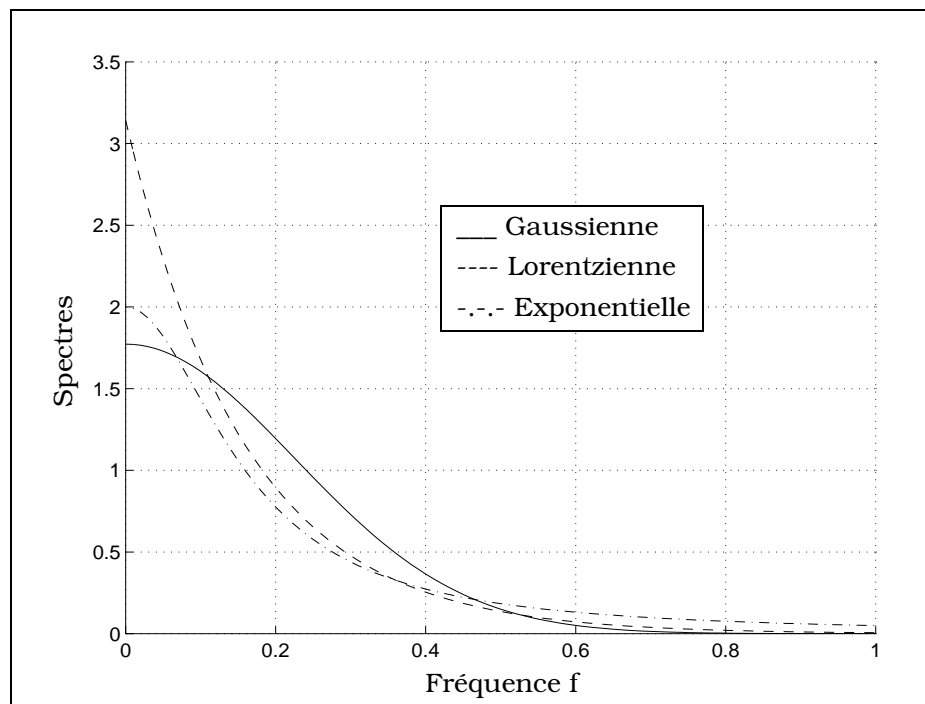
$$\omega^2 = R_0(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) df \quad (I.18)$$

Sur le graphe I.3 les fonctions d'autocorrélation $R_0(\tau)$ normalisées (variance $\omega^2 = 1$) de profil gaussien, lorentzien et exponentiel sont tracées en fonction de la distance τ , pour une longueur de corrélation $L_C = 1$ m. Leur expression et leur transformée de Fourier $S_0(f)$ respective sont données dans le tableau I.1.

Sur le graphe I.4 les spectres correspondant sont représentés en fonction de la fréquence f . Il est observé qu'en basse fréquence les spectres obtenus à partir des fonctions d'autocorrélation lorentzienne et exponentielle sont plus importantes que celle calculée dans le cas gaussien. Pour des fréquences intermédiaires, c'est le phénomène inverse, et pour les hautes fréquences, c'est le cas exponentiel qui est le plus énergétique.



Graphe I.3 Fonctions d'autocorrélation en fonction de la distance τ pour $L_C = 1$ m



Graphe I.4 Spectres obtenus à partir des fonctions d'autocorrélation du graphe I.3

	Gaussien	Lorentzien	exponentiel
$R_0(\tau)$	$\omega^2 \cdot \exp\left(-\frac{\tau^2}{L_C^2}\right)$	$\frac{\omega^2}{1 + (\tau/L_C)^2}$	$\omega^2 \cdot \exp\left(-\frac{ \tau }{L_C}\right)$
$S_0(f)$	$\omega^2 L_C \sqrt{\pi} \cdot \exp(-\pi^2 f^2 L_C^2)$	$\omega^2 L_C \pi \cdot \exp(-2\pi f L_C)$	$\frac{\omega^2 2L_C}{1 + (2\pi f L_C)^2}$

Tableau I.1 Fonctions d'autocorrélation particulières

I.3.1.6 Transformée de Fourier d'un signal cosinusoidal

Soit $R_C(\tau)$ la fonction d'autocorrélation définie par :

$$R_C(\tau) = R_0(\tau) \cos(2\pi f \tau) \quad (I.19)$$

En utilisant la propriété de la convolution dans le domaine de Fourier, le spectre associé s'écrit :

$$S_C(f) = \text{TF}[R_0(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)] = \text{TF}[R_0(\tau)] * \text{TF}[\cos(2\pi f_0 \tau)] \quad (I.19a)$$

où * désigne le produit de convolution, donc :

$$S_C(f) = \frac{S_0(f)}{2} * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad \text{avec} \quad S_0(f) = \text{TF}[R_0(\tau)] \quad (I.19b)$$

avec δ la fonction de Dirac, soit :

$$S_C(f) = \frac{1}{2} [S_0(f + f_0) + S_0(f - f_0)] \quad (I.20)$$

Multiplier (figure I.5) la fonction d'autocorrélation $R_0(\tau)$ supposée paire par la fonction cosinus de période $1/f_0$, est équivalent à traduire le spectre $S_0(f)$ en f_0 et en $-f_0$ obtenu sans la fonction cosinus, et le diviser par deux.

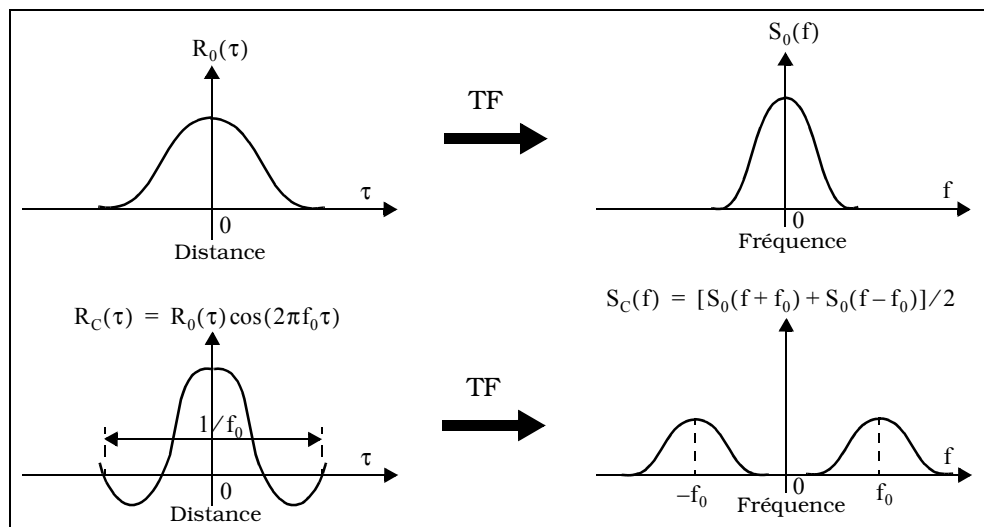


Figure I.5 Transformée de Fourier d'un signal cosinusoidal

I.3.2 Génération d'une surface

Pour une surface régie par un processus ergodique et stationnaire du second ordre, son comportement est parfaitement déterminé par les connaissances de son spectre ou de sa fonction d'autocorrélation, et de sa densité de probabilité des hauteurs [6].

Le calcul numérique de la fonction d'ombre introduite dans le second chapitre nécessite de générer une surface. Le but de ce paragraphe est donc d'illustrer les différentes méthodes utilisées pour générer une surface selon les choix de la distribution des hauteurs et de la fonction d'autocorrélation.

I.3.2.1 Généralités

Soit $x(i)$ le signal d'entrée échantillonné connu, $y(i)$ le signal de sortie à déterminer et $\{g(i), G(f), G(z)\}$ les réponses impulsionnelles spatiale, fréquentielle et en z du filtre. Le but est de calculer les coefficients du filtre [7], connaissant les fonctions d'autocorrélation respectives $R_x(i), R_0(i)$ des échantillons $x(i)$ et $y(i)$.

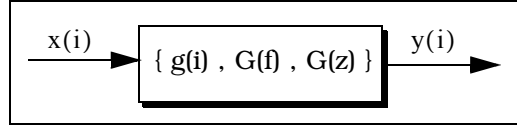


Figure I.6 Configuration du problème

Deux méthodes peuvent être utilisées. La première est basée sur la transformée en z , et la seconde sur la transformée de Fourier.

Première méthode basée sur la transformée en z

L'outil mathématique utilisé pour les signaux discrets est en général la transformée en z . Elle se définit pour un signal $x(i)$ par :

$$X(z) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x(i) \cdot z^{-i} \quad (I.21)$$

Une propriété intéressante découlant de cette définition est le décalage d'un signal $y(i) = x(i - i_0)$:

$$Y(z) = z^{-i_0} \cdot X(z) \quad (I.22)$$

Si $X(z)$ est la transformée en z d'un processus aléatoire stationnaire du second ordre $x(i)$, de densité spectrale de puissance $S_x(z)$, alors $Y(z)$ qui est la transformée en z du signal $y(i)$ en sortie du filtre, est un processus aléatoire stationnaire du second ordre, dont la densité spectrale de puissance $S_0(z)$ vérifie :

$$S_0(z) = G(z)G\left(\frac{1}{z}\right)S_x(z) \quad (I.23)$$

En appliquant à l'entrée du filtre, un bruit blanc de densité spectrale de puissance définie par :

$$S_x(z) = \text{cste} = \omega_b^2 \quad (I.24)$$

où ω_b^2 est la variance du bruit, la relation (I.23) devient :

$$G(z)G\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{S_0(z)}{\omega_b^2} \quad (I.25)$$

De plus :

$$y(i) = g(i) * x(i) \quad (I.26)$$

où $*$ désigne le produit de convolution. L'équation (I.26) peut s'écrire également :

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (I.27)$$

Ainsi connaissant $G(z)$ calculé à partir de l'équation (I.25), le signal de sortie $Y(z)$ est déterminé en appliquant la relation (I.27). Cette méthode sera illustrée avec la fonction d'autocorrélation exponentielle.

Seconde méthode basée sur la transformée de Fourier

Si $x(i)$ est un processus aléatoire stationnaire du second ordre, de densité spectrale de puissance $S_x(f)$, alors $y(i)$ est un processus aléatoire stationnaire du second ordre, dont la densité spectrale de puissance $S_0(f)$ vérifie :

$$S_0(f) = |G(f)|^2 \cdot S_x(f) \quad (I.28)$$

L'équation (I.28) est l'équivalente de (I.23) dans le domaine fréquentiel. Si la réponse impulsionnelle fréquentielle est réelle (fonction d'autocorrélation paire), alors on peut écrire :

$$G(f) = \sqrt{\frac{S_0(f)}{S_x(f)}} \quad (I.28a)$$

En substituant l'équation (I.28a) dans (I.26), $y(i)$ s'exprime par :

$$y(i) = \text{TF}^{-1} \left[\sqrt{\frac{S_0(f)}{S_x(f)}} \right] * x(i) \quad (I.29)$$

En appliquant à l'entrée du filtre, un bruit blanc de densité spectrale de puissance définie par la relation (I.24), le signal $y(i)$ de sortie est donné par :

$$y(i) = \frac{1}{\omega_b} \cdot w(i) * x(i) \quad \text{avec} \quad w(i) = \text{TF}^{-1}[\sqrt{S_0(f)}] \quad (I.30)$$

Ainsi connaissant les coefficients du filtre $w(i)$, le signal de sortie $y(i)$ est déterminé en appliquant la convolution. Cette méthode repose donc sur la détermination de la transformée Fourier inverse de la racine carrée de la densité spectrale de puissance $S_0(f)$. Elle sera appliquée sur des fonctions d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne.

Choix de la méthode

La première méthode est basée sur la transformée en z . Elle repose d'une part sur le calcul de la transformée en z de la fonction d'autocorrélation, et d'autre part sur la détermination de $G(z)$ à l'aide de l'équation (I.25), mais malheureusement l'identification n'est pas toujours immédiate. Dans ce cas $G(z)$ est décomposé en quotient de deux polynômes, dont les coefficients sont évalués à l'aide d'algorithmes plus ou moins complexes. Par exemple on peut citer l'algorithme de Levinson qui s'applique lorsque $G(z)$ ne possède que des pôles (filtre à réponse impulsionnelle infinie RII ou autorégressif AR), et celui de Durbin lorsque $G(z)$ n'a que des zéros (filtre à réponse impulsionnelle finie RIF ou à moyenne mobile MA).

La seconde méthode basée sur la transformée de Fourier a l'avantage de donner une expression (I.30) analytique du signal de sortie souhaitée, si le calcul de la racine carrée de la transformée Fourier inverse de la fonction d'autocorrélation est possible analytiquement. Dans le cas contraire, la méthode devient numérique.

1.3.2.2 Applications

Pour des fonctions d'autocorrélation gaussienne (indice g) et lorentzienne (indice l) nous avons respectivement (tableau I.1) :

$$\begin{cases} \sqrt{S_{0g}(f)} = \omega \sqrt{L_C} \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2 L_C^2}{2}\right) \\ \sqrt{S_{0l}(f)} = \omega \sqrt{L_C} \pi \exp(-\pi f L_C) \end{cases} \quad (I.31)$$

En appliquant la relation (I.30), les coefficients du filtre s'écrivent dans chacun des cas :

$$\begin{cases} w_g(i) = \omega \sqrt{\frac{2}{L_c \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{2i^2}{L_c^2}\right) \\ w_l(i) = 2\omega \sqrt{\frac{1}{L_c \pi}} \frac{1}{1 + (2i/L_c)^2} \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

La quantité $\text{TF}^{-1}[\sqrt{S_0(f)}]$ étant impossible à calculer analytiquement pour un profil exponentiel (tableau I.1), la méthode basée sur la transformée en z notée TZ est utilisée. La fonction d'autocorrélation $R_0(i)$ s'exprime alors par :

$$R_0(i) = \omega^2 \cdot \exp\left(-\frac{|i|}{L_c}\right) = \omega^2 a^{|i|} \quad \text{avec} \quad a = \exp\left(-\frac{1}{L_c}\right) \quad (\text{I.33})$$

La définition de la transformée en z (relation (I.21)) donne :

$$\text{TZ}(a^{|i|}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^{|i|} z^{-i} = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} a^m z^{-m} + \sum_{i=0}^{\infty} a^m z^m \quad (\text{I.34})$$

donc :

$$\text{TZ}(a^{|i|}) = -1 + \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^i}{1 - \frac{a}{z}} + \frac{1 - (az)^i}{1 - az} \right] = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} + \frac{1}{1 - az} - 1 \quad \text{car} \quad |a| < 1 \quad (\text{I.34a})$$

En substituant l'équation (I.34a) dans (I.33) nous avons :

$$\text{TZ}[R_0(i)] = S_0(z) = \frac{\omega^2(1 - a^2)}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \quad (\text{I.35})$$

En identifiant les relations (I.25) et (I.35), la réponse impulsionnelle du filtre $G(z)$ est :

$$G(z) = \frac{\omega \sqrt{1 - a^2}}{\omega_b(1 - az)} \quad (\text{I.36})$$

$G(z)$ est donc un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou autorégressif (AR), composé d'un pôle a dont le module est strictement inférieur à un, donc le filtre est stable.

L'équation (I.27) donne :

$$Y(z) - az \cdot Y(z) = \frac{\omega}{\omega_b} \sqrt{1 - a^2} X(z) \quad (\text{I.37})$$

En utilisant la propriété (I.22), l'équation récurrente du filtre de fonction d'autocorrélation exponentielle est alors :

$$y(i+1) = e^{\frac{1}{L_c}} \left[y(i) - \frac{\omega}{\omega_b} \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{L_c}}} \cdot x(i) \right] \quad (\text{I.38})$$

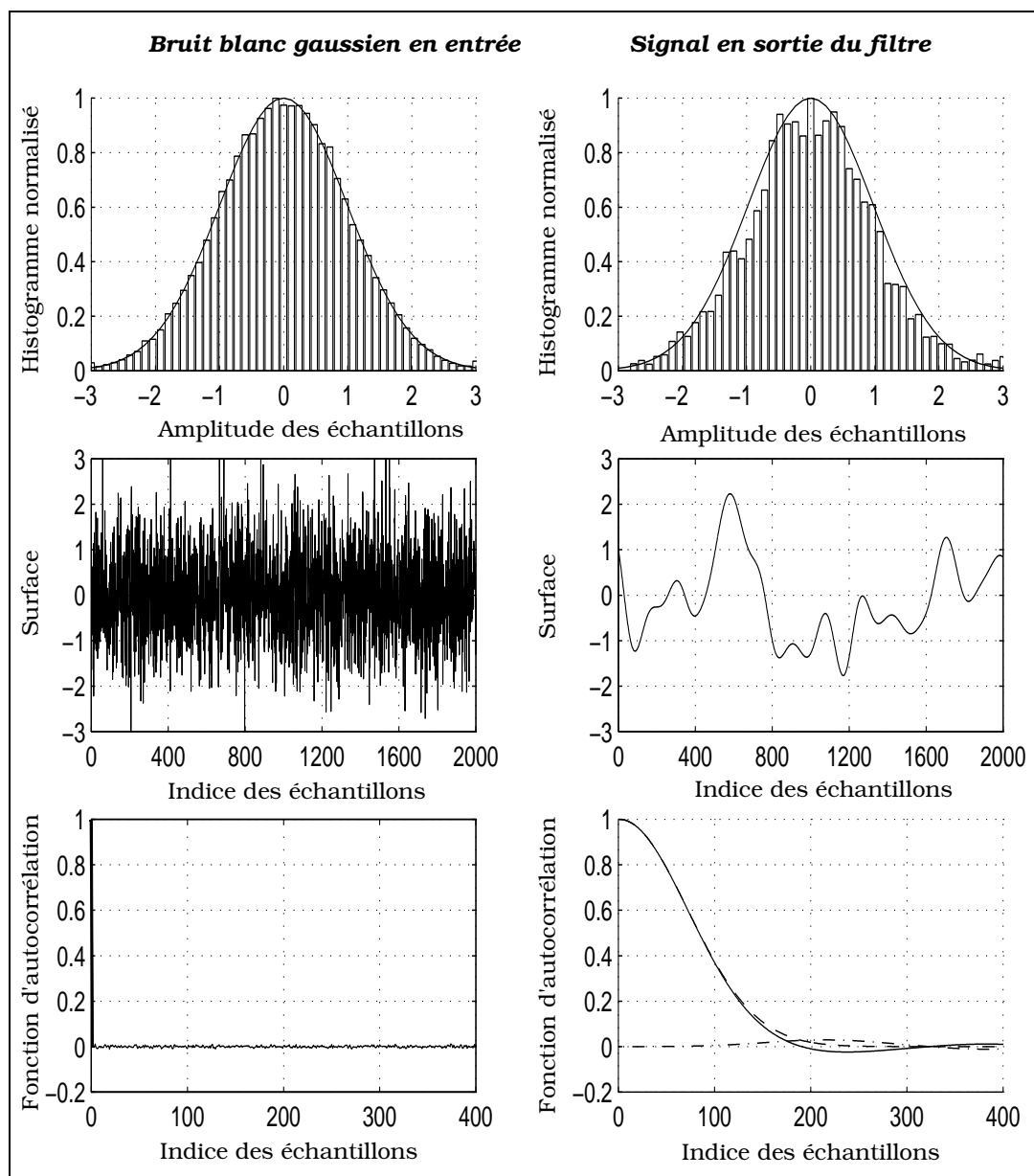
I.3.2.3 Simulations

Cas d'une distribution gaussienne à une dimension

Dans cette partie la densité de probabilité des hauteurs ξ est choisie gaussienne :

$$p_G(\xi) = \frac{1}{\omega \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\omega^2}\right) \quad (\text{I.39})$$

où ω^2 est la variance des hauteurs. Sur le graphe I.5 sont représentées les caractéristiques d'entrée et de sortie d'un filtre répondant à une fonction d'autocorrélation gaussienne de variance ω^2 unitaire. Dans cet exemple, la longueur de corrélation L_C est égale à 100 unités. Un bruit blanc de variance ω_b^2 unitaire, de moyenne m_b nulle, composé de 50000 échantillons est généré à l'entrée du filtre.



Graphe I.5 Surface d'un processus gaussien de fonction d'autocorrélation gaussienne

Sur la figure du haut à gauche, l'histogramme normalisé des échantillons d'entrée est comparé à sa distribution théorique. On observe un comportement gaussien des deux courbes dont l'écart est très faible. On note également que la moyenne est nulle (centrée en zéro) et que la totalité de l'énergie est comprise entre $-3\omega_b$ et $3\omega_b$.

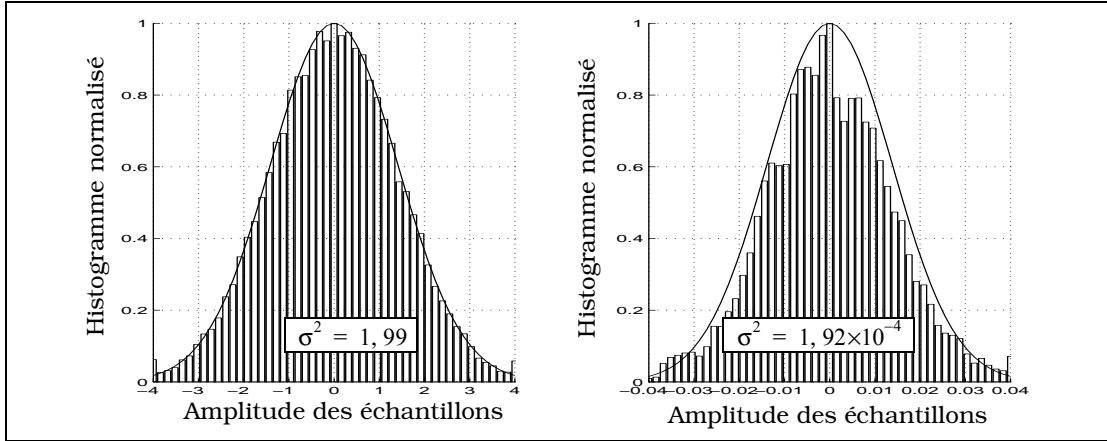
Sur la figure du haut à droite, l'histogramme normalisé des échantillons de sortie, et leur distribution théorique sont tracés. On note également un comportement gaussien dû à la linéarité du filtre, dont la moyenne est nulle.

Sur les figures du centre, sont représentées respectivement le comportement des surfaces à l'entrée et à la sortie du filtre, sur vingt longueurs de corrélation. En entrée le signal est très bruité tandis qu'en sortie il devient plus lisse, dû à la corrélation.

Sur les figures du bas, les variations des fonctions d'autocorrélation normalisées des échantillons d'entrée et de sortie sont tracées. En entrée, on observe un pic centré en zéro, qui théoriquement est la fonction de Dirac $\delta(i)$, tandis qu'en sortie nous obtenons la fonction d'autocorrélation souhaitée. En effet, l'écart observé entre la courbe théorique, et celle calculée à partir de la surface est faible $R_s(i)$. Elle est définie par :

$$R_s(i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y(j)y(j+i) \quad (I.40)$$

où N est le nombre d'échantillons. Le filtre étant linéaire, on observe sur le graphe I.6 que les distributions des pentes à l'entrée et à la sortie du filtre sont également gaussiennes [9]. σ^2 désigne la variance des pentes.



Graphe I.6 Distributions des pentes des surfaces générées sur le graphe I.5

Par définition la variance des pentes σ^2 s'écrit :

$$\sigma^2 = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [x(\tau + \Delta\tau) - x(\tau)]^2 \rangle}{(\Delta\tau)^2} \quad (I.41)$$

où $\langle \rangle$ est l'opérateur moyen (paragraphe I.3.1.4). En utilisant l'équation (I.16), la variance des pentes devient :

$$\sigma^2 = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [x(\tau + \Delta\tau)]^2 \rangle + \langle [x(\tau)]^2 \rangle - 2\langle x(\tau)x(\tau + \Delta\tau) \rangle}{(\Delta\tau)^2} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{2[\omega^2 - R_0(\tau)]}{(\Delta\tau)^2} \quad (I.41a)$$

En développant $R_0(\tau)$ au second ordre et en supposant que $R_0(\tau)$ est paire, on obtient :

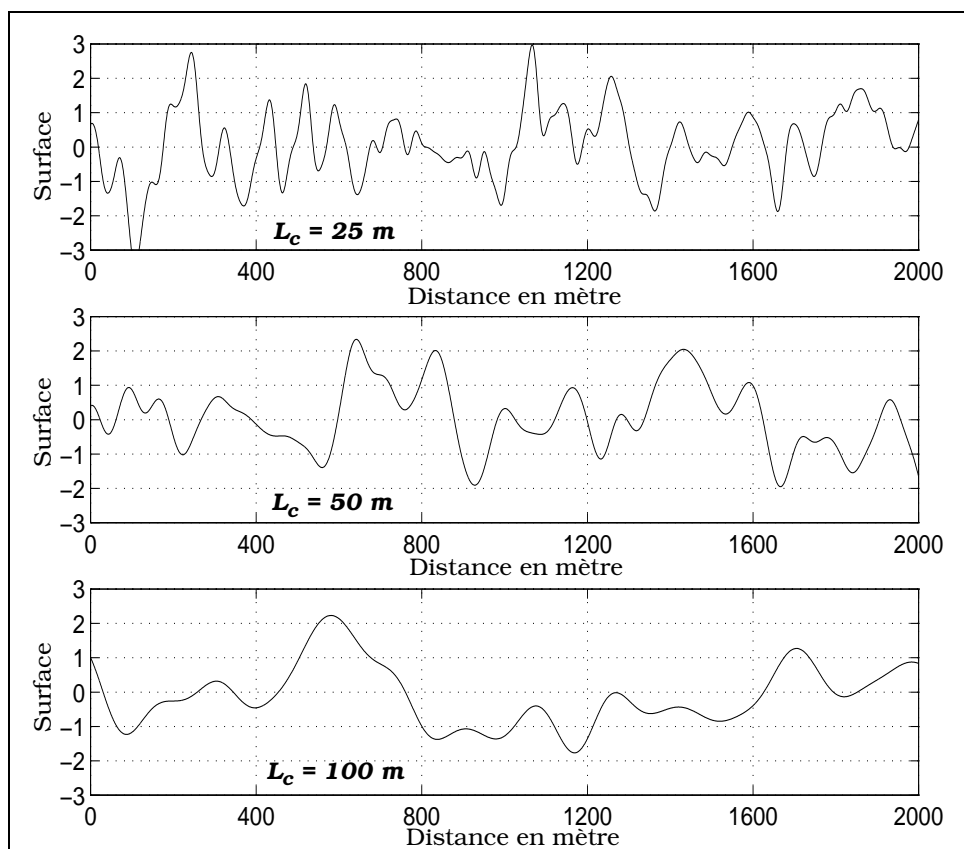
$$\sigma = \sqrt{-R_2(0)} \quad \text{avec} \quad R_2(\tau) = d^2R_0(\tau)/d\tau^2 \quad (I.41b)$$

L'écart type des pentes est donc égal à la racine carrée de moins la dérivée seconde en zéro $R_2(0)$ de la fonction d'autocorrélation. Pour un profil gaussien, σ s'écrit :

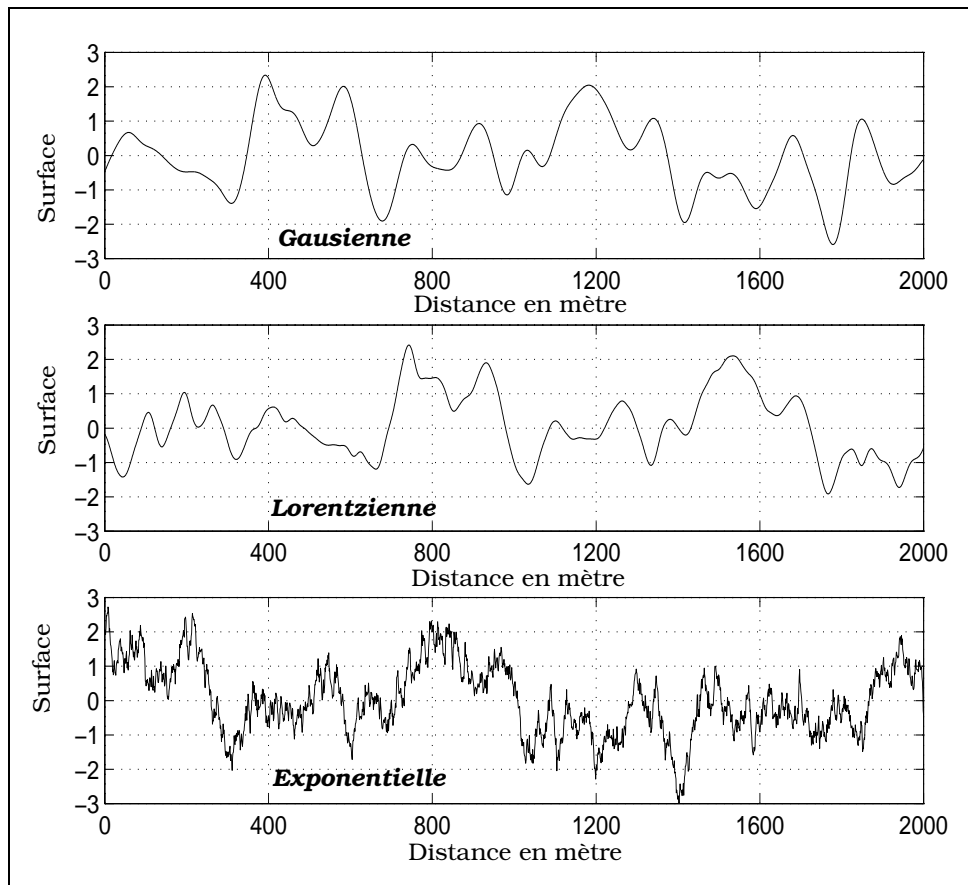
$$\sigma = \omega\sqrt{2}/L_c \quad (I.42)$$

Ainsi on observe que l'écart type des pentes est inversement proportionnelle à la longueur de corrélation. Elle vaut théoriquement 2×10^{-4} pour $\{L_c = 100, \omega = 1\}$ mètres, expérimentalement on trouve $\sigma = 1,92 \times 10^{-4}$ (graphe I.6).

Sur le graphe I.7 la surface est représentée pour différentes longueurs de corrélation $L_c = \{25, 50, 100\}$ m. Sur le graphe I.8 la surface est tracée pour des fonctions d'autocorrélation gaussienne, lorentzienne et exponentielle avec $L_c = 50$ m et $N = 50000$. On observe que la surface obtenue avec le profil exponentiel apparaît plus rugueuse que celle déterminée avec les autres profils, car son spectre favorise les hautes fréquences (graphe I.4). Entre le profil gaussien et lorentzien le comportement des surfaces est semblable, avec néanmoins des largeurs de vagues plus importantes dans le cas lorentzien, car son spectre associé est plus énergétique en basse fréquence que celui obtenu dans le cas d'une gaussienne (graphe I.4).



Graph 1.7 Comportement de la surface selon la longueur de corrélation, pour un processus gaussien dont la fonction d'autocorrélation est gaussienne



Graph 1.8 Comportement de la surface selon la fonction d'autocorrélation, pour une longueur de corrélation de 50 m d'un processus gaussien

Cas d'une distribution de Laplace à une dimension

La densité de probabilité de Laplace des hauteurs ξ est définie par :

$$p_L(\xi) = \frac{1}{2\omega} \exp\left(-\frac{|\xi|}{\omega}\right) \quad (I.43)$$

La difficulté du problème est de générer cette distribution à partir de la distribution gaussienne connue, qui revient mathématiquement à trouver le changement de variable $\xi_L = f(\xi_G)$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$p_L(\xi_L)d\xi_L = p_G(\xi_G)d\xi_G \quad (I.44)$$

soit :

$$\frac{1}{2\omega} \exp\left(-\frac{|\xi_L|}{\omega}\right) d\xi_L = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_G^2}{2\omega^2}\right) d\xi_G \quad (I.44a)$$

Afin de lever l'indétermination sur la valeur absolue, nous allons résoudre cette équation différentielle pour $\xi_L \geq 0$. En intégrant de part et d'autre de l'égalité (I.44a) nous obtenons :

$$1 - \exp\left(-\frac{\xi_L}{\omega}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_G}{\omega\sqrt{2}}\right) \quad \text{pour} \quad \xi_L \geq 0 \quad (I.45)$$

où erf est la fonction erreur définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du \quad (I.45a)$$

L'équation (I.45) s'écrit alors :

$$\xi_L = -\omega \ln\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_G}{\omega\sqrt{2}}\right)\right] \quad \text{avec} \quad \xi_G \geq 0 \quad (I.46)$$

La condition $\xi_L \geq 0$ implique $\xi_G \geq 0$. En appliquant le même raisonnement pour $\xi_L < 0$, nous montrons finalement :

$$\begin{cases} \xi_L = -\omega \ln\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_G}{\omega\sqrt{2}}\right)\right] & \text{pour} \quad \xi_G \geq 0 \\ \xi_L = \omega \ln\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_G}{\omega\sqrt{2}}\right)\right] & \text{pour} \quad \xi_G < 0 \end{cases} \quad (I.47)$$

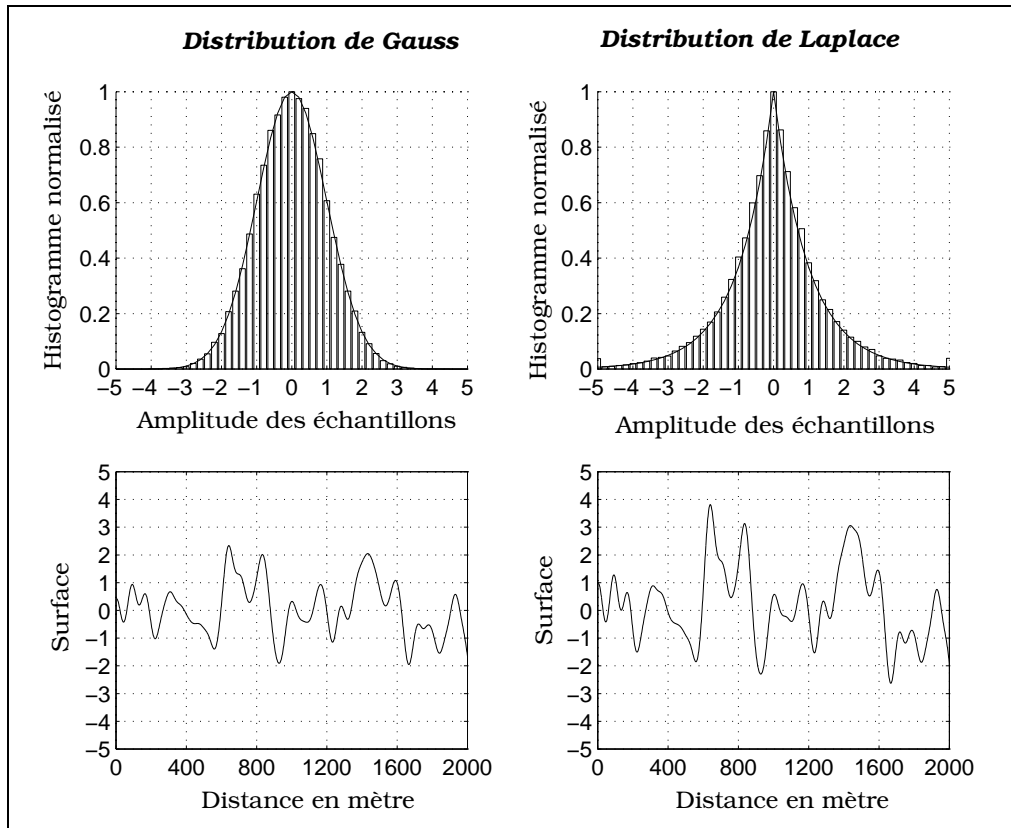
Sur les figures du haut du graphe I.9, les histogrammes normalisés des échantillons d'entrée d'une distribution de Gauss et de Laplace sont comparés à leur distribution théorique ($\omega^2 = 1$). On observe que dans chacun des cas, l'écart entre les deux courbes est très faible. La méthode mise en oeuvre pour générer la distribution de Laplace est donc correcte.

Sur les figures du bas du graphe I.9, les surfaces correspondantes et obtenues à partir d'une fonction d'autocorrélation gaussienne, dont la longueur de corrélation est de 50 mètres sont tracées en fonction de la distance. On observe un comportement identique des surfaces, avec des hauteurs plus grandes dans le cas de la distribution de Laplace.

Cas d'une surface bidimensionnelle

Dans le cas bidimensionnel, les coefficients du filtre selon la méthode basée sur la transformée de Fourier s'écrivent (équation (I.30) généralisée) :

$$y(i, j) = \frac{1}{\omega_b} \cdot w(i, j) * x(i, j) \quad \text{avec} \quad w(i, j) = \operatorname{TF}^{-1}[\sqrt{S_0(f_i, f_j)}] \quad (I.48)$$



Graph I.9 Comportement de la surface selon la distribution des hauteurs pour une fonction d'autocorrélation gaussienne de longueur de corrélation 50 m

Pour une fonction d'autocorrélation gaussienne anisotrope :

$$R_0(i, j) = \omega^2 \cdot \exp\left(-\frac{i^2}{L_{Cx}^2} - \frac{j^2}{L_{Cy}^2}\right) \quad (I.48a)$$

où $\{L_{Cx}, L_{Cy}\}$ sont respectivement les longueurs de corrélation dans les directions x et y . Par exemple x peut représenter la direction du vent et y la direction transverse au vent. Les coefficients du filtre s'écrivent alors :

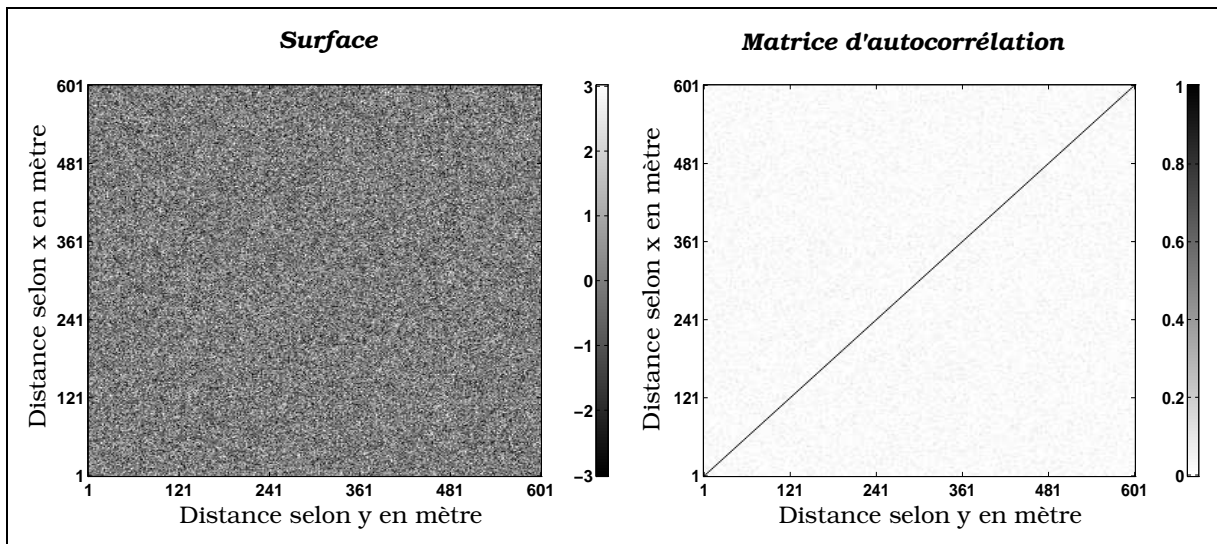
$$w_g(i, j) = \frac{1}{\omega} w_g(i) w_g(j) = 2\omega \sqrt{\frac{1}{L_{Cx} L_{Cy} \pi}} \exp\left(-\frac{2i^2}{L_{Cx}^2} - \frac{2j^2}{L_{Cy}^2}\right) \quad (I.49)$$

Sur le graph I.10 sont représentées le comportement de la surface en entrée du filtre, et les caractéristiques de la matrice de dimension 600×600 du bruit blanc gaussien de variance unitaire. On observe que la matrice d'autocorrélation est diagonale, caractéristique d'un bruit blanc.

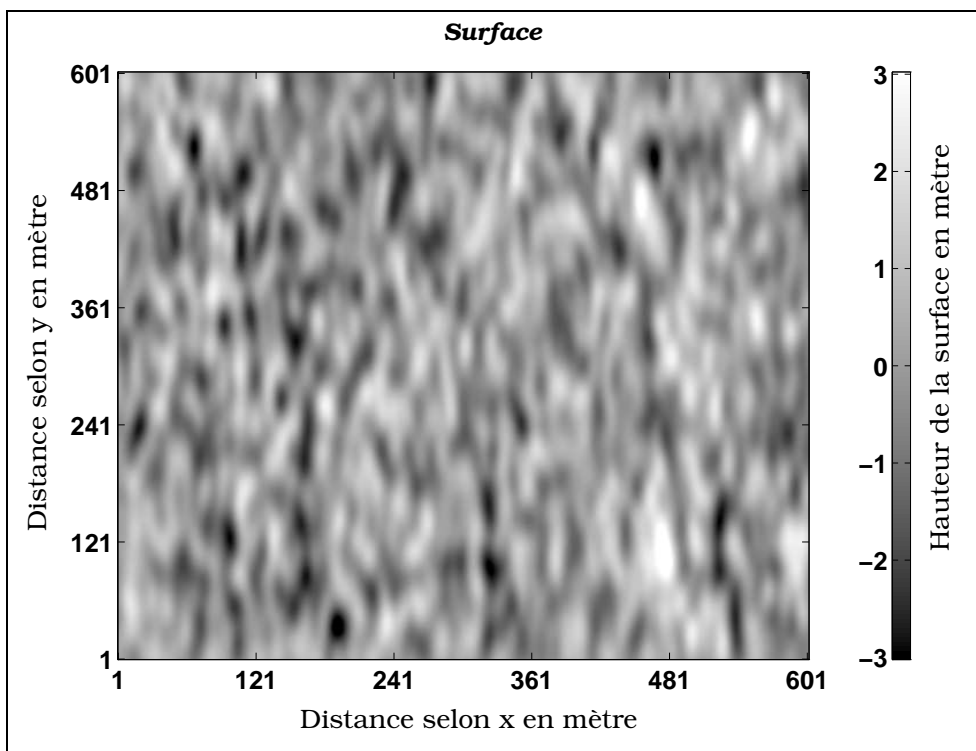
Sur le graph I.11 la surface correspondante de fonction d'autocorrélation gaussienne anisotrope avec $\{L_{Cx} = 10, L_{Cy} = 30\}$ m est tracée.

I.3.2.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, à partir de la fonction d'autocorrélation ou du spectre, et de la densité de probabilité, nous avons donné différentes méthodes pour générer une surface à une dimension ou à deux dimensions. En entrée un bruit blanc est appliqué de distribution donnée, puis il traverse un filtre dont les coefficients sont déterminés à partir de la fonction d'autocorrélation souhaitée, enfin une convolution est effectuée entre les échantillons du bruit et les coefficients du filtre. Numériquement, la convolution est réalisée dans le domaine de Fourier car les algorithmes sont plus rapides.



Graph I.10 Caractéristiques du bruit blanc gaussien à l'entrée du filtre



Graph I.11 Comportement d'une surface bidimensionnelle de fonction d'autocorrélation gaussienne anisotrope d'un processus gaussien avec $\{L_{Cx} = 10, L_{Cy} = 30\}$ m

I.3.3 Représentation stochastique de la mer

I.3.3.1 Introduction

Les fluctuations spatio-temporelles de la mer (figure I.7) sont représentées par un processus aléatoire $z(\hat{r}, t)$ à trois dimensions (deux composantes spatiales $\{x, y\}$ et une temporelle t). Le vecteur $\hat{r}(x, y)$, donne la position spatiale du point considéré dans un repère cartésien (x, y) , à un instant donné t . De plus le processus est supposé stationnaire et ergodique.

D'après le paragraphe précédent, en supposant que la surface de la mer est régie par un processus ergodique et stationnaire du second ordre, son comportement est parfaitement déterminé par les connaissances de son spectre ou de sa fonction d'autocorrélation, et de sa densité de probabilité des hauteurs des vagues [6].

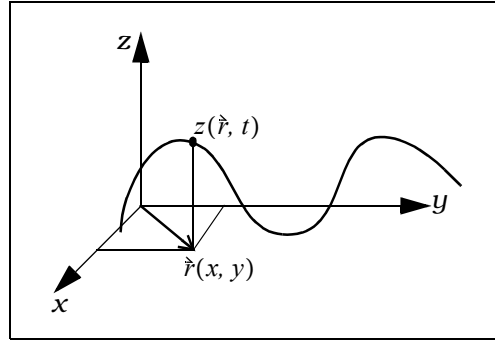


Figure I.7 Représentation spatio-temporelle de la mer

I.3.3.2 Modèle composite

D'après le paragraphe I.2.2, les vagues sont dites de capillarité (petites vagues) ou de gravité (grandes vagues). Ainsi, le modèle à deux échelles [10] communément admis pour représenter la surface de l'océan, s'obtient en superposant ces deux types de surfaces (figure I.8) :

$$z(\hat{r}, t) = z_c(\hat{r}, t) + z_g(\hat{r}, t) \quad (\text{I.50})$$

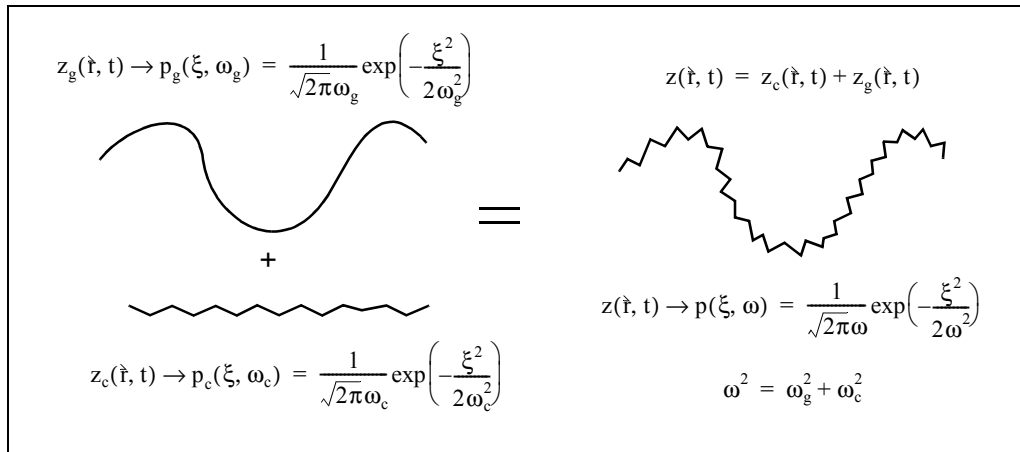


Figure I.8 Modèle à deux échelles

$z_c(\hat{r}, t)$ désigne la structure petite échelle gouvernée par le régime de capillarité, et $z_g(x, t)$ est la structure grande échelle régie par le régime de gravité. En supposant le processus stationnaire dans le temps et dans l'espace, la fonction d'autocorrélation de la mer s'écrit ($\tau = t' - t$, $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$) :

$$Z(\vec{R}, \tau) = \langle z(\hat{r}, t)z(\hat{r}', t') \rangle = Z_c(\vec{R}, \tau) + Z_g(\vec{R}, \tau) + 2Z_{cg}(\vec{R}, \tau) \quad (\text{I.51})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} Z_c(\vec{R}, \tau) = \langle z_c(\hat{r}, t)z_c(\hat{r}', t') \rangle \\ Z_g(\vec{R}, \tau) = \langle z_g(\hat{r}, t)z_g(\hat{r}', t') \rangle \\ Z_{cg}(\vec{R}, \tau) = \langle z_c(\hat{r}, t)z_g(\hat{r}', t') \rangle \end{cases} \quad (\text{I.51a})$$

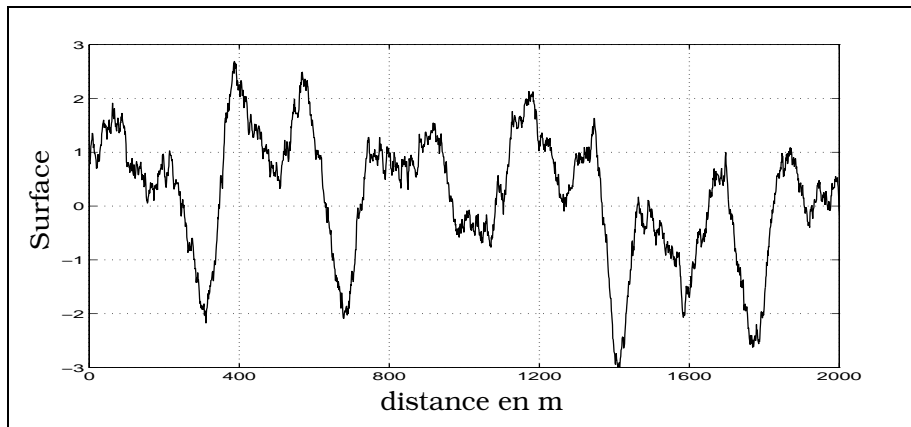
De plus les deux structures sont supposées indépendantes, d'où :

$$Z_{cg}(\vec{R}, \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(\vec{R}, \tau) = Z_c(\vec{R}, \tau) + Z_g(\vec{R}, \tau) \quad (\text{I.52})$$

Dans le domaine spectral, la fonction d'autocorrélation $Z_g(\vec{R}, \tau)$ de la structure grande échelle est obtenue en intégrant le spectre entre $[0; k_{cg}]$, tandis que celle de la structure petite échelle $Z_c(\vec{R}, \tau)$ est intégrée entre $[k_{cg}; \infty]$. La détermination du nombre d'onde k_{cg} de séparation entre les vagues de gravité et de capillarité constitue le problème majeur de ce modèle. Néanmoins dans le calcul de la densité de probabilité de $z(\vec{r}, t)$, cette grandeur n'est pas nécessaire.

En effet, soient $\{p_g(\xi, \omega_g), p_c(\xi, \omega_c)\}$ les densités de probabilité (supposées gaussiennes) respectives des variables aléatoires indépendantes $\{z_g(\vec{r}, t), z_c(\vec{r}, t)\}$, alors la densité de probabilité résultante $p(\xi, \omega)$ régissant $z(\vec{r}, t)$ est égale au produit de convolution $p_g(\xi, \omega_g) * p_c(\xi, \omega_c)$. Or le produit de convolution de deux gaussiennes est une gaussienne, par conséquent $p(\xi, \omega)$ est également une gaussienne de variance $\omega^2 = \omega_g^2 + \omega_c^2$ (somme des moments d'après la relation (I.52)).

Sur le graphe I.12 la superposition de deux surfaces régies par un processus gaussien est représentée. La structure petite échelle est obtenue à partir du profil exponentiel multiplié par 0,5 tracé sur le graphe I.8. La structure grande échelle correspond au profil gaussien représenté sur le graphe I.8.



Graphe I.12 surface à deux échelles

I.3.3 Conclusion

L'approche déterministe étant trop complexe, le comportement des océans est alors représenté par un processus ergodique et stationnaire au second ordre. Afin d'inclure les régimes de capillarité et de gravité, le modèle stochastique à deux échelles est utilisé pour représenter la surface de la mer. Ce modèle nécessite alors la connaissance du spectre de mer ou de sa fonction d'autocorrélation. Le but de la partie suivante est donc d'introduire les différents spectres proposés dans la littérature, afin de modéliser la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs, exposée dans le paragraphe I.5.

I.4 MODÈLES DE SPECTRE DE MER

I.4.1 Introduction

Dans les années 70, ont commencé les développements théoriques sur les spectres de mer, afin d'estimer les coefficients de rétrodiffusion d'une surface océanique, dans les bandes de fréquence L et Ku, c'est-à-dire entre deux et dix huit GHz. Les spectres proposés sont empiriques. Le spectre de mer s'exprime classiquement sous la forme suivante :

$$S(k, \Theta) = M(k)f(k, \Theta) \quad (I.53)$$

où $M(k)$ représente la partie isotrope du spectre modulée par $f(k, \Theta)$ correspondant à la fonction angulaire. La parité du spectre impose une répartition angulaire donnée par [11] :

$$f(k, \Theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + \Delta(k) \times \cos(2\Theta)] \quad (I.54)$$

Les premières fonctions angulaires développées dans les années 1970, ne respectaient pas la condition (I.54).

I.4.2 Vitesse de friction

La vitesse de friction u_f du vent est par définition la vitesse limite du vent à la surface de la mer. Le tableau I.2 donne les correspondances entre cette vitesse et l'échelle de Beaufort. Il figure également la vitesse du vent à une hauteur de dix mètres au-dessus de la mer. La vitesse du vent u_z en cm/s, à une altitude z en cm, est donnée en fonction de la vitesse de friction u_f en cm/s par [3] :

$$u_z = \frac{u_f}{0,4} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{0,684}{u_f} + 4,28 \times 10^{-5} u_f^2 - 4,43 \times 10^{-2} \quad (I.55)$$

Sur le graphe I.13, sont représentées les variations de la vitesse u_z au dessus de la mer, en fonction de la vitesse de friction u_f , pour trois altitudes $z = \{5, 10, 20\}$ mètres.

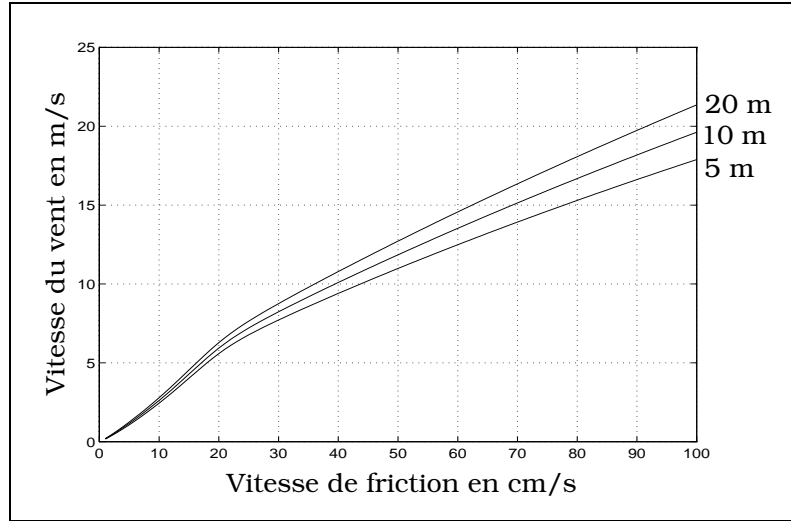
Echelle de Beaufort	Termes descriptifs	vitesse de friction en cm/s	Vitesse à une altitude de 10 m en m/s
0	Calme	<1	<0,2
1	Très légère brise	2 - 6	0,4 - 1,4
2	Légère brise	7 - 12	1,7 - 3,3
3	Petite brise	13 - 18	3,6 - 5,3
4	Jolie brise	19 - 28	5,6 - 7,8
5	Bonne brise	28 - 43	7,8 - 10,6
6	Vent frais	44 - 62	10,8 - 13,8
7	Grand frais	63 - 83	14,0 - 17,1
8	Coup de vent	84 - 108	17,3 - 20,7
9	Fort coup de vent	109 - 136	20,9 - 24,4
10	Tempête	137 - 168	24,6 - 28,4
11	Violente tempête	169 - 206	28,5 - 32,6
12	Ouragan	>207	32,7

Tableau I.2 *Echelle de Beaufort*

I.4.3 Spectres de gravité

Les premiers spectres monodimensionnels $M(k)$ élaborés dans les années 1970 par Pierson-Moskowitz $M_{PM}(k)$ [1] [12]-[14], JONSWAP (Joint North Sea Wave Project) $M_j(k)$ [15], donnent la répartition énergétique des vagues de gravité, et s'écrivent respectivement :

$$M_{PM}(k) = \frac{4,05 \times 10^{-3}}{k^3} \exp\left(-\frac{0,74g^2}{k^2 u_{19}^4}\right) \quad (I.56)$$

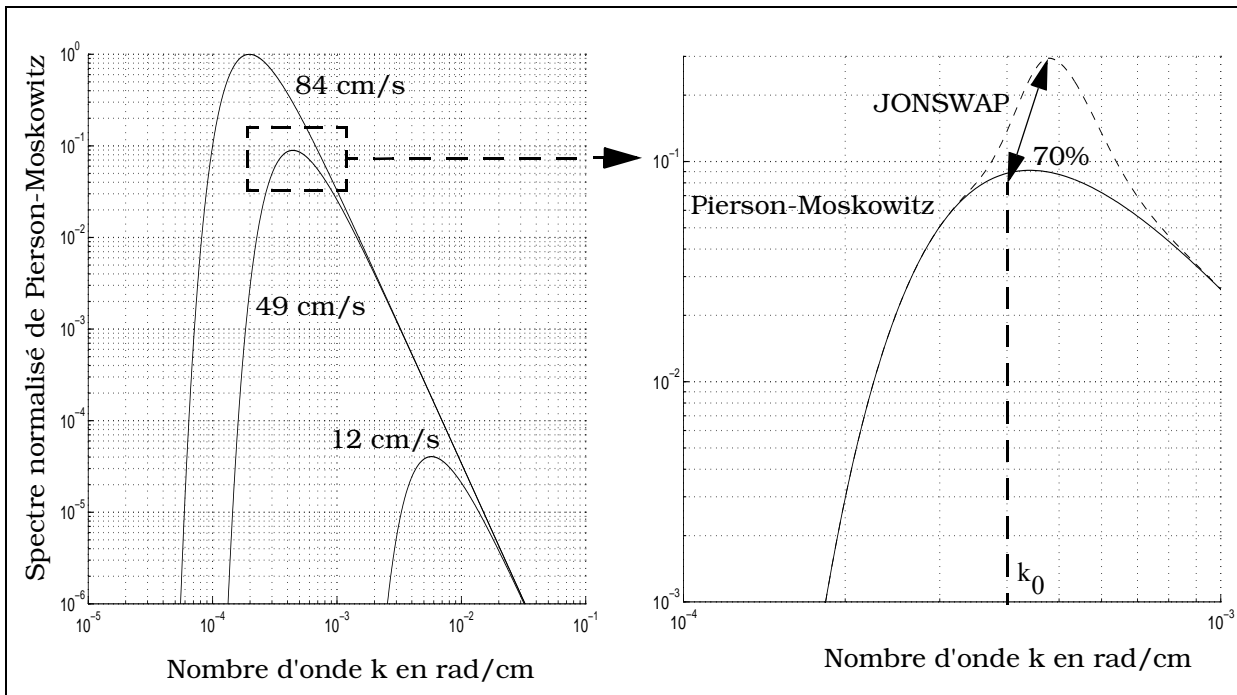


Graphe I.13 Vitesse du vent à une altitude donnée en fonction de la vitesse de friction

$$M_J(k) = M_{PM}(k) \times 3,3 \exp \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{k}{k_0}} - 1 \right)^2}{2\delta^2} \right] \quad \text{avec} \quad \delta = \begin{cases} 0,07 & \text{si } k \leq k_0 \\ 0,09 & \text{si } k > k_0 \end{cases} \quad (I.57)$$

$$k_0 = 0,769g/u_{19}^2$$

où $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est l'intensité de la pesanteur, u_{19} la vitesse du vent en m/s à une hauteur au dessus de la mer de 19,5 m, et k le nombre d'onde. La figure de gauche du graphe I.14 illustre le spectre normalisé de Pierson-Moskowitz, en fonction du nombre d'onde k , pour trois vitesses de friction $u_f = \{84, 49, 12\} \text{ cm/s}$.



Graphe I.14 Spectres de Pierson-Moskowitz et de JONSWAP en fonction du nombre d'onde

On observe que toutes les courbes passent par un maximum k_{pic}^p correspondant à une vitesse de phase v_{ph}^{pic} :

$$k_{pic}^p = 0,702 \frac{g}{u_{19}^2} \quad \text{et} \quad v_{ph}^{pic} = 1,194u_{19} \quad (I.58)$$

Lorsque la vitesse de phase est inférieure à la vitesse du vent, les vagues sont fortement travaillées par le vent, d'où une augmentation de leur énergie. Puis lorsqu'elles atteignent une vitesse proche de v_{ph}^{pic} , leur énergie est entretenue par le vent, jusqu'à une vitesse pour laquelle elles ne reçoivent plus d'énergie. On note que plus la vitesse de friction augmente et plus le nombre d'onde correspondant au maximum du spectre diminue, car l'effet des vagues de gravité prédomine.

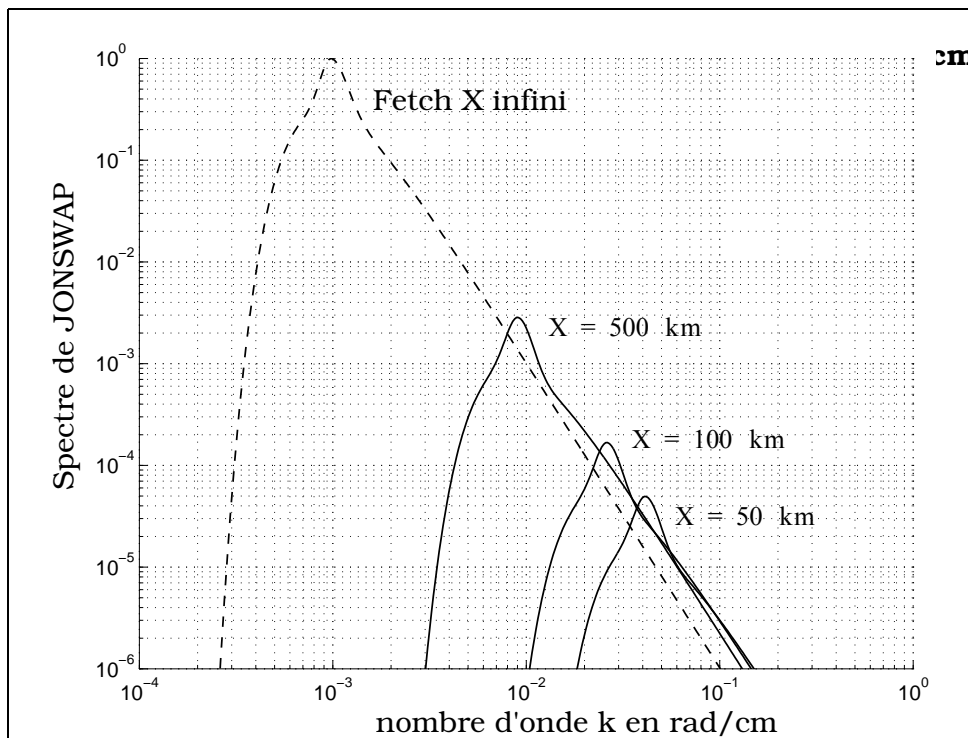
Sur la figure de droite du graphe I.14, les spectres de Pierson-Moskowitz et de JONSWAP sont comparés, pour une vitesse de friction $u_f = 49\text{cm/s}$. On note que le spectre de Pierson-Moskowitz est identique à celui de JONSWAP, excepté autour de la valeur $k_0 \approx k_{pic}^p = 4,4 \times 10^{-4}$ rad/cm. En effet dans cette région, l'exposant dans la relation (I.57) est maximal provoquant une augmentation du pic (environ 70%), qui décroît rapidement lorsqu'on s'écarte de cette valeur pour tendre vers le spectre de Pierson-Moskowitz.

Tous ces spectres sont valables pour une mer totalement développée, c'est-à-dire pour une valeur de fetch infinie. JONSWAP propose un nouveau modèle dérivé du premier (I.57), qui tient compte du fetch X en mètre [15] :

$$S_{JM}(k) = \frac{\alpha}{2k^3} \exp\left(-\frac{5k_m^2}{4k^2}\right) 3,3 \exp\left[\frac{\left(\frac{k}{k_m}-1\right)^2}{2\delta^2}\right] \quad (I.59)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \delta = \begin{cases} 0,07 & \text{si } k \leq k_m \\ 0,09 & \text{si } k > k_m \end{cases} \\ k_m = 483,6 \frac{g}{u_{10}^2} \bar{X}^{-0,66} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = 0,076 \bar{X}^{-0,22} \\ \bar{X} = \frac{gX}{u_{10}^2} \end{cases} \quad (I.59a)$$

Le graphe I.15 donne les variations de ce spectre en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeurs du fetch $X = \{500, 100, 50\}$ km, et pour une vitesse de friction de 30 cm/s. On observe que lorsque le fetch diminue, le pic se déplace vers des nombres d'onde plus élevés, c'est-à-dire vers les courtes longueurs d'onde correspondant au régime de capillarités. En revanche pour un fetch infini, le spectre est beaucoup plus énergétique car le régime de gravité est complètement développé.



Graphe I.15 Variation du spectre de JONSWAP en fonction du nombre d'onde, et pour différentes valeurs du fetch avec $u_f = 30$ cm/s

I.4.4 Spectres globaux : gravité et capillarité

Le spectre de Pierson [3], [12], [14] est un des premiers spectres apparu dans la littérature, notamment pour décrire le régime de capillarité. De nos jours son comportement reste quasiment invariant dans la zone de gravité, par contre il a beaucoup évolué dans la zone de capillarité.

Le spectre de John R. Apel [9], [11] est une synthèse des travaux effectués entre les années 1980 et 1990 sur la modélisation des spectres des océans, auxquels les scientifiques Donelan, Banner et Jähne ont également contribué. Malheureusement ce spectre ne satisfait pas certains critères physiques dans la zone de capillarité (paragraphe I.5.2).

T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katzaros, D. Vandemark [11] ont établi un spectre qui est en accord avec les mesures expérimentales et avec certaines contraintes physiques, notamment sur la variance des pentes régies par le spectre de capillarité (paragraphe I.5.2).

I.4.4.1 Spectre de Pierson

Pierson [3], [12], [14] donne une expression générale du spectre des vagues en fonction du nombre d'onde k . Il est obtenu à partir de l'expression de Pierson-Moskowitz, et il se décompose en cinq parties selon la valeur de k :

$$M_p(k) = M_i(k) \quad k_{i-1} < k \leq k_i \quad \text{rad/cm} \quad (\text{I.60})$$

avec :

$$M_1(k) = \frac{4,05 \times 10^{-3}}{k^3} \exp\left(-\frac{0,74g^2}{k^2 u_{19}^4}\right) \quad 0 < k \leq k_1 = \frac{k_2 u_m^2}{u_r^2} \quad (\text{I.60a})$$

$$M_2(k) = \frac{4,05 \times 10^{-3}}{k_1^{1/2} k^{5/2}} \quad k_1 < k \leq k_2 = 0,359 \quad (\text{I.60b})$$

$$M_3(k) = M_4(k_3) \left(\frac{k}{k_3}\right)^q \quad k_2 < k \leq k_3 = 0,942 \quad (\text{I.60c})$$

$$M_4(k) = 0,875(2\pi)^{p-1} g^{\frac{1-p}{2}} \left(1 + \frac{3k^2}{k_m^2}\right) / \left[k \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2}\right)\right]^{\frac{p+1}{2}} \quad k_3 < k \leq k_4 \quad (\text{I.60d})$$

$$M_5(k) = 1,473 \times 10^{-4} u_r^3 \frac{k_m^6}{k^9} \quad k_4 < k \quad (\text{I.60e})$$

$$k_m = 3,63 \quad p = 5 - \log u_r \quad u_m = 12 \text{cm/s} \quad q = \frac{\log[M_2(k_2)/M_4(k_3)]}{\log(k_2/k_3)} \quad (\text{I.60f})$$

La valeur de k_4 est calculée numériquement par la relation $M_4(k_4) = M_5(k_4)$. Le terme $M_1(k) = M_{PM}(k)$ représente le régime de gravité, tandis que $M_4(k)$ caractérise la zone de capillarité.

I.4.4.2 Spectre de Apel

Contrairement au spectre de Pierson, celui de Apel [9], [11] $M_A(k)$, s'écrit en une seule expression :

$$M_A(k) = k^{-3} \cdot L_0(k) \cdot J_p(k) \cdot I_D(k) \cdot C_i(k, u_{10}) \quad (\text{I.61})$$

avec :

$$L_0(k) = \exp\left(-\frac{k_p^2}{k^2}\right) \quad k_p = g/(u_{10}^2\sqrt{2}) \quad (I.61a)$$

$$J_p(k) = 1,7 \left[\frac{\exp\left[\left(\frac{\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1\right)^2}{2\delta^2}\right]}{\delta} \right] \quad \delta = 0,40 \quad (I.61b)$$

$$I_D(k) = \Theta_S \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{\Theta_S \sqrt{2}}\right) \quad \Theta_S = 1/\sqrt{0,28 + 10\left(\frac{k}{k_p}\right)^{-1,3}} \quad (I.61c)$$

$$C_i = A(R_{ro} + S \cdot R_{res})V_{dis} \quad (I.61d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ro} = \frac{1}{1 + (k/k_{ro})^2} \quad R_{res} = a k \operatorname{sech}\left(\frac{k - k_{res}}{k_w}\right) \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ S(u_{10}) = \exp(\ln 10 [s_1 + s_2(1 - e^{-u_{10}/u_n})]) \quad V_{dis} = \exp\left(-\frac{k^2}{k_{dis}^2}\right) \\ k_{ro} = 100 \quad k_{res} = 400 \quad k_w = 450 \quad k_{dis} = 6283 \\ s_1 = -4,95 \quad s_2 = 3,45 \quad u_n = 4,7 \quad A = 0,00195 \quad a = 0,8 \end{array} \right. \quad (I.61e)$$

où k est le nombre d'onde en rad/m. Les vitesses $\{u_{10}, u_n\}$ s'expriment en m/s. Le terme $L_0(k)$ représente le régime de gravité, tandis que C_i caractérise la zone de capillarité. La fonction $J_p(k)$ décrit le rehaussement de l'énergie observé autour du maximum k_p , semblable au modèle de JONSWAP (relation (I.57)).

1.4.4.3 Spectre de Elfouhaily, Chapron, Katsaros et Vandemark

Le spectre [11] établi en 1997 est une synthèse de l'ensemble des travaux effectués depuis 1970 sur le comportement des océans. Il est obtenu à partir de faits expérimentaux et théoriques que Apel et Pierson n'avaient pas pris en compte, comme par exemple le modèle de Cox et Munk [14] (voir paragraphe I.5.2), de plus le fetch est inclus.

Ce spectre élimine ces imprécisions, et il s'écrit :

$$M_E(k) = \frac{k^{-3}}{2v_{ph}} (\alpha_g v_g F_g + \alpha_c v_{phm} F_c) \kappa \left[\frac{\exp\left[\left(\frac{\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1\right)^2}{2\delta^2}\right]}{\delta} \right] \exp\left(-\frac{5k_p^2}{4k^2}\right) \quad (I.62)$$

avec :

$$\alpha_g = 6 \times 10^{-3} \sqrt{\Omega} \quad v_g = u_{10}/\Omega \quad F_g = \exp\left[-\frac{\Omega}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1\right)\right] \quad (I.62a)$$

$$\kappa = \begin{cases} 1,7 & 0,84 < \Omega \leq 1 \\ 1,7 + 6 \log \Omega & 1 < \Omega \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 0,08(1 + 4/\Omega^3) & k_p = \Omega^2 g / u_{10}^2 \\ \Omega = 0,84 \tanh[(X/2, 2 \times 10^4)^{0,4}]^{-0,75} & \end{cases} \quad (I.62b)$$

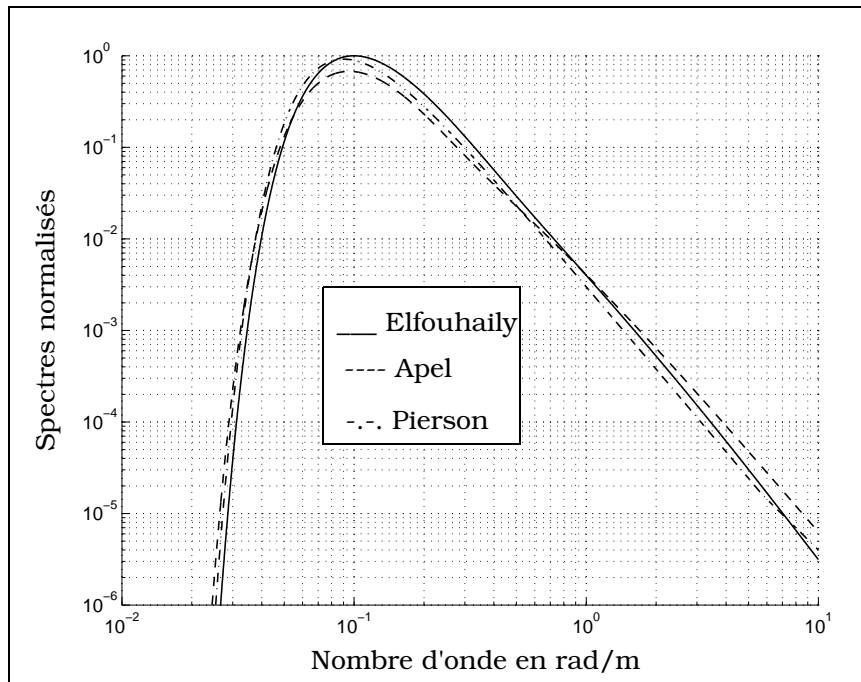
$$\alpha_c = 10^{-2} \begin{cases} 1 + \ln(u_r/v_{phm}) & u_r \leq v_{phm} \\ 1 + 3 \ln(u_r/v_{phm}) & u_r > v_{phm} \end{cases} \quad F_c = \exp\left[-\frac{1}{4} \left(\frac{k}{k_m} - 1\right)^2\right] \quad (I.62c)$$

$$k_m = 363 \text{ rad/m} \quad v_{phm} = 0,23 \text{ m/s} \quad v_{ph} = \sqrt{\frac{g}{k} \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2}\right)} \quad (I.62d)$$

Les équations (I.62d) proviennent du paragraphe I.2.2. La quantité X représente le fetch en mètre. Ainsi pour une mer complètement développée, c'est-à-dire un fetch infini, l'inverse de l'âge de la vague Ω est égale à 0,84 d'où $\delta = 0,62$; $k_p \approx g/(u_{10}^2\sqrt{2})$; $\kappa = 1,7$. On retrouve sensiblement les mêmes valeurs que Apel. Le premier terme (indice g) de l'équation (I.62) représente la zone de gravité.

I.4.4.4 Simulations

Sur le graphe I.16 sont tracées les variations des spectres de Elfouhaily (relation (I.62) avec $\Omega = 0,84$), Apel (équation (I.61)) et Pierson (expression (I.60)), en fonction du nombre d'onde, et pour une vitesse de friction $u_f = 30 \text{ cm/s}$. Les courbes sont normalisées, par la valeur maximale du spectre de Elfouhaily. On observe que les spectres ont un comportement semblable. En fait ils ne diffèrent qu'autour du pic.



Graphe I.16 Variations des spectres en fonction du nombre d'onde, pour une vitesse de friction $u_f = 30 \text{ cm/s}$

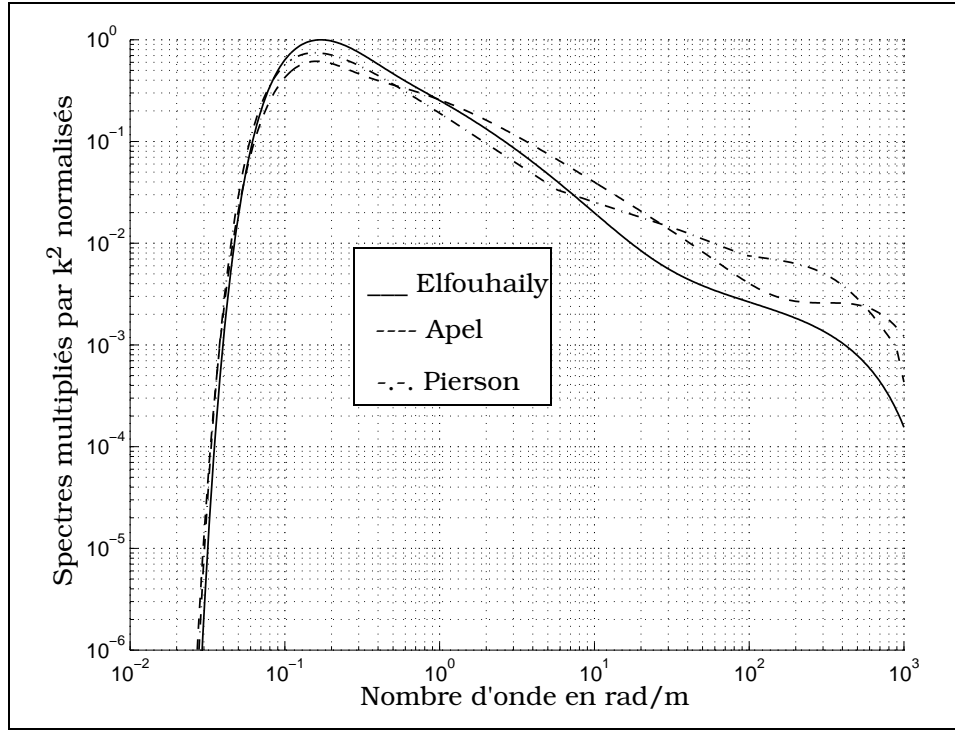
Le tableau I.3 donne la valeur du nombre d'onde k_{pic} au maximum du spectre et la valeur correspondante M_{pic} . On note que le maximum du spectre de Apel est plus faible que ceux de Elfouhaily et de Pierson. Les maxima ont été obtenus à partir des spectres de gravité, car le régime de capillarité est négligeable, dû à l'atténuation en $1/k^3$.

	Elfouhaily	Apel	Pierson
Nombre d'onde du pic k_{pic} en rad/m	$0,976k_p$	$0,931k_p$	$0,876k_p$
Valeur du spectre au pic M_{pic} en rad^3/m^3	$0,001343/k_p^3$	$0,000966/k_p^3$	$0,001345/k_p^3$
Variance des hauteurs $\int_0^{\infty} M(k)dk$ en m^2	$0,00193/k_p^2$	$0,00140/k_p^2$	$0,00176/k_p^2$

Tableau I.3 Valeurs maximales des spectres

Physiquement l'intégration du spectre selon le nombre d'onde k entre zéro et l'infini est égale à la variance des hauteurs (tableau I.3), dont la contribution provient essentiellement du régime de gravité. Cette propriété est mise en évidence dans le paragraphe I.5.1.5. En revanche la variance des pentes est obtenue en multipliant le spectre par le nombre d'onde élevé au carré k^2 (paragraphe I.5.2), et par conséquent le régime de capillarité n'est plus négligeable. Le graphe I.17 illustre cette remarque.

D'après l'équation (I.53), le spectre est modulé par sa fonction angulaire introduite dans le paragraphe suivant.



Graph I.17 Variations des spectres multipliés par k^2 en fonction du nombre d'onde, pour une vitesse de friction $u_f = 30$ cm/s

I.4.5 Fonctions angulaires

Les spectres décrits dans le paragraphe précédent, donnent une description monodimensionnelle de la propagation des vagues. En fait chaque raie du spectre se propage dans un faisceau de direction $\Theta \in [-\pi, \pi]$ par rapport à la direction du vent, rendant le spectre bidimensionnel $S(k, \Theta)$:

$$S(k, \Theta) = M(k)f(k, \Theta) \quad (\text{I.63})$$

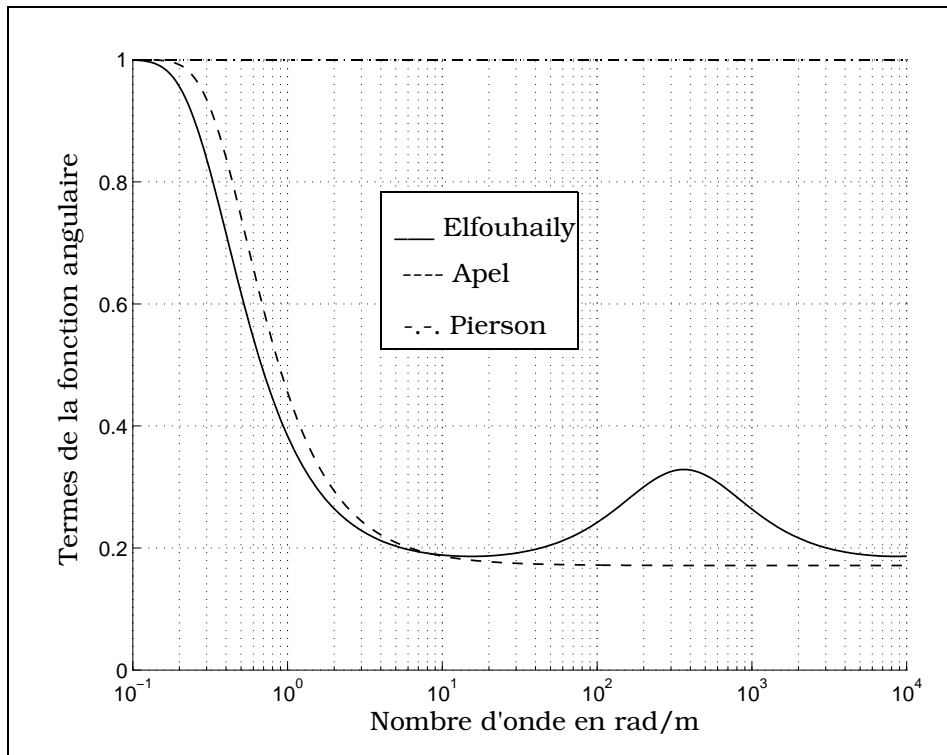
où $f(k, \Theta)$ est la fonction angulaire. La parité du spectre impose une répartition angulaire donnée par [11] :

$$f(k, \Theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + \Delta(k) \times \cos(2\Theta)] \quad (\text{I.64})$$

Les premières fonctions angulaires développées dans les années 1970, ne respectaient pas la condition (I.64). Les termes $\{\Delta_E(k), \Delta_A(k), \Delta_P(k)\}$ de Elfouhaily [11], Apel [11] et Pierson [1] sont respectivement :

$$\begin{cases} \Delta_E(k) = \tanh \left[a_0 + a_g \left(\frac{v_{ph}}{v_g} \right)^{2,5} + a_c \left(\frac{v_{phm}}{v_{ph}} \right)^{2,5} \right] \\ \Delta_A(k) = \tanh \left[0,173 + 6,168 \left(\frac{k}{k_p} \right)^{-1,3} \right] \\ \Delta_P(k) = 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_0 = 0,173 & a_g = 4 \\ a_c = 0,13 \frac{u_f}{v_{phm}} \end{cases} \quad (\text{I.65})$$

On note que $\Delta_P(k)$ est indépendant du nombre d'onde k . Les vitesses de phase $\{v_{ph}, v_{phm}\}$ sont données par les équations (I.62d), et v_g par (I.62a). Sur le graphe I.18 les variations des termes $\{\Delta_E(k), \Delta_A(k), \Delta_P(k)\}$ de Elfouhaily ($\Omega = 0,84$), Apel et Pierson sont tracées, en fonction du nombre d'onde, et pour une vitesse de friction $u_f = 30$ cm/s, correspondant à un pic de gravité de l'ordre de $k_{pic} = 0,1$ rad/m (tableau I.3).



Graphe I.18 Variations des termes $\{\Delta_E(k), \Delta_A(k), \Delta_P(k)\}$ de la fonction angulaire en fonction du nombre d'onde, pour une vitesse de friction $u_f = 30$ cm/s

On remarque que la fonction de Apel est décroissante, et supérieure à celle de Elfouhaily en régime de gravité ($k \in [k_{pic}; 10k_{pic}]$), tandis que dans la zone de capillarité, le terme de Elfouhaily passe par un maximum correspondant à la valeur du nombre d'onde où la vitesse de phase est égale à la vitesse de groupe.

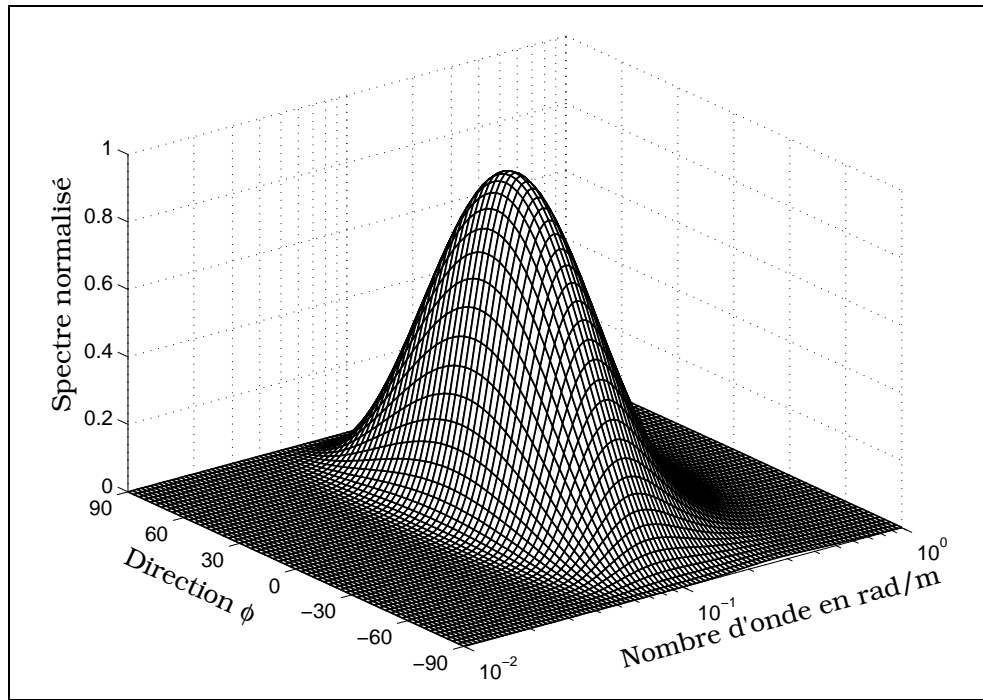
I.4.6 Conclusion

Les premiers spectres sont apparus dans les années 1970, dans le but de déterminer la diffusion d'une onde électromagnétique par une surface marine. On peut citer le spectre de Pierson, et le spectre de gravité de JONSWAP. De nos jours ces spectres sont restés quasiment identiques en zone de gravité, alors qu'ils ont beaucoup évolué dans la zone de capillarité :

- le spectre de Apel est une synthèse des travaux effectués dans les années 1980 – 1990 .
- le spectre de Elfouhaily reprend l'ensemble des travaux de Apel en incluant des critères physiques, notamment en régime de capillarité.

En général les spectres de mer dépendent du nombre d'onde, de la vitesse du vent, et du fetch. Une autre de leurs caractéristiques est leur comportement angulaire, qui donne la répartition énergétique des vagues par rapport à la direction du vent. Cette fonction a également été modifiée au cours des années; elle doit être notamment symétrique dans les directions du vent et transverse au vent. Cette propriété est illustrée sur le graphe I.19.

L'approche probabiliste permet de caractériser la mer soit par son spectre ou sa fonction d'autocorrélation. Il y a dualité entre ces deux fonctions. L'objet du paragraphe suivant est de calculer puis de modéliser la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs, introduite dans le calcul de la fonction d'ombre corrélée (Chapitre II).



Graph I.19 Spectre bidimensionnel normalisé de Elfouhaily pour une vitesse de friction $u_f = 30$ cm/s et $\Omega = 0,84$

I.5 FONCTION D'AUTOCORRÉLATION

Le but de ce paragraphe est de modéliser la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs [17]-[18] caractérisant la structure grande échelle (régime de gravité). Elle est introduite dans la fonction d'ombre corrélée. Contrairement à la littérature [19], cette modélisation tient compte des propriétés générales des spectres. La configuration spectrale [11] utilisée est celle de Elfouhaily qui semble mieux correspondre à la réalité physique. Les variances des pentes, quantifiant la structure petite échelle (zone de capillarité), sont calculées avec les spectres de Pierson, Apel et [11] et comparées au modèle de Cox et Munk [20].

I.5.1 Fonction d'autocorrélation spatiale

I.5.1.1 Définition générale

L'état de la mer [8] en un point $\hat{r}(x, y)$, est le résultat de la superposition d'ondes planes indépendantes [4] (houles individuelles figure I.9), qui se traduit mathématiquement par :

$$z(\hat{r}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ a(\vec{k}) e^{j[\vec{k} \cdot \hat{r} - \bar{\omega}(k)t]} + a^*(\vec{k}) e^{-j[\vec{k} \cdot \hat{r} - \bar{\omega}(k)t]} \} d\vec{k} \quad (I.66)$$

où $\bar{\omega}$ est la pulsation angulaire, \vec{k} le vecteur d'onde, et $a(\vec{k})$ l'amplitude aléatoire complexe de l'onde. Le caractère aléatoire de l'onde est représenté par le terme $a(\vec{k})$. Le repère est choisi de telle manière que $\langle z(\hat{r}, t) \rangle = 0$, où $\langle \rangle$ est l'opérateur moyenne. De plus $a^*(-\vec{k}) = a(\vec{k})$ car la fonction $z(\hat{r}, t)$ doit être réelle. $a(\vec{k})$ s'exprime en fonction du spectre $\psi(\vec{k})$ par :

$$\psi(\vec{k}) = \langle |a(\vec{k})|^2 \rangle = \psi(-\vec{k}) \quad (I.67)$$

La fonction d'autocorrélation Z (généralisation du théorème de Wiener-Khintchine) s'écrit donc :

$$Z(\vec{R};\tau) = \langle z(\vec{r}, t)z(\vec{r}', t') \rangle = \int \int_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \psi(\vec{k}) \cos[\vec{k}(\omega)\vec{R}-\omega\tau] d\vec{k} \quad (I.68)$$

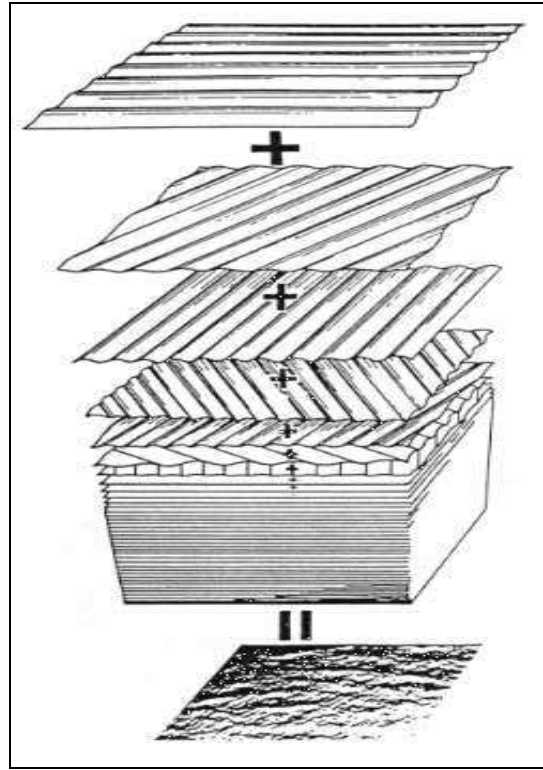


Figure I.9 Formation de la mer par superposition de houles individuelles

avec $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$ car le processus est stationnaire dans l'espace, et $\tau = t' - t$ car il est également stationnaire dans le temps. En posant (figure I.10) :

$$\vec{R} = \|\vec{R}\| \cdot \vec{\delta} = R \cdot (\vec{x} \cos \phi + \vec{y} \sin \phi) \quad \vec{k} = \|\vec{k}\| \cdot \vec{\xi} = k \cdot (\vec{x} \cos \Theta + \vec{y} \sin \Theta) \quad (I.69)$$

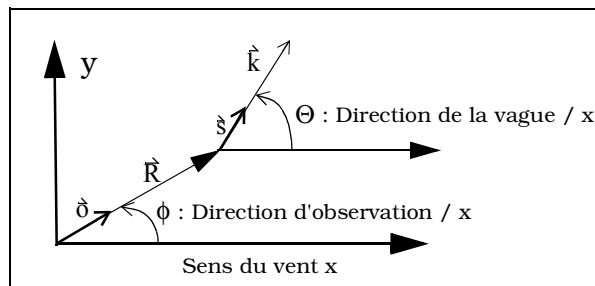


Figure I.10 Coordonnées polaires

où $\vec{\delta}$ est le vecteur unitaire de \vec{R} dans la direction d'observation ϕ par rapport à x , et $\vec{\xi}$ le vecteur unitaire de \vec{k} dans la direction Θ de la vague par rapport à x . L'axe (Ox) indique le sens du vent. En coordonnées polaires la fonction d'autocorrélation s'écrit donc :

$$Z(R, \phi; \tau) = \int \int_{0-\pi}^{\infty\pi} S(k, \Theta) \cos[kR \cos(\Theta - \phi) - \omega\tau] d\Theta dk \quad (I.70)$$

Le terme $S(k, \Theta) = k\psi(k, \Theta)$ est le spectre de mer. Parfois les spectres sont exprimés en fonction de la pulsation angulaire $S(\omega, \Theta)$. La relation entre $S(k, \Theta)$ et $S(\omega, \Theta)$ est donnée par :

$$S(\omega, \Theta) = S(k, \Theta) \frac{dk}{d\omega} = \frac{S(k, \Theta)}{v_g(k)} \quad (I.71)$$

La relation de dispersion (équation (I.9)) permet de passer de k à ω . A noter que la fonction d'autocorrélation spatiale ($\tau = 0$) en coordonnées cartésiennes, est obtenue à partir de la composante réelle de la transformée de Fourier inverse du spectre :

$$Z(R_x, R_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k_x, k_y)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \cos(k_x R_x + k_y R_y) dk_x dk_y = \Re \left\{ \text{TF}^{-1} \left[\frac{S(k_x, k_y)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \right] \right\} \quad (\text{I.72})$$

$$\text{avec} \quad k_x = k \cos \Theta \quad \text{et} \quad k_y = k \sin \Theta \quad (\text{I.72a})$$

1.5.1.2 Fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs

En substituant l'équation (I.64) dans (I.63), le spectre de mer $S(k, \Theta)$ s'écrit :

$$S(k, \Theta) = \frac{1}{2\pi} M(k) [1 + \Delta(k) \times \cos(2\Theta)] \quad (\text{I.73})$$

où $M(k)$ représente la partie isotrope du spectre et Θ la direction de la vague par rapport au vent. D'après la relation (I.70) la fonction d'autocorrélation s'écrit donc :

$$Z(R, \phi; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} M(k) [1 + \Delta(k) \times \cos(2\Theta)] \cos[kR \cos(\Theta - \phi) - \omega \tau] d\Theta dk \quad (\text{I.74})$$

La fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs $R_0(R, \phi)$ est obtenue pour $\tau = 0$, soit :

$$R_0(R, \phi) = Z(R, \phi; 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} M(k) [1 + \Delta(k) \times \cos(2\Theta)] \cos[kR \cos(\Theta - \phi)] d\Theta dk \quad (\text{I.75})$$

La modélisation de $R_0(R, \phi)$ est complexe, si la double intégrale est calculée numériquement en coordonnées cartésiennes $\{k_x = k \cos \Theta, k_y = k \sin \Theta\}$ (relation (I.72)) par un algorithme de transformée Fourier. En effet le résultat dépend alors de deux paramètres $\{R_x = R \cos \phi, R_y = R \sin \phi\}$. Afin de réduire le nombre de paramètres, l'intégration angulaire est réalisée analytiquement.

1.5.1.3 Détermination analytique de l'intégration angulaire

D'après [16] (relation 9.1.44 Abramowitz) :

$$\cos(x \cos \alpha) = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) \cos(2m\alpha) \quad (\text{I.76})$$

où J_{2m} est la fonction de Bessel d'ordre $2m$ de première espèce, alors nous montrons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos[x \cos(\Theta - \phi)] \cdot \cos(a\Theta) d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ impair} \\ (-1)^p 2\pi J_a(x) \cos(a\phi) & \text{si } a = 2p \text{ pair} \end{cases} \quad (\text{I.77})$$

En utilisant l'équation (I.77), la fonction d'autocorrélation spatiale s'écrit après intégration angulaire :

$$R_0(R, \phi) = I_0(R) - \cos(2\phi) I_2(R) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_0(R) = \int_0^{\infty} M(k) J_0(Rk) dk \\ I_2(R) = \int_0^{\infty} M(k) J_2(Rk) \Delta(k) dk \end{cases} \quad (\text{I.78})$$

Physiquement le terme I_0 représente la partie isotrope, tandis que I_2 est la partie anisotrope.

I.5.1.4 Intégration numérique en nombre d'onde

La complexité analytique des spectres implique que la détermination de l'intégration en nombre d'onde k est numérique, comprise entre zéro et l'infini. Il est donc nécessaire de déterminer les bornes d'intégration pour lesquelles le terme sous l'intégrale peut être négligé.

En fait c'est seulement l'étude du spectre $M(k)$ qui va déterminer ces bornes, car la fonction $\Delta(k)$ est comprise entre zéro et l'unité. On montre que les valeurs k_1, k_2 , correspondant aux abscisses respectives à gauche et à droite du passage choisi à 10^{-5} du maximum du spectre de Elfouhaily sont égales à :

$$\begin{cases} k_1 = 0,28k_p \\ k_2 = 64k_p \end{cases} \quad \text{avec} \quad k_p = \frac{\Omega^2 g}{u_{10}^2} \quad (\text{I.79})$$

I.5.1.5 Simulation et modélisation

Sur la colonne de gauche du graphe I.20, les termes $\{I_0(R), I_2(R)\}$ sont tracés en fonction de la distance R . Toutes les courbes sont paramétrées par la vitesse de friction $u_f = \{20, 40, 60, 80\}$ cm/s. On observe que plus la vitesse du vent augmente, plus le terme anisotrope $I_2(R)$ se déplace vers les nombres d'onde importants, mais son maximum reste quasiment constant. On remarque également que les variations des fonctions d'autocorrélation sont identiques.

A droite du graphe I.20, l'erreur absolue entre les résultats numériques (équation (I.78)) et modélisés par les profils suivants :

$$\begin{cases} I_0(R) = I_0(0) \cos\left(\frac{R}{L'_0}\right) \left/ \left[1 + \left(\frac{R}{L_C}\right)^2\right] \right. \\ I_2(R) = I_0(0) A J_2\left(\frac{R}{L'_2}\right) \left/ \left[1 + \left(\frac{R}{L_2}\right)^2\right] \right. \end{cases} \quad (\text{I.80})$$

est représentée, en fonction de la distance R , et de la direction ϕ par rapport au vent. On observe qu'elle reste très faible.

Les paramètres $P_i = \{I_0(0), L_C, L'_0, A, L_2, L'_2\}$ des équations (I.80) sont tracés sur le graphe I.21 en fonction de la vitesse u_{10} , prise à une altitude de dix mètres au-dessus de la mer. En échelle log-log une droite est observée, donc P_i peut s'écrire sous la forme :

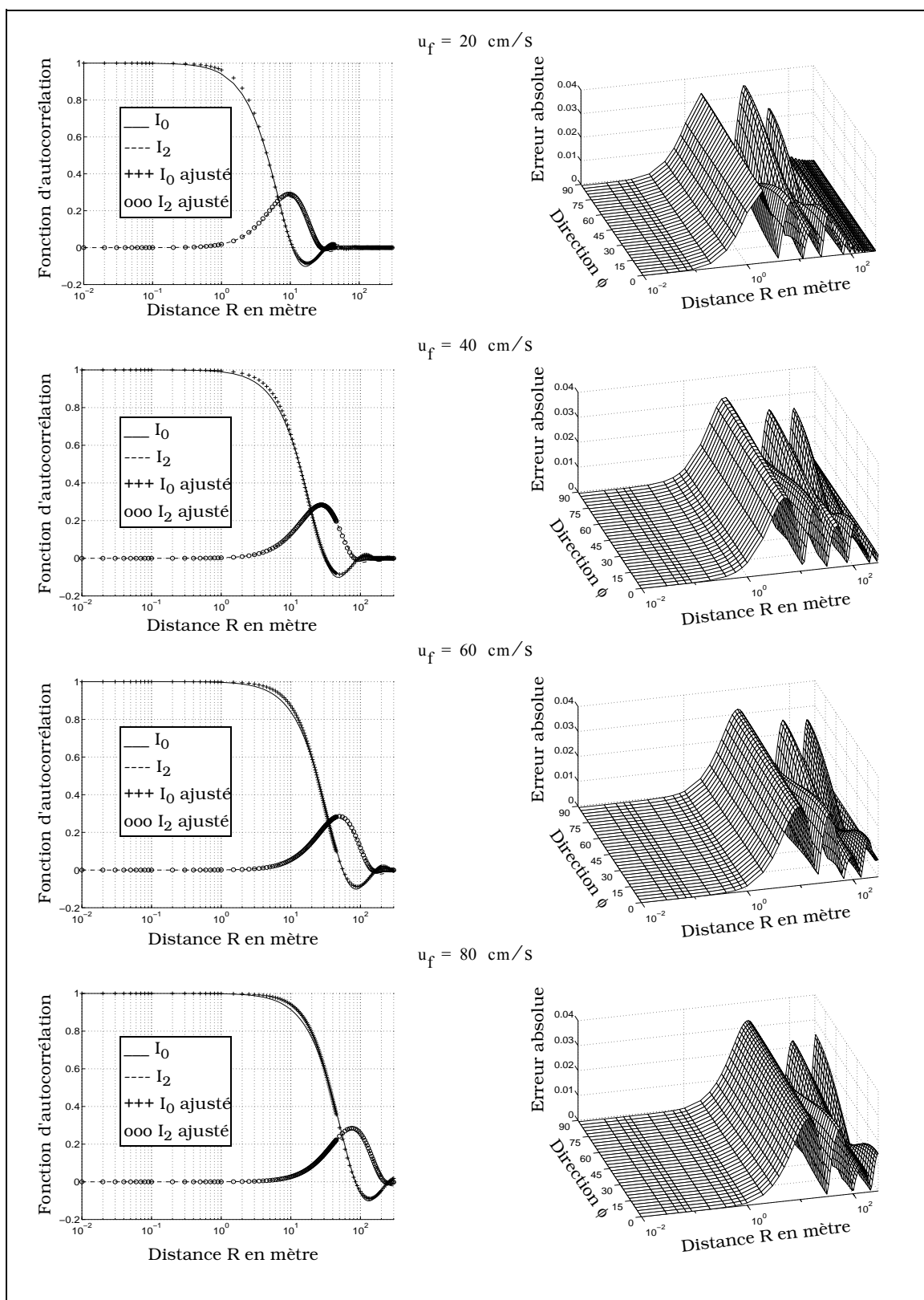
$$P_i = a_i \cdot u_{10}^{b_i} \quad \text{avec} \quad u_{10} \in [2;17] \text{ m/s} \quad (\text{I.81})$$

Les constantes $\{a_i, b_i\}$ sont données dans le tableau I.4.

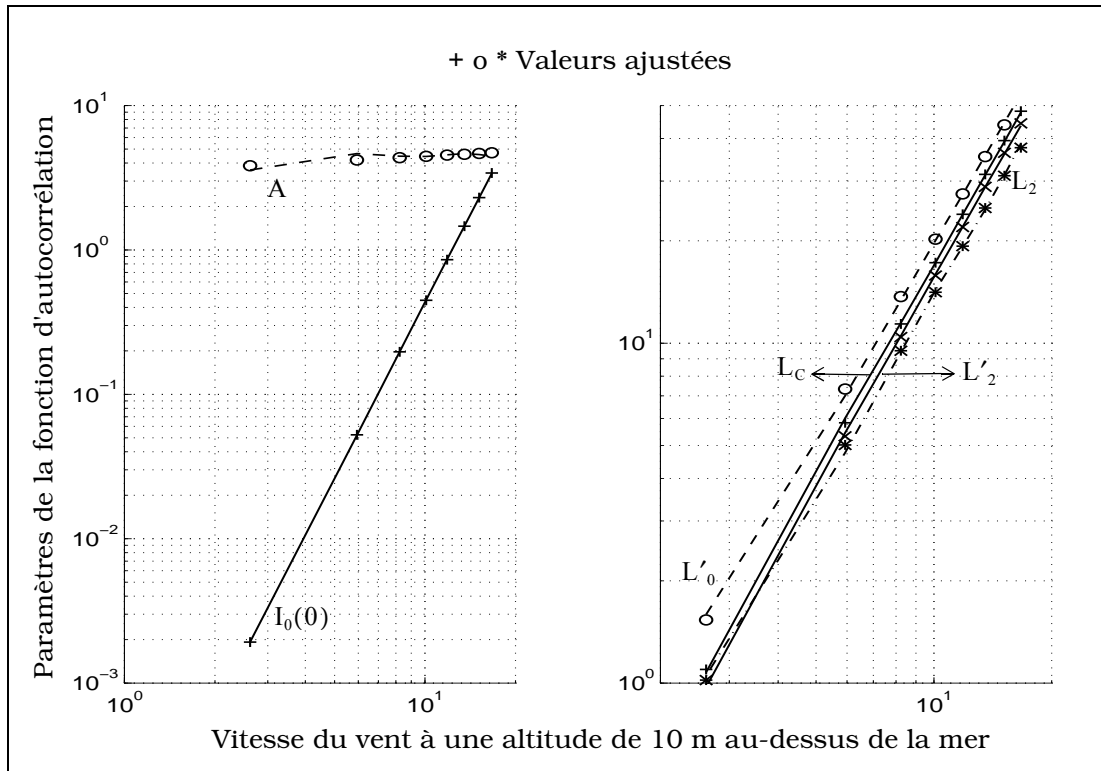
P_i	$I_0(0) = \omega^2$	L_C	L'_0	A	L_2	L'_2
a_i	$3,953 \times 10^{-5}$	0,154	0,244	3,439	0,157	0,138
b_i	4,04	2,04	1,91	0,11	1,95	2,05
EQM en %	0,4	1,0	2,1	3,5	1,9	1,1

Tableau I.4 Paramètres de la fonction d'autocorrélation

Elles sont obtenues par une régression linéaire. Sur le même graphe les valeurs ajustées sont tracées. Compte tenu du faible écart quadratique moyen EQM, l'approximation des différents paramètres $\{a_i, b_i\}$ par le profil (I.80) est jugée satisfaisante.



Graphe I.20 A gauche, sont représentés les éléments $\{I_0(R), I_2(R)\}$, en fonction de la distance R. A droite, l'erreur absolue entre les résultats numériques et modélisés est tracée, en fonction de la distance R, et la direction ϕ . L'ensemble des courbes est paramétré par la vitesse de friction u_f



Graph I.21 Représentation des différents paramètres de la fonction d'autocorrélation en fonction de la vitesse du vent

On remarque que la variance des hauteurs $\omega^2 = I_0(0)$ est proportionnelle à la puissance quatrième de la vitesse u_{10} . Cette valeur confirme le résultat obtenu dans le tableau I.3, où $\omega^2 = 0,00193/k_p^2 = 4,011 \times 10^{-5} u_{10}^4$ avait été calculée en ne considérant que le régime de gravité, au lieu de $3,953 \times 10^{-5} u_{10}^{4,04}$ pour la totalité du spectre. La longueur de corrélation L_C est proportionnelle à la puissance seconde de u_{10} . Ainsi la fonction d'autocorrélation peut s'écrire :

$$R_0(R, \phi; u_{10}) = \omega^2 \left\{ \cos\left(\frac{R}{L'_0}\right) / \left[1 + \left(\frac{R}{L_C}\right)^2\right] - A \cos(2\phi) J_2\left(\frac{R}{L'_2}\right) / \left[1 + \left(\frac{R}{L'_2}\right)^2\right] \right\} \quad (I.82)$$

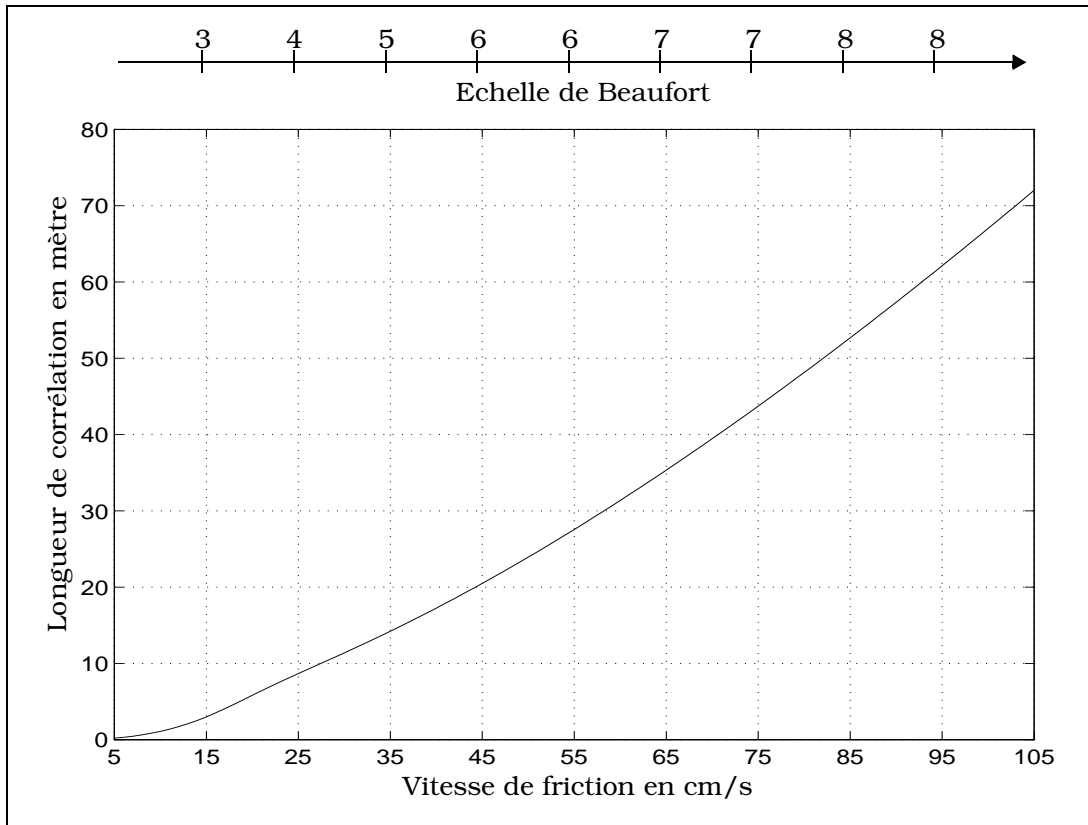
Enfin sur le graph I.22 l'évolution de la longueur de corrélation L_C est tracée, en fonction de la vitesse de friction, ou de l'échelle de Beaufort.

I.5.1.6 Conclusion

Avec le spectre de Elfouhaily, le comportement de la fonction d'autocorrélation des hauteurs est modélisé par une lorentzienne amortie pour la partie isotrope, le profil anisotrope étant lui caractérisé par la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre deux multipliée par la fonction lorentzienne (relation (I.82)).

Les différentes longueurs $\{L_C, L'_0, L_2, L'_2\}$ dépendent de la vitesse u_{10} du vent définie à une altitude de dix mètres au-dessus de la mer (tableau I.4). Elles sont sensiblement proportionnelles à la puissance seconde de u_{10} , alors que la variance des hauteurs ω^2 est fonction de la puissance quatrième de u_{10} .

Pour les spectres de Apel et de Pierson [17]-[18] nous trouvons la même fonction d'autocorrélation que celle obtenue avec Elfouhaily, mais les paramètres du tableau I.4 varient légèrement. Physiquement, le passage en zéro de la fonction d'autocorrélation provient du décalage du spectre, centré sur le nombre d'onde k_{pic} (paragraphe I.3.1.6).



Graph I.22 Représentation de la longueur de corrélation en fonction de la vitesse de friction ou de l'échelle de Beaufort

I.5.1.7 Conclusion

Les fonctions d'autocorrélation de profils gaussien ou exponentiel [19], surestiment la partie basse fréquence du spectre, car leurs transformées de Fourier respectives sont une gaussienne et une lorentzienne [10]. Le calcul de la fonction d'ombre nécessite la connaissance de la fonction d'autocorrélation, mais également de la densité de probabilité des pentes, caractérisée par ses variances.

I.5.2 Variances des pentes

I.5.2.1 Densité de probabilité des pentes

La densité de probabilité des pentes $p(\gamma_x, \gamma_y)$ supposée gaussienne s'écrit :

$$p(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^4}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\gamma_x \ \gamma_y] \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix}\right) \quad (I.83)$$

avec :

$$\sigma_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[-P(x, y)] \Big|_{x=0, y=0} \quad \sigma_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}[-P(x, y)] \Big|_{x=0, y=0} \quad \sigma_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[-P(x, y)] \Big|_{x=0, y=0} \quad (I.83a)$$

où $P(x, y)$ est la fonction d'autocorrélation des pentes en coordonnées cartésiennes, $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ les variances des pentes dans les directions du vent et transverse au vent, et σ_{xy}^2 l'intervariance. Le spectre étant pair selon $\{x, y\}$, la fonction d'autocorrélation est également paire, donc P (ou R_0) dépend de $X = x^2, Y = y^2$. On montre ainsi que :

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [-P(x^2, y^2)] \Big|_{x=0} = 4xy \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} [-P(X, Y)] \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{I.83b})$$

La parité peut être également obtenue par $\{X = |x|, Y = |y|\}$, mais la fonction d'autocorrélation n'est plus dérivable en zéro. Cette solution est donc à rejeter. En substituant l'équation (I.83b) dans (I.83), $p(\gamma_x, \gamma_y)$ s'écrit finalement :

$$p(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (\text{I.83c})$$

I.5.2.2 Définition des variances et intégration angulaire

Les fonctions d'autocorrélation $\{P_x(R, \phi; \tau); P_y(R, \phi; \tau)\}$ des pentes dans les directions $\{(Ox), (Oy)\}$ du vent et transverse au vent s'écrivent respectivement [8] en coordonnées polaires:

$$\begin{cases} P_x(R, \phi; \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(k, \Theta) [k \times \cos(\Theta - \phi)]^2 \cos[kR \cos(\Theta - \phi) - \omega\tau] d\Theta dk \\ P_y(R, \phi; \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(k, \Theta) [k \times \sin(\Theta - \phi)]^2 \cos[kR \cos(\Theta - \phi) - \omega\tau] d\Theta dk \end{cases} \quad (\text{I.84})$$

Les variances $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ sont définies pour $\{\tau = 0, R = 0, \phi = 0\}$, d'où :

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(k, \Theta) [k \times \cos\Theta]^2 d\Theta dk \\ \sigma_y^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(k, \Theta) [k \times \sin\Theta]^2 d\Theta dk \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

En utilisant les symétries du spectre $S(k, \Theta)$ (équation (I.73)), on montre que les variances s'écrivent après intégration sur Θ :

$$\sigma_x^2 = \alpha + \beta \quad \sigma_y^2 = \alpha - \beta \quad (\text{I.86})$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} k^2 \times M(k) dk \\ \beta = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} k^2 \times M(k) \Delta(k) dk \end{cases} \quad (\text{I.86a})$$

Par conséquent les variances des pentes sont obtenues en intégrant le spectre $M(k)$ multiplié par le nombre d'onde élevé au carré.

I.5.2.3 Intégration numérique en nombre d'onde

Dans le cas des pentes, le spectre étudié est $k^2 M(k)$. Le régime de gravité détermine la valeur inférieure de l'intégration numérique. En appliquant le même raisonnement énoncé dans le paragraphe I.5.1.4, la valeur k_1 , correspondant à l'abscisse du passage à gauche à 10^{-5} du maximum est égale à :

$$k_1 = 0,29k_p \tag{I.87}$$

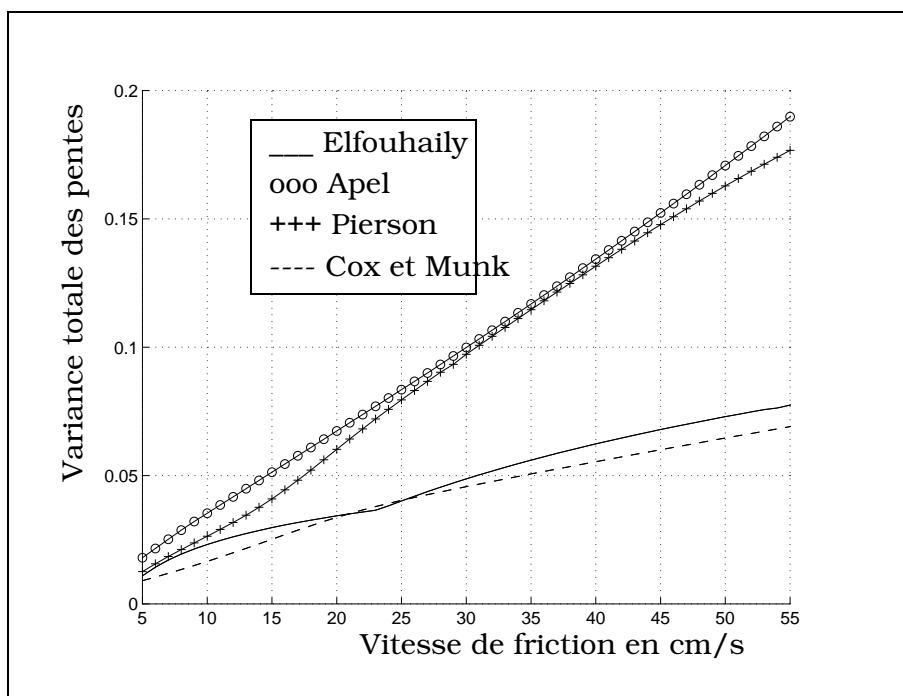
Contrairement à la variance des hauteurs, le régime de capillarité n'est pas négligeable. La borne supérieure k_2 est choisie à 10^{-4} du maximum, soit dans le cas le plus défavorable :

$$k_2 = 2000 \text{ rad/m} \tag{I.87a}$$

I.5.2.4 Simulations

Sur le graphe I.23 est tracée la variance totale des pentes égale à $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 2\alpha$, obtenue à partir du spectre de Elfouhaily, Apel et Pierson, en fonction de la vitesse de friction. Figure également le modèle de Cox et Munk déterminé à partir de photographies aériennes [20] :

$$\sigma_x^2 = 3,16 \times 10^{-3} \cdot u_{12} \quad \sigma_y^2 = 0,003 + 1,92 \times 10^{-3} \cdot u_{12} \tag{I.88}$$



Graphe I.23 *Variance totale des pentes, selon Elfouhaily, Apel, Pierson et Cox et Munk, en fonction de la vitesse friction*

où u_{12} est la vitesse du vent, exprimée en m/s, à une hauteur au-dessus de la mer de 12,5 m . On observe que les modèles de Apel et de Pierson surestiment la variance totale des pentes [21], car ils possèdent un régime de capillarité imprécis. Par contre les résultats de Elfouhaily sont en accord avec ceux de Cox et Munk.

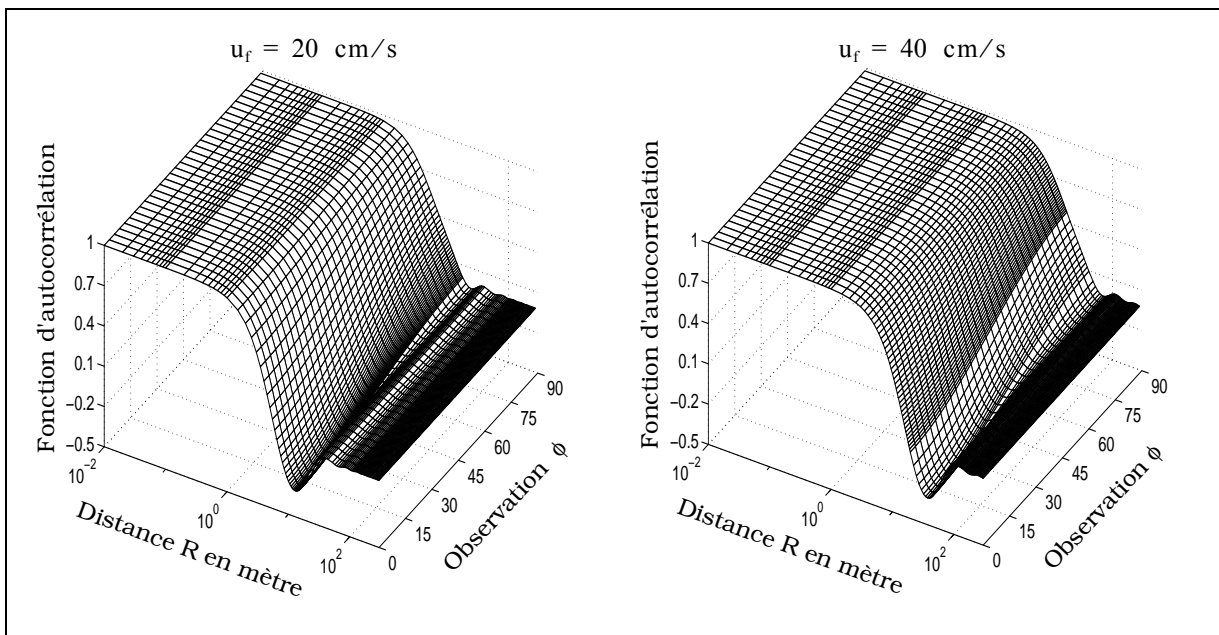
I.6 CONCLUSION

La mer est le résultat d'une sommation d'ondes générées localement par le vent, et d'ondes provenant de régions et de directions autres. De plus, elle est le siège de phénomènes non linéaires. Ainsi il devient très difficile de la modéliser de façon déterministe, et par conséquent une approche probabiliste est préférée. L'approche statistique nécessite des hypothèses, afin de rendre le problème soluble. Le comportement de la mer est alors représenté par un processus aléatoire, supposé ergodique et stationnaire. De plus, la densité de probabilité des pentes est supposée gaussienne. Ainsi connaissant la fonction d'autocorrélation ou le spectre, et la densité de probabilité, le comportement de la mer est connu.

La difficulté majeure de cette représentation stochastique repose sur la détermination des spectres de mer. Dans la littérature, les spectres les plus rencontrés, sont ceux de JONSWAP, de Pierson qui décrivent les vagues de gravité. Pour le régime de capillarité, le spectre de Pierson-Moskowitz est le plus utilisé. Récemment ces modèles ont été repris dans le but de les améliorer. Ainsi le spectre de Apel, puis de Elfouhaily sont une synthèse des travaux effectués respectivement dans les années 1980 – 1990 et 1990 – 1996 . On peut y ajouter le spectre de Lemaire et Sobieski [42]. Les spectres de mer, dépendent généralement du nombre d'onde, de la vitesse du vent, et du fetch. Une autre caractéristique du spectre, est sa partie angulaire, qui donne la répartition énergétique des vagues en fonction de la direction du vent.

Les variances des pentes, caractérisant la structure petite échelle (régime de capillarité), ont été déterminées analytiquement, puis simulées, afin de comparer les différents spectres de mer (Elfouhaily, Apel, Pierson), et le modèle de Cox et Munk. Ainsi les résultats de Elfouhaily sont très proches de ceux de Cox et Munk, alors que pour les deux autres configurations spectrales, ils divergent. En fait, une des originalités du spectre de Elfouhaily est de satisfaire le modèle de Cox et Munk.

Enfin la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs, caractérisant la structure grande échelle (régime de gravité), a été modélisée selon le spectre de Elfouhaily. Ainsi, son comportement est une lorentzienne amortie pour la partie isotrope, tandis que le profil anisotrope est caractérisé par la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre deux multipliée par la fonction lorentzienne (relation (I.82)). Ses variations sont représentées sur le graphe I.24.



Graphe I.24 Fonction d'autocorrélation modélisée à partir du spectre de Elfouhaily, en fonction de la distance R et de la direction d'observation ϕ , paramétrée par la vitesse de friction u_f

CHAPITRE II

FONCTION D'OMBRE

II.1 INTRODUCTION

Lorsque la surface de la mer est observée, une partie de celle-ci est cachée en raison des creux des vagues. Ce chapitre introduit la grandeur quantifiant ce phénomène, caractérisé par la fonction d'ombre égale au rapport de la surface illuminée sur la surface totale. Les travaux sur ce thème ont débuté dans les années soixante, dans le but de calculer la diffusion d'une onde électromagnétique plane par une surface océanique. Pour prendre en compte ce phénomène, l'énergie diffusée sur la surface totale est alors multipliée par la fonction d'ombre S [26]. Actuellement deux auteurs Wagner [22] et Smith [23]-[24] ont calculé cette grandeur. Le but de ce chapitre est de généraliser les méthodes développées par Wagner et Smith, et de les étendre au cas bidimensionnel.

Dans la première partie, les formalismes de Wagner et de Smith sont analysés, afin de mettre en évidence les hypothèses introduites. Cette opération est nécessaire, car la fonction d'ombre a un rôle prédominant dans les déterminations de l'émissivité et de la réflectivité. Tout d'abord, les modèles de Smith et de Wagner sont rappelés pour une configuration monodimensionnelle monostatique (émetteur et récepteur confondus). Ils sont valables pour un processus gaussien décorrélé impliquant que la fonction d'ombre est indépendante de la fonction d'autocorrélation. Ricciardi et Sato [27]-[28] ont montré que la fonction d'ombre s'exprime rigoureusement à partir d'une série infinie de Rice. On observe alors que l'approche de Wagner conserve seulement le premier terme de cette série, tandis que celle proposée par Smith reprend le modèle de Wagner en y introduisant une fonction de normalisation.

Les approches de Wagner et de Smith sont généralisées pour un processus de densité de probabilité quelconque mais décorrélé. La fonction d'ombre basée sur les travaux de Ricciardi-Sato est également calculée, en considérant un processus gaussien décorrélé. La corrélation n'étant pas prise en compte, nous verrons que le résultat ainsi obtenu n'a pas de sens physique.

Dans une seconde partie, les formalismes de Wagner et de Smith sont repris en prenant en compte la corrélation dans le cas monodimensionnel. Les résultats corrélés et décorrélés sont comparés à la solution de référence, obtenue en générant une surface infinie décrite par des fonctions d'autocorrélation gaussienne [25] et lorentzienne. Une méthode générale est établie pour calculer la fonction d'ombre connaissant la longueur d'observation et la fonction d'autocorrélation.

Dans la troisième partie, les résultats corrélés et décorrélés sont étendus au cas monodimensionnel bistatique (émetteur et récepteur distincts). Dans la dernière partie, l'ensemble des résultats est généralisé en configuration bidimensionnelle. Puis à partir du modèle de Cox et Munk [20] régissant la structure petite échelle, et de la fonction d'autocorrélation modélisée dans le premier chapitre caractérisant la structure grande échelle, des simulations sont réalisées pour des conditions réelles de mer.

II.2 FONCTION D'OMBRE MONOSTATIQUE MONODIMENSIONNELLE DÉCORRÉLÉE

II.2.1 Introduction

Par définition, dans le cas monostatique (émetteur et récepteur confondus), la fonction d'ombre caractérise la partie d'une surface qui est visible par un observateur. Dans le cas bistatique (émetteur et récepteur situés à des emplacements distincts), la surface est à la fois visible par le récepteur et l'émetteur.

La fonction d'ombre analytique proposée par Beckmann [29] est égale au rapport de la surface éclairée sur la surface totale, elle varie donc entre zéro et un. Une autre définition proposée par Brokelman et Hagfors [30], correspond au rapport du nombre de points éclairés et présentant une réflexion spéculaire dans la direction d'observation, sur le nombre de points ayant une telle réflexion. Dans le cas de la rétrodiffusion, ces facettes sont celles qui possèdent une orientation perpendiculaire au rayon incident. Ces deux auteurs [30] ne proposent aucune solution analytique de la fonction d'ombre, leurs résultats sont obtenus à partir de simulations numériques. Ainsi ils ont montré que la fonction analytique proposée par Beckman [29] est correcte pour des angles rasants et quasi-normaux à la surface, alors qu'il existe un écart non négligeable avec leur fonction d'ombre numérique pour des angles compris entre ces deux limites.

En fait aujourd'hui, il existe deux approches pour modéliser la fonction d'ombre; celles de Wagner [22] et de Smith [23], [24] développées en 1967. Elles reposent sur une approche mathématique identique basée sur les probabilités conditionnelles, et elles ne sont que des cas particuliers de l'approche rigoureuse utilisée par Ricciardi-Sato [27]-[28].

II.2.2 Définition de la fonction d'ombre

La fonction d'ombre S est définie comme le rapport de la surface éclairée sur la surface totale. Pour un processus aléatoire, elle représente la probabilité $S(\theta, F) = S(\theta, \{\xi_0, \gamma_0\})$ qu'un point arbitraire F d'abscisse $\tau = 0$ situé sur la surface de hauteur ξ_0 par rapport au plan moyen, et caractérisé par la pente locale $\gamma_0 = \partial z / \partial \tau$ soit illuminé, lorsque la surface est éclairée par un faisceau d'incidence θ de pente $\mu = \cot \theta$ par rapport à la verticale z (figure II.1).

Soit τ une distance le long de l'axe (Oy) prise dans la direction de la source, et $S(\theta, F, \tau)$ la probabilité que le rayon FS n'intercepte pas la surface sur l'intervalle $y \in [0; \tau]$, alors [22]-[24] :

$$S(\theta, F) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} S(\theta, F, \tau) \quad (\text{II.1})$$

Soit $\Delta\tau$ un petit déplacement de la surface autour de la valeur τ , on peut écrire :

$$S(\theta, F, \tau + \Delta\tau) = S(\theta, F, \tau)Q(\Delta\tau|\theta, F; \tau) = S(\theta, F, \tau)[1 - g(\theta|F; \tau)\Delta\tau] \quad (\text{II.2})$$

où $Q(\Delta\tau|\theta, F; \tau)$ est la probabilité conditionnelle que le rayon FS n'intercepte pas la surface dans l'intervalle $[\tau; \tau + \Delta\tau]$, sachant qu'il ne la coupe pas dans l'intervalle $[0; \tau]$. $g(\theta|F; \tau)\Delta\tau$ est la probabilité conditionnelle que le rayon intercepte la surface dans l'intervalle $[\tau; \tau + \Delta\tau]$, sachant qu'il ne la coupe pas dans l'intervalle $[0; \tau]$.

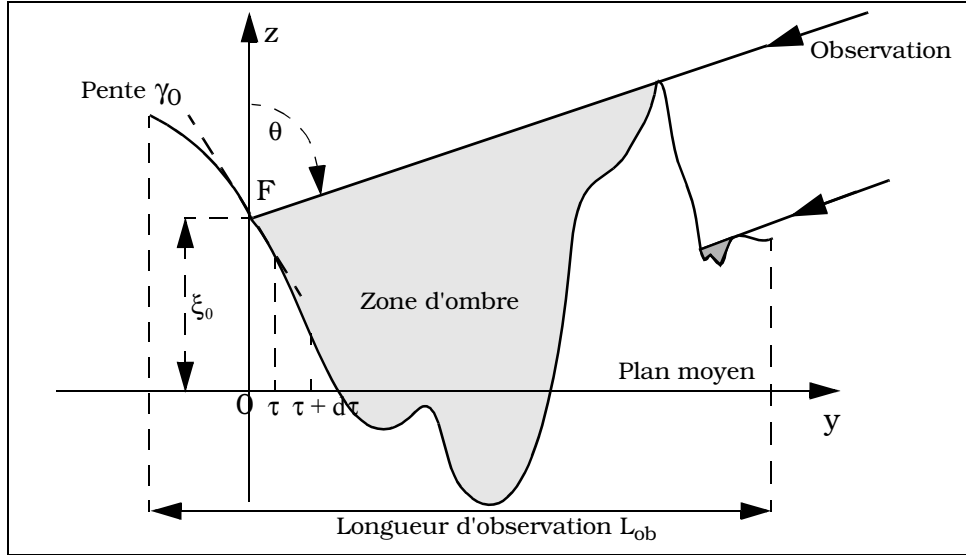


Figure II.1 Configuration monostatique de la fonction d'ombre

En effectuant un développement en série de Taylor autour de la valeur τ , nous avons :

$$S(\theta, F, \tau + \Delta\tau) = S(\theta, F, \tau) + \frac{\partial S(\theta, F, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau \quad (\text{II.2a})$$

En combinant les relations (II.2) et (II.2a), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial S(\theta, F, \tau)}{\partial \tau} = -g(\theta|F; \tau) S(\theta, F, \tau) \quad (\text{II.2b})$$

dont la solution est :

$$S(\theta, F, \tau) = S(\theta, F, 0) \exp \left(- \int_0^{\tau} g(\theta|F; \tau') d\tau' \right) \quad (\text{II.2c})$$

De plus, la surface en $\tau + \Delta\tau$ ombrage (figure II.2) le point étudié F si :

$$\xi(\tau + \Delta\tau) - \xi(\tau) \geq \Delta\tau \cot(\theta) \quad (\text{II.3})$$

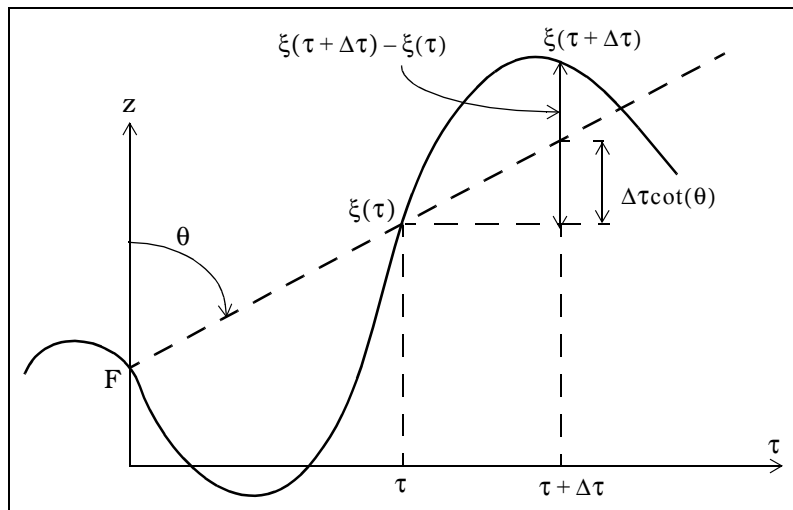


Figure II.2 Détermination de la constante d'intégration

soit après avoir divisé par $\Delta\tau$ il vient :

$$\gamma_0 = \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} \geq \mu = \cot(\theta) \quad (\text{II.3a})$$

C'est une condition nécessaire mais non suffisante. La solution particulière $S(\theta, F, 0)$ s'obtient en faisant tendre τ vers zéro, et ainsi la fonction d'ombre se résume à la condition $\gamma_0 < \mu$ représentée par la fonction Y (figure II.3).

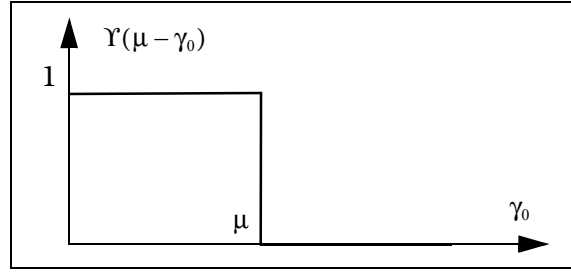


Figure II.3 Variation de Y

La fonction d'ombre s'écrit alors pour une surface de longueur L_{ob} :

$$S(\theta, F, L_{ob}) = Y(\mu - \gamma_0) \exp \left[- \int_0^{L_{ob}} g(\tau|F, \theta) d\tau \right] \quad (II.4)$$

avec :

$$Y(\mu - \gamma_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_0 \geq \mu \\ 1 & \text{si } \gamma_0 < \mu \end{cases} \quad \mu = \cot\theta \quad (II.4a)$$

La fonction d'ombre $S(\theta, L_{ob})$ moyennée sur les pentes et sur les hauteurs s'écrit :

$$S(\theta, L_{ob}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta, F\{\xi_0, \gamma_0\}, L_{ob}) p(\xi_0, \gamma_0) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (II.5)$$

où $p(\xi_0, \gamma_0)$ est la densité de probabilité des hauteurs et des pentes. $S(\theta, L_{ob})$ est la grandeur mesurée expérimentalement. La difficulté principale de la fonction d'ombre repose sur la détermination de g . L'expression analytique de $g(\tau)$ est donnée rigoureusement par Ricciardi et Sato [27]-[28], mais historiquement les travaux dans ce domaine ont débuté en 1967 avec Wagner [22] et Smith [23]-[24].

Ainsi, il existe principalement deux approches pour calculer la fonction d'ombre, celles de Smith et de Wagner qui sont des cas particuliers des travaux de Ricciardi et Sato [27]-[28].

II.2.3 Approches de Wagner, Smith et Ricciardi-Sato

Wagner remplace la probabilité $g(\tau|F, \theta)d\tau$, par la probabilité que le point étudié $F(\xi_0, \gamma_0)$ soit assombri par la surface d'abscisse $\tau + d\tau$ de pente supérieure à celle du rayon incident ($\gamma > \mu$), conditionnellement à la connaissance du point étudié. Mathématiquement cela s'écrit [22] :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) \cdot p(\xi = \xi_0 + \mu\tau, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\gamma \quad (II.6)$$

où $p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau)$ est la densité de probabilité conjointe des hauteurs $\{\xi, \xi_0\}$ et des pentes $\{\gamma, \gamma_0\}$.

Smith remplace la probabilité $g(\tau|F, \theta)d\tau$, par la probabilité conditionnelle que le point étudié $F(\xi_0, \gamma_0)$ soit assombri par la surface d'abscisse $\tau + d\tau$ (circonstance de Wagner) tout en sachant qu'il ne l'est pas par la surface d'abscisse τ . Elle est donnée par [23]-[24] :

$$g_S(\tau|F, \theta) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma - \mu) \cdot p(\xi = \xi_0 + \mu\tau, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\xi} = \frac{g_W(\tau|F, \theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\xi} \quad (\text{II.7})$$

Par conséquent la différence entre la fonction g_S de Smith et celle de Wagner g_W repose essentiellement sur la valeur du dénominateur, qui concrétise la circonstance supplémentaire énoncée par Smith.

Ricciardi et Sato donnent l'expression rigoureuse de la fonction g en ne supposant aucune hypothèse [27]-[28] :

$$g_R(\tau|F, \theta) = W_1(\tau|F, \theta) - \int_0^{\tau} W_2(\tau_1, \tau|F, \theta) d\tau_1 + \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\tau} W_3(\tau_2, \tau_1, \tau|F, \theta) d\tau_2 - \dots +$$

$$(-1)^{n-1} \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau_2 \dots \int_{\tau_{n-3}}^{\tau} d\tau_{n-2} \int_{\tau_{n-2}}^{\tau} W_n(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \dots, \tau_1, \tau|F, \theta) d\tau_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad (\text{II.8})$$

avec :

$$W_n(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \dots, \tau_1, \tau|F, \theta) = \int_{\mu}^{\infty} d\gamma_1 \int_{\mu}^{\infty} d\gamma_2 \dots \int_{\mu}^{\infty} d\gamma_n \prod_{i=1}^n (\gamma_i - \mu) \cdot p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; \tau) \quad (\text{II.8a})$$

où $W_n(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \dots, \tau_1, \tau|F, \theta) d\tau_{n-1} d\tau_{n-2} \dots d\tau_2 d\tau_1$ est la probabilité conjointe que le rayon incident d'équation $S_n = \xi_0 + \mu\tau_n$ traverse la surface $\xi(\tau_n)$, avec une pente μ inférieure à la pente de la surface γ_n d'abscisse τ_n , dans les intervalles $\{[\tau_1; \tau_1 + d\tau_1], [\tau_2; \tau_2 + d\tau_2], \dots, [\tau_{n-1}; \tau_{n-1} + d\tau_{n-1}]\}$, conditionnellement à la connaissance de $F(\xi_0, \gamma_0)$. $p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; \tau)$ est la densité de probabilité conjointe des vecteurs $\vec{S}^T = [S_1, S_2, \dots, S_n]$ et $\vec{G}^T = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$ aux abscisses $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, sachant $\{\xi_0, \gamma_0\}$.

A noter que le problème est un peu différent de celui exposé dans l'article de Ricciardi et Sato, car la densité de probabilité p_{2n+2} est conditionnée dans notre cas par les variables $\{\xi_0, \gamma_0\}$, alors qu'ils ne considéraient que le terme ξ_0 .

On note que la formulation de Wagner est retrouvée pour $n = 1$ et $\gamma = \gamma_1$.

II.2.4 Application sur un processus décorrélé d'une surface infinie

Pour un processus décorrélé, la densité de probabilité $p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau)$ conjointe des hauteurs $\{\xi, \xi_0\}$ et des pentes $\{\gamma, \gamma_0\}$ devient :

$$p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) = p(\xi)p(\gamma) \quad (\text{II.9})$$

Dans ce paragraphe les différentes formulations de la fonction g sont appliquées sur un processus décorrélé, et pour une longueur d'observation infinie. La fonction d'ombre moyennée sur les pentes et sur les hauteurs est définie par (équation (II.4) dans (II.5) avec $L_{ob} \rightarrow \infty$) :

$$S(\theta) = S(\theta)_{L_{ob} \rightarrow \infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\mu} p(\xi_0, \gamma_0) \cdot \exp\left(-\int_0^{\infty} g(\tau|F, \theta) d\tau\right) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (\text{II.10})$$

Elle est estimée dans les cas de Wagner et de Smith pour un processus quelconque, puis à partir de l'approche de Ricciardi-Sato pour un processus gaussien. La fonction d'ombre de Smith est comparée pour des densités de probabilités de Gauss et de Laplace, et les formalismes de Wagner, Smith et Ricciardi-Sato sont simulés pour un processus gaussien.

II.2.4.1 Approches de Wagner et Smith pour un processus quelconque

Dans l'annexe 1 on montre que les fonctions d'ombre de Wagner et de Smith s'expriment pour un processus quelconque décorrélé, et pour une longueur d'observation infinie, par :

$$\begin{cases} S_w(v) = \Lambda' \times \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \\ S_s(v) = \Lambda' \times \frac{1}{\Lambda + 1} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) p(\gamma) d\gamma & \Lambda' = \int_{-\infty}^{\mu} p(\gamma) d\gamma \\ v = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2}} = \frac{\cot\theta}{\sigma\sqrt{2}} \end{cases} \quad (\text{II.11a})$$

où $p(\gamma)$ est la densité de probabilité des pentes. L'expression générale de $S_s(v)$ est identique à celle de [31]. D'après l'inégalité suivante :

$$\frac{x}{1+x} < 1 - e^{-x} < x \quad \text{avec} \quad x > 0 \quad (\text{II.11b})$$

qui implique :

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1 - e^{-x}}{x} < 1 \quad (\text{II.11c})$$

nous obtenons alors :

$$\frac{1}{1+\Lambda} < \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} < 1 \quad \Rightarrow \quad S_s(v) < S_w(v) < \Lambda' < 1 \quad (\text{II.11d})$$

avec $\Lambda > 0$. Par conséquent la fonction de Wagner est toujours supérieure à celle de Smith.

II.2.4.2 Approche de Ricciardi-Sato pour un processus gaussien

Dans l'annexe 2, on montre que la fonction d'ombre de Ricciardi-Sato est donnée pour un processus gaussien décorrélé, et pour une longueur d'observation infinie, par :

$$S_R(v) = \left[1 - \frac{\text{erfc}(v)}{2} \right] \left[\frac{E_1(-e^{-\Lambda}) - E_1(-1)}{\Lambda e^1} \right] \quad (\text{II.12})$$

avec :

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{2}\sigma} \quad (\text{II.12a})$$

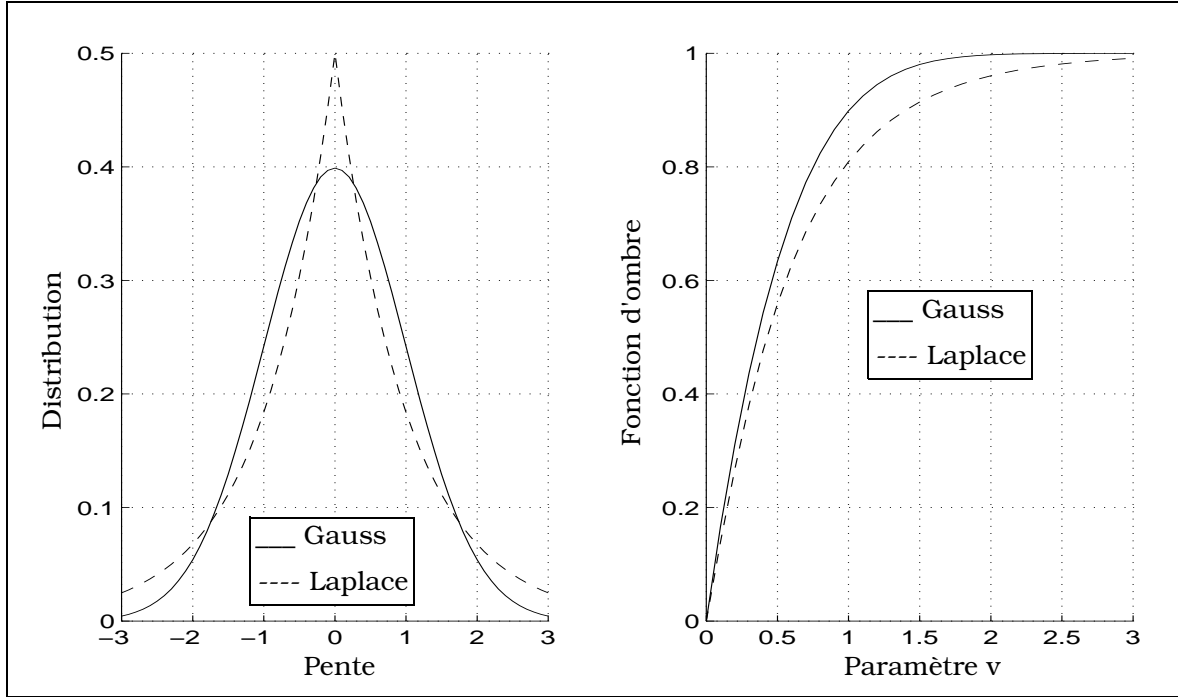
où σ^2 est la variance des pentes.

II.2.4.3 Simulation

Les densités de probabilité de Gauss (indice G) et de Laplace (indice L) s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} p_G(\gamma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right) \\ p_L(\gamma) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|\gamma|}{\sigma}\right) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

où σ est l'écart type des pentes de la surface. Elles sont représentées à gauche du graphe II.1 pour $\sigma = 1$.



Graphé II.1 A gauche distributions de Gauss et de Laplace. A droite fonction d'ombre de Smith selon la distribution en fonction du paramètre v

On observe que la distribution de Laplace favorise les pentes faibles et grandes, alors que celle de Gauss favorise les pentes moyennes. En substituant les équations (II.13) dans (II.11a), les fonctions d'ombre de Wagner et de Smith s'écrivent pour chacun des processus décorrélé :

$$\begin{cases} S_w(v) = \Lambda' \times \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \\ S_s(v) = \Lambda' \times \frac{1}{\Lambda + 1} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

avec dans le cas gaussien :

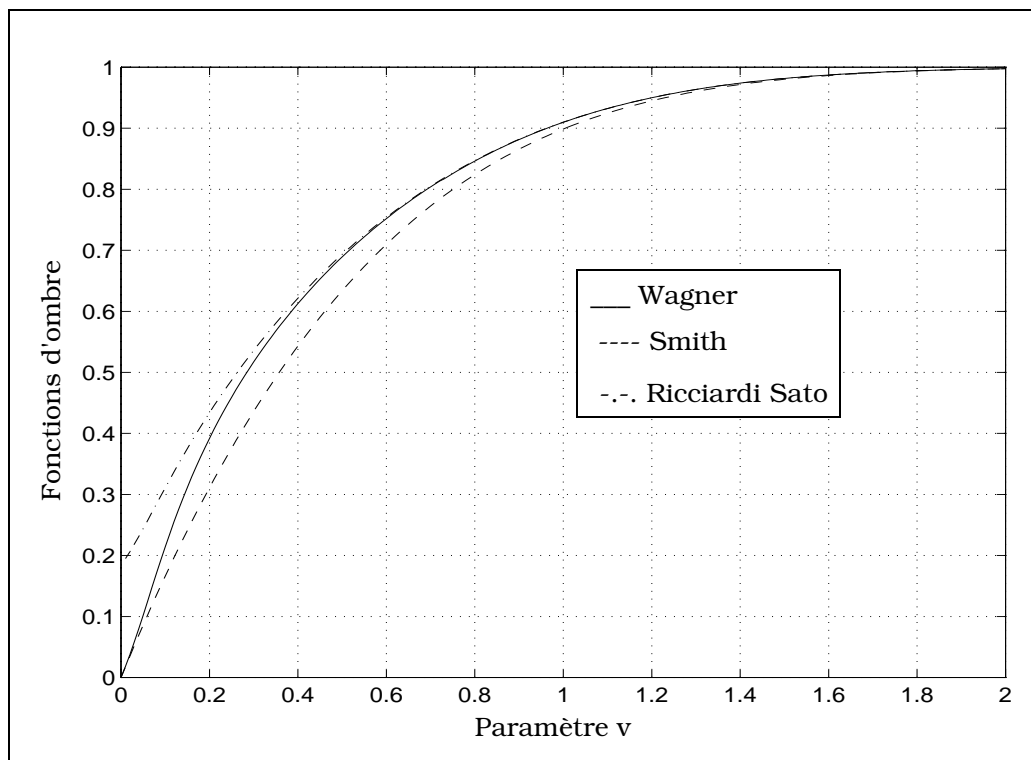
$$\begin{cases} \Lambda_G(v) = \frac{e^{-v^2} - v\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(v)}{2v\sqrt{\pi}} \\ \Lambda'_G(v) = 1 - \frac{\operatorname{erfc}(v)}{2} \end{cases} \quad (\text{II.14a})$$

et dans le cas laplacien :

$$\begin{cases} \Lambda_L(v) = \frac{e^{-v\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}v} \\ \Lambda'_L(v) = 1 - \frac{e^{-v\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \quad (\text{II.14b})$$

Ainsi les fonctions d'ombre $\{S_W, S_S, S_R\}$ données par les relations (II.14) et (II.12) dépendent uniquement d'un paramètre v . A droite du graphe II.1, pour chacune des distributions, la fonction d'ombre de Smith est tracée en fonction de v . On observe que pour des incidences normales correspondant à v grand, les résultats tendent vers un, tandis que pour des incidences rasantes soit v proche de zéro, ils convergent vers zéro.

Sur le graphe II.2, pour une distribution gaussienne, les fonctions d'ombres de Wagner, Smith et Ricciardi-Sato sont représentées en fonction de v .



Graph II.2 Représentation des fonctions d'ombre de Wagner, Smith et Ricciardi-Sato en fonction du paramètre v d'un processus gaussien décorrélé

On observe que les résultats de Smith sont inférieurs à ceux de Wagner, confirmant l'équation (II.11d). Le comportement des courbes de Wagner et de Ricciardi-Sato est identique pour des valeurs de $v \geq 0,6$, par contre il diffère pour des valeurs plus faibles, correspondant à des angles d'incidence proche de 90° . En effet :

$$S_R(0) = e^{-1}/2 = 0,184 \quad \text{et} \quad S_W(0) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Physiquement la fonction d'ombre est nulle sous une incidence de 90° . Par conséquent, lorsque la corrélation n'est pas introduite, les résultats de Sato-Ricciardi sont incorrects sous des incidences rasantes. Par contre ceux de Wagner restent corrects mais surestiment la fonction d'ombre.

La modélisation du phénomène n'étant pas assez précise, il s'avère donc indispensable d'inclure la corrélation. Malheureusement, la complexité de l'équation (II.8) rend la détermination analytique de la fonction g_R très difficile voire impossible. Néanmoins les calculs analytiques des fonctions g corrélées de Wagner et de Smith sont possibles. C'est l'objet de la partie suivante.

II.3 FONCTION D'OMBRE MONOSTATIQUE MONODIMENSIONNELLE CORRÉLÉE

Le but de cette partie est de quantifier les hypothèses introduites par Smith et Wagner dans le calcul de la fonction d'ombre monodimensionnelle monostatique. Ils supposent que les densités de probabilité des hauteurs et des pentes sont décorrélées, ce qui implique que la fonction d'ombre devient indépendante de la fonction d'autocorrélation. Les formalismes de Wagner et de Smith exposés dans le paragraphe précédent sont repris, mais en considérant désormais un processus gaussien corrélé [25].

II.3.1 Expressions des probabilités conditionnelles de Wagner et de Smith

Ce paragraphe donne les expressions théoriques des probabilités conditionnelles de Smith et de Wagner d'un processus gaussien corrélé, pour une longueur d'observation finie.

II.3.1.1 Wagner

Nous montrons dans l'annexe 3 que la densité de probabilité conjointe des hauteurs et des pentes s'écrit :

$$p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau) = \frac{\sigma\omega}{2\pi\sqrt{|[C]|}} \times \exp \left[-\frac{C_{i11}(\xi_0^2 + \xi^2) + C_{i33}(\gamma_0^2 + \gamma^2)}{2|[C]|} + \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} - \frac{2C_{i12}\xi_0\xi + 2C_{i34}\gamma_0\gamma + 2C_{i13}(\xi_0\gamma_0 - \xi\gamma) + 2C_{i14}(\xi_0\gamma - \xi\gamma_0)}{2|[C]|} \right] \quad (\text{II.16})$$

avec :

$$\begin{cases} C_{i11} = \omega^2(\sigma^4 - R_2^2) - R_1^2\sigma^2 \\ C_{i12} = R_0(R_2^2 - \sigma^4) - R_1^2R_2 \\ C_{i13} = -R_1(R_0\sigma^2 + \omega^2R_2) \end{cases} \quad \begin{cases} C_{i14} = R_1(R_1^2 - R_0R_2 - \omega^2\sigma^2) \\ C_{i33} = \sigma^2(\omega^4 - R_0^2) - R_1^2\omega^2 \\ C_{i34} = R_2(\omega^4 - R_0^2) + R_1^2R_0 \end{cases} \quad (\text{II.16a})$$

$$|[C]| = \frac{C_{i33}^2 - C_{i34}^2}{\omega^4 - R_0^2}$$

où $R_0(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation supposée paire et dérivable en zéro, et $\{R_1, R_2\}$ ses dérivées première et seconde. La variance des hauteurs ω^2 est égale à $R_0(0)$ et celle des pentes σ^2 vaut $-R_2(0)$ (équation (I.41b) du chapitre I). $[C]$ est le déterminant de la matrice de covariance $[C]$.

Le premier indice i de C_{ijk} représente l'élément de la matrice inverse $[C]$. La probabilité conditionnelle de Wagner $g_w(\tau|F, \theta)$ s'écrit alors (annexe 3) :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \frac{\sigma\omega \exp[-D - \mu(\mu A + 2B)]}{4\pi A \sqrt{M}} \left[1 - \sqrt{\pi} \exp \left[\frac{(B + \mu A)^2}{A} \right] \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \operatorname{erfc} \left(\frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \right) \right] \quad (\text{II.17})$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{C_{i33}}{2|[C]|} \\ B = \frac{\xi_0 C_{i14} - \xi C_{i13} + \gamma_0 C_{i34}}{2|[C]|} & \xi = \xi_0 + \mu\tau \\ D = \frac{(\xi_0^2 + \xi^2)C_{i11} + 2\xi_0\xi C_{i12} + 2\gamma_0(\xi_0 C_{i13} - \xi C_{i14}) + \gamma_0^2 C_{i33}}{2|[C]|} - \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} \end{cases} \quad (\text{II.17a})$$

II.3.1.2 Smith

La probabilité conditionnelle de Smith $g_s(\tau|F, \theta)$ est donnée par (annexe 4) :

$$g_s(\tau|F, \theta) = \frac{\frac{1}{\pi\sqrt{A_1}} \exp[-D - \mu(\mu A + 2B)] \left[1 - \sqrt{\pi} \exp\left[\frac{(B + \mu A)^2}{A}\right] \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B + \mu A}{\sqrt{A}}\right) \right]}{e^{\frac{B_1^2}{A_1} - C_1 + \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2}} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{A_1 \xi + B_1}{\sqrt{A_1}}\right) + 1 \right\}} \quad (\text{II.18})$$

avec :

$$\begin{cases} A_1 = (C_{i11}C_{i33} - C_{i13}^2)E_1 & E_1 = \frac{1}{2C_{i33}[C]} \\ B_1 = [\xi_0(C_{i12}C_{i33} + C_{i14}C_{i13}) + \gamma_0(C_{i13}C_{i34} - C_{i14}C_{i33})]E_1 \\ C_1 = [\xi_0^2(C_{i11}C_{i33} - C_{i14}^2) + \gamma_0^2(C_{i33}^2 - C_{i34}^2) + 2\xi_0\gamma_0(C_{i13}C_{i33} - C_{i14}C_{i34})]E_1 \end{cases} \quad (\text{II.18a})$$

La fonction introduite au dénominateur de l'équation (II.18) concrétise la normalisation de Smith.

II.3.1.3 Conclusion

Les fonctions d'ombre classiques de Wagner et de Smith, supposent que la corrélation est nulle c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} R_0 = 0 \\ R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{i12} = 0 \\ C_{i13} = 0 \\ C_{i14} = 0 \\ C_{i34} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |[C]| = \sigma^4 \omega^4 \\ C_{i11} = \sigma^4 \omega^2 \\ C_{i33} = \sigma^2 \omega^4 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

qui implique d'après les relations (II.17a) et (II.18a) :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2\sigma^2} \\ B = 0 \\ D = \frac{\xi^2}{2\omega^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2\omega^2} \\ B_1 = 0 \\ C_1 = \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

En substituant les relations (II.20) dans (II.17) et (II.18), les probabilités conditionnelles de Wagner et de Smith deviennent :

$$\begin{cases} g_w(\tau|F, \theta) = \Lambda \mu p(\xi) & p(\xi) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\omega^2}\right) \\ g_s(\tau|F, \theta) = g_w(\tau|F, \theta) \frac{2}{1 + \operatorname{erf}(\xi/[\sqrt{2}\omega])} \geq g_w(\tau|F, \theta) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Λ est définie par l'équation (II.14a) avec $\Lambda = \Lambda_G$. En comparant ces relations aux équations (1.4) et (1.10) de l'annexe 1, les probabilités $\{g_w, g_s\}$ sont retrouvées. Négliger la corrélation est donc équivalent à ne considérer que la valeur à l'infini de la fonction d'autocorrélation car $R_0(\infty) = 0$.

Ainsi les probabilités conditionnelles décorréliées (équations (II.21)) dépendent du couple $\{\omega, \sigma\}$.

Or pour des fonctions d'autocorrélation différentes (par exemple une gaussienne et une lorentzienne tableau II.1), ce couple est identique. Ce qui implique que la fonction d'ombre (équation (II.10)) a la même valeur pour deux surfaces différentes. Le fait d'introduire la corrélation lève cette ambiguïté, car les probabilités conditionnelles (équations (II.17) et (II.18)) deviennent dépendantes de la fonction d'autocorrélation à travers les termes C_{ijk} .

	Fonctions R_0 et f_0	Fonctions R_1 et f_1	Fonctions R_2 et f_2	Ecart type des pentes σ
Gaussien	$R_0 = \omega^2 e^{-\frac{\tau^2}{L_C^2}}$ $f_0 = e^{-y^2}$	$R_1 = -\frac{2\omega^2 \tau}{L_C L_C} e^{-\frac{\tau^2}{L_C^2}}$ $f_1 = \sqrt{2} y e^{-y^2}$	$R_2 = -\frac{2\omega^2}{L_C^2} e^{-\frac{\tau^2}{L_C^2}} \left(1 - 2\frac{\tau^2}{L_C^2}\right)$ $f_2 = e^{-y^2} (1 - 2y^2)$	$\sigma = \frac{\omega\sqrt{2}}{L_C}$ $\eta = \frac{\sigma L_C}{\omega} = \sqrt{2}$
Lorentzien	$R_0 = \frac{\omega^2}{1 + \frac{\tau^2}{L_C^2}}$ $f_0 = \frac{1}{1 + y^2}$	$R_1 = -\frac{2\omega^2 \tau}{L_C L_C \left(1 + \frac{\tau^2}{L_C^2}\right)^2}$ $f_1 = \frac{y\sqrt{2}}{(1 + y^2)^2}$	$R_2 = -\frac{2\omega^2}{L_C^2} \frac{1 - 3\frac{\tau^2}{L_C^2}}{\left(1 + \frac{\tau^2}{L_C^2}\right)^3}$ $f_2 = \frac{1 - 3y^2}{(1 + y^2)^3}$	$\sigma = \frac{\omega\sqrt{2}}{L_C}$ $\eta = \frac{\sigma L_C}{\omega} = \sqrt{2}$

Tableau II.1 Fonctions d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne

II.3.2 Expressions des fonctions d'ombre de Smith et de Wagner

Dans cette partie nous allons montrer que les fonctions d'ombre monostatiques monodimensionnelles moyennées de Wagner et de Smith, ne dépendent que d'un seul paramètre $v = \mu/(\sigma\sqrt{2})$ quelle que soit la fonction d'autocorrélation. μ étant la pente du faisceau incident et σ l'écart-type des pentes. L'avantage d'introduire la variable v est de réduire le nombre de degrés de liberté de deux, $\{\theta, \sigma\}$ à un, v .

II.3.2.1 Fonctions d'ombre moyennées de Wagner et de Smith

Afin d'exprimer la fonction d'ombre en fonction du paramètre v , on pose :

$$R_0 = \omega^2 f_0 \quad R_1 = -\sigma \omega f_1 \quad R_2 = -\sigma^2 f_2 \quad (\text{II.22})$$

Dans les expressions de $\{R_1; R_2\}$ figure le signe moins, afin d'avoir au voisinage de zéro les fonctions $\{f_1; f_2\}$ positives. En substituant les relations (II.22) dans (II.16a), on montre :

$$\begin{cases} \frac{C_{i11}}{2|[C]|} = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \frac{f_{11}}{f_M} & \frac{C_{i33}}{2|[C]|} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{f_{33}}{f_M} & \frac{C_{i13}}{2|[C]|} = \frac{1}{2\sigma\omega} \cdot \frac{f_{13}}{f_M} \\ \frac{C_{i12}}{2|[C]|} = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \frac{f_{12}}{f_M} & \frac{C_{i34}}{2|[C]|} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{f_{34}}{f_M} & \frac{C_{i14}}{2|[C]|} = \frac{1}{2\sigma\omega} \cdot \frac{f_{14}}{f_M} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

avec :

$$\begin{cases} f_{11} = 1 - f_2^2 - f_1^2 & f_{33} = 1 - f_0^2 - f_1^2 & f_{13} = f_1(f_0 - f_2) \\ f_{12} = f_0 f_2^2 + f_1^2 f_2 - f_0 & f_{34} = f_0^2 f_2 + f_1^2 f_0 - f_2 & f_{14} = f_1(1 - f_1^2 - f_0 f_2) \end{cases} \quad (\text{II.23a})$$

$$f_M = (f_{33} - f_{34}) / (1 - f_0^2) = |[C]| / (\omega\sigma)^4$$

La fonction d'ombre s'écrit pour une surface de longueur d'observation L_{ob} finie (équation (II.4)) :

$$S(\theta, F, L_{ob}) = Y(\mu - \gamma_0) \exp \left[- \int_0^{L_{ob}} g(\tau | F, \theta) d\tau \right] \quad (II.23b)$$

La fonction d'ombre moyennée sur les pentes et les hauteurs s'écrit donc pour un processus gaussien :

$$S(\theta, L_{ob}) = \frac{1}{2\pi\sigma\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\mu} \exp \left(- \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left(- \int_0^{L_{ob}} g(\tau | F\{\xi_0, \gamma_0\}, \theta) d\tau \right) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (II.24)$$

En effectuant les changements de variable suivants :

$$h_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}\omega} \quad \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}\sigma} = v - p_0 \quad y = \frac{\tau}{L_C} \quad (II.25)$$

où L_C est la longueur de corrélation, on obtient :

$$S(v, y_{ob}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-h_0^2 - (v - p_0)^2] \cdot \exp \left[-L_C \int_0^{y_{ob} = L_{ob}/L_C} g(y | F\{h_0, p_0\}, \theta) dy \right] dh_0 dp_0 \quad (II.26)$$

L'avantage du changement de variable est de réduire les bornes d'intégration. Ainsi :

$$\begin{cases} -\infty < h_0 < \infty \rightarrow -3 < h_0 < 3 & \text{car} & \exp(-3^2) = 1,23 \times 10^{-4} \\ 0 < p_0 < \infty \rightarrow 0 < p_0 < 3 + v & \text{car} & \exp(-3^2) = 1,23 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (II.27)$$

Lorsque la longueur d'observation normalisée y_{ob} (sans unité) est infinie, l'intervalle d'intégration de la fonction g est compris entre zéro et l'infini, qui entraîne un problème numérique. Afin de le résoudre, l'intégrale est scindée en deux parties, l'intégration analytique du second terme contenant la borne infinie devient alors possible.

II.3.2.2 Réduction de l'intervalle d'intégration

Nous pouvons donc écrire :

$$L_C \int_0^{y_{ob}} g dy = L_C \int_0^{y_t} g dy + L_C \int_{y_t}^{y_{ob}} g dy = G + G_t \quad (II.28)$$

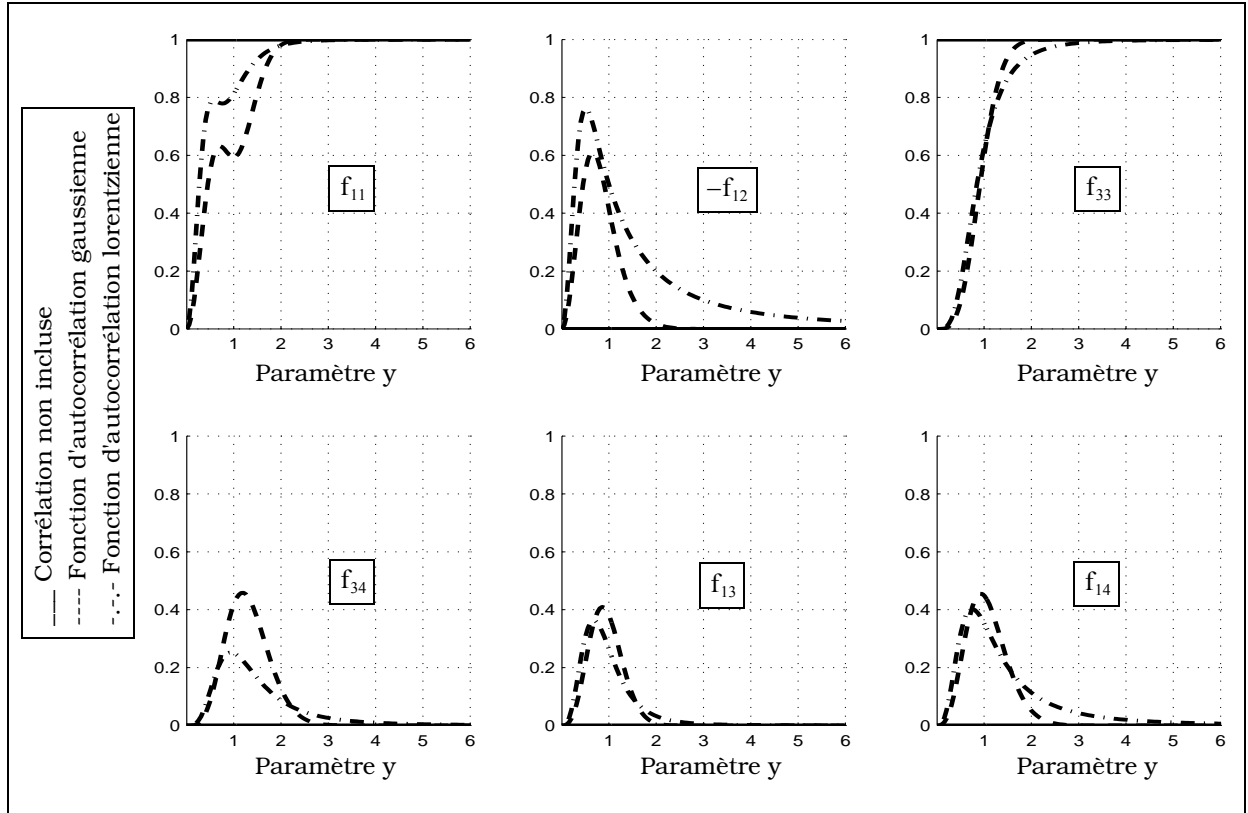
La borne d'intégration de transition y_t , est définie lorsque :

$$f_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{pour } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (II.29)$$

Sur le graphe II.3 sont représentés les termes f_{ij} selon la variable réduite y , pour des fonctions d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne (tableau II.1 et équations (II.23a)).

On observe que les fonctions $\{f_{12}; f_{34}; f_{13}; f_{14}\}$ sont nulles lorsque $y \geq y_{tG} = 3$ dans le cas gaussien, et $y \geq y_{tL} = 6$ pour la lorentzienne, tandis que les termes $\{f_{11}; f_{33}\}$ deviennent indépendants de y et sont égaux à l'unité. Par conséquent $\{y_{tG} = 3, y_{tL} = 6\}$.

Wagner et Smith supposent que les relations (II.29) sont vérifiées quelles que soient les valeurs de y , dans leur cas l'équation (II.28) se réduit alors à G_t avec $y_t = 0$. Cette condition est représentée graphiquement en trait plein sur le graphe II.3.



Graph II.3 Représentation des fonctions f_{ij} selon y , pour des fonctions d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne

Le calcul de G_t repose donc sur les probabilités conditionnelles de Wagner et de Smith sans corrélation sur l'intervalle $y \in [y_i; y_{ob}]$. En effectuant les changements de variable donnés par les relations (II.25), elles s'écrivent (équations (II.21)) :

$$\begin{cases} g_w(h) = \frac{\Lambda v}{L_C \sqrt{\pi}} \exp(-h^2) \\ g_s(h) = \frac{g_w(h)}{1 - \operatorname{erfc}(h)/2} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

avec :

$$\Lambda = [e^{-v^2} - v\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(v)] / (2v\sqrt{\pi}) \quad (\text{II.30a})$$

$$h = h_0 + y \frac{\mu L_C}{\omega \sqrt{2}} = h_0 + y \times v \eta \quad (\text{II.30b})$$

$$\eta = \frac{\sigma L_C}{\omega} \quad (\text{II.30c})$$

En substituant les équations (II.30) dans la seconde intégrale (II.28), l'intégration analytique de la fonction g sur l'intervalle $[y_i; y_{ob}]$ devient :

$$\begin{cases} G_{tW} = \int_{y_i}^{y_{ob}} g_w(h_0, v) dy = \frac{\Lambda}{2} [\operatorname{erf}(h_f) - \operatorname{erf}(h_i)] \\ G_{tS} = \int_{y_i}^{y_{ob}} g_s(h_0, v) dy = -\ln \left[\frac{1 - \frac{\operatorname{erfc}(h_i)}{2}}{1 - \frac{\operatorname{erfc}(h_f)}{2}} \right]^\Lambda \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

avec :

$$\begin{cases} h_t = h_0 + y_t v \eta \\ h_f = h_0 + y_{ob} v \eta \end{cases} \quad (\text{II.31a})$$

A noter que d'après le tableau II.1, $\eta = \sqrt{2}$, mais cette relation ne sera pas toujours vérifiée (cas des fonctions d'autocorrélation amorties). En substituant l'équation (II.31) dans (II.28) puis dans (II.26), la fonction d'ombre s'écrit finalement :

$$S(v, y_{ob}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(h_0) \left[\int_0^{\infty} J(h_0, p_0) dp_0 \right] dh_0 \quad (\text{II.32})$$

avec :

$$\begin{cases} I(h_0) = \exp[-h_0^2 - G_t(h_0, v, y_{ob})] \\ J(h_0, p_0) = \exp \left[-(v - p_0)^2 - L_C \int_0^{y_t} g(y, h_0, p_0, v) dy \right] \end{cases} \quad (\text{II.32a})$$

II.3.2.3 Remarques

Les modèles de Wagner et de Smith supposent que la surface est infinie $y_{ob} = \infty$ impliquant que $h_f = \infty$ et que $y_t = 0 \Rightarrow h_t = h_0$, d'où :

$$\begin{cases} S_W(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_0^2 - \Lambda \text{erfc}(h_0)} dh_0 \int_0^{\infty} e^{-(v-p_0)^2} dp_0 = \Lambda' \times \frac{1 - e^{-\Lambda}}{\Lambda} \\ S_S(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_0^2} \left[1 - \frac{\text{erfc}(h_0)}{2} \right]^\Lambda dh_0 \int_0^{\infty} e^{-(v-p_0)^2} dp_0 = \Lambda' \times \frac{1}{\Lambda + 1} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

On retrouve la solution (II.14).

II.3.2.4 Bilan

Le tableau II.2 donne les expressions mathématiques des fonctions d'ombre monostatiques monodimensionnelles moyennées de Wagner et de Smith d'un processus gaussien, répondant à une fonction d'autocorrélation quelconque.

Leur détermination repose sur trois intégrations successives imbriquées. La première calcule l'intégration exacte de la fonction g sur l'intervalle $[0; y_t]$. La seconde intégration est effectuée sur $J(h_0, p_0)$ selon la variable p_0 . Enfin le résultat obtenu est multiplié par $I(h_0)$, puis intégré sur h_0 . Les termes f_{ij} contiennent toute l'information sur la fonction d'autocorrélation, et sont donnés par les équations (II.23). L'intégration de la fonction g impose des critères de convergence donnés par :

$$f_M > 0 \quad f_{33} > 0 \quad (\text{II.34})$$

Les fonctions d'ombre de Wagner et de Smith classiques, négligent la corrélation, c'est-à-dire que y_t est nul. Ainsi l'intégration de $J(h_0, p_0)$ selon p_0 devient indépendante de h_0 , entraînant deux intégrations indépendantes selon $\{p_0, h_0\}$ de $\{J(p_0), I(h_0)\}$ résolues analytiquement (équations (II.33)). Enfin quel que soit le modèle adopté, la fonction d'ombre dépend du paramètre $v = \mu/\sigma\sqrt{2}$, et de la longueur d'observation y_{ob} normalisée par la longueur de corrélation L_C . μ est la pente du faisceau incident et σ l'écart type des pentes.

Fonction d'ombre	$S(v, y_{ob}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(h_0) \left[\int_0^{\infty} J(h_0, p_0) dp_0 \right] dh_0$ $I(h_0) = \exp[-h_0^2 - G_1(h_0, v, y_{ob})] \quad J(h_0, p_0) = \exp \left[-(v - p_0)^2 - L_C \int_0^{y_t} g(y, h_0, p_0, v) dy \right]$
Intégration	$h_0 \in [-3;3] \quad p_0 \in [0;3+v] \quad h = h_0 + y \times v\eta$
Fonction $L_C \cdot g_w$ de WAGNER	$\frac{\eta \sqrt{f_M}}{2\pi f_{33}} \cdot e^{-D - \mu(\mu A + 2B)} \cdot [1 - e^{S^2} \sqrt{\pi} \text{Serfc}(S)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S = \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \\ \eta = \frac{\sigma L_C}{\omega} = \text{cste} \end{cases}$ $\begin{cases} D = \frac{(h_0^2 + h^2)f_{11} + 2h_0 h f_{12} + 2(v - p_0)(h_0 f_{13} - h f_{14}) + (v - p_0)^2 f_{33}}{f_M} - h_0^2 - (v - p_0)^2 \\ S = \frac{h_0 f_{14} - h f_{13} + (v - p_0) f_{34} + v f_{33}}{\sqrt{f_{33} f_M}} \\ \mu(\mu A + 2B) = \frac{v^2 f_{33} + 2v(h_0 f_{14} - h f_{13}) + 2v f_{34}(v - p_0)}{f_M} \end{cases}$
Fonction G_t de WAGNER	$\frac{\Lambda}{2} [\text{erf}(h_f) - \text{erf}(h_t)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h_t = h_0 + y_t v\eta \\ h_f = h_0 + y_{ob} v\eta \end{cases}$
Fonction $L_C \cdot g_s$ de SMITH	$\frac{\eta \sqrt{f_{11} f_{33} - f_{13}^2}}{\pi f_{33}} \cdot e^{-D - \mu(\mu A + 2B) - h_0^2 - (v - p_0)^2} \cdot [1 - e^{S^2} \sqrt{\pi} \text{Serfc}(S)]$ $e^{\frac{B_1^2}{A_1} - C_1} \cdot \text{erfc} \left(-\frac{A_1 h + B_1}{\sqrt{A_1}} \right)$ $\begin{cases} C_1 = h_0^2 \cdot \frac{f_{11} f_{33} - f_{14}^2}{f_{33} f_M} + (v - p_0)^2 \cdot \frac{f_{33}^2 - f_{34}^2}{f_{33} f_M} + 2h(v - p_0) \cdot \frac{f_{13} f_{33} - f_{14} f_{34}}{f_{33} f_M} \\ \frac{B_1}{\sqrt{A_1}} = \frac{h_0(f_{12} f_{33} + f_{14} f_{13}) + (v - p_0)(f_{13} f_{34} - f_{14} f_{33})}{\sqrt{f_{33} f_M (f_{11} f_{33} - f_{13}^2)}} \quad \sqrt{A_1} = \sqrt{\frac{f_{11} f_{33} - f_{13}^2}{f_{33} f_M}} \end{cases}$
Fonction G_t de SMITH	$-\ln \left[\frac{1 - \text{erfc}(h_t)/2}{1 - \text{erfc}(h_f)/2} \right]^\Lambda \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h_t = h_0 + y_t v\eta \\ h_f = h_0 + y_{ob} v\eta \end{cases}$

Tableau II.2 Résumé du calcul de la fonction d'ombre moyennée pour une fonction d'autocorrélation donnée

II.3.2.5 Fonction d'ombre numérique : solution de référence

Afin de valider la description monostatique monodimensionnelle de la fonction d'ombre de Smith et de Wagner, il nous est paru intéressant de calculer la fonction d'ombre numériquement. En effet connaissant la surface (paragraphe I.3.2 du chapitre I), il est possible de définir une procédure expérimentale, déterminant la fonction d'ombre numérique. L'algorithme de calcul [10], [30] est résumé sur la figure II.4.

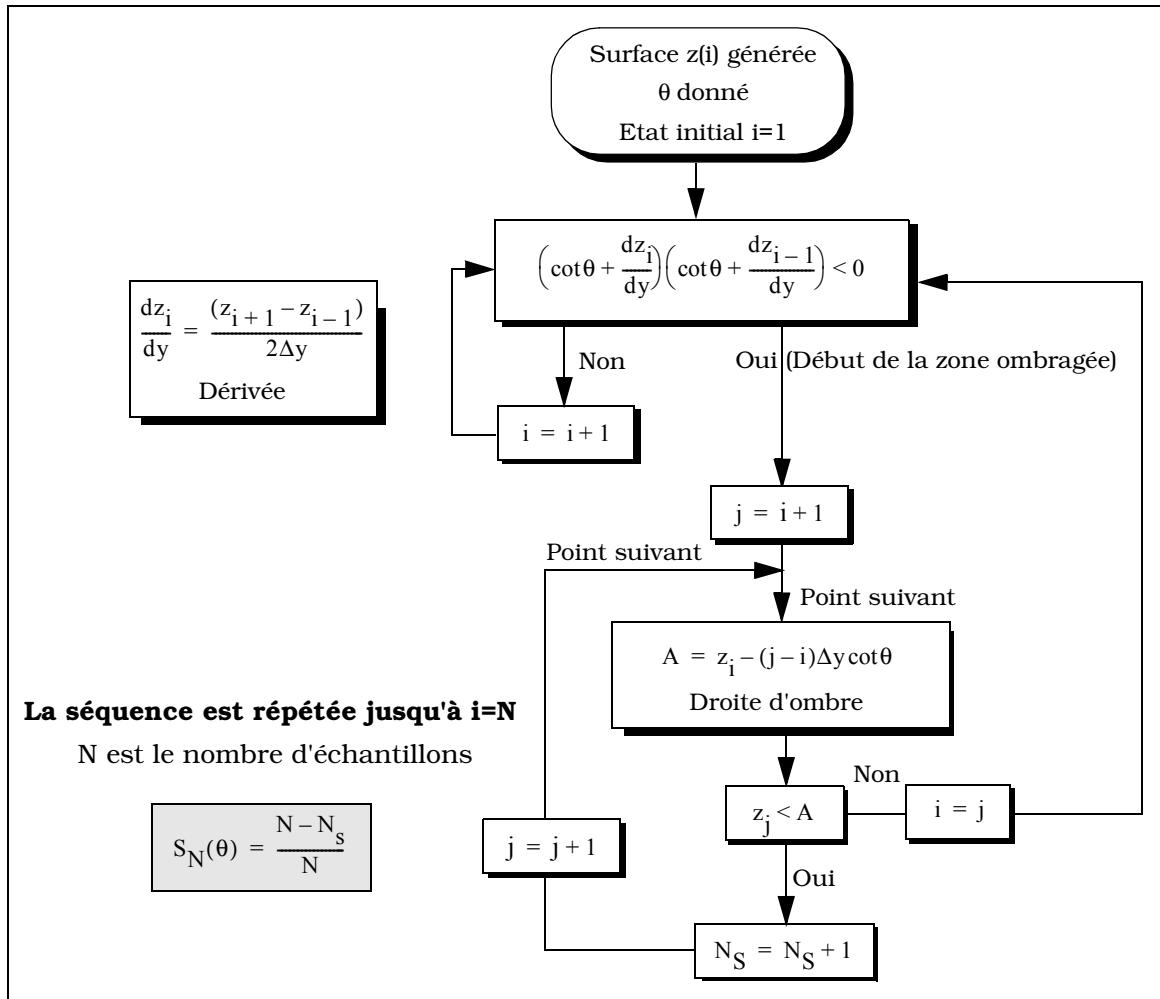


Figure II.4 Algorithme de calcul de la fonction d'ombre numérique

Pour vérifier la procédure de calcul, la surface aléatoire est remplacée par un profil sinusoïdal d'équation $z(y) = A \sin(By)$, dont la fonction d'ombre peut être calculée analytiquement. En effet le point y_1 où la surface rentre dans l'ombre est déterminé par :

$$\left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=y_1} = A \cdot B \cdot \cos(By_1) = -\cot\theta \Rightarrow y_1 = \arccos\left(\frac{-\cot\theta}{AB}\right) / B \quad (II.35)$$

Le point y_2 (figure II.5) où la surface émerge de l'ombre vérifie l'équation suivante :

$$z(y_1) - z(y_2) + (y_1 - y_2) \cot\theta = 0 \quad (II.35a)$$

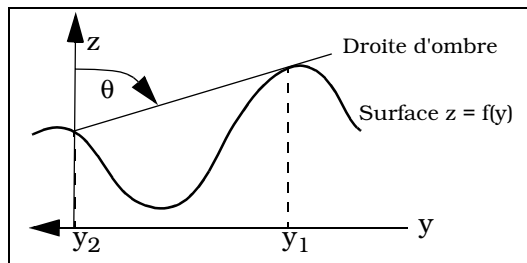
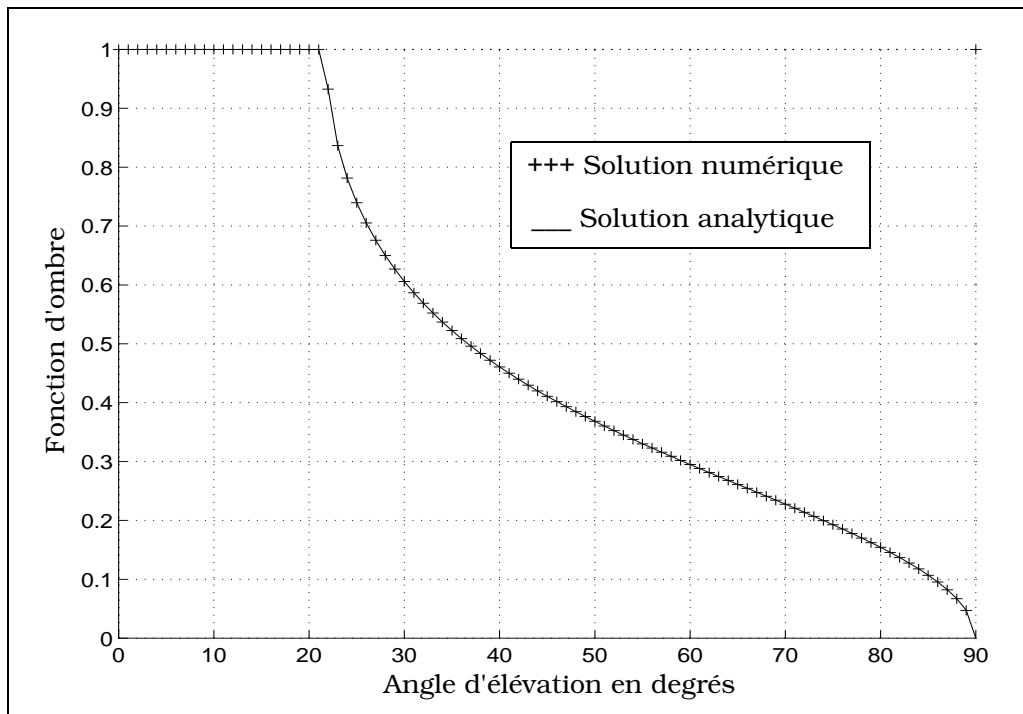


Figure II.5 Procédure expérimentale

Cette équation est résolue par dichotomie. La fonction d'ombre est alors égale sur une période à :

$$S_N(\theta) = 1 - \frac{B[y_2(\theta) - y_1(\theta)]}{2\pi} \quad (II.35b)$$

Sur le graphe II.4 sont comparées les fonctions d'ombre obtenues par les deux méthodes avec $\{A = 0,5; B = 5\}$ en fonction de l'angle d'incidence θ . Le nombre d'échantillons est de 5000. On observe une parfaite concordance des résultats, la procédure de calcul mise en oeuvre est donc jugée correcte.



Graph II.4 Comparaison des deux méthodes pour le calcul de la fonction d'ombre, en fonction de l'angle d'élévation, pour un profil sinusoïdal

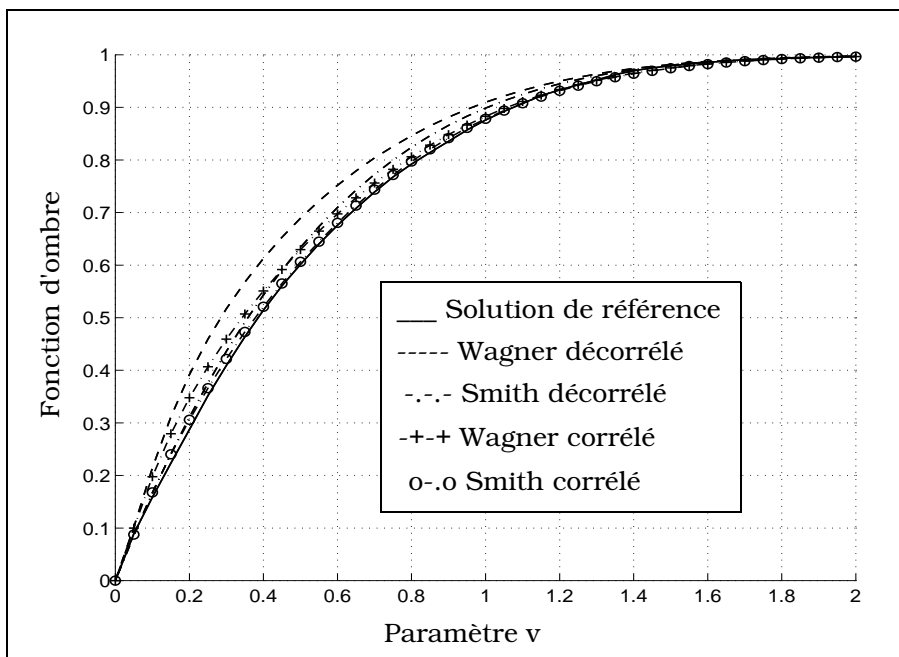
II.3.3 Simulations sur une surface infinie

Dans cette partie les fonctions d'ombre de Smith et de Wagner avec (tableau II.2) et sans corrélation (équations (II.33)) sont simulées sur une surface infinie ($y_{0b} = \infty$). Dans le but de quantifier les hypothèses introduites par Wagner et Smith dans l'approche classique (sans corrélation), elles sont comparées à la solution de référence, obtenue en générant les surfaces (paragraphe II.3.2.5) de profils d'autocorrélation gaussien et lorentzien. Enfin des profils amortis d'enveloppes gaussienne et lorentzienne sont également simulés.

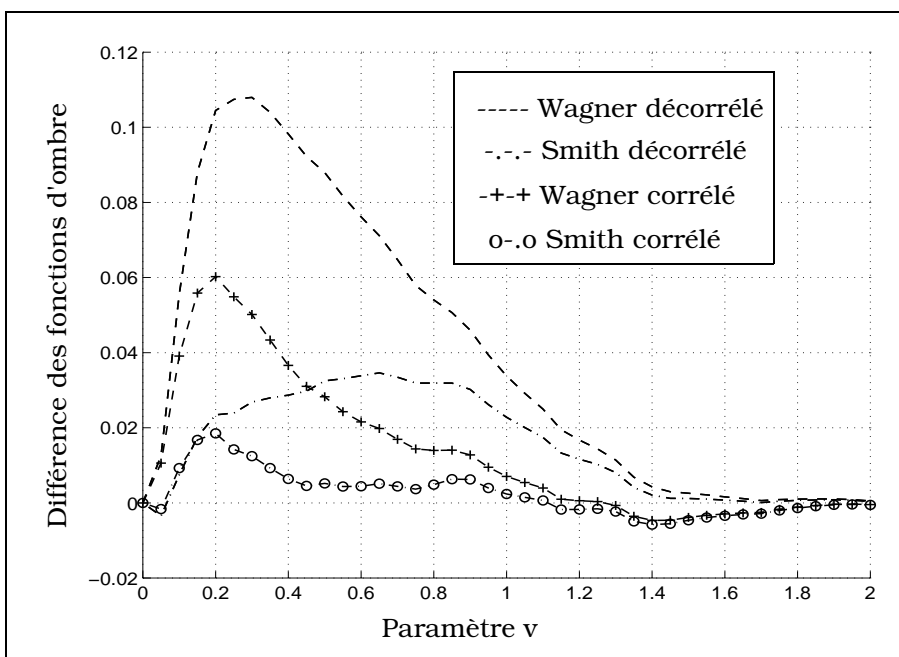
II.3.3.1 Fonction d'autocorrélation gaussienne

Sur le graphe II.5 sont représentées les différentes fonctions d'ombre pour un profil gaussien. En trait plein, figure la solution de référence. En pointillés sont tracés les résultats de Wagner et de Smith sans tenir compte de la corrélation, tandis qu'en croix et en cercles la corrélation est incluse. On observe que l'effet de la corrélation, diminue la fonction d'ombre tout en gardant un comportement identique.

Sur le graphe II.6 la différence entre les fonctions d'ombre et la solution de référence sont tracées. Pour des valeurs de $\nu \geq 1,4$, l'effet de la corrélation est négligeable, soit lorsque l'angle d'incidence reste inférieur ou égal à $\theta_c = \text{atan}(0,505/\sigma)$, avec σ l'écart type des pentes. Pour des valeurs de $\nu < 1,4$, la corrélation diminue en moyenne par trois l'erreur relative. Enfin les résultats de Smith sont meilleurs que ceux de Wagner.



Graph II.5 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle selon ν d'un profil gaussien



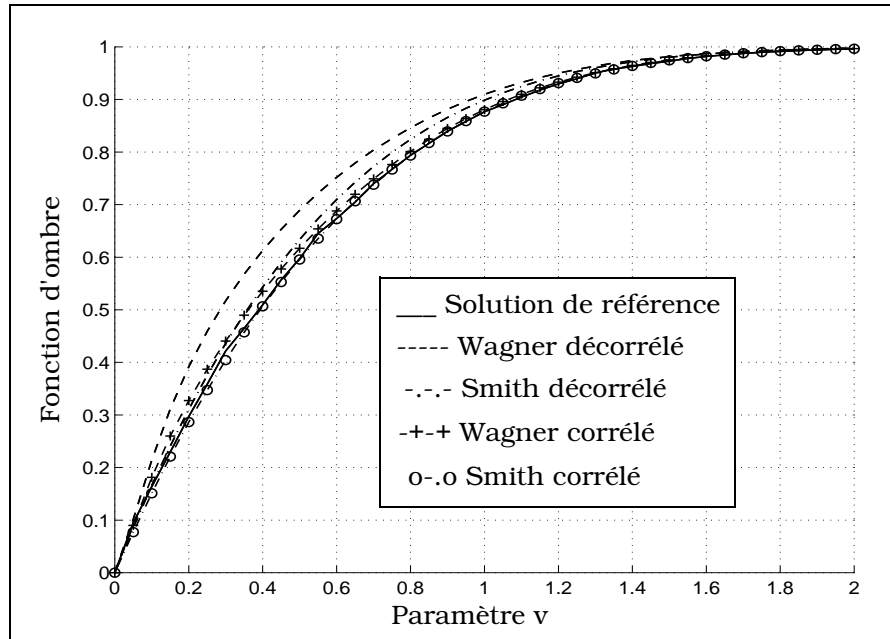
Graph II.6 Différence entre les fonctions d'ombre et la solution de référence, d'un profil gaussien

II.3.3.2 Fonction d'autocorrélation lorentzienne

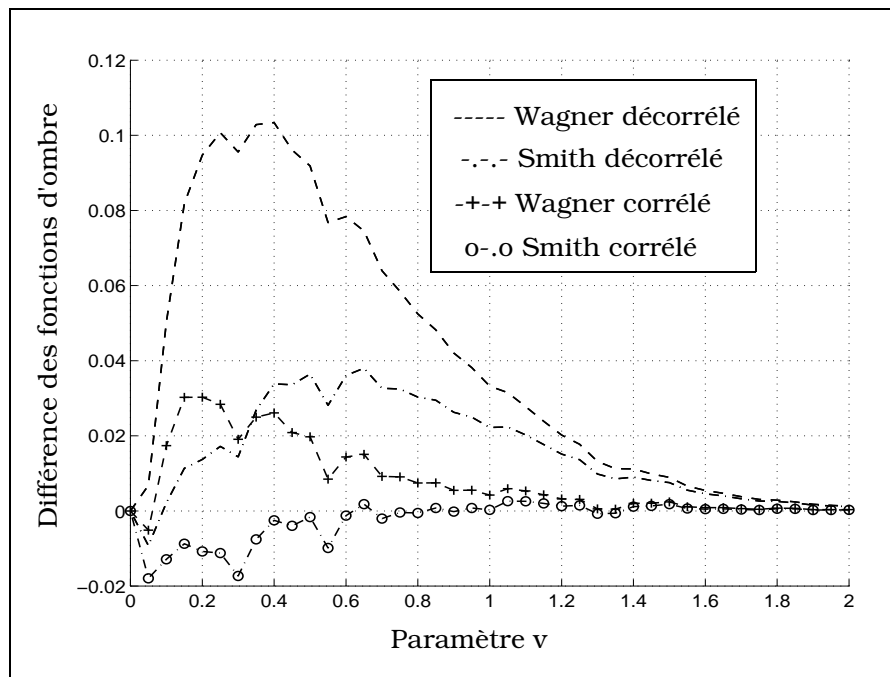
Sur le graphe II.7 sont représentées les mêmes courbes que sur le graphe II.5, mais pour un profil lorentzien. On observe également que les résultats incluant la corrélation sont très proches de la solution de référence.

Sur le graphe II.8 les différences entre les fonctions d'ombre et la solution de référence sont comparées. On remarque que les résultats de Smith sont meilleurs que ceux de Wagner. Comme dans le cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne, pour des valeurs de $\nu \geq 1,4$, l'effet de la corrélation est négligeable, et la corrélation diminue en moyenne par trois l'erreur relative.

Néanmoins la différence obtenue avec la fonction d'ombre corrélée de Smith est négative au voisinage de zéro, qui signifie que pour un profil lorentzien, la corrélation peut sous-estimer l'ombre.



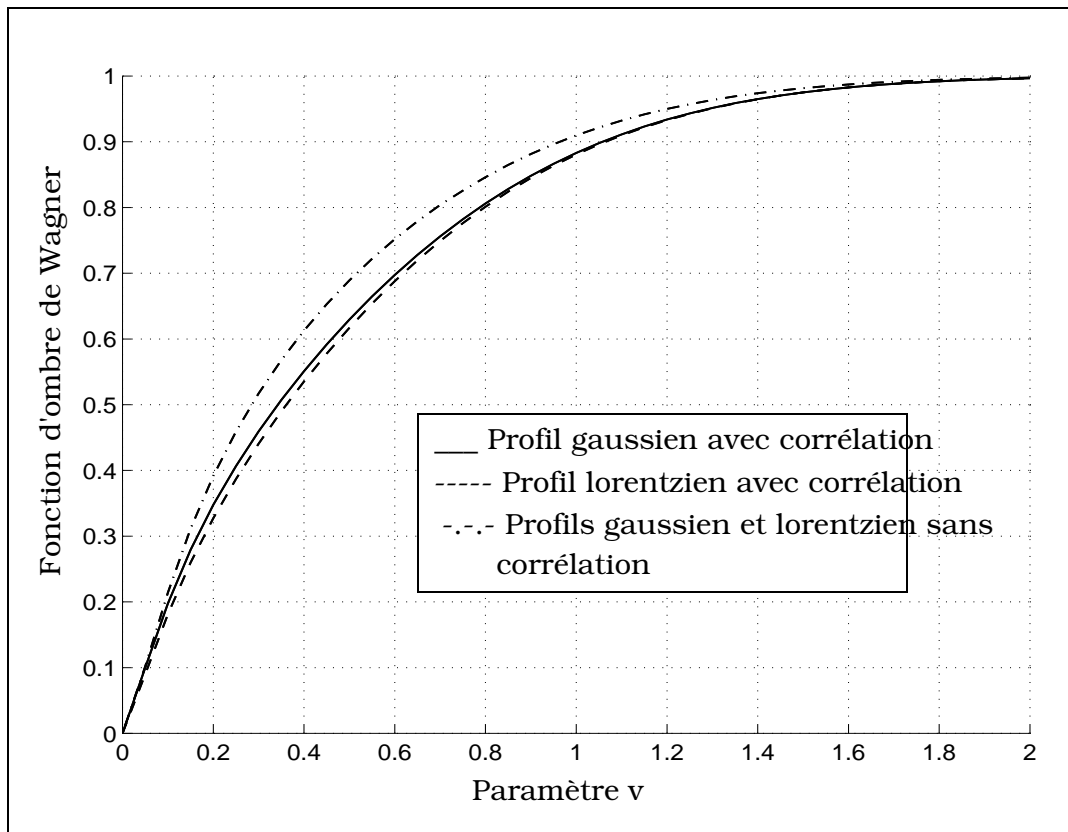
Graphe II.7 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle selon ν d'un profil lorentzien



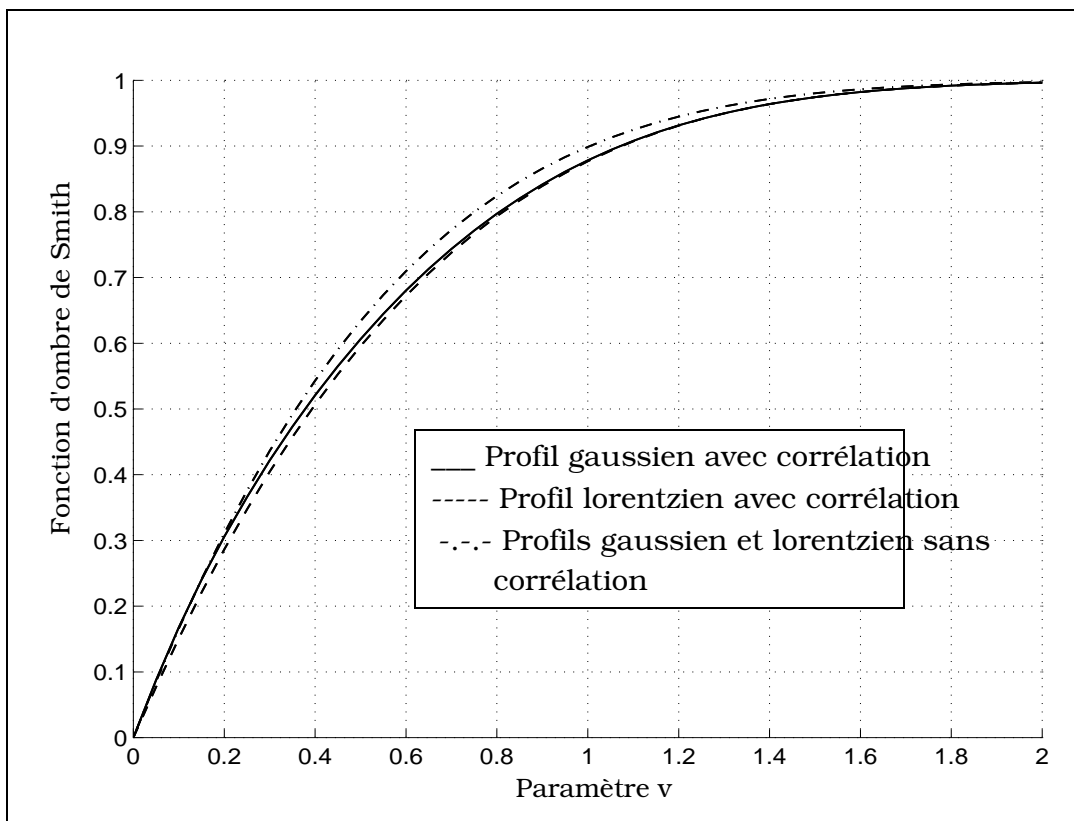
Graphe II.8 Différence entre les fonctions d'ombre et la solution de référence, d'un profil lorentzien

D'après le tableau II.2, la variance des pentes σ^2 est identique pour une fonction d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne. Par conséquent les fonctions d'ombre classiques de Wagner et de Smith, sont égales dans chacun des cas car $\nu = \cot\theta/(\sigma\sqrt{2})$.

En revanche les fonctions d'ombres corrélées diffèrent (graphe II.9 et graphe II.10), car les termes f_{ij} ne sont pas identiques pour des profils gaussien et lorentzien (graphe II.3).



Graph II.9 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle de Wagner selon ν



Graph II.10 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle de Smith selon ν

II.3.3.3 Fonctions d'autocorrélation amorties

Dans le premier chapitre, nous avons montré que la partie isotrope de la fonction d'autocorrélation est une lorentzienne amortie (paragraphe I.5.1.5). Afin de mettre en évidence cette propriété, des simulations sont réalisées sur les profils suivants :

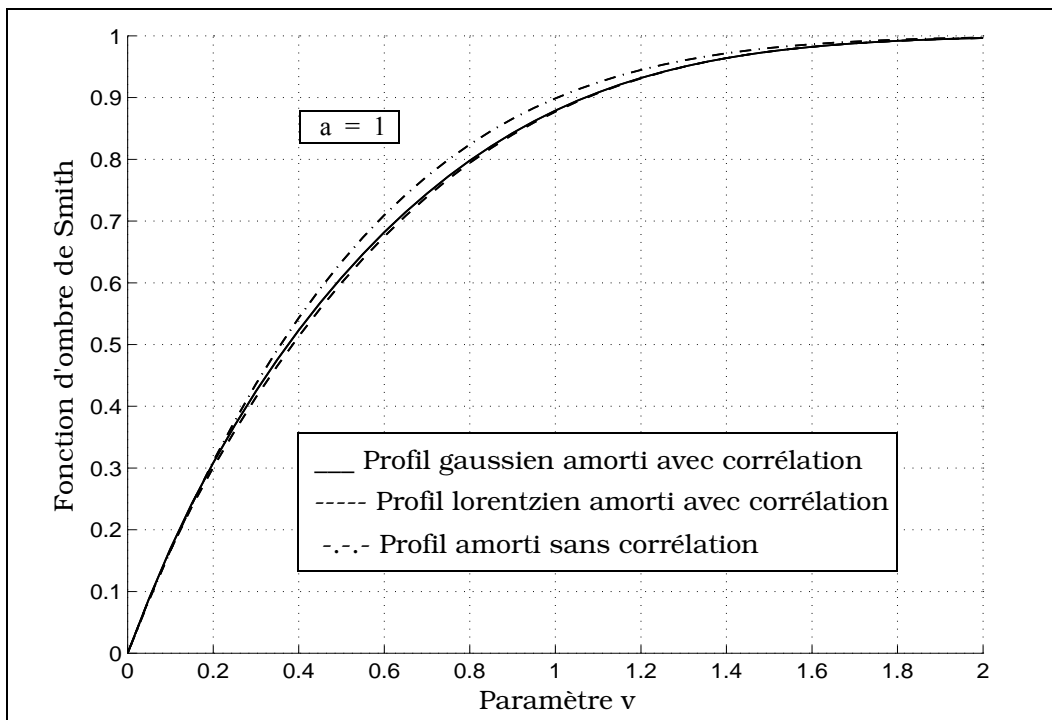
$$\begin{cases} R_0(\tau) = \omega^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{L_C^2}\right) \cos\left(\frac{a\tau}{L_C}\right) & \text{gaussienne amortie} \\ R_0(\tau) = \omega^2 \cos\left(\frac{a\tau}{L_C}\right) / \left(1 + \frac{\tau^2}{L_C^2}\right) & \text{lorentzienne amortie} \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Le tableau II.3 donnent les fonctions $\{f_0, f_1, f_2, \sigma, \eta\}$ pour chacun des profils

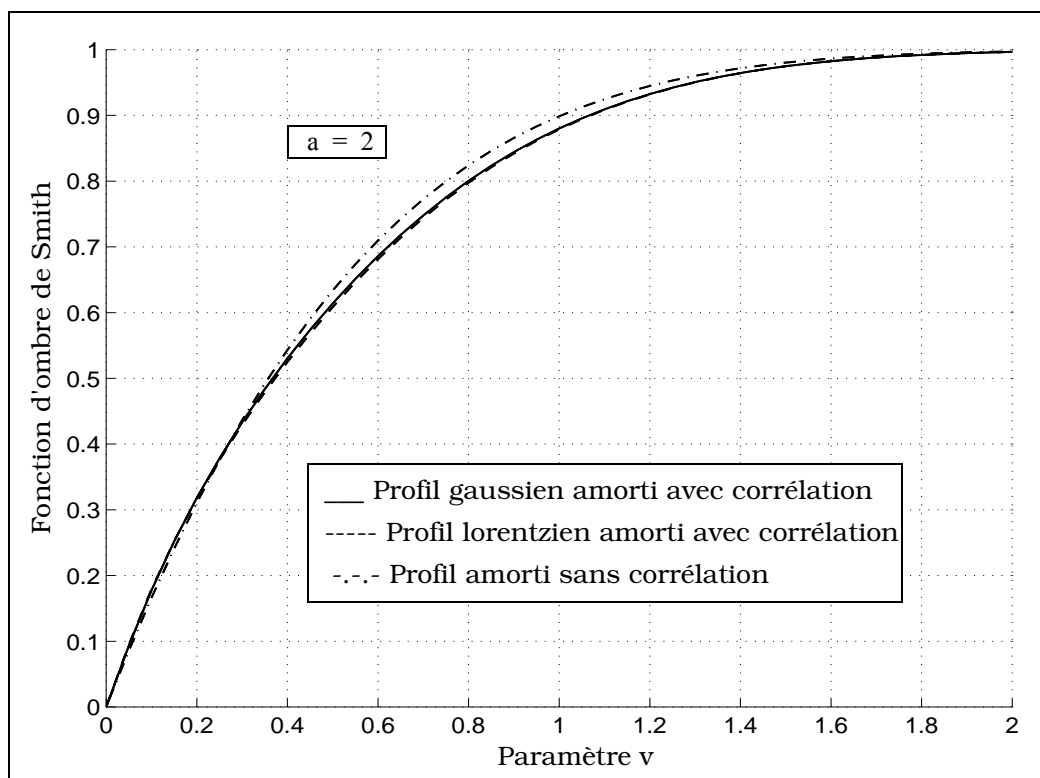
	Gaussien amorti	Lorentzien amorti
f_0	$e^{-y^2} \cos(ay)$	$\cos(ay)/(1+y^2)$
f_1	$\frac{e^{-y^2} [2y \cos(ay) + a \sin(ay)]}{\sqrt{2+a^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2+a^2}} \left[\frac{2y \cos(ay)}{(1+y^2)^2} + \frac{a \sin(ay)}{1+y^2} \right]$
f_2	$\frac{e^{-y^2} [(2+a^2-4y^2) \cos(ay) - 4ay \sin(ay)]}{2+a^2}$	$\frac{1}{2+a^2} \left\{ \cos(ay) \left[\frac{a^2}{1+y^2} + \frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3} \right] - \frac{4ay \sin(ay)}{(1+y^2)^2} \right\}$
$\{\sigma, \eta\}$	$\sigma = \frac{\omega\sqrt{2}}{L_C} \sqrt{1+\frac{a^2}{2}} \quad \eta = \sqrt{2+a^2}$	$\sigma = \frac{\omega\sqrt{2}}{L_C} \sqrt{1+\frac{a^2}{2}} \quad \eta = \sqrt{2+a^2}$

Tableau II.3 Fonctions d'autocorrélation amorties

Les solutions de référence ne sont pas simulées, car la détermination analytique des coefficients du filtre $w(i)$ est impossible. De plus, compte tenu des résultats précédents, seul le modèle de Smith est conservé. Sur les graphe II.11 et graphe II.12, les fonctions d'ombre de Smith avec et sans corrélation sont représentées selon le paramètre v , et pour $a = \{1, 2\}$.

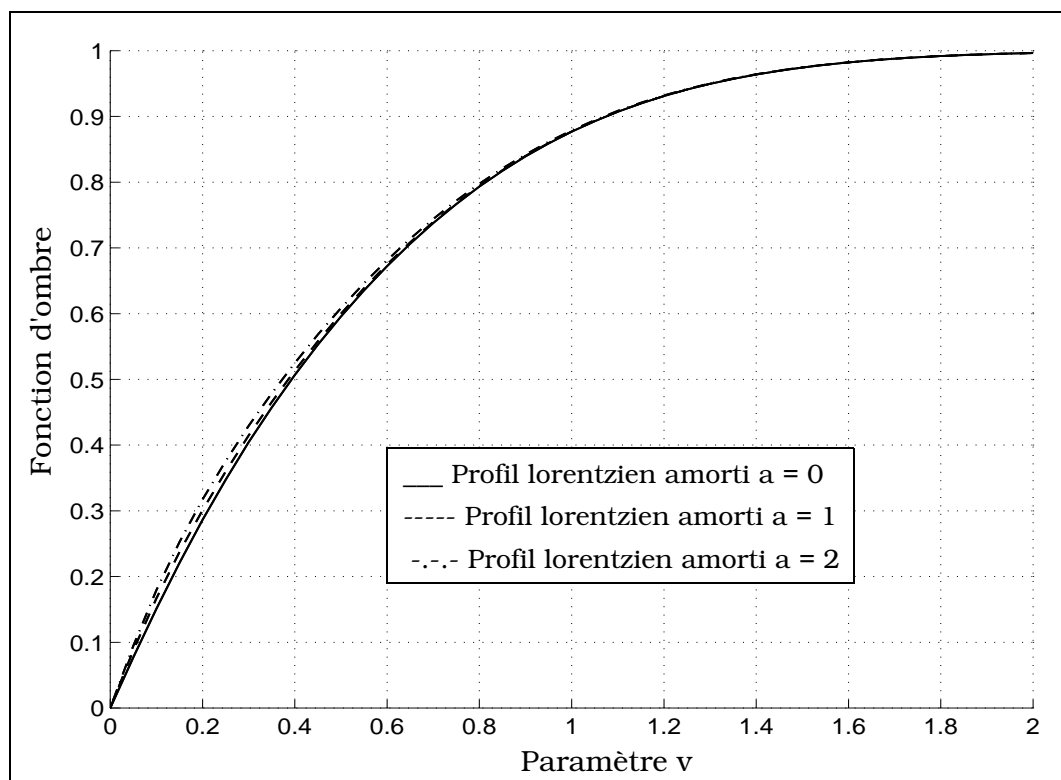


Graphe II.11 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle de Smith de profils d'autocorrélation amortis pour $a = 1$, et selon v



Graph II.12 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle de Smith de profils d'autocorrélation amortis pour $a = 2$, et selon v

On observe que les résultats corrélés diffèrent peu selon la fonction d'autocorrélation et la valeur de a . On note également que la corrélation devient négligeable lorsque $v \geq 1,4$. Sur le graphe II.13, les fonctions d'ombre corrélées de Smith d'un profil lorentzien amorti, sont comparées selon le paramètre $a = \{0, 1, 2\}$. On note, que les résultats varient très peu selon a .



Graph II.13 Fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle corrélée de Smith, d'une surface de fonction d'autocorrélation lorentzienne amortie pour $a = \{0, 1, 2\}$

II.3.4 Conclusion

Les approches classiques de Wagner et de Smith négligent la corrélation, induisant alors une surestimation de la fonction d'ombre. Physiquement, ceci est équivalent à ne considérer que la valeur en infini de la fonction d'autocorrélation, qui implique que la fonction d'ombre ne dépend que d'un seul paramètre caractérisant la surface; la variance des pentes de la surface. Or pour des profils d'autocorrélation différents, cette valeur peut être identique. Des simulations réalisées sur des profils gaussien [25] et lorentzien montrent que les résultats corrélés sont meilleurs que ceux décorrelés, et que la corrélation est négligeable pour des angles d'incidence inférieurs à $\theta_c = \text{atan}(0,505/\sigma)$. De plus, l'avantage d'inclure la corrélation est d'éliminer l'ambiguïté sur des profils d'autocorrélation possédant des variances de pentes identiques (tableaux II.2 et II.3).

Les résultats obtenus sur des profils d'autocorrélation gaussien et lorentzien amortis, ont montré que la fonction d'ombre de Smith corrélée varie très peu selon le profil d'autocorrélation, et la valeur de a . Par contre lorsque a augmente, l'écart entre les résultats corrélés et décorrelés croît, mais ils deviennent identiques lorsque l'angle d'incidence est inférieur à θ_c . Enfin dans la suite du document, ne sera conservé que le modèle de Smith car les résultats sont plus proches de la réalité que ceux de Wagner.

II.4 FONCTION D'OMBRE BISTATIQUE MONODIMENSIONNELLE

Le formalisme exposé dans les paragraphes précédents, est étendu au cas bistatique, en considérant un processus gaussien. Ainsi le problème bistatique est équivalent à deux configurations monostatiques indépendantes, définies selon l'émetteur et le récepteur. Les solutions monostatiques de Smith avec et sans corrélation sont étendues au cas bistatique, puis comparées à la solution de référence, obtenue en générant la surface.

II.4.1 Calcul de la fonction d'ombre bistatique

II.4.1.1 Position du problème

La fonction d'ombre S est définie comme le rapport de la surface illuminée sur la surface totale. Pour un processus stochastique, elle représente la probabilité $S(\theta_1, \theta_2|F)$ que les rayons émis (défini selon $y < 0$) et réfléchi (défini selon $y > 0$) d'incidences respectives $\{\theta_1, \theta_2\}$ ne soient pas interceptés par la surface, sachant qu'ils se coupent au point F situé sur la surface de hauteur ξ_0 et de pente γ_0 (figure II.6).

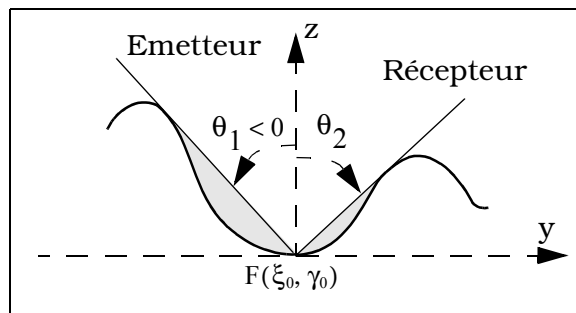


Figure II.6 Configuration bistatique de la fonction d'ombre

Soit $S(\theta_1|\theta_2, F)$ la probabilité que le rayon émis ne soit pas coupé par la surface, sachant que la surface n'intercepte pas le rayon réfléchi, et que les deux rayons se coupent au point F . Par analogie est définie $S(\theta_2|\theta_1, F)$. D'après le théorème de Bayes nous avons :

$$S(\theta_1, \theta_2|F) = S(\theta_1|\theta_2, F) \cdot S(\theta_2|F) = S(\theta_2|\theta_1, F) \cdot S(\theta_1|F) \quad (\text{II.37})$$

où $\{S(\theta_1|F), S(\theta_2|F)\}$ sont les probabilités conditionnelles monostatiques par rapport à l'émission et à la réception. Selon la valeur de l'angle de réception θ_2 trois cas sont à distinguer [22] (figure II.7). Par convention θ_1 est négatif.

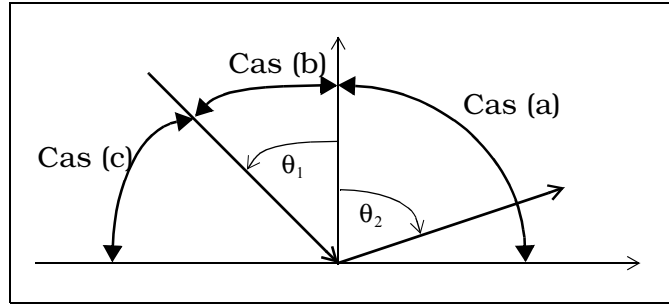


Figure II.7 Représentation géométrique des trois cas

II.4.1.2 Etude des trois cas

Cas (a) $\theta_2 \in [0; \pi/2]$

En supposant que la probabilité que le rayon incident coupe la surface est indépendante de celle interceptant le rayon réfléchi, nous avons :

$$S(\theta_1, \theta_2|F) = S(\theta_1|F) \cdot S(\theta_2|F) \quad (\text{II.37a})$$

Cas (b) $\theta_2 \in [\theta_1; 0[$

D'après l'équation (II.37), la probabilité conditionnelle s'écrit :

$$S(\theta_1, \theta_2|F) = S(\theta_2|\theta_1, F) \cdot S(\theta_1|F) = 1 \cdot S(\theta_1|F) \quad (\text{II.37b})$$

Cas (c) $\theta_2 \in [-\pi/2; \theta_1[$

D'après l'équation (II.37), la probabilité conditionnelle s'exprime par :

$$S(\theta_1, \theta_2|F) = S(\theta_1|\theta_2, F) \cdot S(\theta_2|F) = 1 \cdot S(\theta_2|F) \quad (\text{II.37c})$$

II.4.1.3 Conclusion

La probabilité conditionnelle bivariate s'écrit donc selon les directions $\{\theta_1; \theta_2\}$:

$$S(\theta_1, \theta_2|F) = \begin{cases} S(\theta_1|F) \cdot S(\theta_2|F) \\ S(\theta_1|F) \\ S(\theta_2|F) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \theta_2 \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \theta_2 \in [\theta_1; 0[\\ \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}; \theta_1[\end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Par conséquent, la fonction d'ombre bivariate s'exprime à partir des deux fonctions d'ombre monostatiques définies par les positions angulaires de l'émetteur et du récepteur. La fonction d'ombre moyennée sur les pentes et les hauteurs s'écrit pour une longueur d'observation L_{ob} :

$$S(\theta_1, \theta_2, L_{ob}) = \frac{1}{2\pi\sigma\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta_1, \theta_2|F, L_{ob}) \cdot \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2}\right) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (\text{II.39})$$

II.4.2 Application sur la fonction d'ombre de Smith

II.4.2.1 Solution de référence - algorithme de calcul

Afin de déterminer la fonction d'ombre bistatique obtenue en générant la surface de dimension N , un tableau indexé par le numéro de l'échantillon est construit. Le tableau II.4 donne les deux champs permettant de trouver la situation vis-à-vis de l'émetteur et du récepteur.

Indice i	Emetteur E	Récepteur R
$[1;N]$	$E_i = 1$ éclairé $E_i = 0$ caché	$R_i = 1$ éclairé $R_i = 0$ caché

Tableau II.4 Définition des champs

L'échantillon i est caché s'il est invisible de l'émetteur ou du récepteur. Par conséquent la fonction d'ombre numérique s'écrit :

$$S_N(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i \cdot R_i \quad \text{si} \quad \theta_2 > 0 \text{ alors } R_i = R_{N-i} \quad (\text{II.40})$$

A noter que si l'angle de réception est positif, alors la surface est retournée en réception.

II.4.2.2 Fonction d'ombre décorrelée

La fonction d'ombre bistatique de Smith décorrelée s'écrit (annexe 5) :

$$S_S(v_1, v_2) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{1}{2}[\text{erfc}(v_1) + \text{erfc}(v_2)]}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1} & \text{pour } 0 \leq v_2 < \infty \\ \frac{1 - \frac{1}{2}\text{erfc}(v_2)}{\Lambda_2 + 1} & \text{pour } -v_1 \leq -v_2 < 0 \\ \frac{1 - \frac{1}{2}\text{erfc}(v_1)}{\Lambda_1 + 1} & \text{pour } -\infty \leq -v_2 < -v_1 \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

avec :

$$\begin{cases} v_i = \frac{\cot(|\theta_i|)}{\sqrt{2}\sigma} \\ \Lambda_i = \frac{e^{-v_i^2} - v_i \sqrt{\pi} \text{erfc}(v_i)}{2v_i \sqrt{\pi}} \end{cases} \quad i = \{1, 2\} \quad (\text{II.41a})$$

II.4.2.3 Fonction d'ombre corrélée

Pour une surface de longueur L_{ob} , la fonction d'ombre monostatique s'écrit (équation (II.4)) :

$$S_S(\theta, \xi_0, \gamma_0, L_{ob}) = \Upsilon(\mu - \gamma_0) \cdot \exp \left[- \int_0^{L_{ob}} g_S(\tau | F\{\xi_0, \gamma_0\}, \theta) d\tau \right] \quad (\text{II.42})$$

Cas (a) $\theta, \in [0; \pi/2]$

En substituant la relation (II.42) dans (II.37a), la fonction d'ombre de Smith s'écrit :

$$S_S(\theta_1, \theta_2|F) = \Pi_{[\mu_1; \mu_2]} \cdot \exp \left[- \int_{-L_{ob}}^0 g_{S1}(\tau) d\tau - \int_0^{L_{ob}} g_{S2}(\tau) d\tau \right] = \Pi_{[\mu_1; \mu_2]} \cdot \exp \left[- \int_0^{L_{ob}} [g_{S1}(-\tau) + g_{S2}(\tau)] d\tau \right] \quad (II.43)$$

où $\{g_{S1}; g_{S2}\}$ sont respectivement les probabilités conditionnelles selon l'émission et la réception. La définition de la fonction $\Pi_{[\mu_1; \mu_2]}$ est donnée en annexe 5. Par conséquent en généralisant les résultats monostatiques contenus dans le tableau II.2 avec $v - p_0$ remplacé par p_0 , nous montrons que la fonction d'ombre moyennée de Smith est donnée par :

$$S_S(v_1, v_2, y_{ob}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_0^2} \left[\frac{1 - \frac{\operatorname{erfc}(h_0 + y_t v_1 \eta)}{2}}{1 - \frac{\operatorname{erfc}(h_0 + y_{ob} v_1 \eta)}{2}} \right]^{\Lambda_1} \left[\frac{1 - \frac{\operatorname{erfc}(h_0 + y_t v_2 \eta)}{2}}{1 - \frac{\operatorname{erfc}(h_0 + y_{ob} v_2 \eta)}{2}} \right]^{\Lambda_2} \left[\int_{-v_1}^{v_2} J(h_0, p_0) dp_0 \right] dh_0 \quad (II.44)$$

avec :

$$J(h_0, p_0) = \exp \left\{ - p_0^2 - L_C \int_0^{y_t} [g_{S1}(-y) + g_{S2}(y)] dy \right\} \quad (II.44a)$$

Les paramètres $\{v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, \Lambda_1, \Lambda_2\}$ sont donnés par les relations (II.41a).

Expressions des probabilités conditionnelles

D'après l'équation (II.7), la probabilité conditionnelle de Smith selon la réception ($\tau > 0$), s'écrit :

$$g_{S2}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma - \mu_2) \cdot \exp[-A \cdot \gamma^2 - 2B \cdot \gamma - D] d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-A \cdot \gamma^2 - 2B \cdot \gamma - D] d\xi d\gamma} \quad (II.45)$$

Son expression est donnée après les changements de variable des équations (II.25), dans le tableau II.2 en remplaçant $\{v - p_0 \rightarrow p_0; v \rightarrow v_2\}$.

De même la probabilité conditionnelle selon l'émission ($\tau < 0$) est donnée par :

$$g_{S1}(-\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{-|\mu_1|} (-\gamma - |\mu_1|) \cdot \exp[-A \cdot \gamma^2 - 2B \cdot \gamma - D] d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-A \cdot \gamma^2 - 2B \cdot \gamma - D] d\xi d\gamma} \quad (II.46)$$

En posant $\gamma' = -\gamma$ dans l'intégrale du numérateur, $g_{S1}(-\tau)$ s'écrit :

$$g_{S1}(-\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma' - |\mu_1|) \cdot \exp[-A \cdot \gamma'^2 + 2B \cdot \gamma' - D] d\gamma'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-A \cdot \gamma^2 - 2B \cdot \gamma - D] d\xi d\gamma} \quad (II.47)$$

Par conséquent on passe de $g_{S1}(-\tau)$ à $g_{S2}(\tau)$ en permutant B en $-B$ au numérateur et, en permutant $|\mu_i|$ en μ_2 au numérateur et au dénominateur.

Bilan

- Lorsque $0 \leq v_2 < \infty$, la fonction d'ombre est donnée par l'équation (II.44). $g_{S2}(y)$ est calculée à partir de l'expression monostatique de g_S figurant dans le tableau II.2., en effectuant $\{v \rightarrow v_2; v_2 - p_0 \rightarrow p_0\}$.

Par contre, $g_{S1}(-y)$ est déterminée en remplaçant $\{v \rightarrow v_1; v_1 - p_0 \rightarrow p_0; f_{ij}(y) \rightarrow f_{ij}(-y)\}$. De plus B est changé en son opposé $-B$, ce qui revient à remplacer dans les expressions de $\{S; \mu(\mu A + 2B)\}$, les $\{f_{13}; f_{14}; f_{34}\}$ en leurs opposés. Dans le cas où la fonction d'autocorrélation est paire, on montre que les fonctions $\{f_{12}; f_{11}; f_{33}; f_{34}\}$ sont paires, alors que les termes $\{f_{13}; f_{14}\}$ sont impairs. Par conséquent il suffit de remplacer dans $\{S; \mu(\mu A + 2B)\}$, f_{34} en $-f_{34}$ et dans D, $\{f_{13}; f_{14}\}$ en $\{-f_{13}; -f_{14}\}$.

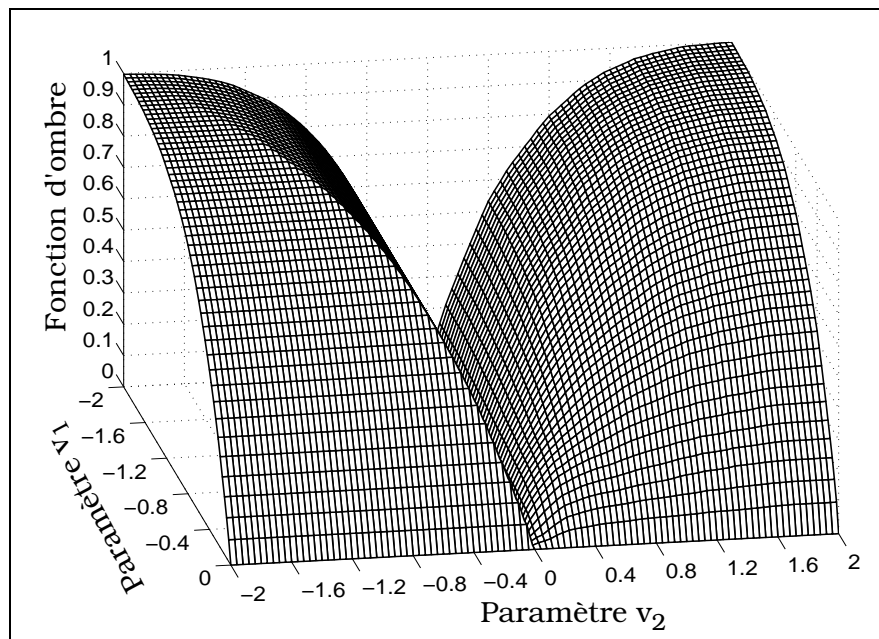
- Lorsque $-v_1 \leq -v_2 < 0$, la fonction d'ombre est obtenue à partir de l'expression monostatique de g_S figurant dans le tableau II.2., en effectuant $v \rightarrow v_2$.

- Lorsque $-\infty \leq -v_2 < -v_1$, la fonction d'ombre est obtenue à partir de l'expression monostatique de g_S figurant dans le tableau II.2., en effectuant $v \rightarrow v_1$.

II.4.2.4 Simulations sur une surface infinie

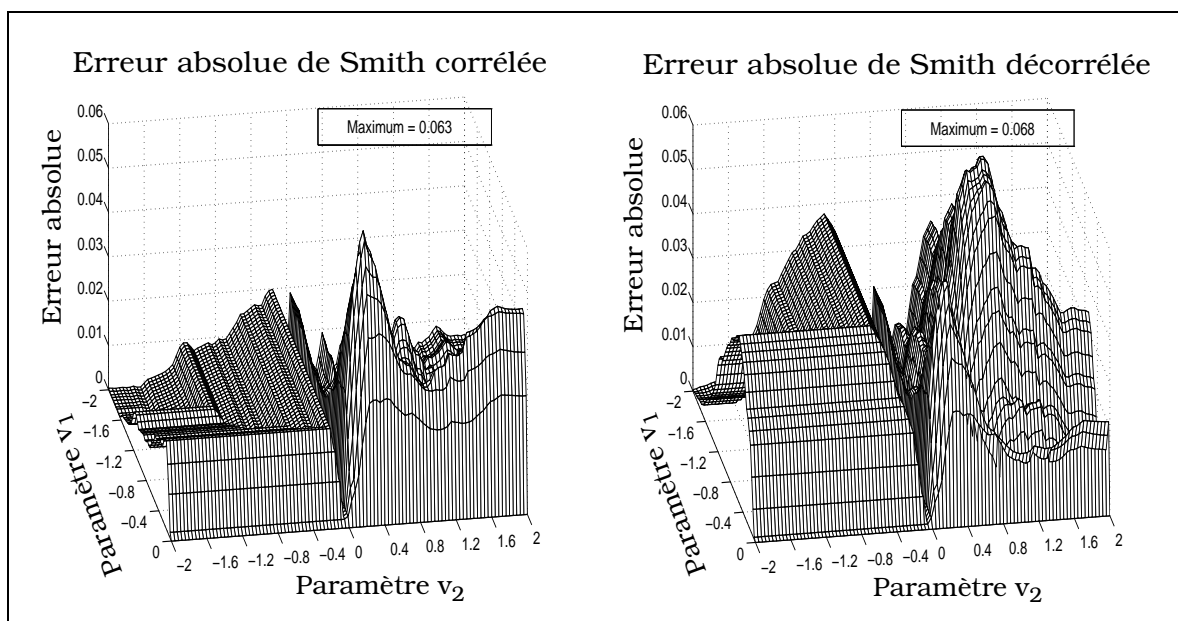
Dans cette partie, les fonctions d'ombre bistatiques monodimensionnelles de Smith décorrélée (équation (II.41)) et corrélée (équation (II.44)) sont simulées, pour une surface infinie ($y_{ob} = \infty$), de fonction d'autocorrélation gaussienne amortie (équation (II.36)).

Sur le graphe II.14 est représentée la fonction d'ombre bistatique, obtenue en générant une surface de profil gaussien ($a = 0$). Pour une surface perturbée (écart type des pentes σ grand, c'est-à-dire $v_i = \mu_i / \sigma \sqrt{2}$ faible), l'ombre diminue très rapidement. Pour des incidences proches de 90° , correspondant à $v_i \rightarrow 0$, la surface est fortement ombragée ($S \rightarrow 0$). Au contraire pour des incidences normales ($|v_i|$ proche de deux), toute la surface est éclairée ($S = 1$). Les deux valeurs asymptotiques sont fixées à 0 et 1.



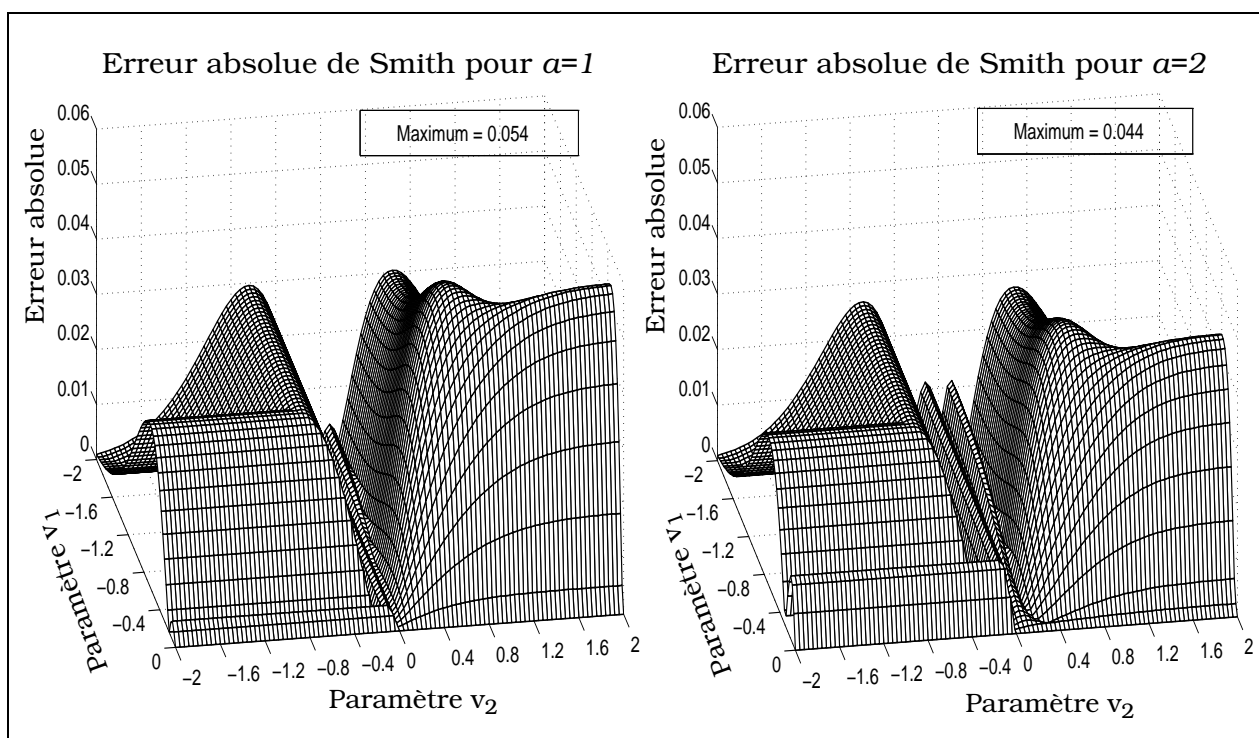
Graphe II.14 Fonction d'ombre bistatique monodimensionnelle obtenue en générant une surface infinie de type gaussien $a = 0$

Sur le graphe II.15 les erreurs absolues des fonctions d'ombre de Smith corrélée et décorrelée sont comparées, par rapport à la solution de référence. Pour des valeurs de $|v_i| \geq 1,4$, l'effet de la corrélation est négligeable (on retrouve la remarque énoncée dans le cas monostatique). On note également que la corrélation diminue en moyenne par trois l'erreur absolue dans la région définie par $|v_2| < 1,2$.



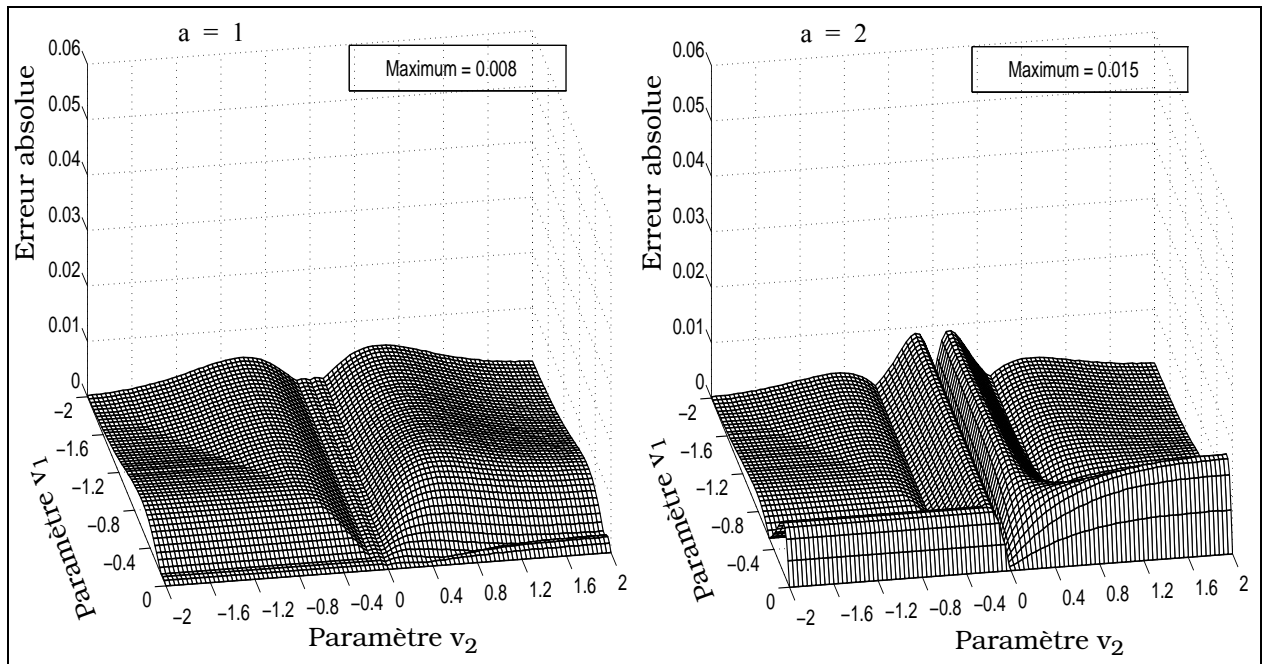
Graphe II.15 Erreur absolue des fonctions d'ombre de Smith corrélée et décorrelée par rapport à celle obtenue numériquement à partir d'une surface gaussienne ($a = 0$)

Sur le graphe II.16, l'erreur absolue entre les fonctions d'ombre de Smith corrélée et non corrélée sont représentées pour $a = \{1, 2\}$. On observe que lorsque a augmente l'erreur reste globalement inchangée. Elle devient nulle pour $|v_i| \geq 1,4$.



Graphe II.16 Erreur absolue entre les fonctions d'ombre de Smith corrélée et décorrelée pour un profil gaussien amorti $a = \{1, 2\}$

Sur le graphe II.17, l'erreur absolue entre les résultats obtenus pour $a = 0$ (cas gaussien) et ceux déterminés pour $a = \{1, 2\}$ est tracée. On observe qu'elle est peu sensible au paramètre a d'amortissement.



Graphe II.17 Erreur absolue entre la fonction d'ombre corrélée de Smith obtenue pour $a=0$, et celles déterminées pour $a = \{1, 2\}$.

II.4.3 Conclusion

Le formalisme exposé dans les paragraphes précédents a été étendu au cas bistatique monodimensionnel. Ainsi le problème bistatique est équivalent à deux configurations monostatiques indépendantes, définies selon l'émetteur et le récepteur. Les solutions monostatiques de Smith corrélée et décorrelée ont été étendues au cas bistatique, puis comparées à la solution de référence, obtenue en générant la surface.

Les simulations réalisées sur une surface infinie, de fonction d'autocorrélation gaussienne, ont montré que les résultats de Smith corrélés sont quasiment égaux à ceux obtenus par la solution de référence. En revanche, l'erreur absolue entre la fonction d'ombre de Smith décorrelée et celle de la solution de référence est multipliée par trois environ, lorsque les paramètres $|v_i|$ sont inférieurs à 1,4, correspondant à des angles d'incidence inférieurs à $|\theta_{ic}| = \text{atan}(0,505/\sigma)$. Par conséquent la corrélation améliore globalement le modèle de la fonction d'ombre.

II.5 FONCTION D'OMBRE BIDIMENSIONNELLE

Nous avons montré que la fonction d'ombre monodimensionnelle dépend uniquement de la variance des pentes lorsque la corrélation est non incluse, et du profil d'autocorrélation dans le cas corrélé. Or pour une surface bidimensionnelle anisotrope, ces paramètres dépendent de la direction d'observation ϕ par rapport au vent. L'objet de ce paragraphe, est donc d'introduire cet élément dans la fonction d'ombre.

II.5.1 Généralisation des cas monostatique et bistatique sans corrélation

En configuration bidimensionnelle, on se place dans le système de coordonnées cylindriques.

La fonction d'ombre bidimensionnelle est alors caractérisée par l'azimut ϕ (direction d'observation par rapport au vent), et l'angle d'incidence θ (figure II.8). La distance R intervient quant à elle, dans la fonction d'autocorrélation. Fixer une direction ϕ c'est-à-dire se placer dans la base (X, Y, z) , revient à effectuer une coupe de la mer; le problème deviendrait donc a priori monodimensionnel. Le but de cette partie est d'appliquer cette idée, afin de transformer les résultats bidimensionnels en résultats monodimensionnels déjà obtenus.

II.5.1.1 Expression de la densité de probabilité des pentes

La densité de probabilité des pentes, supposée gaussienne, s'écrit dans le repère cartésien (x, y, z) (voir paragraphe I.5.2) :

$$p(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_x^2 = \alpha + \beta \\ \sigma_y^2 = \alpha - \beta \end{cases} \quad (\text{II.47a})$$

Afin de déterminer la densité de probabilité des pentes $p(\gamma_x, \gamma_y)$ dans une direction ϕ , nous allons effectuer un changement de base (X, Y, z) .

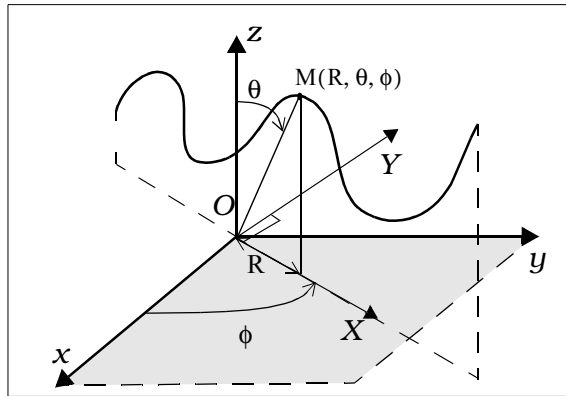


Figure II.8 Configuration bidimensionnelle

Les anciennes pentes (γ_x, γ_y) s'expriment à partir des nouvelles (γ_X, γ_Y) par :

$$\begin{cases} \gamma_x = \gamma_X \cos\phi - \gamma_Y \sin\phi \\ \gamma_y = \gamma_X \sin\phi + \gamma_Y \cos\phi \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

En substituant les relations (II.48) dans (II.47a), $p(\gamma_x, \gamma_y)$ est donnée par :

$$p(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \exp(-a\gamma_Y^2 - 2b\gamma_Y - c)J \quad (\text{II.49})$$

avec :

$$a = \frac{\alpha + \beta \cos(2\phi)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \quad b = \frac{\beta \sin(2\phi)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \gamma_X \quad c = \frac{\alpha - \beta \cos(2\phi)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \gamma_X^2 \quad (\text{II.49a})$$

où J est le Jacobien. La probabilité de la pente γ_x dans la direction ϕ est obtenue en calculant la probabilité marginale $p(\gamma_x)$ définie par :

$$p(\gamma_x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\gamma_x, \gamma_y) d\gamma_y \quad (\text{II.49b})$$

Physiquement cette quantité représente l'ensemble des valeurs de γ_y selon la composante X . Or :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a\gamma_Y^2 - 2b\gamma_Y - c) d\gamma_Y = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a} - c\right) \quad (\text{II.49c})$$

d'où ($J = 1$ car la matrice de rotation est unitaire) :

$$p(\gamma_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_x^2 = \alpha + \beta \cos(2\phi) \quad (\text{II.50})$$

La probabilité marginale des pentes dans la direction d'observation ϕ est donc une gaussienne de variance σ_x^2 . Or dans le cas monodimensionnel, cette probabilité est également gaussienne avec une variance σ^2 , par conséquent le passage d'une configuration à l'autre s'effectue en permutant les variances.

II.5.1.2 Simulations

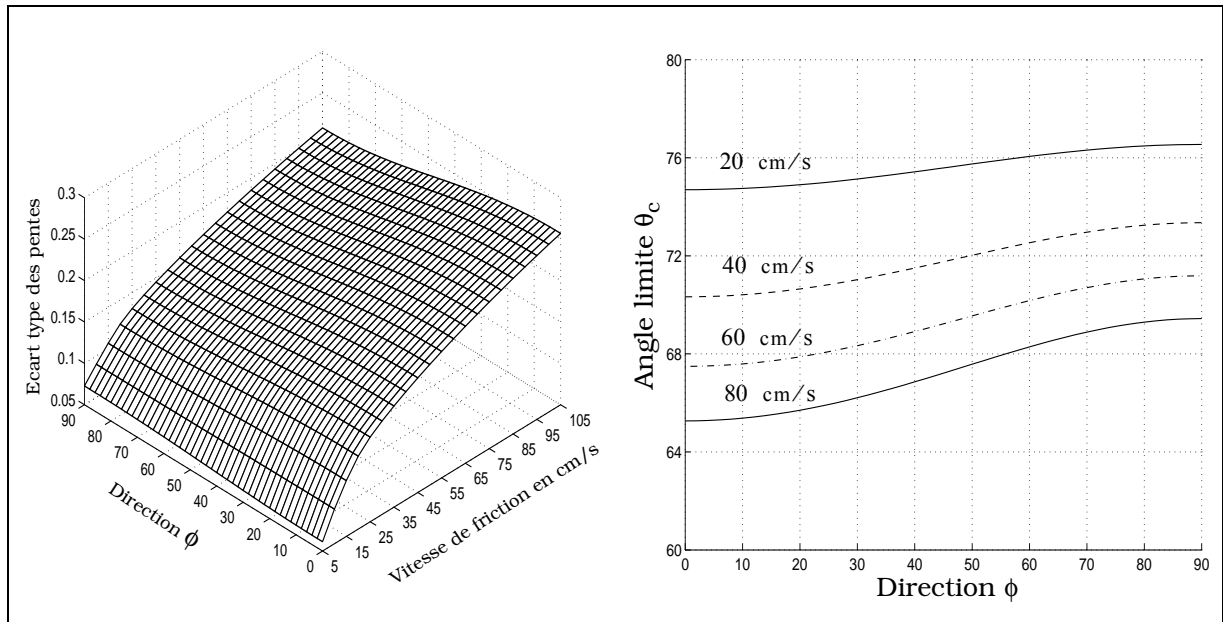
La fonction d'ombre monodimensionnelle monostatique de Smith sans corrélation d'un processus gaussien $p(\gamma)$ s'écrit :

$$S_s(v) = \left[1 - \frac{\text{erfc}(v)}{2}\right] \frac{1}{\Lambda + 1} \quad \Lambda = [e^{-v^2} - v\sqrt{\pi}\text{erfc}(v)] / (2v\sqrt{\pi}) \quad v = \frac{\cot\theta}{\sqrt{2}\sigma} \quad (\text{II.50a})$$

La fonction d'ombre bidimensionnelle est donc obtenue en remplaçant σ par σ_x . Dans le cas bistatique l'opération est identique; relation (II.41) où $\{v_1, v_2\}$ sont définis par :

$$v_1 = \frac{\cot(|\theta_1|)}{\sqrt{2[\alpha + \beta \cos(2\phi_1)]}} \quad v_2 = \frac{\cot(|\theta_2|)}{\sqrt{2[\alpha + \beta \cos(2\phi_2)]}} \quad (\text{II.50b})$$

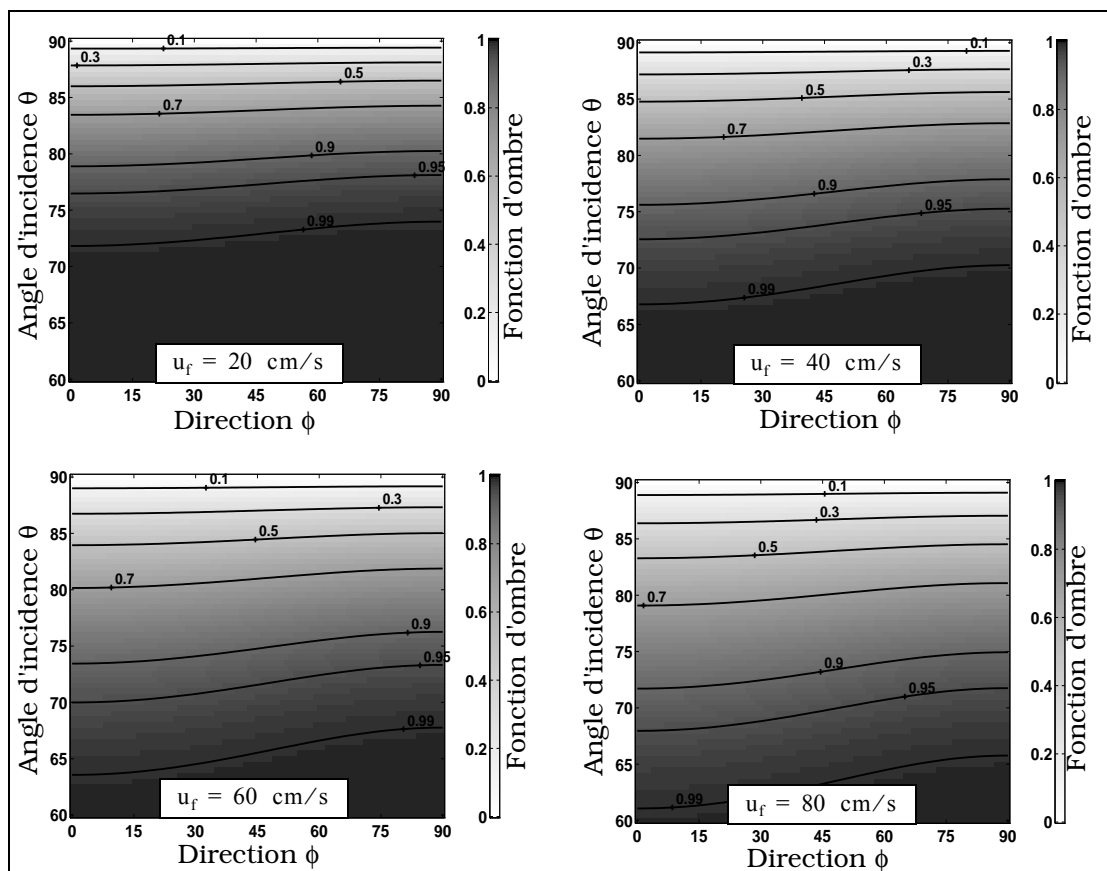
où $\{\phi_1, \phi_2\}$ sont les directions d'observation de l'émetteur et du récepteur par rapport au vent. Sur la figure de gauche du graphe II.18, l'écart type des pentes σ_x obtenu à partir du modèle de Cox et Munk (relation (I.88)) est tracée en fonction de la vitesse de friction u_f , et de la direction ϕ . Sur la figure de droite, l'angle limite $\theta_c = \text{atan}(0,505/\sigma)$ au-dessous duquel la corrélation est négligeable, est représenté en fonction de la direction par rapport au vent, et paramétré par la vitesse de friction. On remarque que l'angle limite est compris entre $[64;76]^\circ$ pour $u_f \in [20;80]$ cm/s, et qu'il est inversement proportionnel à la vitesse de friction.



Graphe II.18 Variance des pentes en fonction de la vitesse de friction et de la direction d'observation. Angle limite en fonction de la direction d'observation, paramétré par la vitesse de friction en cm/s

Sur le graphe II.19, la fonction d'ombre de Smith monostatique bidimensionnelle est illustrée selon la direction ϕ , l'angle d'incidence θ , et paramétrée par la vitesse de friction $u_f = \{20, 40, 60, 80\}$ cm/s .

On observe que l'effet de l'ombre est important sous des angles proches de 90° , c'est-à-dire lorsque la corrélation devient non négligeable. On note également que les résultats varient très peu selon la direction d'observation ϕ . La fonction d'ombre est donc peu sensible à l'effet de l'anisotropie.



Graph II.19 Fonction d'ombre monostatique bidimensionnelle de Smith, en fonction des angles d'incidence et d'observation, paramétrée par la vitesse de friction

Sur les graphes II.20 et II.21, la fonction d'ombre de Smith bistatique bidimensionnelle est représentée selon les directions $\{\theta_2, \phi\}$ ($\phi = \phi_1 = \phi_2$), paramétrée par l'angle d'incidence $|\theta_1| = \{70, 75, 80, 85\}^\circ$ et la vitesse de friction $u_f = \{20, 60\}$ cm/s. On observe que l'ombre est d'autant plus importante que l'angle d'incidence θ_1 est proche de 90° .

II.5.2 Généralisation des cas monostatique et bistatique avec corrélation

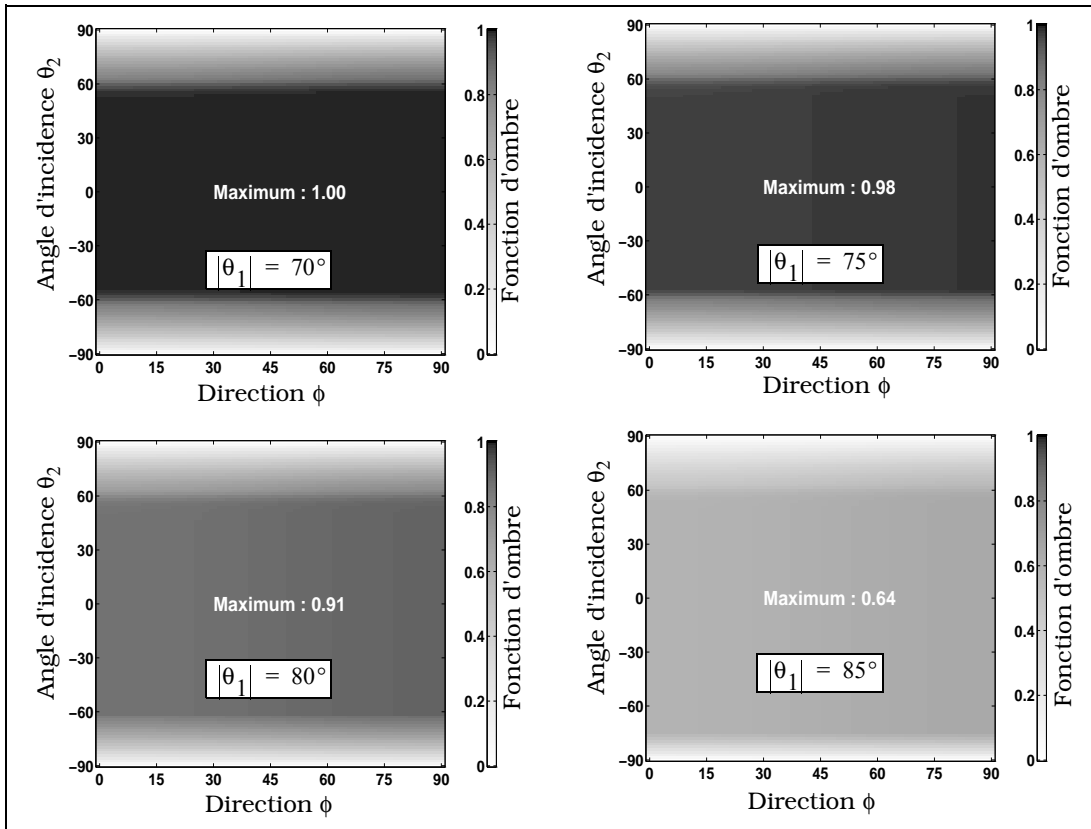
Lorsque la corrélation est incluse, dans le cas monodimensionnel, la probabilité conditionnelle repose sur le calcul de la densité de probabilité conjointe $p(\xi = \xi_0 + \mu\tau, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau)$ des hauteurs $\{\xi, \xi_0\}$ et des pentes $\{\gamma, \gamma_0\}$. Par conséquent cette quantité doit être déterminée dans le cas bidimensionnel.

II.5.2.1 Probabilité conjointe des hauteurs et des pentes en coordonnées cartésiennes

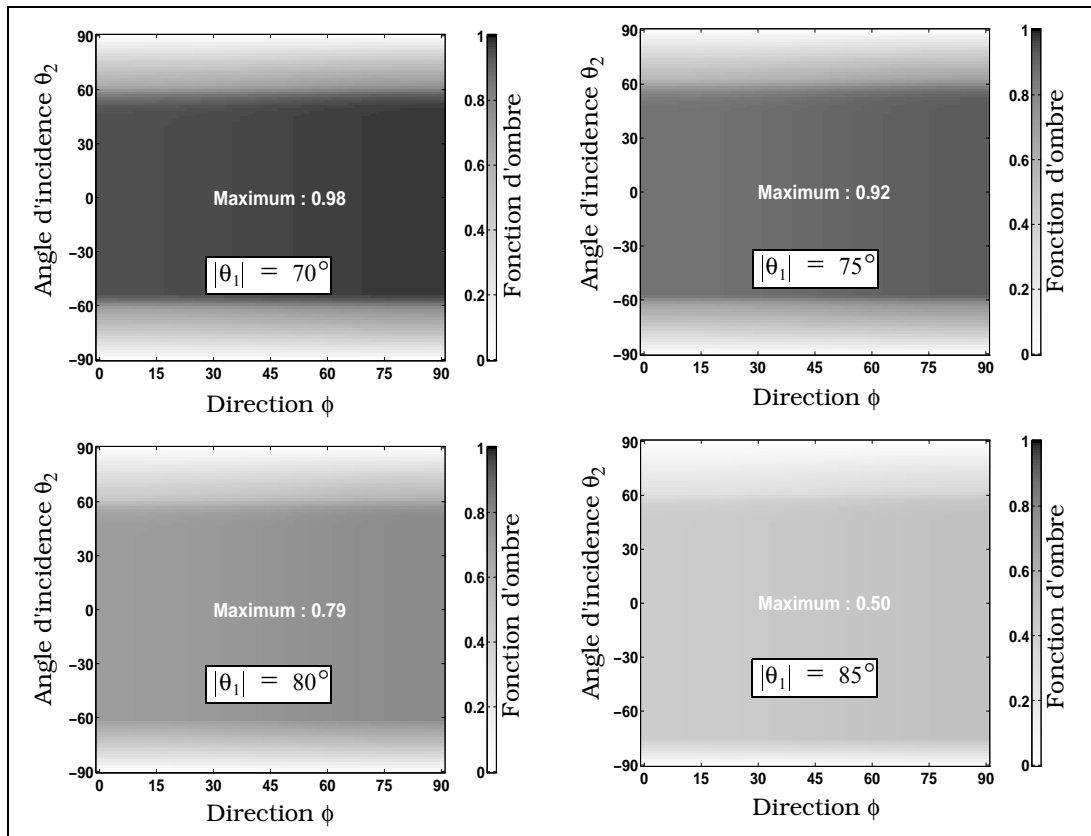
La densité de probabilité monodimensionnelle $p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau)$ devient par analogie dans les directions $\{(Ox), (Oy)\}$:

$$p(\xi_x, \gamma_x, \gamma_y | \xi_{0x}, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}; X, Y) \tag{II.51}$$

D'après le théorème de Bayes, l'équation (II.51) devient :



Graphe II.20 Fonction d'ombre bidimensionnelle bistatique d'écoulement de Smith, selon les angles d'observation $\{\theta_2, \phi = \phi_1 = \phi_2\}$, paramétrée par l'angle d'incidence $|\theta_1|$ et pour $u_f = 20$ cm/s



Graphe II.21 Mêmes courbes que sur le graphe II.20 mais $u_f = 60$ cm/s

$$p(\xi, \gamma_x, \gamma_y | \xi_0, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}; x, y) = \frac{p(\xi_0, \xi, \gamma_{0x}, \gamma_x, \gamma_{0y}, \gamma_y; x, y)}{p(\xi_0, \gamma_{0x}, \gamma_{0y})} \quad (\text{II.51a})$$

Pour un processus gaussien à six dimensions le numérateur $p(\xi_0, \xi, \gamma_{0x}, \gamma_x, \gamma_{0y}, \gamma_y; x, y)$ s'écrit :

$$p(\xi_0, \xi, \gamma_{0x}, \gamma_x, \gamma_{0y}, \gamma_y; x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{|[C^{xy}]|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{V}^{xyT} [C^{xy}]^{-1} \vec{V}^{xy}\right) \quad (\text{II.52})$$

avec :

$$\vec{V}^{xyT} = [\xi_0 \ \xi \ \gamma_{0x} \ \gamma_x \ \gamma_{0y} \ \gamma_y] \quad (\text{II.52a})$$

où $|[C^{xy}]|$ est le déterminant de la matrice de covariance $[C^{xy}]$. L'exposant xy désigne le choix de la base. En utilisant le même raisonnement exposé dans l'annexe 3, on montre :

$$[C^{xy}] = \begin{bmatrix} R_0(\vec{0}) & R_0 & -R_{1x}(\vec{0}) & R_{1x} & -R_{1y}(\vec{0}) & R_{1y} \\ R_0 & R_0(\vec{0}) & -R_{1x} & -R_{1x}(\vec{0}) & -R_{1y} & -R_{1y}(\vec{0}) \\ -R_{1x}(\vec{0}) & -R_{1x} & -R_{2x}(\vec{0}) & -R_{2x} & -R_{2xy}(\vec{0}) & -R_{2xy} \\ R_{1x} & -R_{1x}(\vec{0}) & -R_{2x} & -R_{2x}(\vec{0}) & -R_{2xy} & -R_{2xy}(\vec{0}) \\ -R_{1y}(\vec{0}) & -R_{1y} & -R_{2xy}(\vec{0}) & -R_{2xy} & -R_{2y}(\vec{0}) & -R_{2y} \\ R_{1y} & -R_{1y}(\vec{0}) & -R_{2xy} & -R_{2xy}(\vec{0}) & -R_{2y} & -R_{2y}(\vec{0}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

avec :

$$\begin{cases} R_{1x} = \frac{\partial R_0}{\partial x} & R_{1y} = \frac{\partial R_0}{\partial y} \\ R_{2x} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial x^2} & R_{2y} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial y^2} & R_{2xy} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{II.53a})$$

où $R_0(x, y)$ est la fonction d'autocorrélation en coordonnées cartésiennes. Le spectre étant pair selon $\{(Ox), (Oy)\}$, la fonction d'autocorrélation est également paire, donc R_0 dépend de $x_1 = x^2, y_1 = y^2$. On montre ainsi que :

$$\begin{cases} R_{1x}(\vec{0}) = \left[2x \frac{\partial R_0}{\partial x_1}\right]_{x=0, y=0} = 0 \\ R_{1y}(\vec{0}) = \left[2y \frac{\partial R_0}{\partial y_1}\right]_{x=0, y=0} = 0 \\ R_{2xy}(\vec{0}) = 4 \left[xy \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{x=0, y=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.53b})$$

En substituant les relations (II.53b) dans (II.53), la matrice de covariance de la densité de probabilité $p(\xi_0, \xi, \gamma_{0x}, \gamma_x, \gamma_{0y}, \gamma_y; x, y)$ s'écrit finalement :

$$[C^{xy}] = \begin{bmatrix} \omega^2 & R_0 & 0 & R_{1x} & 0 & R_{1y} \\ R_0 & \omega^2 & -R_{1x} & 0 & -R_{1y} & 0 \\ 0 & -R_{1x} & \sigma_x^2 & -R_{2x} & 0 & -R_{2xy} \\ R_{1x} & 0 & -R_{2x} & \sigma_x^2 & -R_{2xy} & 0 \\ 0 & -R_{1y} & 0 & -R_{2xy} & \sigma_y^2 & -R_{2y} \\ R_{1y} & 0 & -R_{2xy} & 0 & -R_{2y} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.53c})$$

où $R_0(\vec{0}) = \omega^2$ est la variance des hauteurs, et $\{-R_{2x}(\vec{0}) = \sigma_x^2, -R_{2y}(\vec{0}) = \sigma_y^2\}$ les variances des pentes dans les directions du vent et transverse au vent. On observe que la matrice $[C^{xy}]$ est symétrique. Afin de se ramener au cas monodimensionnel, $p(\xi_0, \xi, \gamma_{0x}, \gamma_x, \gamma_{0y}, \gamma_y; x, y)$ qui repose sur le produit matriciel $V^{xy} [C^{xy}]^{-1} V^{xy}$, doit être exprimée en coordonnées cylindriques.

II.5.2.2 Probabilité conjointe des hauteurs et des pentes en coordonnées cylindriques

Le vecteur $\vec{V}^{xyT} = [\xi_0 \ \xi \ \gamma_{0x} \ \gamma_x \ \gamma_{0y} \ \gamma_y]$ dans la base $\{(Ox), (Oy)\}$, s'exprime à partir du vecteur $\vec{V}^{XYT} = [\xi_0 \ \xi \ \gamma_{0X} \ \gamma_X \ \gamma_{0Y} \ \gamma_Y]$ dans la nouvelle base $\{(OX), (OY)\}$ par (généralisation de l'équation (II.48)) :

$$\vec{V}^{xy} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi \\ \gamma_{0x} \\ \gamma_x \\ \gamma_{0y} \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi \\ \gamma_{0X} \\ \gamma_X \\ \gamma_{0Y} \\ \gamma_Y \end{bmatrix} = [O_6] \vec{V}^{XY} \quad (\text{II.54})$$

d'où :

$$\vec{V}^{xyT} [C^{xy}]^{-1} \vec{V}^{xy} = \vec{V}^{XYT} [O_6]^T [C^{xy}]^{-1} [O_6] \vec{V}^{XY} = \vec{V}^{XYT} ([O_6]^{-1} [C^{xy}] [O_6])^{-1} \vec{V}^{XY} \quad (\text{II.55})$$

à noter que $[O_6]^T = [O_6]^{-1}$. De plus on montre :

$$[C^{XY}] = [O_6]^{-1} [C^{xy}] [O_6] = \begin{bmatrix} \omega^2 & R_0 & 0 & C_{14}^{XY} & 0 & C_{16}^{XY} \\ R_0 & \omega^2 & -C_{14}^{XY} & 0 & -C_{16}^{XY} & 0 \\ 0 & -C_{14}^{XY} & C_{33}^{XY} & C_{34}^{XY} & C_{35}^{XY} & -C_{36}^{XY} \\ C_{14}^{XY} & 0 & C_{34}^{XY} & C_{33}^{XY} & -C_{36}^{XY} & C_{35}^{XY} \\ 0 & -C_{16}^{XY} & C_{35}^{XY} & -C_{36}^{XY} & C_{55}^{XY} & -C_{56}^{XY} \\ C_{16}^{XY} & 0 & -C_{36}^{XY} & C_{35}^{XY} & -C_{56}^{XY} & C_{55}^{XY} \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

avec :

$$\begin{cases} C_{14}^{XY} = R_{1x} \cos\phi + R_{1y} \sin\phi \\ C_{16}^{XY} = -R_{1x} \sin\phi + R_{1y} \cos\phi \\ C_{34}^{XY} = -R_{2x} \cos(\phi)^2 - R_{2y} \sin(\phi)^2 - R_{2xy} \sin(2\phi) \\ C_{56}^{XY} = R_{2x} \sin(\phi)^2 + R_{2y} \cos(\phi)^2 - R_{2xy} \sin(2\phi) \\ C_{36}^{XY} = -\frac{(R_{2x} - R_{2y})}{2} \sin(2\phi) + R_{2xy} \cos 2\phi \end{cases} \quad (\text{II.56a})$$

et :

$$\begin{cases} C_{33}^{XY} = \sigma_x^2 \cos(\phi)^2 + \sigma_y^2 \sin(\phi)^2 \\ C_{55}^{XY} = \sigma_x^2 \sin(\phi)^2 + \sigma_y^2 \cos(\phi)^2 \\ C_{35}^{XY} = -\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{2} \sin(2\phi) \end{cases} \quad (\text{II.56b})$$

où $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ sont respectivement les variances des pentes dans les directions du vent et transverse au vent.

De plus, on montre dans l'annexe 6, que les éléments C_{ij}^{XY} s'expriment selon la fonction d'autocorrélation $R_0(R, \phi)$ en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} C_{14}^{XY} = \frac{\partial R_0}{\partial R} & C_{16}^{XY} = \frac{1}{R} \frac{\partial R_0}{\partial \phi} & C_{34}^{XY} = -\frac{\partial^2 R_0}{\partial R^2} \\ C_{56}^{XY} = \frac{1}{R^2} \left(R \frac{\partial R_0}{\partial R} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \phi^2} \right) \\ C_{36}^{XY} = \frac{1}{R^2} \left(R \frac{\partial^2 R_0}{\partial R \partial \phi} - \frac{\partial R_0}{\partial \phi} \right) \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

et :

$$\begin{cases} C_{33}^{XY} = \alpha + \beta \cos(2\phi) \\ C_{55}^{XY} = \alpha - \beta \cos(2\phi) \\ C_{35}^{XY} = -\beta \sin 2\phi \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

avec :

$$\alpha = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \quad \beta = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2} \quad (\text{II.58a})$$

Dans le premier chapitre nous avons montré que R_0 s'écrit (relation (I.78)) :

$$R_0(R, \phi) = I_0(R) - \cos(2\phi)I_2(R) \quad (\text{II.59})$$

où I_0 représente la partie isotrope, et I_2 la partie anisotrope. En substituant l'équation (II.59) dans (II.57), les éléments C_{ij}^{XY} deviennent :

$$\begin{cases} C_{14}^{XY} = \frac{dI_0}{dR} - \cos(2\phi) \frac{dI_2}{dR} \\ C_{16}^{XY} = \frac{2I_2 \sin(2\phi)}{R} \\ C_{34}^{XY} = -\left[\frac{d^2 I_0}{dR^2} - \cos(2\phi) \frac{d^2 I_2}{dR^2} \right] \\ C_{56}^{XY} = \frac{1}{R} \frac{dI_0}{dR} + \frac{\cos(2\phi)}{R^2} \left(4I_2 - R \frac{dI_2}{dR} \right) \\ C_{36}^{XY} = \frac{2 \sin(2\phi)}{R^2} \left(R \frac{dI_2}{dR} - I_2 \right) \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

La probabilité $p(\overrightarrow{V^{XY}}; R, \phi)$ s'exprime finalement dans la base $\{(OX), (OY)\}$ en coordonnées cylindriques par (le Jacobien $J = |[O_6]| = 1$) :

$$p(\xi_0, \xi, \gamma_{0X}, \gamma_X, \gamma_{0Y}, \gamma_Y; R, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{|[C^{XY}]|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{V^{XY}}^T [C^{XY}]^{-1} \overrightarrow{V^{XY}}\right) \quad (\text{II.61})$$

avec :

$$[C^{XY}] = \begin{bmatrix} \omega^2 & R_0 & 0 & R_{1R} & 0 & C_{16}^{XY} \\ R_0 & \omega^2 & -R_{1R} & 0 & -C_{16}^{XY} & 0 \\ 0 & -R_{1R} & \sigma_X^2 & -R_{2R} & \sigma_{XY}^2 & -C_{36}^{XY} \\ R_{1R} & 0 & -R_{2R} & \sigma_X^2 & -C_{36}^{XY} & \sigma_{XY}^2 \\ 0 & -C_{16}^{XY} & \sigma_{XY}^2 & -C_{36}^{XY} & \sigma_Y^2 & -C_{56}^{XY} \\ C_{16}^{XY} & 0 & -C_{36}^{XY} & \sigma_{XY}^2 & -C_{56}^{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.61a})$$

et :

$$\begin{cases} R_0 = I_0 - \cos(2\phi)I_2 \\ R_{1R} = \frac{\partial R_0}{\partial R} = \frac{dI_0}{dR} - \cos(2\phi)\frac{dI_2}{dR} \\ R_{2R} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial R^2} = \frac{d^2 I_0}{dR^2} - \cos(2\phi)\frac{d^2 I_2}{dR^2} \\ \sigma_X^2 = C_{33}^{XY} = \alpha + \beta \cos(2\phi) \\ \sigma_Y^2 = C_{55}^{XY} = \alpha - \beta \cos(2\phi) \\ \sigma_{XY}^2 = C_{35}^{XY} = -\beta \sin 2\phi \end{cases} \quad (\text{II.61b})$$

Les éléments $\{C_{16}^{XY}, C_{36}^{XY}, C_{56}^{XY}\}$ sont donnés par (II.60).

La densité de probabilité $p(\xi_0, \gamma_{0X}, \gamma_{0Y})$ du dénominateur de (II.51a) est donnée par :

$$p(\xi_0, \gamma_{0X}, \gamma_{0Y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \left[\begin{matrix} C_{11}^{XY} & C_{13}^{XY} & C_{15}^{XY} \\ C_{31}^{XY} & C_{33}^{XY} & C_{35}^{XY} \\ C_{51}^{XY} & C_{53}^{XY} & C_{55}^{XY} \end{matrix} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_0 & \gamma_{0X} & \gamma_{0Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{XY} & C_{13}^{XY} & C_{15}^{XY} \\ C_{31}^{XY} & C_{33}^{XY} & C_{35}^{XY} \\ C_{51}^{XY} & C_{53}^{XY} & C_{55}^{XY} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \gamma_{0X} \\ \gamma_{0Y} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.62})$$

avec :

$$\begin{bmatrix} C_{11}^{XY} & C_{13}^{XY} & C_{15}^{XY} \\ C_{31}^{XY} & C_{33}^{XY} & C_{35}^{XY} \\ C_{51}^{XY} & C_{53}^{XY} & C_{55}^{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_X^2 & \sigma_{XY}^2 \\ 0 & \sigma_{XY}^2 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.62a})$$

En substituant les équations (II.62) et (II.61) dans (II.51a), on obtient finalement :

$$p(\xi, \gamma_X, \gamma_Y | \xi_0, \gamma_{0X}, \gamma_{0Y}; R, \phi) = \frac{\omega \sigma_Y \sigma_X \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2\pi}^3 \sqrt{|[C^{XY}]|}} \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{V}^{XYT} [C^{XY}]^{-1} \vec{V}^{XY} \right. \\ \left. + \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\gamma_{0X}^2}{\sigma_X^2} + \frac{\gamma_{0Y}^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho\gamma_{0X}\gamma_{0Y}}{\sigma_X\sigma_Y} \right) \right] \quad (\text{II.63})$$

avec :

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{II.63a})$$

où la matrice de covariance $[C^{XY}]$ est définie par la relation (II.61a).

II.5.2.3 Probabilité marginale conjointe des hauteurs et des pentes

La densité de probabilité conjointe des hauteurs et des pentes $p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, \gamma_{0Y}; R, \phi)$ est obtenue en intégrant l'équation (II.63) sur l'intervalle $\gamma_Y \in]-\infty; \infty[$. Elle repose donc sur le calcul de la matrice inverse $[C^{XY}]^{-1}$, dont la détermination analytique est très difficile.

Nous allons donc utiliser une approche semi-analytique, c'est-à-dire que la matrice inverse est estimée numériquement, mais que la probabilité marginale est déterminée en utilisant les propriétés de symétrie de la matrice inverse, ainsi nous montrons :

$$[C^{XY}]^{-1} = \frac{1}{|[C^{XY}]|} \begin{bmatrix} C_{i11}^{XY} & C_{i12}^{XY} & C_{i13}^{XY} & C_{i14}^{XY} & C_{i15}^{XY} & C_{i16}^{XY} \\ C_{i12}^{XY} & C_{i11}^{XY} & -C_{i14}^{XY} & -C_{i13}^{XY} & -C_{i16}^{XY} & -C_{i15}^{XY} \\ C_{i13}^{XY} & -C_{i14}^{XY} & C_{i33}^{XY} & C_{i34}^{XY} & C_{i35}^{XY} & C_{i36}^{XY} \\ C_{i14}^{XY} & -C_{i13}^{XY} & C_{i34}^{XY} & C_{i33}^{XY} & C_{i36}^{XY} & C_{i35}^{XY} \\ C_{i15}^{XY} & -C_{i16}^{XY} & C_{i35}^{XY} & C_{i36}^{XY} & C_{i55}^{XY} & C_{i56}^{XY} \\ C_{i16}^{XY} & -C_{i15}^{XY} & C_{i36}^{XY} & C_{i35}^{XY} & C_{i56}^{XY} & C_{i55}^{XY} \end{bmatrix} \quad (II.64)$$

où C_{ijk}^{XY} sont les éléments de la matrice inverse de covariance $[C^{XY}]$ multipliés par le déterminant $[C^{XY}]$, ils sont obtenus numériquement. De plus :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{0x} \\ \gamma_{0y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_{0x} \\ \gamma_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma_x - \gamma_{0x} \\ \gamma_y - \gamma_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x - \gamma_{0x} \\ \gamma_y - \gamma_{0y} \end{bmatrix} \quad (II.65)$$

et :

$$\xi = \xi_0 + \mu R \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial R}{\partial x} = \gamma_{0x} + \mu \cos\phi \\ \gamma_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial R}{\partial y} = \gamma_{0y} + \mu \sin\phi \end{cases} \quad (II.65a)$$

En substituant les relations (II.65a) dans (II.65), les expressions des nouvelles coordonnées des pentes $\{\gamma_x, \gamma_y\}$ définies à l'abscisse R en fonction de $\{\gamma_{0x}, \gamma_{0y}\}$ à l'abscisse zéro dans la base (X,Y) sont données par :

$$\begin{bmatrix} \gamma_x - \gamma_{0x} \\ \gamma_y - \gamma_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu \cos\phi \\ \mu \sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_x = \gamma_{0x} + \mu \\ \gamma_y = \gamma_{0y} \end{cases} \quad (II.65b)$$

D'après les équations (II.65b), (II.64), et (II.63) nous montrons que la probabilité conjointe des hauteurs et des pentes s'écrit :

$$p(\xi, \gamma_x, \gamma_y | \xi_0, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}; R, \phi) = \frac{\omega \sigma_Y \sigma_X \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2\pi^3} \sqrt{|[C^{XY}]|}} \exp(-A_2 \gamma_Y^2 - 2B_2 \gamma_Y - C_2) \quad (II.66)$$

avec :

$$\begin{cases} A_2 = \frac{C_{i55}^{XY} + C_{i56}^{XY}}{|[C^{XY}]|} - \frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \\ B_2 = \frac{(\xi_0 - \xi)(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY}) + (\gamma_{0x} + \gamma_x)(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{2|[C^{XY}]|} + \frac{\rho \gamma_{0x}}{2\sigma_X \sigma_Y (1-\rho^2)} \\ C_2 = -\frac{\gamma_{0x}^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)} - \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} \end{cases} \quad (II.66a)$$

En utilisant la relation (II.49c), la probabilité marginale des hauteurs et des pentes s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, ; R, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \gamma_X, \gamma_Y | \xi_0, \gamma_{0X}, \gamma_Y ; R, \phi) d\gamma_Y = \frac{\omega \sigma_Y \sigma_X \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2\pi^3} \sqrt{|[C^{XY}]|}} \sqrt{\frac{\pi}{A_2}} \times \exp\left(\frac{B_2^2}{A_2} - C_2\right) \\
 &= \frac{\omega \sigma_X \sqrt{1-\rho^2}}{2\pi \sqrt{E/\sigma_Y^2}} \exp\left(\frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_{0X}^2}{2\sigma_X^2} - \frac{a_1 \xi_0^2 + a_2 \xi^2 + a_9 \gamma_X^2 + a_{10} \gamma_{0X}^2}{2|[C^{XY}]|}\right. \\
 &\quad \left. - \frac{a_3 \xi_0 \xi + a_4 \gamma_{0X} \gamma_X + a_5 \xi_0 \gamma_{0X} - a_6 \xi \gamma_X + a_7 \xi_0 \gamma_X - a_8 \xi \gamma_{0X}}{|[C^{XY}]|}\right)
 \end{aligned} \tag{II.67}$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned}
 a_1 &= a_2 = C_{i11}^{XY} - \frac{(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})^2}{E} & E &= 2A_2 |[C^{XY}]| = 2(C_{i55}^{XY} + C_{i56}^{XY}) - \frac{|[C^{XY}]|}{\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \\
 a_3 &= C_{i12}^{XY} + \frac{(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})^2}{E} \\
 a_4 &= C_{i34}^{XY} - \frac{(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})^2}{E} - \frac{\rho(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{2A_2 \sigma_X \sigma_Y (1-\rho^2)} \\
 a_5 &= C_{i13}^{XY} - \frac{(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{E} - \frac{\rho(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})}{2A_2 \sigma_X \sigma_Y (1-\rho^2)} \\
 a_6 &= C_{i13}^{XY} - \frac{(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{E} \\
 a_7 &= C_{i14}^{XY} - \frac{(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{E} \\
 a_8 &= C_{i14}^{XY} - \frac{(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{E} - \frac{\rho(C_{i15}^{XY} + C_{i16}^{XY})}{2A_2 \sigma_X \sigma_Y (1-\rho^2)} \\
 a_9 &= C_{i33}^{XY} - \frac{(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})^2}{E} \\
 a_{10} &= C_{i33}^{XY} - \frac{(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})^2}{E} - \left[\frac{\rho^2 |[C^{XY}]|}{2A_2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1-\rho^2)^2} + \frac{\rho(C_{i35}^{XY} + C_{i36}^{XY})}{A_2 \sigma_X \sigma_Y (1-\rho^2)} + \frac{\rho^2 |[C^{XY}]|}{\sigma_X^2 (1-\rho^2)} \right]
 \end{aligned} \right. \tag{II.67a}$$

Dans le cas monodimensionnel la densité de probabilité est donnée par (équation (II.16)) :

$$\begin{aligned}
 p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau) &= \frac{\sigma \omega}{2\pi \sqrt{|[C]|}} \times \exp\left[-\frac{C_{i11}(\xi_0^2 + \xi^2) + C_{i33}(\gamma_0^2 + \gamma^2)}{2|[C]|} + \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2}\right. \\
 &\quad \left. - \frac{C_{i12} \xi_0 \xi + C_{i34} \gamma_0 \gamma + C_{i13}(\xi_0 \gamma_0 - \xi \gamma) + C_{i14}(\xi_0 \gamma - \xi \gamma_0)}{|[C]|}\right]
 \end{aligned} \tag{II.68}$$

En comparant les relations (II.67) et (II.68), le cas monodimensionnel s'obtient en permutant:

$$\frac{\omega \sigma_X \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{E/\sigma_Y^2}} \quad \text{en} \quad \frac{\omega \sigma}{\sqrt{|[C]|}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_X \quad \text{en} \quad \sigma \\ \gamma_X \quad \text{en} \quad \gamma \\ \gamma_{0X} \quad \text{en} \quad \gamma_0 \end{array} \right. \tag{II.69}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2 \quad \text{en} \quad C_{i11} \\ a_9, a_{10} \quad \text{en} \quad C_{i33} \\ a_3 \quad \text{en} \quad C_{i12} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_4 \quad \text{en} \quad C_{i34} \\ a_5, a_6 \quad \text{en} \quad C_{i13} \\ a_7, a_8 \quad \text{en} \quad C_{i14} \end{array} \right. \tag{II.69a}$$

Ainsi la détermination de la densité de probabilité conjointe des hauteurs et des pentes nécessite 9 termes $a_{i \in [2;10]}$, alors qu'en configuration monodimensionnelle 6 suffisent.

Probabilité marginale dans le cas décorrélé

La corrélation est négligeable lorsque les parties isotropes et anisotropes de la fonction d'autocorrélation sont nulles :

$$I_0 = 0 \quad I_2 = 0 \quad (II.70)$$

Alors la matrice de covariance (équation (II.61a)) devient en coordonnées polaires :

$$[C^{XY}] = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_X^2 & 0 & \rho\sigma_X\sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_X^2 & 0 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ 0 & 0 & \rho\sigma_X\sigma_Y & 0 & \sigma_Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho\sigma_X\sigma_Y & 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (II.71)$$

où ρ est le coefficient d'intercorrélation des pentes. La matrice inverse s'écrit alors :

$$[C^{XY}]^{-1} = \frac{1}{|[C^{XY}]|} \begin{bmatrix} \frac{|[C^{XY}]|}{\omega^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|[C^{XY}]|}{\omega^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|[C^{XY}]|}{\sigma_X^2(1-\rho^2)} & 0 & \frac{-\rho|[C^{XY}]|}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{|[C^{XY}]|}{\sigma_X^2(1-\rho^2)} & 0 & \frac{-\rho|[C^{XY}]|}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} \\ 0 & 0 & \frac{-\rho|[C^{XY}]|}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} & 0 & \frac{|[C^{XY}]|}{\sigma_Y^2(1-\rho^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho|[C^{XY}]|}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} & 0 & \frac{|[C^{XY}]|}{\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \end{bmatrix} \quad (II.72)$$

et :

$$|[C^{XY}]| = (\omega\sigma_X\sigma_Y)^4(1-\rho^2)^2 \quad (II.72a)$$

En substituant les éléments de la matrice $[C^{XY}]^{-1}$ dans les équations (II.67a) nous avons :

$$\begin{cases} \frac{a_1}{2|[C^{XY}]|} = \frac{a_2}{2|[C^{XY}]|} = \frac{1}{2\omega^2} & \frac{a_9}{2|[C^{XY}]|} = \frac{a_{10}}{2|[C^{XY}]|} = \frac{1}{2\sigma_X^2} \\ a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0 \\ E = \omega^4\sigma_X^4\sigma_Y^2(1-\rho^2) \end{cases} \quad (II.73)$$

D'après l'équation (II.67), la probabilité conjointe des hauteurs et des pentes s'écrit alors :

$$p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, ; R, \phi) = p(\xi, \gamma_X) = \frac{1}{2\pi\omega\sigma_X} \times \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_X^2}{2\sigma_X^2}\right] \quad (II.74)$$

Ainsi la densité de probabilité d'un processus gaussien décorrélé est retrouvée.

Probabilité marginale dans le cas isotrope

Si la surface est considérée isotrope alors $I_2(R) = 0$ ce qui implique :

$$C_{16}^{XY} = 0 \quad C_{36}^{XY} = 0 \quad \sigma_{XY}^2 = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad (\text{II.75})$$

La matrice de covariance s'écrit alors :

$$[C^{XY}] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [Q] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [C] = \begin{bmatrix} \omega^2 & R_0 & 0 & R_{1R} \\ R_0 & \omega^2 & -R_{1R} & 0 \\ 0 & -R_{1R} & \sigma_X^2 & -R_{2R} \\ R_{1R} & 0 & -R_{2R} & \sigma_X^2 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & -C_{56}^{XY} \\ -C_{56}^{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

$[C^{XY}]$ est composée de deux sous matrices $\{[C], [Q]\}$, où $[C]$ correspond à la matrice de covariance monodimensionnelle obtenue dans l'annexe 3 (relation (3.4b)) avec $R_1 = R_{1R}$, $R_2 = R_{2R}$. La matrice inverse est donnée par :

$$[C^{XY}]^{-1} = \frac{1}{|[C]||[Q]|} \begin{bmatrix} [C]^{-1} & [0] \\ [0] & [Q]^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.77})$$

donc $C_{i15}^{XY} = C_{i16}^{XY} = C_{i35}^{XY} = C_{i36}^{XY} = 0$. De plus nous avons d'après l'équation (II.67a) :

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = C_{i11}^{XY} = C_{i11} & a_5 = a_6 = C_{i13}^{XY} = C_{i13} \\ a_3 = C_{i12}^{XY} = C_{i12} & a_7 = a_8 = C_{i14}^{XY} = C_{i14} \\ a_4 = C_{i34}^{XY} = C_{i34} & a_9 = a_{10} = C_{i33}^{XY} = C_{i33} \\ E = \frac{|[C^{XY}]| \sigma_Y^2}{|[Q]|} \left(1 - \frac{C_{56}^{XY}}{\sigma_Y^2}\right)^2 = |[C]| \sigma_Y^2 \left(1 - \frac{C_{56}^{XY}}{\sigma_Y^2}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

En substituant l'équation (II.78) dans (II.67) $p(\xi, \gamma_X, \gamma_Y | \xi_0, \gamma_{0X}, \gamma_{0Y}; R)$ devient :

$$p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}; R) = \frac{\omega \sigma_X}{2\pi \left|1 - \frac{C_{56}^{XY}}{\sigma_Y^2}\right| \sqrt{|[C]|}} \times \exp \left[\frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_{0X}^2}{2\sigma_X^2} - \frac{C_{i11}(\xi_0^2 + \xi^2) + C_{i33}(\gamma_{0X}^2 + \gamma_X^2)}{2|[C]|} \right. \\ \left. - \frac{2C_{i12}\xi_0\xi + 2C_{i34}\gamma_{0X}\gamma_X + 2C_{i13}(\xi_0\gamma_{0X} - \xi\gamma_X) + 2C_{i14}(\xi_0\gamma_X - \xi\gamma_{0X})}{2|[C]|} \right] \quad (\text{II.79})$$

Nous obtenons la même solution que dans le cas monodimensionnel (équation (II.68)) avec :

$$\gamma_X = \gamma \quad \gamma_{0X} = \gamma_0 \quad \sigma_X = \sigma \quad \sqrt{|[C]|} \rightarrow \sqrt{|[C]|} \left|1 - \frac{C_{56}^{XY}}{\sigma_Y^2}\right| \quad (\text{II.80})$$

En fait un milieu bidimensionnel isotrope revient à considérer un milieu monodimensionnel.

II.5.2.4 Probabilité conditionnelle de Smith

Dans l'annexe 6 nous montrons que la probabilité conditionnelle de Smith $g_S(R, \phi | \{\xi_0, \gamma_{0X}\}, \theta)$ en configuration bidimensionnelle s'exprime par :

$$g_S = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{A_{1X}}{A_X}}} \frac{\exp[-C_X - \mu(\mu A_X + 2B_X)] \left[1 - e^{-\frac{(B_X + \mu A_X)^2}{A}} \sqrt{\pi} \frac{B_X + \mu A_X}{\sqrt{A_X}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B_X + \mu A_X}{\sqrt{A_X}}\right) \right]}{\exp\left(\frac{B_{1X}^2}{A_{1X}} - C_{1X}\right) \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{A_{1X}\xi + B_{1X}}{\sqrt{A_{1X}}}\right] + 1 \right\}} \quad (\text{II.81})$$

avec :

$$\begin{cases} A_X = \frac{a_9}{2|[C^{XY}]|} & B_X = \frac{a_7\xi_0 - a_9\xi + a_4\gamma_{0X}}{2|[C^{XY}]|} \\ C_X = \frac{a_1\xi_0^2 + a_2\xi^2 + 2a_3\xi_0\xi + 2a_5\xi_0\gamma_{0X} - 2a_8\xi\gamma_{0X} + a_{10}\gamma_{0X}^2}{2|[C^{XY}]|} \end{cases} \quad (\text{II.81a})$$

et :

$$\begin{cases} A_{1X} = (a_2a_9 - a_6^2)E_{1X} & E_{1X} = 1/(2a_9|[C^{XY}]|) \\ B_{1X} = [\xi_0(a_3a_9 + a_6a_7) + \gamma_0(a_6a_4 - a_8a_9)]E_{1X} \\ C_{1X} = [\xi_0^2(a_1a_9 - a_7^2) + \gamma_0^2(a_{10}a_9 - a_4^2) + 2\xi_0\gamma_0(a_5a_9 - a_4a_7)]E_{1X} \end{cases} \quad (\text{II.81b})$$

A noter que g_s est réelle si :

$$\begin{cases} A_X > 0 \\ A_{1X} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |[C^{XY}]| > 0 \\ a_9 > 0 \\ a_2a_9 - a_6^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{II.82})$$

En appliquant la relation (II.69a), les équations (II.81), (II.81a), (II.81b) sont identiques aux expressions (II.18), (II.17a), (II.18a) obtenues dans le cas monodimensionnel.

II.5.2.5 Fonction d'ombre de Smith

Dans le paragraphe II.5.2.3 nous avons montré que la fonction d'ombre bidimensionnelle est obtenue à partir de la fonction d'ombre monodimensionnelle en effectuant les changements de variable donnés par les équations (II.69) et (II.69a). Afin d'utiliser les résultats du tableau II.2 les fonctions f_{ij} sont à déterminer dans le cas bidimensionnel. Par analogie avec les équations (II.22) elles sont définies par :

$$\begin{cases} R_0 = \omega^2 f_0 & R_{1R} = -\omega\sigma_X f_{1R} & R_{2R} = -\sigma_X^2 f_{2R} \\ C_{36}^{XY} = -\sigma_Y\sigma_X f_{36}^{XY} & C_{16}^{XY} = -\omega\sigma_Y f_{16}^{XY} & C_{56}^{XY} = -\sigma_Y^2 f_{56}^{XY} \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

Nous montrons ainsi que la matrice de covariance $[f^{XY}]$ associée à $[C^{XY}]$ (équation (II.61a)) conserve la même structure que $[C^{XY}]$ et s'écrit :

$$[f^{XY}] = \begin{bmatrix} 1 & f_0 & 0 & -f_{1R} & 0 & -f_{16}^{XY} \\ f_0 & 1 & f_{1R} & 0 & f_{16}^{XY} & 0 \\ 0 & f_{1R} & 1 & f_{2R} & \rho & f_{36}^{XY} \\ -f_{1R} & 0 & f_{2R} & 1 & f_{36}^{XY} & \rho \\ 0 & f_{16}^{XY} & \rho & f_{36}^{XY} & 1 & f_{56}^{XY} \\ -f_{16}^{XY} & 0 & f_{36}^{XY} & \rho & f_{56}^{XY} & 1 \end{bmatrix} \quad \rho = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (\text{II.84})$$

La matrice inverse s'écrit alors :

$$[f^{XY}]^{-1} = \frac{1}{|[f^{XY}]|} \begin{bmatrix} f_{111}^{XY} & f_{112}^{XY} & f_{113}^{XY} & f_{114}^{XY} & f_{115}^{XY} & f_{116}^{XY} \\ f_{112}^{XY} & f_{111}^{XY} & -f_{114}^{XY} & -f_{113}^{XY} & -f_{116}^{XY} & -f_{115}^{XY} \\ f_{113}^{XY} & -f_{114}^{XY} & f_{133}^{XY} & f_{134}^{XY} & f_{135}^{XY} & f_{136}^{XY} \\ f_{114}^{XY} & -f_{113}^{XY} & f_{134}^{XY} & f_{133}^{XY} & f_{136}^{XY} & f_{135}^{XY} \\ f_{115}^{XY} & -f_{116}^{XY} & f_{135}^{XY} & f_{136}^{XY} & f_{155}^{XY} & f_{156}^{XY} \\ f_{116}^{XY} & -f_{115}^{XY} & f_{136}^{XY} & f_{135}^{XY} & f_{156}^{XY} & f_{155}^{XY} \end{bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

Ainsi elle garde également la même structure que $[C^{XY}]^{-1}$ (équation (II.64)) avec :

$$E = 2(f_{155}^{XY} + f_{156}^{XY}) - |[f^{XY}]| / (1 - \rho^2) \quad (\text{II.85a})$$

Les éléments C_{ijk}^{XY} (équation (II.67a)) deviennent f_{ijk}^{XY} , et $\{a_i, A_2\}$ sont calculés en prenant $\{\sigma_X, \sigma_Y\} = 1$ car les changements de variables (II.83) reviennent à normaliser par $\{\sigma_X, \sigma_Y\}$. En appliquant le même raisonnement que dans le paragraphe II.3.2, la fonction d'ombre bidimensionnelle de Smith s'écrit :

$$S_S(v, \phi, y_{ob}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-h_0^2) \left[\frac{1 - \operatorname{erfc}(h_0 + y_t v \eta)}{1 - \operatorname{erfc}(h_0 + y_{ob} v \eta)} \right]^{\Lambda(v)} \left[\int_0^{\infty} J(h_0, p_{0X}, \phi) dp_{0X} \right] dh_0$$

avec

$$J(h_0, p_{0X}, \phi) = \exp \left[- (v - p_{0X})^2 - L_c \int_0^{y_t} g_S(y, h_0, p_{0X}, \phi, v) dy \right]$$

avec

$$g_S = \frac{\eta \sqrt{a_2 a_9 - a_6^2} \exp[-C_X - v(vA_X + 2B_X)] [1 - \sqrt{\pi} \exp(S_X^2) S_X \operatorname{erfc}(S_X)]}{\pi a_9 \exp\left(\frac{B_{1X}}{A_{1X}} - C_{1X}\right) \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{A_{1X} h + B_{1X}}{\sqrt{A_{1X}}}\right] + 1 \right\}}$$

avec (II.86)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_X = \frac{a_1 h_0^2 + a_2 h^2 + 2a_3 h_0 h + 2a_5 h_0 (v - p_{0X}) - 2a_8 h (v - p_{0X}) + a_{10} (v - p_{0X})^2}{|[f^{XY}]|} \\ S_X = \frac{h_0 a_7 - h a_6 + (v - p_{0X}) a_4 + v a_9}{\sqrt{a_9} |[f^{XY}]|} \\ v(vA_X + 2B_X) = \frac{v^2 a_9 + 2v(h_0 a_7 - h a_6) + 2v a_4 (v - p_{0X})}{|[f^{XY}]|} \\ C_{1X} = h_0^2 \cdot \frac{a_1 a_9 - a_7^2}{a_9 |[f^{XY}]|} + (v - p_{0X})^2 \cdot \frac{a_{10} a_9 - a_4^2}{a_9 |[f^{XY}]|} + 2h_0 (v - p_{0X}) \cdot \frac{a_5 a_9 - a_4 a_7}{a_9 |[f^{XY}]|} \\ \frac{B_{1X}}{\sqrt{A_{1X}}} = \frac{h_0 (a_3 a_9 + a_6 a_7) + (v - p_{0X}) (a_6 a_4 - a_8 a_9)}{\sqrt{a_9} |[f^{XY}]| (a_2 a_9 - a_6^2)} \quad \sqrt{A_{1X}} = \frac{\sqrt{a_2 a_9 - a_6^2}}{\sqrt{a_9} |[f^{XY}]|} \end{array} \right.$$

II.5.2.6 Simulations

Dans le premier chapitre nous avons montré que la fonction d'autocorrélation $R_0(R, \phi)$ en coordonnées cylindriques est donnée par (équation (I.82)) :

$$R_0(R, \phi) = \omega^2 \left\{ \cos\left(\frac{R}{L'_0}\right) / \left[1 + \left(\frac{R}{L_C}\right)^2 \right] - A \cos(2\phi) J_2\left(\frac{R}{L'_2}\right) / \left[1 + \left(\frac{R}{L_2}\right)^2 \right] \right\} \quad (\text{II.87})$$

Dans le tableau II.5 sont données les expressions analytiques des éléments $[f^{XY}]$ obtenues à partir de l'équation ci-dessus.

Sur la figure II.22 les termes a_i et le déterminant $[f^{XY}]$ de la matrice de covariance sont tracés selon la distance normalisée y , et paramétrés par la direction d'observation par rapport au vent $\phi = \{0, 45, 90\}^\circ$. On observe que $\{a_1, a_9, a_{10}, |[f^{XY}]|\}$ tendent vers un lorsque $y \geq y_t = 6$, tandis que $\{a_{i \in \{3,8\}}\}$ convergent vers zéro. Ainsi lorsque $y \geq y_t = 6$, la corrélation est négligeable et nous obtenons les équations (II.73) avec $\{\omega, \sigma_X^2, \sigma_Y^2\} = 1$.

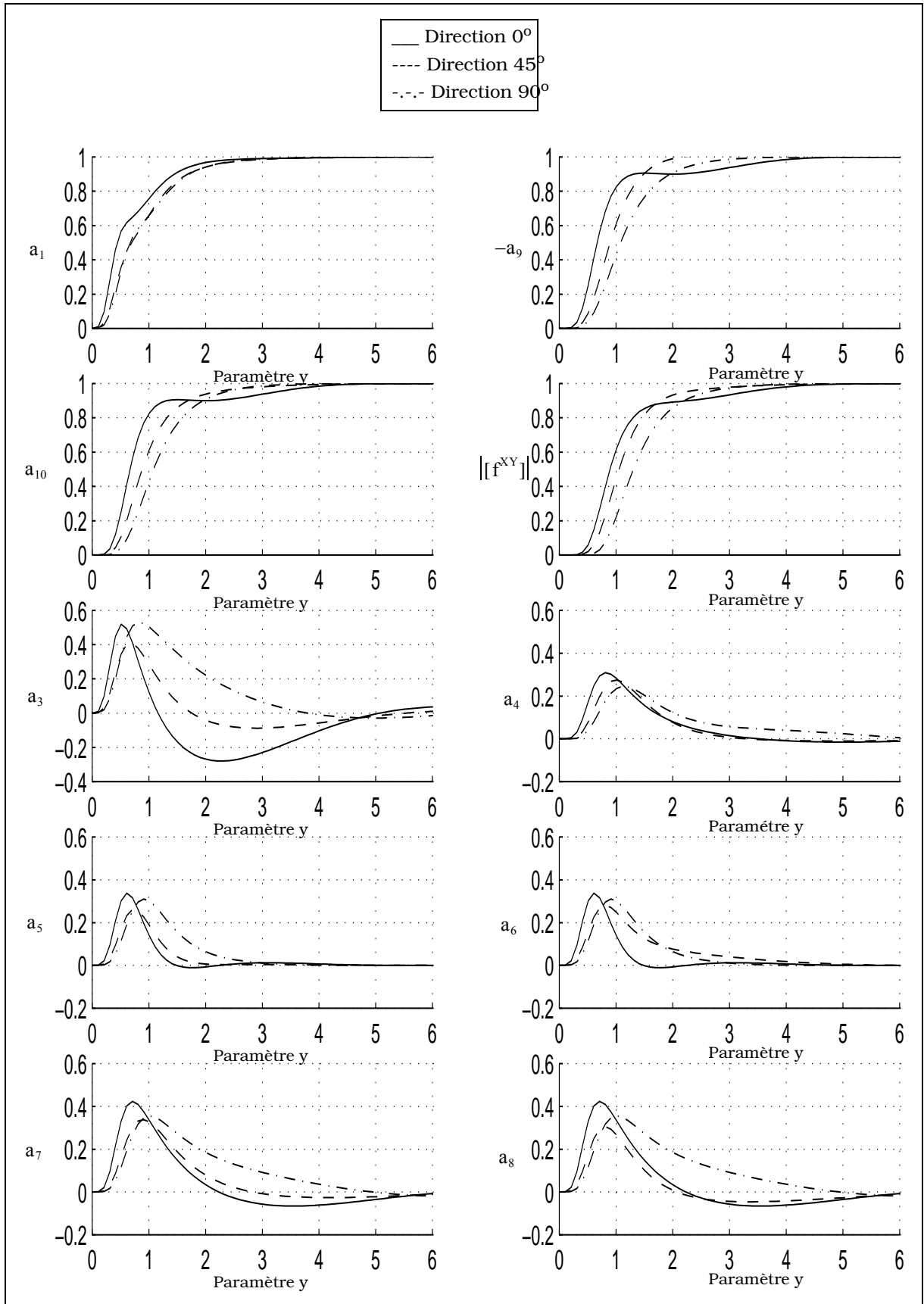
La figure II.9 résume les étapes de calculs à la détermination la fonction d'ombre bidimensionnelle avec corrélation.

Les données d'entrée externes sont l'angle d'incidence θ , la direction ϕ , la vitesse du vent u_f et y_{ob} (sans unité) la longueur d'observation dans la direction ϕ normalisée par la longueur de corrélation. Les données internes sont les paramètres $\{ r_0, r_1, r_2, A \}$ de la fonction d'autocorrélation et la longueur normalisée y_1 .

A partir des données internes les fonctions $\{ f_0, f_1, f_{2R}, f_{16}, f_{36}, f_{56} \}$ sont calculées (tableau II.5), la matrice de covariance est ensuite construite $[f^{XY}]$ (équation (II.84)), puis en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan la matrice inverse $[f^{XY}]^{-1}$ est estimée (équation (II.85)). Les fonctions a_i sont ainsi déterminées (équations (II.67a) avec $\{\omega, \sigma_x, \sigma_y\} = 1$). Enfin la fonction d'ombre est calculée à partir de la relation (II.86). A noter que le paramètre v est calculé à partir du modèle de Cox et Munk.

$R_0(R, \phi)$	$\omega^2 \left\{ \cos\left(\frac{R}{L'_0}\right) / \left[1 + \left(\frac{R}{L_C}\right)^2\right] - A \cos(2\phi) J_2\left(\frac{R}{L'_2}\right) / \left[1 + \left(\frac{R}{L_2}\right)^2\right] \right\}$
$f_0 =$ $f_{00} - f_{02} \cos(2\phi)$	$\begin{cases} f_{00} = \cos(yr_0)/(1+y^2) \\ f_{02} = A J_2(yr_2)/[1+(yr_1)^2] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = R/L_C & r_0 = L_C/L'_0 \\ r_1 = L_C/L_2 & r_2 = L_C/L'_2 \end{cases}$
$f_{1R} =$ $\frac{f_{1R0} - f_{1R2} \cos(2\phi)}{\sigma_x}$	$\begin{cases} f_{1R0} = -\frac{2y \cos(yr_0)}{(1+y^2)^2} - \frac{r_0 \sin(yr_0)}{1+y^2} \\ f_{1R2} = A \left(\frac{r_2 \left[J_1(yr_2) - \frac{2J_2(yr_2)}{yr_2} \right]}{1+(yr_1)^2} - \frac{2yr_1^2 J_2(yr_2)}{[1+(yr_1)^2]^2} \right) \end{cases}$
$f_{2R} =$ $\frac{f_{2R0} - f_{2R2} \cos(2\phi)}{\sigma_x^2}$	$\begin{cases} f_{2R0} = \cos(yr_0) \left[\frac{8y^2}{(1+y^2)^2} - r_0^2 - \frac{2}{1+y^2} \right] \frac{1}{1+y^2} + \frac{4r_0 y \sin(yr_0)}{(1+y^2)^2} \\ f_{2R2} = A \left(\left[r_2 J_0(yr_2) - \frac{3J_1(yr_2)}{y} + \frac{6J_2(yr_2)}{r_2 y^2} \right] \frac{r_2}{1+(yr_1)^2} \right. \\ \left. - [2yr_2 J_1(yr_2) - 3J_2(yr_2)] \frac{2r_1^2}{[1+(yr_1)^2]^2} + \frac{8y^2 r_1^4 J_2(yr_2)}{[1+(yr_1)^2]^3} \right) \end{cases}$
$\{ f_{16}^{XY}, f_{36}^{XY}, f_{56}^{XY} \}$	$\begin{cases} f_{16}^{XY} = -\frac{2f_{02} \sin(2\phi)}{y\sigma_y} & f_{36}^{XY} = -\frac{2 \sin(2\phi)}{y^2 \sigma_x \sigma_y} (yf_{1R2} - f_{02}) \\ f_{56}^{XY} = -\frac{1}{\sigma_y^2} \left[\frac{f_{1R0}}{y} + \frac{\cos(2\phi)}{y^2} (4f_{02} - yf_{1R2}) \right] \end{cases}$
$\{ \sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_{XY}^2, \rho, \eta \}$	$\begin{cases} \sigma_x^2 = \alpha + \beta \cos(2\phi) \\ \sigma_y^2 = \alpha - \beta \cos(2\phi) \\ \sigma_{XY}^2 = -\beta \sin(2\phi) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = 2 + r_0^2 & \beta = Ar_2^2/4 \\ \rho = \sigma_{XY}^2 / (\sigma_x \sigma_y) & \eta = \sigma_x \end{cases}$

Tableau II.5 *Eléments de la matrice de covariance en coordonnées cylindriques*



Graphe II.22 Termes $\{a_i\}$ et déterminant de la matrice de covariance en fonction de la distance y , et paramétrés par la direction par rapport au vent $\phi = \{0, 45, 90\}^\circ$.

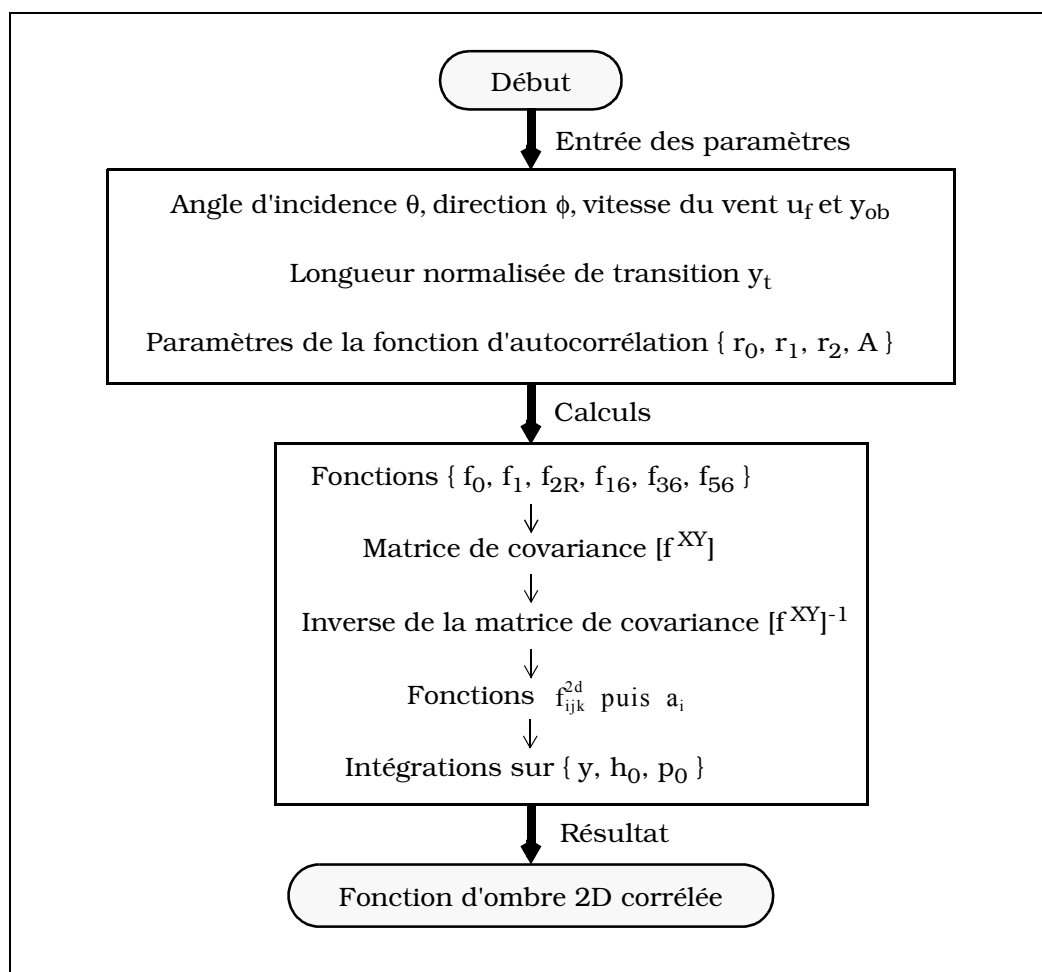
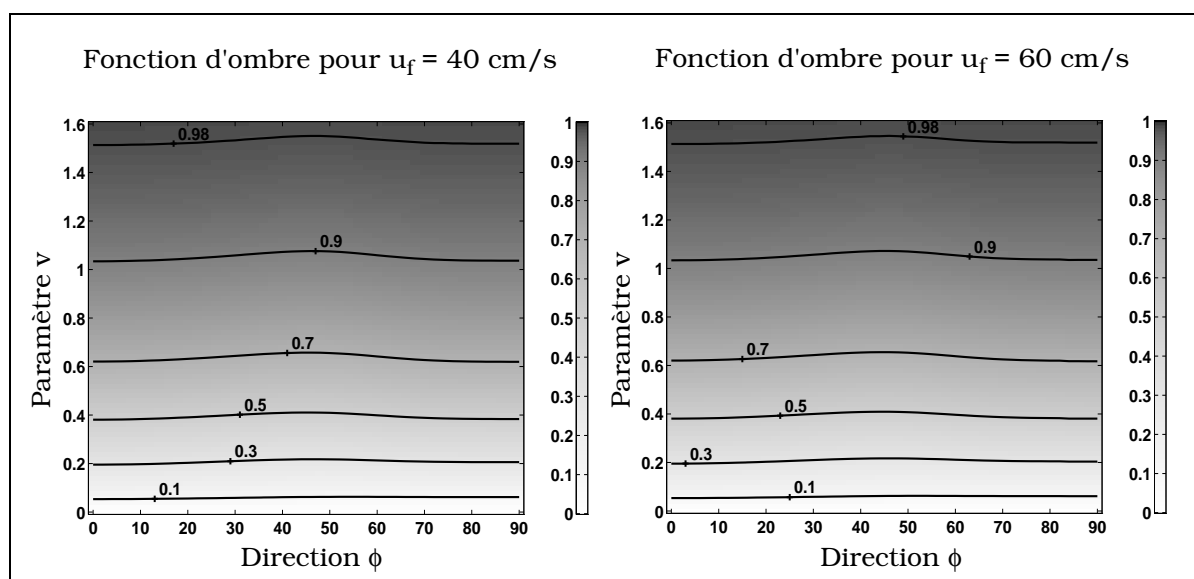


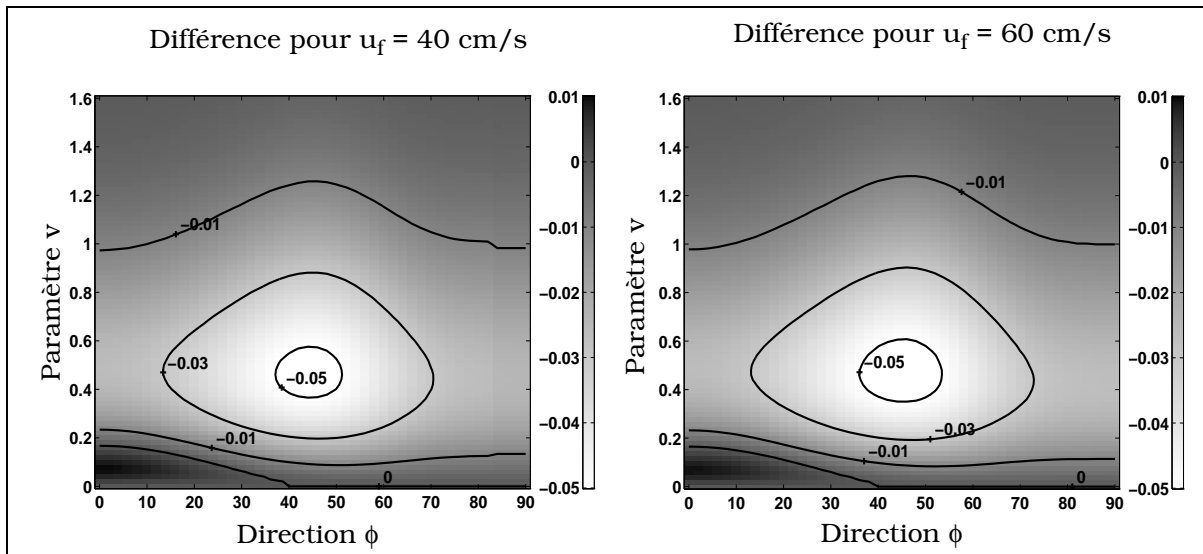
Figure II.9 Etapes de calculs à la détermination bidimensionnelle de la fonction d'ombre corrélée

Sur le graphe II.23, la fonction d'ombre monostatique corrélée bidimensionnelle est tracée en fonction de la direction ϕ et du paramètre v , pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s, et pour une longueur d'observation infinie. On observe que la fonction d'ombre varie peu avec la direction par rapport au vent, avec néanmoins une légère augmentation au voisinage de $\phi = 45^\circ$



Graphe II.23 Fonction d'ombre monostatique corrélée bidimensionnelle en fonction de la direction ϕ et de v , pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s

Sur le graphe II.24, la différence entre les résultats corrélés et décorrélés est représentée en fonction de $\{\phi, v\}$, pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s.



Graphe II.24 Différence entre les résultats corrélés et décorrélés en fonction de $\{\phi, v\}$, pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s

Nous remarquons que la corrélation est négligeable lorsque le paramètre v devient supérieur à 1,4, correspondant à un angle d'incidence égal à $\theta_c = \text{atan}[0,5\sqrt{\alpha + \beta \cos(2\phi)}]$. Comme la différence devient positive, les résultats corrélés sont supérieurs à ceux décorrélés, ce qui implique que la fonction d'ombre est surestimée. En effet dans le cas monodimensionnel, nous avons vu que la fonction d'ombre décorrélée surestimait l'ombre. La corrélation doit être donc incluse lorsque la différence est inférieure zéro. Cette limite est donnée par la courbe nommée zéro sur le graphe II.24. La fonction d'ombre bivariate corrélée peut être calculée en utilisant les résultats du paragraphe II.4.2.3

II.5.3 Conclusion

Dans cette partie, les résultats monodimensionnels ont été étendus au cas bidimensionnel. Ainsi, nous avons déterminé les fonctions d'ombre monostatique et bivariate de Smith sans corrélation, selon les incidences $\{\theta_1, \theta_2\}$, les directions d'observation $\{\phi_1, \phi_2\}$ par rapport au vent. En utilisant un raisonnement identique, nous avons calculé rigoureusement la matrice de covariance avec corrélation en coordonnées cylindriques, et nous avons montré que la fonction d'ombre bivariate s'obtient à partir de la fonction d'ombre monodimensionnelle en utilisant des changements de variable. La condition de non corrélation a été étendue au cas bidimensionnel, et s'écrit $|\theta_{1,2}| < \text{atan}[0,5\sqrt{\alpha + \beta \cos(2\phi_{1,2})}] = \theta_{1c,2c}$. Les paramètres $\{\alpha, \beta\}$ sont déterminés d'après le modèle de Cox et Munk, en régime de capillarité. Le tableau II.6 donne selon l'échelle de Beaufort, l'angle limite minimum ($\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$) θ_c , au-dessous duquel la corrélation est négligeable.

Echelle de Beaufort	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vitesse de friction u_f en cm/s	2	7	13	19	28	44	63	84	109
Vitesse u_{10} en m/s	0,4	1,7	3,6	5,6	7,8	10,8	14,0	17,3	20,9
Angle limite θ_c en °	85,8	81,6	77,9	75,0	72,5	69,6	67,1	64,8	62,7

Tableau II.6 Angle limite de corrélation selon l'échelle de Beaufort

On observe qu'elle est négligeable pour des angles rasants, globalement compris entre $[60;86]^\circ$.

II.6 CONCLUSION

Les fonctions d'ombre monostatiques monodimensionnelles de Smith et de Wagner ont été calculés pour un processus quelconque mais décorrélé (équations (II.11)). Ricciardi et Sato ont exprimé rigoureusement la fonction d'ombre en une série infinie de Rice (relation (II.8)). Nous avons montré que cette série se détermine analytiquement pour un processus gaussien décorrélé (expression (II.12)). Malheureusement le résultat obtenu n'a pas de sens physique. Par contre la solution de Wagner d'un processus gaussien (équation (II.14) décorrélé donnée par le premier terme de la série est correcte, mais surestime la fonction d'ombre, alors que Smith est plus proche de la solution de référence.

Afin de quantifier l'effet de la corrélation, les fonctions d'ombre monostatiques monodimensionnelles de Wagner et de Smith ont été reprises en considérant un processus gaussien corrélé (tableau II.2), répondant à diverses fonctions d'autocorrélation. Les simulations ont montré que pour des profils d'autocorrélation gaussien et lorentzien, les résultats corrélés sont inférieurs à ceux non corrélés, mais sont supérieurs à ceux calculés par la solution de référence, obtenue en générant la surface. Néanmoins le modèle de Smith corrélé est très proche de la solution de référence. Nous avons montré que l'effet de la corrélation est négligeable lorsque l'angle incidence est inférieur à $\theta_c = \text{atan}(0,5/\sigma)$, correspondant à une ombre égale à 0,97. σ est l'écart type des pentes. Physiquement, négliger la corrélation signifie que la fonction d'ombre est indépendante de la fonction d'autocorrélation. Afin d'affiner l'étude, des simulations ont été réalisées sur des fonctions d'autocorrélation d'enveloppes gaussienne et lorentzienne multipliées par la fonction cosinus. Après simulation, nous constatons que l'erreur entre les résultats de Smith corrélés et décorrélés varie peu selon le coefficient a , et devient négligeable lorsque l'angle d'incidence est inférieur à θ_c .

La fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle de Smith a été étendue au cas bistatique monodimensionnel. Elle s'exprime à partir des deux fonctions d'ombre monostatiques définies par les positions angulaires de l'émetteur θ_1 et du récepteur θ_2 . Les simulations ont montré que la corrélation est négligeable lorsque les angles d'incidence $\theta_{1,2}$ sont inférieurs à $\theta_{ic} = \text{atan}(0,5/\sigma)$.

L'ensemble des résultats monodimensionnels, a été généralisé en configuration bidimensionnelle. Nous avons montré que la fonction d'ombre de Smith décorrélée monostatique d'un processus gaussien dépend de l'angle d'incidence θ et de la direction par rapport au vent ϕ , alors que dans le cas bistatique elle est fonction des angles d'incidence $\{\theta_1, \theta_2\}$, des variances des pentes $\sigma_{1,2}^2 = \alpha + \beta \cos(2\phi_{1,2})$, où $\{\phi_1, \phi_2\}$ sont les directions d'observation par rapport au vent. Les paramètres $\{\alpha, \beta\}$ sont donnés par le modèle de Cox et Munk. Dans le but d'utiliser les résultats monodimensionnels corrélés, d'une part la matrice de covariance bidimensionnelle de dimension 6×6 a été exprimée en coordonnées cylindriques, et d'autre part en utilisant les propriétés de symétrie de sa matrice inverse, la probabilité marginale conjointe des hauteurs et des pentes a été calculée dans la direction ϕ . Ces deux opérations constituent les difficultés majeures du problème. Les simulations ont montré que pour des incidences rasantes, la fonction d'ombre corrélée devient supérieure à la fonction décorrélée, et que la corrélation est négligeable lorsque l'angle d'incidence est inférieur à $\theta_c = \text{atan}(0,5/\sqrt{\alpha + \beta \cos(2\phi)})$. Dans le cas bistatique, il suffit de prendre la solution bistatique monodimensionnelle et l'étendre au cas bistatique bidimensionnel en adoptant les changements de variable qui permettent de passer à une configuration monodimensionnelle à une configuration bidimensionnelle.

CHAPITRE III

RAYONNEMENT INFRAROUGE DE LA SURFACE DE LA MER

III.1 INTRODUCTION

Le rayonnement thermique intrinsèque d'un corps est caractérisé par deux quantités : son émissivité et la distribution de la luminance du corps noir. Un corps noir est un corps qui absorbe intégralement le rayonnement incident. Pour un matériau quelconque Kirchhoff [34], [35] montre que la luminance est égale à la luminance du corps noir qui rayonnerait à la même température, multipliée par un coefficient nommé émissivité. L'expression mathématique de la luminance du corps noir est donnée par la distribution de Planck, impliquant que les corps à température ambiante rayonnent dans le proche infrarouge (loi de Wien). En revanche l'émissivité est difficile à modéliser, elle dépend des paramètres de la surface (température, rugosité) et des caractéristiques du champ incident (longueur d'onde, angle d'incidence et polarisation).

En pratique, la caméra infrarouge mesure le rayonnement intrinsèque de l'objet observé, mais également l'ensemble du rayonnement ambiant réfléchi sur l'objet dans la direction d'observation. La grandeur quantifiant ce phénomène est appelée réflectivité qui est égale au pourcentage du rayonnement réfléchi sur la surface.

Le but de ce chapitre est de déterminer l'émissivité et la réflectivité infrarouge bidimensionnelles de la surface de la mer, afin de modéliser une scène thermique.

Pour calculer l'émissivité, Masuda [36] et Saunders [37] utilisent une approche similaire. Ils supposent que la surface est isotrope et que l'effet de l'ombre est inexistant. Wu et Smith [38] supposent que la surface est isotrope et que l'effet de l'ombre est quantifié par une approche heuristique. Notre étude est basée sur les travaux récents de Yoshimori [39] et [15]. Ces auteurs utilisent la même approche que Masuda et Saunders, mais introduisent la fonction d'ombre monodimensionnelle, alors que nous allons utiliser la fonction d'ombre bidimensionnelle exposée dans le second chapitre.

Le premier paragraphe montre que la diffraction par les vagues, représentées par des facettes, est négligeable; cette hypothèse est utilisée pour les calculs de l'émissivité et de la réflectivité. Ceci implique que le champ électromagnétique diffusé par la surface de la mer est défini uniquement dans la direction spéculaire, donnée par l'optique géométrique [38] (lois de Snell-Descartes). Les concepts de la radiométrie sont également présentés.

La détermination de l'émissivité, effectuée dans le second paragraphe, nécessite la connaissance des trois paramètres suivants : la densité de probabilité des pentes prise gaussienne, la fonction d'ombre bidimensionnelle monostatique étudiée dans le second chapitre, et les coefficients de Fresnel contenant l'information polarimétrique. Ainsi l'émissivité bidimensionnelle est simulée dans les cas décorrélé et corrélé, et comparée avec la littérature [39].

Le troisième paragraphe expose la réflectivité de la surface de la mer basée sur le modèle de Yoshimori [39], mais contrairement à [39], notre modèle n'introduit aucune hypothèse sur le comportement des pentes de la surface de la mer.

Dans le dernier paragraphe, une scène thermique est simulée en présence de l'atmosphère. La température apparente globale mesurée par la caméra infrarouge, est déterminée à partir du coefficient de transmission de l'atmosphère, de l'émissivité et de la réflectivité de la mer, dans des conditions météorologiques données.

III.2 PRÉLIMINAIRES

III.2.1 Diffraction par une facette

Le modèle à facettes consiste à échantillonner la surface (figure III.1). A noter que les spectres de mer étant définis au-dessus du millimétrique, la structure micrométrique de la surface n'est pas prise en compte. Le rayonnement d'un élément de surface de la vague (facette), peut être approximé par le rayonnement de son plan tangent si la relation suivante est vérifiée [38] :

$$2\pi R_c \cos^3(\theta_1) \gg \lambda \quad (\text{III.1})$$

avec R_c le rayon de courbure de la facette, λ la longueur d'onde, et θ_1 l'angle entre la normale à la facette et la direction d'observation. Pour une fonction d'autocorrélation gaussienne (paragraphe II.3.1.3) de longueur de corrélation L_c , R_c s'écrit [3] :

$$R_c = \frac{L_c^2}{2\omega\sqrt{\pi}} = \frac{\omega}{\sigma^2\sqrt{\pi}} = 0,724 \frac{\omega}{\sigma^2} \quad (\text{III.2})$$

où L_c est la longueur de corrélation, ω l'écart type des hauteurs, et σ^2 la variance des pentes. Compte-tenu que la longueur d'onde dans l'infrarouge est de l'ordre d'une dizaine de micromètres, $\sigma^2 \ll 1$ et $\omega > 0,1$ mètre pour la surface de la mer, l'équation (III.1) est vérifiée.

Soit une facette de longueur a , inclinée d'un angle χ par rapport au plan horizontal (figure III.1), l'intensité normalisée diffractée par la surface autour de la normale s'écrit :

$$I = \frac{\sin^2(\pi u \Delta\theta)}{(\pi u \Delta\theta)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = a/\lambda & a = \omega \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma^2}} \\ \Delta\theta = \sin(\theta_1) - \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

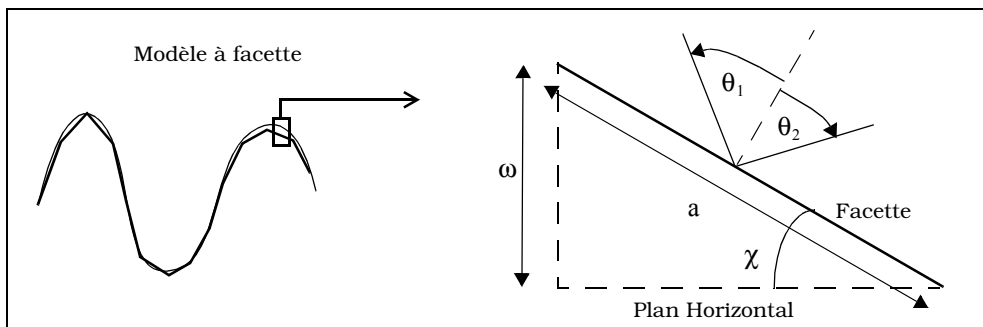
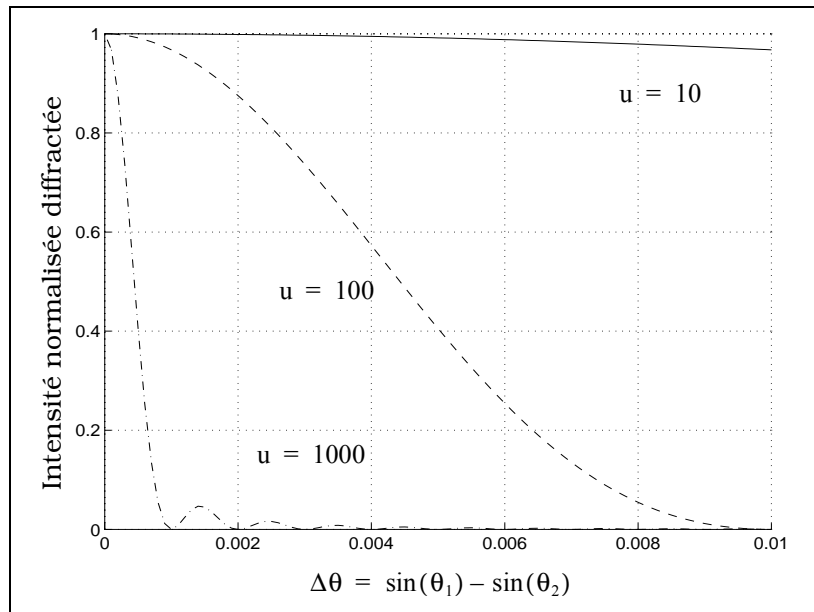


Figure III.1 Intensité diffractée par une facette

avec $\sigma = \tan\chi$. Le premier zéro de l'intensité est donné par $\Delta\theta_0 = 1/u$. Dans le domaine infrarouge, la longueur d'onde est de l'ordre d'une dizaine de micromètres, a est de l'ordre du centimètre donc $u \approx 10^3$. Dans ce cas, lorsque la direction d'observation est différente de la direction spéculaire (graphe III.1), impliquant $\Delta\theta \neq 0$, l'intensité diffractée devient nulle lorsque $\Delta\theta_0 \approx 0,001^\circ$.



Graphe III.1 Intensité normalisée diffractée par une facette

Par conséquent la puissance diffractée est principalement définie dans la direction spéculaire $\theta_1 = \theta_2$ donnée par l'optique géométrique.

III.2.2 Définitions

L'ensemble des grandeurs introduites dans ce paragraphe sont monochromatiques [34] et [35]. Pour un champ polychromatique, une sommation sur la bande spectrale est nécessaire.

III.2.2.1 Le corps noir

Un corps noir est un corps qui absorbe intégralement le rayonnement reçu. Max Planck a montré que sa luminance $L(\lambda, T)$ est donnée par :

$$L(\lambda, T) = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C_1 = 1,192 \cdot 10^{-16} \text{W} \cdot \text{m}^2 \\ C_2 = 1,439 \cdot 10^{-2} \text{m} \cdot \text{K} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

où T est la température absolue en Kelvin, et λ la longueur d'onde. Son unité est $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

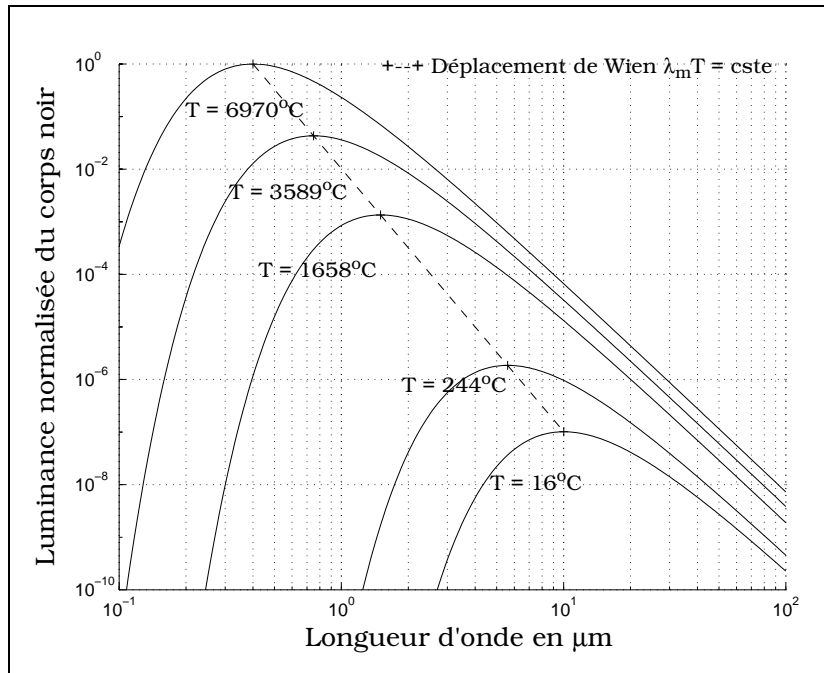
III.2.2.2 Loi de Wien

Les isothermes de la distribution de Planck représentées sur le graphe III.2, passent par un maximum λ_m vérifiant la relation suivante :

$$\lambda_m T = \text{cste} = 2897 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.5) est appelée déplacement de Wien. Elle montre que plus un corps est chaud et plus la longueur d'onde est courte (elle tend vers l'ultra-violet). Le spectre électromagnétique défini dans le visible et l'infrarouge, s'étend approximativement de $0,4 \mu\text{m}$ au mm .

L'équation (III.5) implique qu'à une température est associée une longueur d'onde. On observe sur la figure III.2 qu'entre 5,6 μm et 14 μm les températures correspondantes sont comprises entre 244 et -66 degrés Celsius, cette région est appelée l'infrarouge thermique. Les valeurs limites peuvent varier légèrement selon les auteurs.



Graph III.2 Luminance normalisée du corps noir en fonction de la longueur d'onde et pour différentes températures

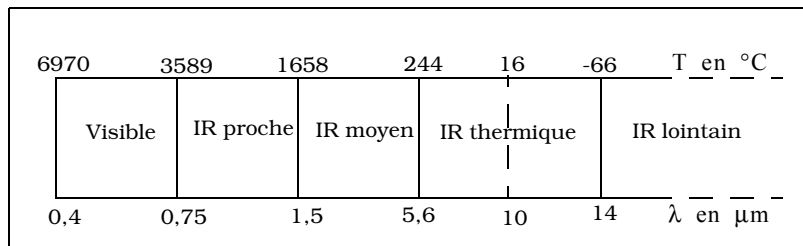


Figure III.2 Correspondance entre la température et la longueur d'onde

III.2.2.3 Les corps réels : l'émissivité

Physiquement un corps noir n'existe pas, mais son modèle théorique peut s'appliquer sur un corps quelconque. En effet Kirchhoff a montré que pour un corps réel, sa luminance $l(\lambda, T, \theta)$ est obtenue à partir de la luminance du corps noir émise à la même température multipliée par un coefficient $\epsilon(\lambda, T, \theta)$:

$$l(\lambda, T, \theta) = \epsilon(\lambda, T, \theta)L(\lambda, T) \quad \text{(III.6)}$$

où $\epsilon(\lambda, T, \theta)$ est l'émissivité. Celle-ci dépend de la longueur d'onde, de l'état de la surface (sa température T et sa rugosité), et de la direction d'observation θ . Puisqu'elle est comprise entre zéro et un, le rayonnement d'un corps réel est toujours inférieur au rayonnement du corps noir à la même température.

III.2.2.4 Coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission

Soit ϕ_i le flux incident arrivant sur la surface d'un dioptré d'indices de réfraction $\{n_1, n_2\}$. Le flux incident se décompose en trois parties (figure III.3) : le flux réfléchi Φ_r , le flux absorbé Φ_a , et le flux transmis Φ_t par le milieu d'indice n_2 . La conservation de l'énergie implique :

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t \quad (\text{III.7})$$

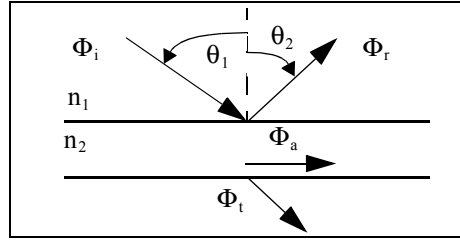


Figure III.3 Coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission

Les coefficients de réflexion κ , d'absorption α et de transmission τ en puissance s'écrivent :

$$\kappa = \Phi_r / \Phi_i \quad \alpha = \Phi_a / \Phi_i \quad \tau = \Phi_t / \Phi_i \quad (\text{III.7a})$$

En substituant les équations (III.7a) dans (III.7), nous obtenons :

$$\kappa + \alpha + \tau = 1 \quad (\text{III.7b})$$

Le corps noir est défini par $\alpha = 1$. Les conditions d'équilibre thermique d'un corps, placé à l'intérieur d'une enceinte fermée, imposent que l'émissivité du corps est égale à son coefficient d'absorption :

$$\varepsilon = \alpha \quad (\text{III.7c})$$

D'après les équations (III.7c) et (III.7b), l'émissivité d'un corps opaque ($\tau = 0$) devient :

$$\varepsilon = 1 - \kappa \quad (\text{III.8})$$

Cette relation est utilisée pour déterminer l'émissivité de la surface de la mer.

III.2.2.5 Les coefficients de réflexion de Fresnel

Pour un angle d'incidence θ_1 , les coefficients de Fresnel en polarisation verticale r_v (champ électrique \vec{E} parallèle au plan d'incidence) et horizontale r_H (\vec{E} orthogonal au plan d'incidence) sont donnés par (figure III.3) :

$$\begin{cases} r_v(\theta_1) = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\ r_H(\theta_1) = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \sin \theta_2 = \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2} \quad (\text{III.9})$$

L'émissivité s'obtient à partir de ces deux grandeurs. Puisque l'émissivité est proportionnelle à la densité de puissance d'après (III.8), nous devons utiliser les coefficients de Fresnel $\{\kappa_v, \kappa_H\}$ en puissance définis par :

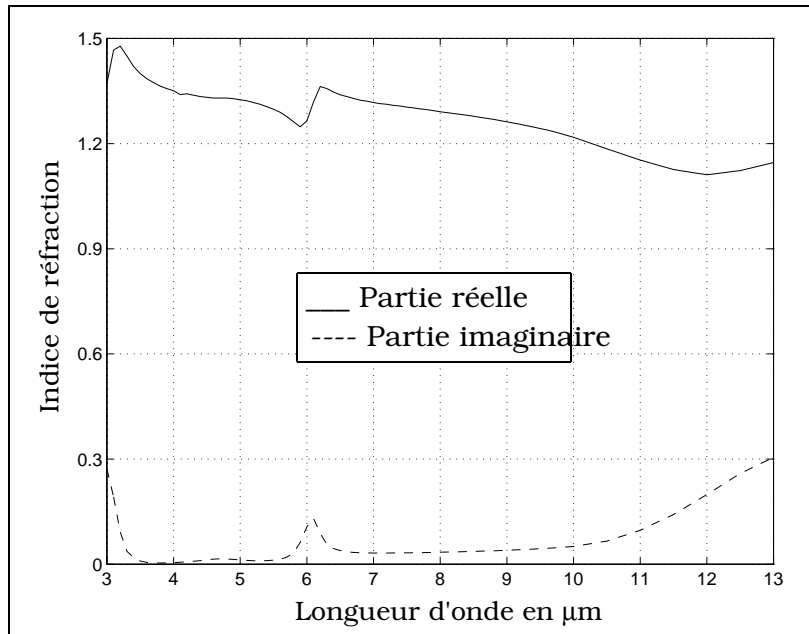
$$\kappa_v(\theta_1) = |r_v(\theta_1)|^2 \quad \kappa_H(\theta_1) = |r_H(\theta_1)|^2 \quad (\text{III.9a})$$

III.2.2.6 Indice de réfraction de la mer

L'émissivité dépend des coefficients de Fresnel, donc des indices de réfraction n_2 de la mer et n_1 de l'air. L'indice de l'air est pris égal à 1. Le but de cette partie est d'observer l'influence de la longueur d'onde λ sur l'indice n_2 [40]. La loi de Wien montre qu'un corps à température ambiante rayonne dans l'infrarouge compris entre 0,7 et 100 μm .

Les fenêtres présentant un intérêt pratique pour les systèmes optroniques sont [8;13], [3;5] et [0,7;2] μm . Dans ces intervalles la transmission atmosphérique est élevée, entre ces intervalles elle est nulle dû principalement à la présence de la vapeur d'eau et du dioxyde de carbone. Dans ce chapitre, la fenêtre [0,7;2] μm n'est pas étudiée. L'indice de réfraction est donc étudié entre [3;13] μm .

Sur la graphe III.3, les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction sont représentées en fonction de la longueur d'onde, pour une température de 25°C .



Graph III.3 *Indice de réfraction de l'eau pure en fonction de la longueur d'onde pour une température T = 25°C*

La valeur de la partie imaginaire croît avec la longueur d'onde, tandis que la valeur de la partie réelle décroît. On note que sur l'intervalle [3;13] μm, la partie réelle est supérieure à la partie imaginaire; les valeurs moyennes respectives sont 1,262 et 0,053.

III.2.3 Conclusion

La longueur d'onde dans l'infrarouge est très inférieure au rayon de courbure moyen de la surface de la mer, ce qui permet d'admettre que la totalité de l'énergie diffractée est contenue dans la direction spéculaire, donnée par les équations de l'optique géométrique. Pour un diélectrique, l'émissivité est obtenue à partir des coefficients de Fresnel et dépend des paramètres suivants :

- l'indice de la mer, donc de la température et si le milieu est dispersif, de la longueur d'onde,
- les angles d'incidence et de réflexion modulés par la rugosité de la surface,
- la polarisation contenue dans les coefficients de Fresnel.

III.3 ÉMISSIVITÉ BIDIMENSIONNELLE D'UNE SURFACE ALÉATOIRE

Le but de cette partie est de modéliser l'émissivité bidimensionnelle infrarouge de la mer à partir des paramètres définis dans la partie précédente. L'émissivité monodimensionnelle est également calculée.

III.3.1 Émissivité monodimensionnelle d'une surface rugueuse

Nous avons vu dans le paragraphe III.2.2.5 que l'émissivité d'un corps dépend des coefficients de Fresnel, qui sont fonction de l'angle d'incidence et des indices de réfraction. Pour une incidence donnée, l'angle de réflexion est modulé par la rugosité de la surface caractérisée par la distribution des pentes. Le but de ce paragraphe est d'introduire ces grandeurs et la fonction d'ombre dans le calcul de l'émissivité ([39] et [15]).

III.3.1.1 Géométrie du problème

Soit M un point de la surface d'abscisse x à l'instant t de hauteur $z(x, t)$, dans le repère cartésien (z, x) (figure III.4). La surface est considérée monodimensionnelle, donc la composante selon y est nulle. Soit \vec{n} le vecteur unitaire selon la verticale ascendante z , \vec{n}' le vecteur unitaire normal à la facette dS en M, et \vec{s} le vecteur unitaire de la direction d'observation θ par rapport à z . On pose $\varphi = (\vec{n}', \vec{s})$.

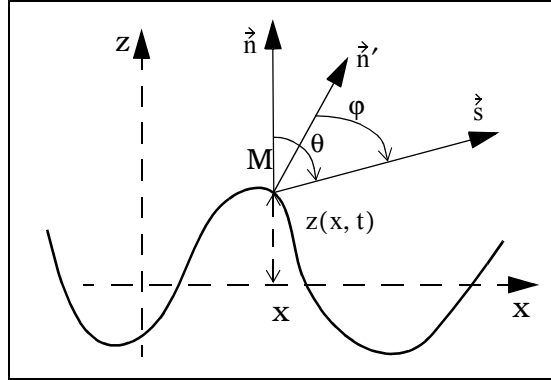


Figure III.4 Géométrie du problème

D'après l'équation (III.8), l'émissivité locale ε de la facette dans la direction φ est [39] :

$$\varepsilon = [1 - |r(|\varphi|)|^2] \cdot f \quad (\text{III.10})$$

Afin d'alléger la notation, les dépendances en fréquence et en température sont omises. La fonction f caractérise le comportement statistique de la surface de pente locale γ .

III.3.1.2 Émissivité moyennée sur les pentes de la surface

La fonction $f = p(\gamma)S(\theta, \gamma)$ est composée de deux termes : la fonction d'ombre $S(\theta, \gamma)$, et la densité de probabilité des pentes $p(\gamma)$ supposée gaussienne :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{III.11})$$

où σ est l'écart type des pentes. f étant une densité de probabilité, elle doit être normalisée. Cette fonction f_N est déterminée dans le prochain paragraphe. De plus (figure III.5) nous avons :

$$\tan \chi = \frac{\partial z}{\partial x} = \gamma \quad \text{et} \quad \varphi = \theta + \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \theta + \arctan(\gamma) \quad (\text{III.12})$$

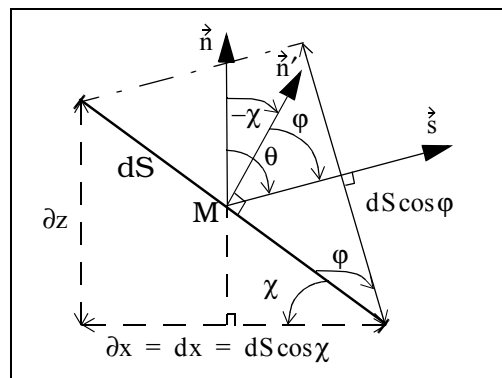


Figure III.5 Relation entre les différents angles

Ces équations impliquent que l'émissivité $\varepsilon(\theta, \gamma)$ dans la direction θ est :

$$\varepsilon(\theta, \gamma) = [1 - |r(|\theta + \text{atan} \gamma)||^2] f_N(\theta, \gamma) \quad (\text{III.13})$$

L'émissivité moyennée $\varepsilon(\theta)$ est donnée par :

$$\varepsilon(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\theta, \gamma) d\gamma \quad (\text{III.14})$$

III.3.1.3 Émissivité moyennée normalisée de la surface

Par définition, nous avons :

$$f_N = f \cdot g \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_N d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot g \cdot d\gamma = 1 \quad (\text{III.15})$$

où g est la fonction de normalisation à déterminer. La somme des surfaces observées S_{obs} dans le plan Σ normal à la direction θ , est égale à la projection de la surface S_0 dans le même plan (figure III.6), soit :

$$\int_{S_0} dS_{\text{obs}} \cos \varphi = S_0 \cos \theta \quad (\text{III.15a})$$

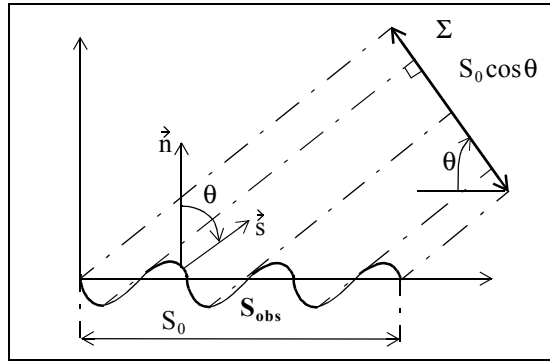


Figure III.6 Détermination de la fonction de normalisation

De plus :

$$dS_{\text{obs}} = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot dS \cdot d\gamma \quad (\text{III.15b})$$

En substituant l'équation (III.15b) dans (III.15a) nous obtenons :

$$\int_{S_0} dS \int_{-\infty}^{\infty} f \cos \varphi d\gamma = S_0 \cos \theta \quad (\text{III.15c})$$

Puisque $dS = dx / \cos \chi$ (figure III.5), nous avons :

$$\int_{S_0} dx \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\cos \varphi}{\cos \chi} d\gamma = S_0 \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\cos \varphi}{\cos \theta \cos \chi} d\gamma = 1 \quad (\text{III.15d})$$

En comparant l'équation (III.15d) avec (III.15), la fonction de normalisation g s'écrit :

$$g(\theta, \gamma) = \frac{\cos \varphi}{\cos \theta \cos \chi} = \frac{\vec{n}' \cdot \vec{s}}{(\vec{n} \cdot \vec{n}')(\vec{n} \cdot \vec{s})} = 1 - \gamma \tan \theta \quad (\text{III.16})$$

III.3.1.4 Conclusion

L'émissivité monodimensionnelle moyennée d'un processus gaussien de variance σ^2 est :

$$\varepsilon(\theta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \gamma \tan \theta) [1 - |r(|\theta + \text{atan} \gamma)|]^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right) S(\theta, \gamma) d\gamma \quad (\text{III.17})$$

où r est le coefficient de Fresnel et S la fonction d'ombre.

III.3.2 Émissivité bidimensionnelle d'une surface rugueuse

Dans ce paragraphe l'émissivité bidimensionnelle d'une surface rugueuse est déterminée.

Dans le but d'utiliser la fonction d'ombre monodimensionnelle, Yoshimori [39] suppose que la pente dans la direction transverse au vent est négligeable devant celle définie dans la direction du vent. Puisque notre modèle inclut la fonction d'ombre bidimensionnelle établie au chapitre II, nous n'émettons aucune hypothèse sur la distribution des pentes. C'est l'originalité de notre modèle.

III.3.2.1 Géométrie du problème

Soit M un point de la surface définissant l'origine du repère cartésien (x, y, z) (figure III.7), \vec{n} le vecteur unitaire dans la direction z , \vec{n}' le vecteur unitaire normal à la facette en M , et \vec{s} le vecteur unitaire de la direction d'observation caractérisée par $\{\theta, \phi\}$. L'ensemble de ces vecteurs s'écrit :

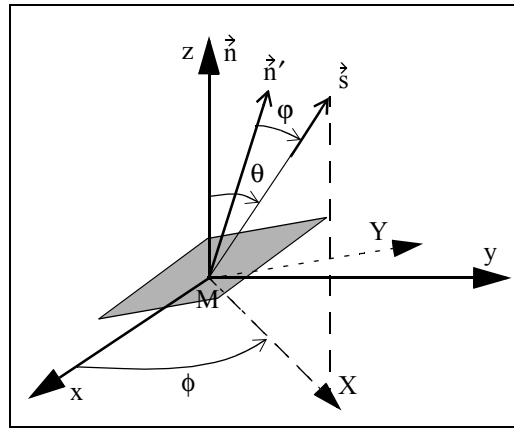


Figure III.7 Configuration bidimensionnelle

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} \begin{bmatrix} -\gamma_x \\ -\gamma_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

où $\{\gamma_x, \gamma_y\}$ sont les pentes respectives de la surface dans les directions du vent et transverse au vent. Soit $\varphi = (\vec{n}', \vec{s})$.

III.3.2.2 Détermination de l'émissivité

Le raisonnement est similaire à celui exposé dans le cas monodimensionnel. D'après l'équation (III.8), l'émissivité locale de la facette dans la direction φ est donnée par :

$$\varepsilon = [1 - |r(|\varphi|)|^2] \cdot f_N \quad (\text{III.19})$$

La fonction $f_N = p \cdot S \cdot g$ est composée de trois termes. La densité de probabilité des pentes $p(\gamma_x, \gamma_y)$ supposée gaussienne (équation (I.83c)) :

$$p(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (\text{III.19a})$$

L'angle φ est défini par :

$$\cos\varphi = \vec{n}' \cdot \vec{s} = \frac{\cos\theta - (\gamma_x \cos\phi + \gamma_y \sin\phi) \sin\theta}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} \quad (\text{III.19b})$$

La fonction de normalisation bidimensionnelle devient :

$$g = \frac{\vec{n}' \cdot \vec{s}}{(\vec{n} \cdot \vec{n}')(\vec{n} \cdot \vec{s})} = \frac{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2} \cos\varphi}{s_z} = \frac{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2} \cos\varphi}{\cos\theta} \quad (\text{III.20})$$

En substituant l'équation (III.19b) dans (III.20) g est donnée par :

$$g = \frac{\cos\theta - (\gamma_x \cos\phi + \gamma_y \sin\phi) \sin\theta}{\cos\theta} = 1 - (\gamma_x \cos\phi + \gamma_y \sin\phi) \tan\theta \quad (\text{III.20a})$$

L'émissivité bidimensionnelle $\varepsilon(\theta, \phi)$ moyennée sur les pentes dans les directions $\{\theta, \phi\}$ est alors :

$$\varepsilon(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |r(|\phi|)|^2] \cdot \exp\left(-\frac{\gamma_x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\gamma_y^2}{2\sigma_y^2}\right) \cdot g \cdot S \cdot d\gamma_x d\gamma_y \quad (\text{III.21})$$

L'angle $\varphi = \varphi(\theta, \phi, \gamma_x, \gamma_y)$ et la fonction $g = g(\theta, \phi, \gamma_x, \gamma_y)$ sont donnés par les équations (III.19b) et (III.20a). $S = S(\theta, \phi, \gamma_x, \gamma_y)$ désigne la fonction d'ombre bidimensionnelle monostatique.

III.3.3 Émissivité de la mer calculée avec la fonction d'ombre de Smith décorrélée

Dans ce paragraphe, l'émissivité bidimensionnelle de la surface de la mer est simulée en polarisations verticale et horizontale. Puisque les résultats de Smith sont meilleurs que ceux de Wagner, la fonction d'ombre bidimensionnelle de Smith est utilisée. Dans l'article [39] les variances des pentes sont déterminées à partir du spectre de gravité de JONSWAP, alors que nous utilisons le modèle de Cox et Munk (équation (I.88)), qui donne les variances des pentes en régime de capillarité. L'émissivité obtenue à partir de [39] est également comparée à notre modèle.

III.3.3.1 Calculs

Afin d'utiliser la fonction d'ombre $S = S(\theta, \phi, \gamma_x, \gamma_y)$, l'émissivité doit être déterminée dans la direction d'observation par rapport au vent ϕ i.e. dans la nouvelle base (X,Y) (figure III.7). Les anciennes coordonnées (γ_x, γ_y) , s'expriment à partir des nouvelles coordonnées (γ_X, γ_Y) par :

$$\begin{cases} \gamma_x = \gamma_X \cos\phi - \gamma_Y \sin\phi \\ \gamma_y = \gamma_X \sin\phi + \gamma_Y \cos\phi \end{cases} \quad (\text{III.21a})$$

En remplaçant les équations (III.21a) dans (III.21) nous avons (jacobien égal à un) :

$$\varepsilon(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |r(|\phi|)|^2] \cdot \exp(-a\gamma_Y^2 - 2b\gamma_Y\gamma_X - c\gamma_X^2) \cdot g \cdot S \cdot d\gamma_X d\gamma_Y \quad (\text{III.22})$$

avec :

$$\begin{cases} \cos\phi = \frac{\cos\theta - \gamma_X \sin\theta}{\sqrt{1 + \gamma_X^2 + \gamma_Y^2}} & g = 1 - \gamma_X \tan\theta \\ a = \frac{\alpha + \beta \cos(2\phi)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} & b = \frac{\beta \sin(2\phi)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} & c = \frac{\alpha - \beta \cos(2\phi)}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

où $\{\alpha, \beta\}$ sont définis par :

$$\alpha = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)/2 \quad \beta = (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)/2 \quad (\text{III.23a})$$

avec $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ les variances des pentes dans les directions du vent et transverse au vent. Pour une longueur d'observation infinie, nous avons montré que la fonction d'ombre bidimensionnelle monostatique de Smith sans corrélation et moyennée sur les hauteurs, s'écrit (équation (II.50a)) :

$$S_s(\theta, \phi, \gamma_X) = \frac{\Upsilon(\mu - \gamma_X)}{\Lambda(v) + 1} \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda(v) = [e^{-v^2} - v\sqrt{\pi}\text{erfc}(v)]/(2v\sqrt{\pi}) \\ v = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{\cot\theta}{\sqrt{2[\alpha + \beta \cos(2\phi)]}} \end{cases} \quad (\text{III.24a})$$

Puisque la fonction d'ombre n'est pas intégrée sur les pentes, le terme $1 - \text{erfc}(v)/2$ est omis. En substituant l'équation (III.24) dans (III.22), l'émissivité s'écrit :

$$\varepsilon(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi(\Lambda + 1)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \int_{-\infty}^{\mu} e^{-c\gamma_X^2} \cdot (1 - \gamma_X \tan\theta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |r(|\phi|)|^2] \cdot e^{-a\gamma_Y^2 - 2b\gamma_Y\gamma_X} \cdot d\gamma_Y \right\} d\gamma_X \quad (\text{III.25})$$

Pour effectuer la double intégration numérique nous posons :

$$v_X = \sqrt{c}\gamma_X \quad v_Y = \sqrt{a}\gamma_Y \quad (\text{III.25a})$$

donc :

$$\varepsilon(\theta, \phi) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\mu/\sqrt{c}} e^{-v_X^2} \cdot \left(1 - \frac{v_X}{\sqrt{c}} \tan\theta\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |r(|\phi|)|^2] e^{-v_Y^2 - \frac{2\beta \sin(2\phi)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} v_X v_Y} dv_Y \right\} dv_X \quad (\text{III.26})$$

avec :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\pi(\Lambda + 1)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} \quad \phi = \arccos\left(\frac{\cos\theta - \frac{v_X}{\sqrt{c}} \sin\theta}{\sqrt{1 + \frac{v_X^2}{c} + \frac{v_Y^2}{a}}}\right) \quad (\text{III.26a})$$

III.3.3.2 Cas particuliers

Lorsque l'angle d'incidence θ est égal à zéro i.e. $\{v, \mu\} \rightarrow \infty$, l'équation (III.26) devient :

$$\varepsilon(0, \phi) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_X^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |r(|\phi|)|^2] e^{-v_Y^2 - \frac{2\beta \sin(2\phi)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} v_X v_Y} dv_Y \right\} dv_X \quad (\text{III.26b})$$

En supposant que $\cos\phi \approx 1$ (équation (III.22) avec $\theta = 0$ et $\gamma_X^2 + \gamma_Y^2 \ll 1$), nous avons :

$$\varepsilon(0, \phi) = \frac{1 - |r(0)|^2}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_y^2 - \frac{2\beta \sin(2\phi)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} v_x v_y} dv_y \right\} dv_x = 1 - |r(0)|^2 \quad (\text{III.26c})$$

Nous obtenons alors l'émissivité d'une surface plane.

Lorsque l'angle d'incidence θ est égal à 90° i.e. $\{v, \mu\} \rightarrow 0$, l'équation (III.26) devient :

$$\varepsilon(90, \phi) = \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\sqrt{\pi}[\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)]} \int_0^{\infty} v_x e^{-v_x^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |r(|\phi|)|^2] e^{-v_y^2 - \frac{2\beta \sin(2\phi)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} v_x v_y} dv_y \right\} dv_x \quad (\text{III.26d})$$

III.3.3.3 Simulations de l'émissivité de la mer

Sur le graphe III.4, les émissivités verticale $\bar{\varepsilon}_V$ et horizontale $\bar{\varepsilon}_H$ intégrées sur la longueur d'onde sont tracées en fonction des angles $\{\phi, \theta\}$, pour différentes vitesses de friction $u_f = \{20, 40, 60\}$ cm/s. $\{\bar{\varepsilon}_V, \bar{\varepsilon}_H\}$ sont obtenues à partir de l'équation (III.26) avec $|r(|\phi|)|^2 = \{|r_V(|\phi|)|^2, |r_H(|\phi|)|^2\}$, où $\{r_V, r_H\}$ désignent les coefficients de Fresnel. Les émissivités sont intégrées sur l'intervalle $[3;5]$ μm avec un pas d'intégration de $0,2$ μm , et l'indice de mer n_2 est défini dans le paragraphe III.2.2.6 à la température $T = 25^\circ\text{C}$.

Nous observons que les émissivités décroissent lorsque les angles $\{\phi, \theta\}$ tendent vers 90° , et elles varient légèrement avec la direction par rapport au vent ϕ . Ceci implique que l'émissivité est peu sensible à l'anisotropie de la surface de la mer. Pour un angle d'incidence $\theta = 0$, les émissivités sont sensiblement égales (tableau III.1) à celles obtenues par une surface plane :

$$\bar{\varepsilon}_V(0, 0) \approx \bar{\varepsilon}_H(0, 0) \approx 1 - \overline{|r_V(0)|^2} \approx 1 - \overline{|r_H(0)|^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} = \frac{4n_2}{(n_2 + 1)^2} = 0,975 \quad (\text{III.26e})$$

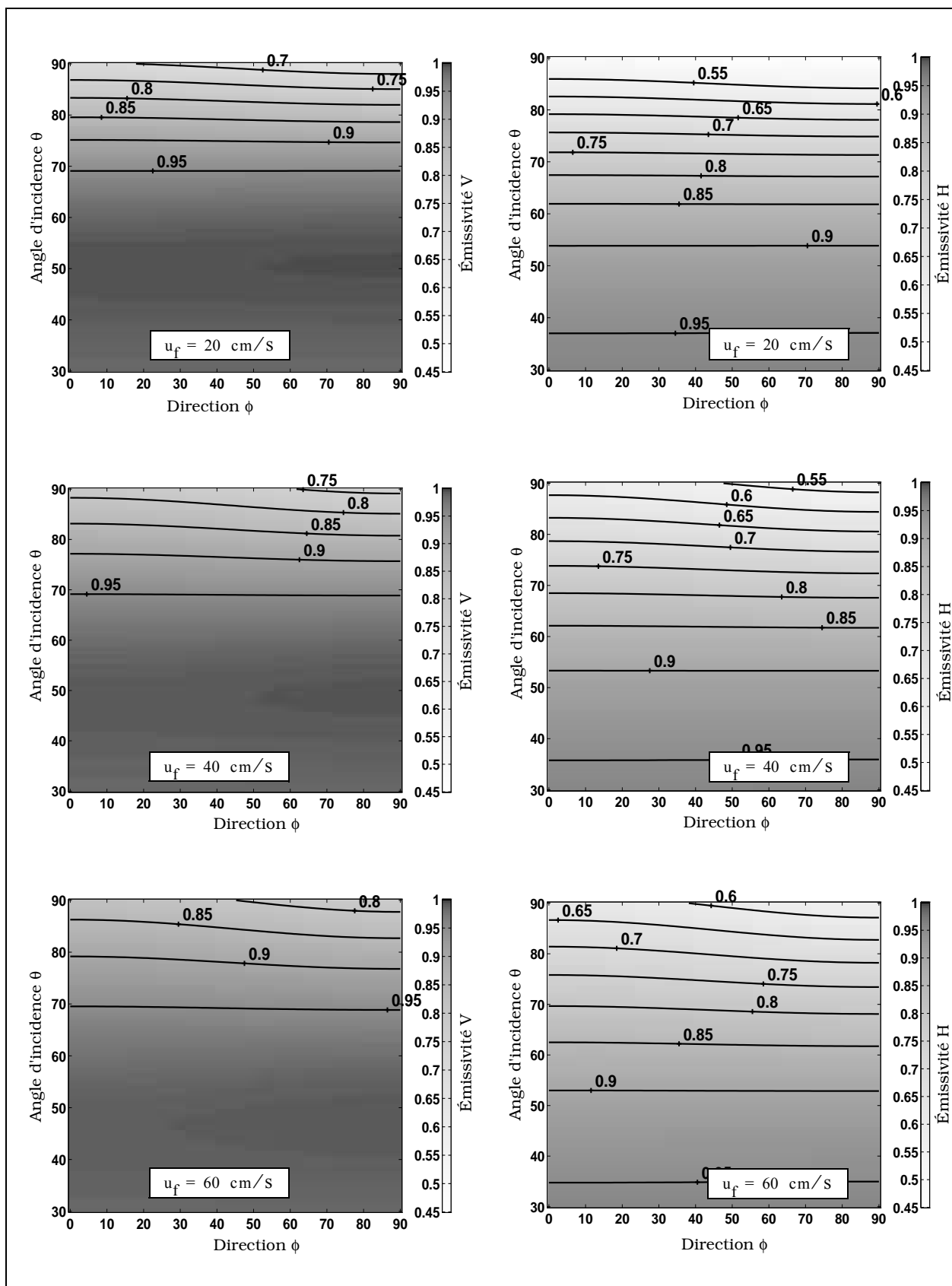
où l'opérateur $\bar{\quad}$ désigne la valeur moyenne sur la longueur d'onde.

Lorsque la vitesse de friction diminue, les émissivités décroissent, et nous remarquons que la variation en polarisation verticale $\Delta\bar{\varepsilon}_V$ est plus faible que celle définie en polarisation horizontale $\Delta\bar{\varepsilon}_H$ (tableau III.1). Les amplitudes de $\{\Delta\bar{\varepsilon}_V, \Delta\bar{\varepsilon}_H\}$ sont inversement proportionnelles à la vitesse du vent. De plus au voisinage de l'angle de Brewster défini par $\theta_B = \text{atan}(|n_2|/n_1) \approx 54^\circ$, l'émissivité verticale augmente légèrement.

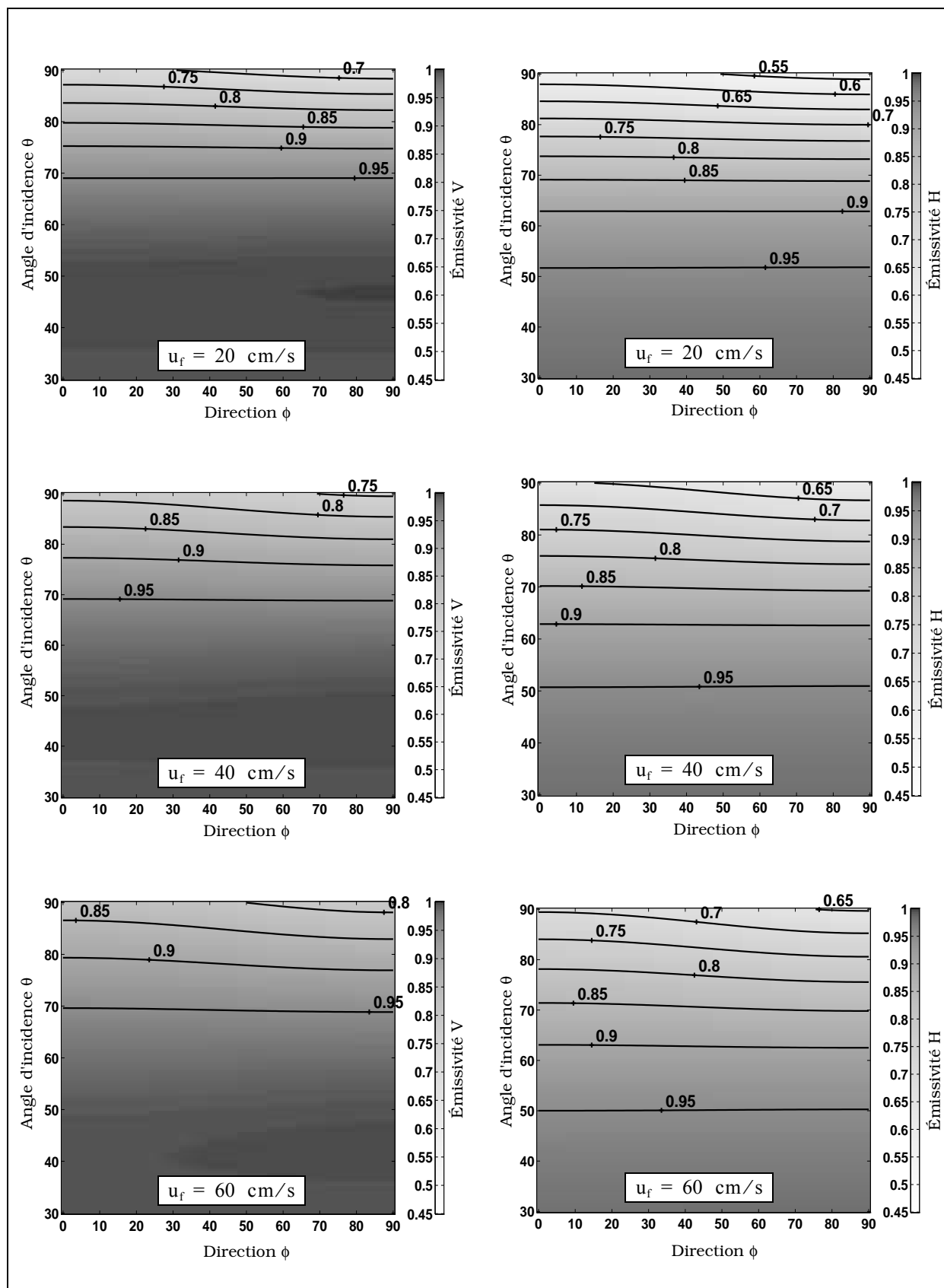
	$\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$			$\lambda \in [8;12] \mu\text{m}$		
	$\bar{\varepsilon}_i(0, 0)$	$\bar{\varepsilon}_i(90, 90)$	$\Delta\bar{\varepsilon}_i$	$\bar{\varepsilon}_i(0, 0)$	$\bar{\varepsilon}_i(90, 90)$	$\Delta\bar{\varepsilon}_i$
$u_f = 20$ cm/s	V : 0,996 H : 0,973	V : 0,666 H : 0,456	V : 0,330 H : 0,517	V : 0,998 H : 0,988	V : 0,672 H : 0,533	V : 0,326 H : 0,455
$u_f = 40$ cm/s	V : 0,994 H : 0,972	V : 0,739 H : 0,527	V : 0,255 H : 0,445	V : 0,997 H : 0,987	V : 0,744 H : 0,606	V : 0,253 H : 0,381
$u_f = 60$ cm/s	V : 0,993 H : 0,971	V : 0,776 H : 0,567	V : 0,216 H : 0,404	V : 0,996 H : 0,987	V : 0,780 H : 0,646	V : 0,216 H : 0,341

Tableau III.1 Valeurs particulières de l'émissivité

Sur le graphe III.5, sont tracées les mêmes courbes que celles du graphe III.4, mais les émissivités sont intégrées sur l'intervalle $[8;12]$ μm . Puisque l'indice moyen $|\bar{n}_2|_{\lambda \in [8;12]} = 1,21$ est plus petit que celui obtenu sur l'intervalle $[3;5]$ μm $|\bar{n}_2|_{\lambda \in [3;5]} = 1,37$, les émissivités du graphe III.5 sont plus grandes que celles du graphe III.4 (tableau III.1).



Graphe III.4 Emissivités verticale V et horizontale H non corrélées intégrées sur $\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$ en fonction des angles $\{\phi, \theta\}$, pour différentes vitesses de friction $u_f = \{20, 40, 60\}$ cm/s avec $T = 25^\circ\text{C}$



Graphe III.5 Emissivités verticale V et horizontale H non corrélées intégrées sur $\lambda \in [8;12]$ μm en fonction des angles $\{\phi, \theta\}$, pour différentes vitesses de friction $u_f = \{20, 40, 60\}$ cm/s avec $T = 25^\circ\text{C}$

III.3.3.4 Simulations de la température apparente

Physiquement la température apparente T_{ap} correspond à la température mesurée par la caméra infrarouge, et d'après Kirchhoff (équation (III.6)) elle est définie par :

$$L(\lambda, T_{ap}) = \varepsilon \cdot L(\lambda, T) \quad (III.27)$$

avec :

$$L(\lambda, T) = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad (III.27a)$$

où L désigne la luminance du corps noir (équation (III.4)), T la température du milieu en Kelvin, et λ la longueur d'onde. Donc :

$$T_{ap} = \frac{C_2}{\lambda} \frac{1}{\ln \left[\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 + \varepsilon \right) / \varepsilon \right]} \quad (III.27b)$$

Sur les graphes III.6 et graphe III.7, les températures apparentes intégrées $\{\overline{T}_{apV}, \overline{T}_{apH}\}$ sur $\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$ et $\lambda \in [8;12] \mu\text{m}$ (mesurées par la caméra infrarouge) définies dans les plans vertical V et horizontal H, sont représentées en fonction des angles $\{\phi, \theta\}$, et pour $u_f = \{40, 60\} \text{ cm/s}$ avec $T = 25^\circ\text{C}$.

Lorsque l'angle d'incidence θ et la vitesse du vent diminuent, les températures décroissent. Les variations $\Delta \overline{T}_{apH}$ de la température T_{apH} sont plus importantes que les variations $\Delta \overline{T}_{apV}$ obtenues avec T_{apV} (tableau III.2). Ceci montre que la composante horizontale H est plus sensible à la variation de l'émissivité.

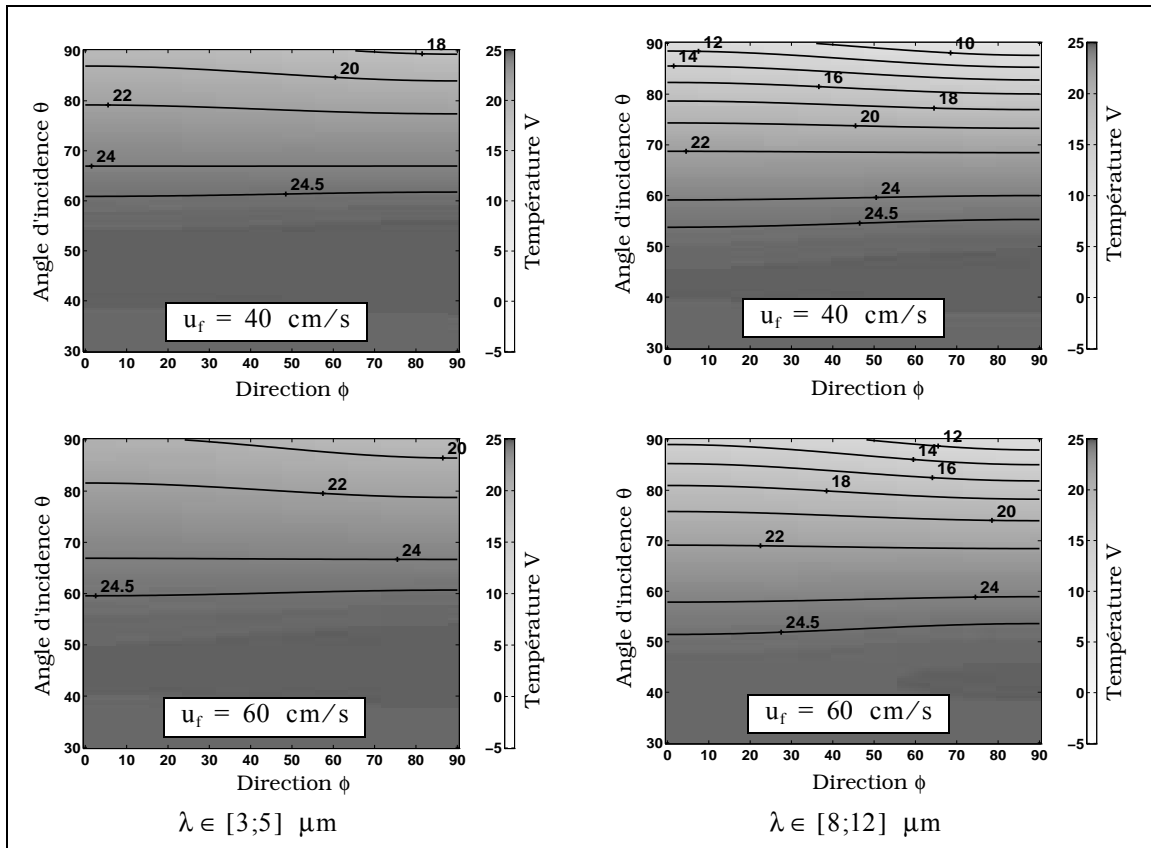
	$\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$			$\lambda \in [8;12] \mu\text{m}$		
	$\overline{T}_{api}(0, 0)$	$\overline{T}_{api}(90, 90)$	$\Delta \overline{T}_{api}$	$\overline{T}_{api}(0, 0)$	$\overline{T}_{api}(90, 90)$	$\Delta \overline{T}_{api}$
$u_f = 40 \text{ cm/s}$	V : 24,9 H : 24,0	V : 17,7 H : 10,1	V : 7,2 H : 13,9	V : 24,8 H : 23,8	V : 16,9 H : -2,7	V : 7,9 H : 26,5
$u_f = 60 \text{ cm/s}$	V : 24,8 H : 23,9	V : 18,9 H : 11,8	V : 5,9 H : 12,1	V : 24,7 H : 23,8	V : 14,3 H : 0,6	V : 10,4 H : 23,2

Tableau III.2 Valeurs particulières de la température apparente

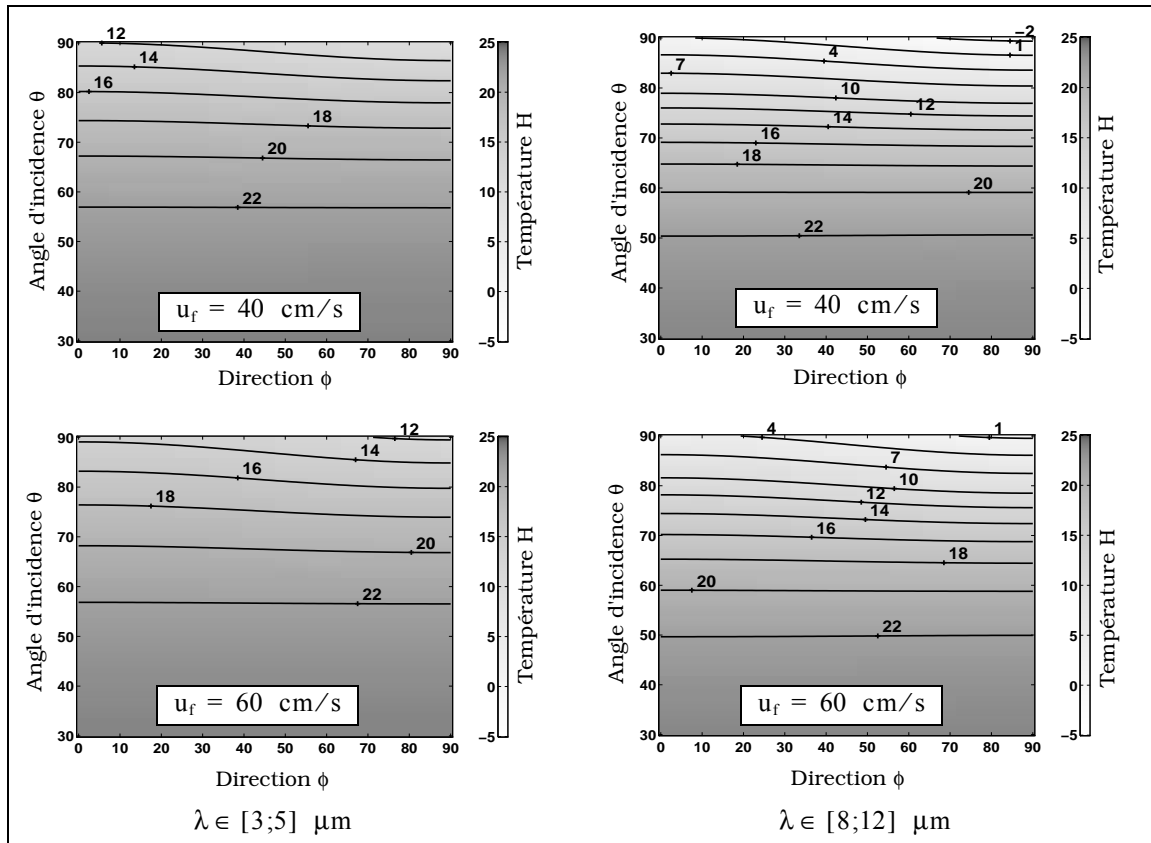
Selon le tableau III.1 et le tableau III.2, une petite variation $\Delta \varepsilon_i$ de l'émissivité peut engendrer une variation $\Delta \overline{T}_{api}$ importante de la température apparente, comme le montre le graphe III.8, où est représenté le rapport $\Delta \overline{T}_{ap} / \Delta \varepsilon$ en fonction de l'émissivité moyennée sur $\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$ et $\lambda \in [8;12] \mu\text{m}$. $\Delta \overline{T}_{ap} / \Delta \varepsilon$ est donné par :

$$\frac{\Delta T_{ap}}{\Delta \varepsilon} \approx \frac{dT_{ap}}{d\varepsilon} = \frac{C_2 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}{\varepsilon \lambda \ln \left(\frac{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 + \varepsilon \right)} \quad (III.27c)$$

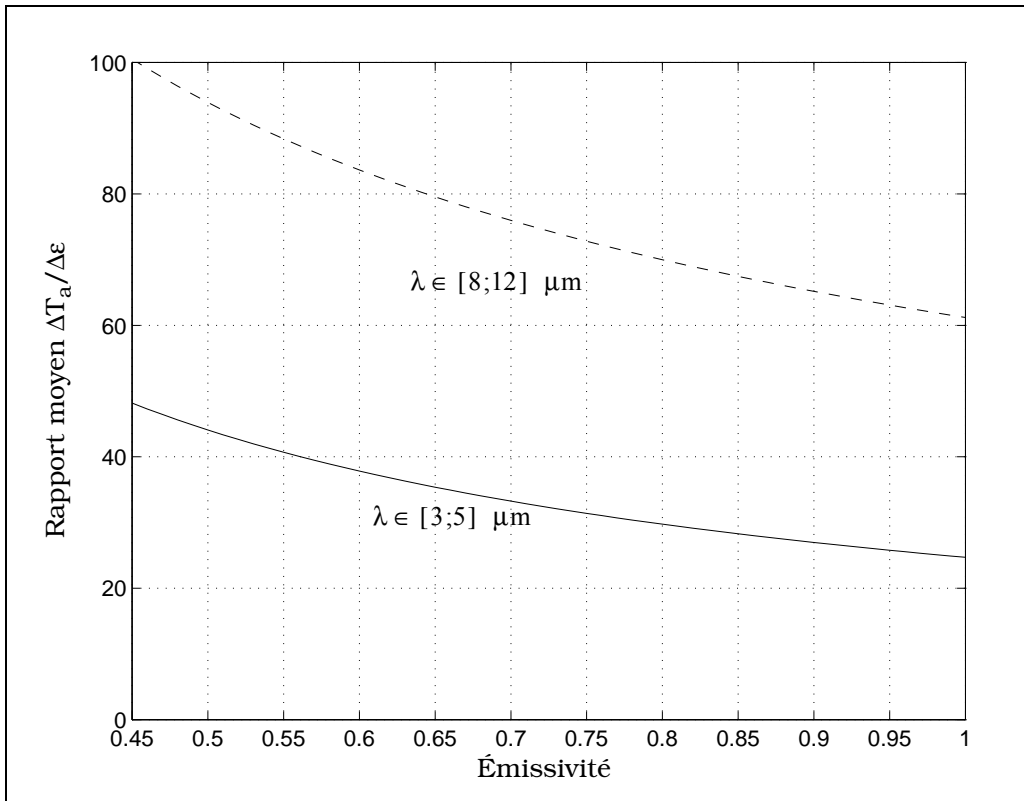
Puisque le rapport $\Delta T_{ap} / \Delta \varepsilon$ est inversement proportionnel à la longueur d'onde, les variations $\Delta \overline{T}_{ap} \approx 76$ sont plus importantes pour $\lambda \in [8;12] \mu\text{m}$, que pour $\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$ avec $\Delta \overline{T}_{ap} \approx 34$. Ceci se vérifie en comparant les tableaux III.1 et III.2.



Graph III.6 Température apparente verticale V décorrélée intégrée sur $\lambda \in [3;5]$ μm et $\lambda \in [8;12]$ μm , en fonction des angles $\{\phi, \theta\}$ pour $u_f = \{40, 60\}$ cm/s avec $T = 25^\circ\text{C}$

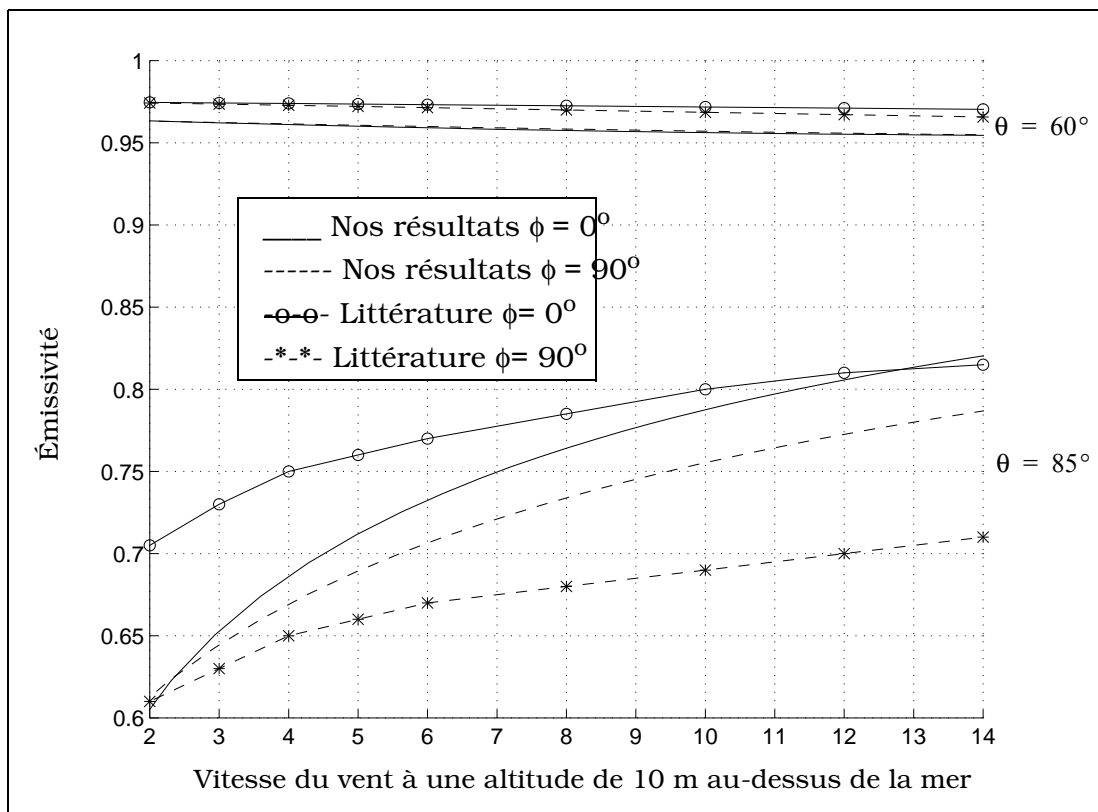


Graph III.7 Température apparente horizontale H décorrélée intégrée sur $\lambda \in [3;5]$ μm et $\lambda \in [8;12]$ μm , en fonction des angles $\{\phi, \theta\}$ pour $u_f = \{40, 60\}$ cm/s avec $T = 25^\circ\text{C}$



Graph III.8 Rapport $\overline{\Delta T_{ap}} / \Delta \epsilon$ en fonction de l'émissivité pour $\lambda \in [3;5] \mu\text{m}$ et $\lambda \in [8;12] \mu\text{m}$

Sur le graph III.9, l'émissivité $[\epsilon_v(\theta, \phi) + \epsilon_H(\theta, \phi)]/2$ déterminée pour $\phi = \{0, 90\}^\circ$ et $\theta = \{60, 85\}$ est comparée à celle obtenue dans l'article [39], en fonction de la vitesse du vent u_{10} définie à dix mètres au-dessus de la mer. L'indice de réfraction de la mer est égal à 1,19.



Graph III.9 Comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature

Entre leur modèle et le nôtre, il existe deux différences. Tout d'abord nous n'émettons aucune hypothèse sur les variances des pentes, tandis qu'ils négligent γ_y^2 devant $1 + \gamma_x^2$. Cette hypothèse leur permet d'utiliser la fonction d'ombre monodimensionnelle. Leur calcul des variances des pentes est obtenu à partir du modèle de gravité de JONSWAP alors que nous prenons le modèle de capillarité de Cox et Munk.

III.3.4 Émissivité de la mer obtenue avec la fonction d'ombre de Smith corrélée

Dans le chapitre II, la fonction d'ombre bidimensionnelle monostatique de Smith avec corrélation a été déterminée rigoureusement. Le but de ce paragraphe est de l'introduire dans la détermination de l'émissivité.

III.3.4.1 Calculs

Pour une longueur d'observation infinie ($y_{ob} \rightarrow \infty$), nous avons montré dans le chapitre II que la fonction d'ombre bidimensionnelle monostatique de Smith moyennée sur les hauteurs h_0 s'écrit :

$$S_s(\theta, \phi, \gamma_x) = \frac{\Upsilon(\mu - \gamma_x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\text{erfc}(h_0 + y_t \sqrt{2v})}{2} \right]^\Lambda \exp \left[-h_0^2 - L_C \int_0^{y_t} g_s(y, h_0, p_0, v) dy \right] dh_0 \quad (\text{III.28})$$

où $L \cdot g_s \cdot dy$ est la probabilité conditionnelle bidimensionnelle définie par l'équation (II.86) du chapitre II. La limite y_t est obtenue lorsque la corrélation est négligeable. Dans notre cas elle vaut 6. La variable p_0 (équation (II.25)) est définie par :

$$p_0 = v - \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}\sigma} = v - \frac{\gamma_x}{\sqrt{2}\sigma} = v - \gamma_x \sqrt{c} = v - v_x \quad (\text{III.28a})$$

En remplaçant l'équation (III.28) dans (III.22) et en effectuant le changement de variable (III.25a), nous montrons :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, \phi) &= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} \times \\ &\int_{-\infty}^{\mu \sqrt{c}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - r(|\phi|)]^2 e^{-v_x^2 - v_y^2 - \frac{2\beta \sin(2\phi)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \cos^2(2\phi)}} v_x v_y} \left(1 - \frac{v_x}{\sqrt{c}} \tan \theta \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} I(h_0) J(h_0, v_x) dh_0 \right] dv_x \right\} dv_y \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

avec :

$$I(h_0) = e^{-h_0^2} \left[1 - \frac{\text{erfc}(h_0 + y_t \sqrt{2v})}{2} \right]^\Lambda \quad J(h_0, v_x) = \exp \left[-L_C \int_0^{y_t} g_s(y, h_0, v_x, v) dy \right] \quad (\text{III.29a})$$

La détermination de l'émissivité bidimensionnelle avec corrélation nécessite donc quatre intégrations selon $\{y, v_x, h_0, v_y\}$.

III.3.4.2 Remarque

La corrélation est négligeable lorsque $y_t = 0$, d'où :

$$I(h_0) = e^{-h_0^2} [1 - \text{erfc}(h_0)/2]^\Lambda \quad J(h_0, v_x) = 1 \quad (\text{III.29b})$$

La fonction $J(h_0, v_x)$ devient alors indépendante de $\{h_0, v_x\}$, et l'intégration de $I(h_0)$ s'écrit :

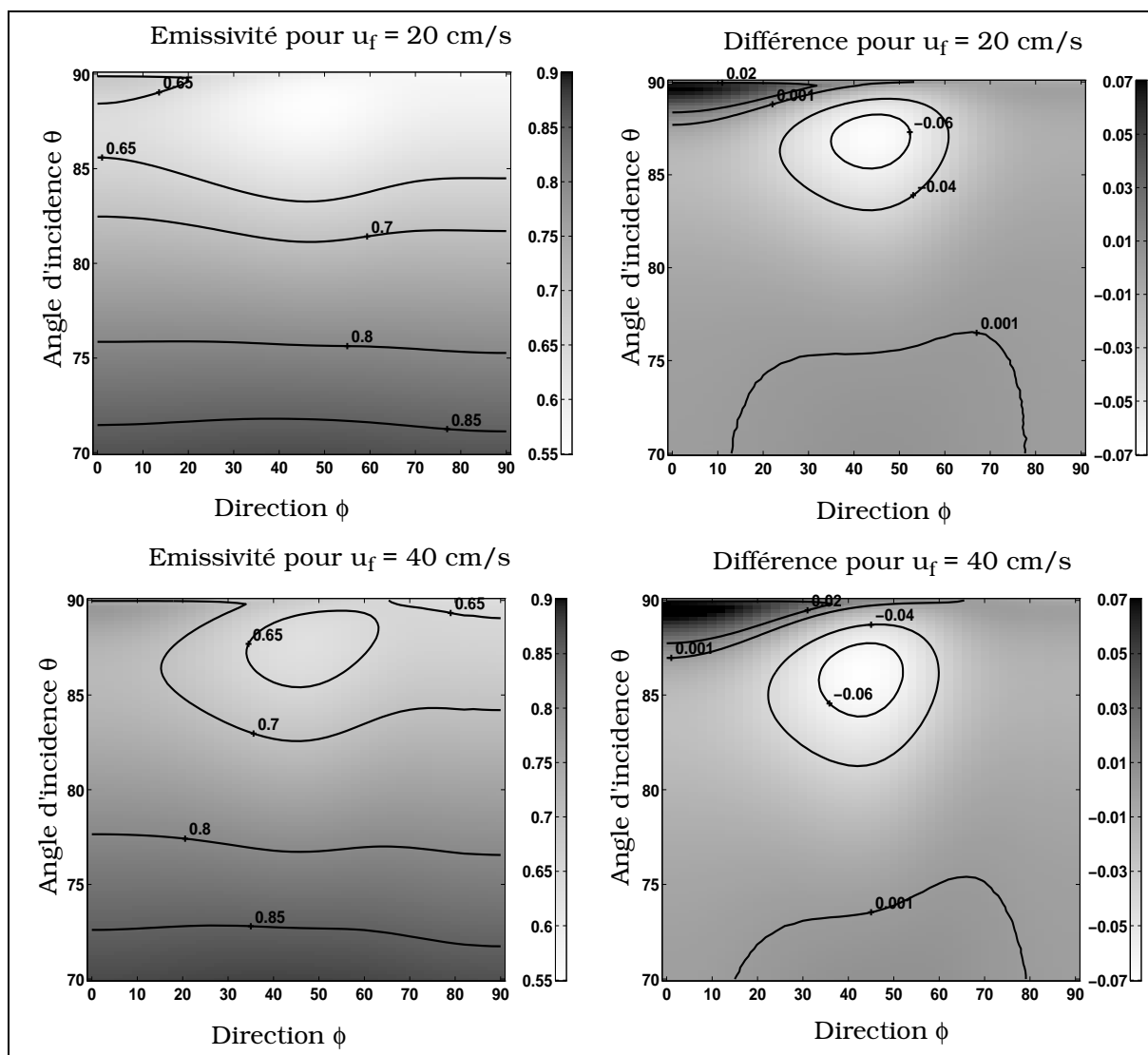
$$\int_{-\infty}^{\infty} I(h_0) dh_0 = \sqrt{\pi}/(\Lambda + 1) \quad (\text{III.29c})$$

En substituant alors les équations (III.29b) dans (III.29), l'expression (III.29) devient égale à (III.26).

III.3.4.3 Simulations

Sur la graphe III.10 l'émissivité $(\varepsilon_V + \varepsilon_H)/2$ et la différence entre les émissivités corrélée et décorrélée sont représentées en fonction de la direction ϕ et de l'angle d'incidence θ pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s et $\lambda = 4 \mu\text{m}$.

Sous incidences rasantes et au voisinage de $\phi = 45^\circ$, nous observons une diminution de l'émissivité, puis son rehaussement au voisinage de 90° . En effet sous ces angles, d'après les figures de droite, l'émissivité corrélée est sous-estimée (différence négative), puis surestimée au voisinage de 90° (différence positive). La corrélation devient négligeable d'après le tableau II.6, lorsque l'angle d'incidence $\theta < 75^\circ$ pour $u_f = 20$ cm/s et $\theta < 70^\circ$ pour $u_f = 40$ cm/s, et ainsi l'émissivité corrélée devient égale à l'émissivité décorrélée. Par conséquent l'apport de la corrélation provoque une discontinuité de l'émissivité, qui physiquement n'est pas observée.



Graphe III.10 A gauche, émissivité $(\varepsilon_V + \varepsilon_H)/2$ en fonction de la direction du vent ϕ , de l'angle d'incidence θ , pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s et $\lambda = 4 \mu\text{m}$. A droite, différence entre les émissivités corrélée et décorrélée en fonction de la direction du vent ϕ , de l'angle d'incidence θ , pour $u_f = \{20, 40\}$ cm/s et $\lambda = 4 \mu\text{m}$

III.3.5 Conclusion

Dans cette partie l'émissivité bidimensionnelle d'une surface stochastique a été modélisée pour un processus gaussien. Elle dépend des paramètres suivants :

- l'angle d'incidence θ , la direction par rapport au vent ϕ ,
- les variances des pentes $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ dans les directions du vent et transverse au vent,
- les coefficients de Fresnel $\{r_V, r_H\}$, qui dépendent de la polarisation et de l'indice de réfraction n_2 du milieu fonction de la température T et de la longueur d'onde λ .

Les simulations montrent que l'émissivité décorrélée de la mer augmente avec la vitesse du vent et la longueur d'onde, alors qu'elle diminue lorsque l'angle d'incidence et la direction par rapport au vent croissent. De plus elle varie légèrement avec la direction du vent, et elle est plus importante dans le plan H normal au plan d'incidence.

Les auteurs de l'article [39] supposent que la variance des pentes dans la direction transverse au vent est négligeable devant celle définie dans la direction du vent. Ceci implique que le problème devient monodimensionnel, ce qui permet d'utiliser la fonction d'ombre monodimensionnelle. Ces auteurs ont recours aux variances des pentes obtenues par le modèle de gravité de JONSWAP tandis que nous employons le modèle de capillarité de Cox et Munk. Sur le graphe III.9, notre modèle d'émissivité est comparé à celui calculé par [39].

Nous avons également comparé les émissivités corrélée et décorrélée obtenues avec la fonction d'ombre bidimensionnelle monostatique de Smith. On remarque alors, que les résultats corrélés n'ont pas de sens physique sous incidence rasante car la fonction d'ombre est surestimée. Cette remarque ne remet pas en cause le calcul de la fonction d'ombre bidimensionnelle corrélée, car cette surestimation provient du choix de la fonction d'autocorrélation. En effet dans le cas monodimensionnel, d'après les graphes II.6 et II.8, les fonctions d'ombre calculées avec des fonctions d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne peuvent être surestimées ou sous-estimées sous incidences rasantes (v faible). Dans le calcul de la réflectivité, la corrélation ne sera donc pas prise en compte.

III.4 RÉFLECTIVITÉ BIDIMENSIONNELLE D'UNE SURFACE ALÉATOIRE

En présence d'un fond thermique (nuages, ciel, ...), le rayonnement intrinsèque de la surface est perturbé par celui provenant du fond réfléchi sur la surface. La grandeur quantifiant ce phénomène est la réflectivité, égale au rapport de l'énergie réfléchie sur l'énergie incidente. Le modèle de réflectivité développé dans cette partie ne tient pas compte des réflexions multiples.

III.4.1 Réflectivité monodimensionnelle d'une surface rugueuse

Soit une source S_1 (figure III.8) émettant une luminance L_1 dans la direction d'incidence θ_1 , et L_2 la luminance réfléchie émanant de S_1 reçue par un capteur dans la direction spéculaire θ_2 . En appliquant le même raisonnement que lors du calcul de l'émissivité, la luminance réfléchie dans la direction θ_2 s'écrit :

$$L_2 = \int_{-\infty}^{\infty} L_1 \cdot |r(|\phi|)|^2 \cdot f'_N \cdot d\gamma \quad (\text{III.30})$$

avec :

$$f'_N = g(\theta_2, \gamma) S'(\theta_1, \theta_2, \gamma) p(\gamma) \quad (\text{III.30a})$$

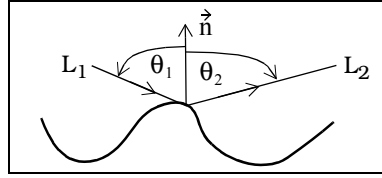


Figure III.8 Configuration monodimensionnelle du problème

où r sont les coefficients de Fresnel en polarisations horizontale H ou verticale V, g la fonction de normalisation, S' la fonction d'ombre bistatique, et p la distribution des pentes γ de la surface. Dans la direction spéculaire la luminance L_1 égale à $L_{10}\delta(\theta - \theta_1)$, où δ est la fonction de Dirac, d'où :

$$L_2 = \int_{-\infty}^{\infty} L_{10}\delta(\theta - \theta_1)|r(|\phi|)|^2 g(\theta_2, \gamma) S'(\theta_1, \theta_2, \gamma) p(\gamma) d\gamma \quad (\text{III.30b})$$

de plus (figure III.9) :

$$\begin{cases} \phi = -\chi - \theta_1 \\ \theta_1 = -\theta_2 - 2\chi \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

avec :

$$\chi = \text{atan} \gamma \quad (\text{III.31a})$$

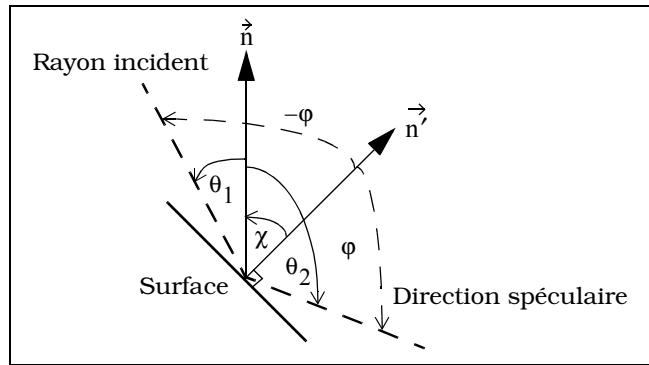


Figure III.9 Réflexion spéculaire

En substituant les équations (III.31) dans (III.30b), la réflectivité w s'écrit dans la direction spéculaire ($\theta = \theta_1$) :

$$w = \frac{L_2}{L_{10}} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-\theta_2 - \theta_1 - 2\chi) |r(|\chi + \theta_1|)|^2 g(\theta_2, \gamma) S'(\theta_1, \theta_2, \gamma) p(\gamma) d\gamma \quad (\text{III.32})$$

Soit en effectuant le changement de variable $\gamma = \tan \chi$:

$$w = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(-\theta_2 - \theta_1 - 2\chi) |r(|\chi + \theta_1|)|^2 g(\theta_2, \tan \chi) S'(\theta_1, \theta_2, \tan \chi) p(\tan \chi) \frac{d\chi}{\cos^2 \chi} \quad (\text{III.33})$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-2x - x_0) f(x) dx = \frac{1}{2} f\left(-\frac{x_0}{2}\right) \quad (\text{III.34})$$

Par conséquent la réflectivité ($x_0 = \theta_1 + \theta_2$) s'écrit pour un processus gaussien :

$$w(\theta_1, \theta_2, \sigma) = \exp\left(-\frac{\tan^2 \theta_m}{2\sigma^2}\right) \left| r\left(\frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}\right) \right|^2 \frac{(1 + \tan \theta_m \tan \theta_2) S'(\theta_1, \theta_2, -\tan \theta_m)}{2\sqrt{2\pi}\sigma \cos^2 \theta_m} \quad (\text{III.35})$$

avec :

$$\theta_m = (\theta_1 + \theta_2)/2 \quad (\text{III.35a})$$

où σ est l'écart type des pentes.

III.4.2 Réflectivité bidimensionnelle d'une surface rugueuse

Dans ce paragraphe la réflectivité bidimensionnelle scalaire est déterminée [39]. Contrairement à l'article [39] aucune hypothèse n'est mentionnée sur la distribution des pentes.

III.4.2.1 Géométrie du problème

Soit M un point de la surface définissant l'origine du repère cartésien (x, y, z) (figure III.10), \vec{n} le vecteur unitaire dans la direction z , \vec{n}' le vecteur unitaire normal à la facette en M, et $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ les vecteurs unitaires des directions d'observation de l'émetteur et du récepteur. L'ensemble de ces vecteurs s'écrit:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} \begin{bmatrix} -\gamma_x \\ -\gamma_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{1x} = \sin \theta_1 \cos \phi_1 \\ s_{1y} = \sin \theta_1 \sin \phi_1 \\ s_{1z} = \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad \vec{s}_2 = \begin{bmatrix} s_{2x} = \sin \theta_2 \cos \phi_2 \\ s_{2y} = \sin \theta_2 \sin \phi_2 \\ s_{2z} = \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

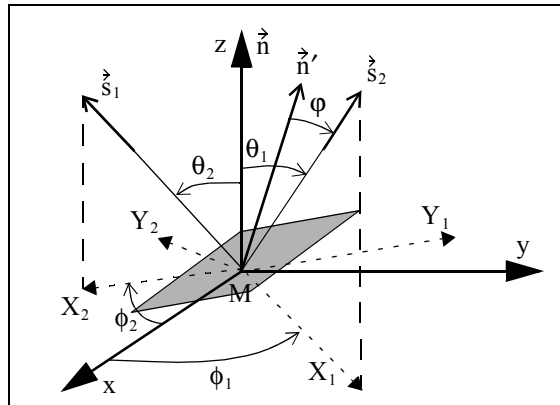


Figure III.10 Configuration bidimensionnelle

où $\{\gamma_x, \gamma_y\}$ sont les pentes de la surface dans les directions du vent et transverse au vent, $\{\theta_1, \theta_2\}$ désignent les angles d'incidence respectifs de l'émetteur et du récepteur, et $\{\phi_1, \phi_2\}$ sont leurs positions respectives en azimut par rapport à la direction du vent (M_x).

III.4.2.2 Détermination de la réflectivité

Le raisonnement est identique à celui exposé dans le cas monodimensionnel. Ainsi la réflectivité w s'écrit (généralisation de la relation (III.32)) :

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_1) \delta(\phi - \phi_1) \cdot |r(|\phi|)|^2 \cdot g \cdot S' \cdot p \cdot d\gamma_x d\gamma_y \quad (\text{III.37})$$

où g est la fonction de normalisation, r le coefficient de réflexion dans la direction $\varphi = (\vec{n}', \vec{s}_2)$, $S'(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \gamma_x, \gamma_y)$ la fonction d'ombre bistatique bidimensionnelle, et $p(\gamma_x, \gamma_y)$ la densité de probabilité des pentes $\{\gamma_x, \gamma_y\}$.

La condition de réflexion spéculaire est donnée par :

$$\vec{s}_1 = 2(\vec{n}' \cdot \vec{s}_2) \cdot \vec{n}' - \vec{s}_2 = 2 \cos(\varphi) \cdot \vec{n}' - \vec{s}_2 \quad (\text{III.38})$$

L'angle φ , et les composantes du vecteur \vec{s}_1 sont donc égaux à :

$$\cos \varphi = \vec{n}' \cdot \vec{s}_2 = \frac{\cos \theta_2 - \sin \theta_2 (\gamma_x \cos \phi_2 + \gamma_y \sin \phi_2)}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} \quad (\text{III.39})$$

et :

$$\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{1x} = - \left(\frac{2\gamma_x \cos \varphi}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} + \sin \theta_2 \cos \phi_2 \right) \\ s_{1y} = - \left(\frac{2\gamma_y \cos \varphi}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} + \sin \theta_2 \sin \phi_2 \right) \\ s_{1z} = \left(\frac{2 \cos \varphi}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2}} - \cos \theta_2 \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.39a})$$

La fonction de normalisation $g(\theta_2, \phi_2, \gamma_x, \gamma_y)$ s'écrit dans le cas bidimensionnel :

$$g = \frac{\vec{n}' \cdot \vec{s}_2}{(\vec{n} \cdot \vec{n}')(\vec{n} \cdot \vec{s}_2)} = \frac{\sqrt{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2} \cos[\varphi(\theta_2, \phi_2, \gamma_x, \gamma_y)]}{\cos \theta_2} \quad (\text{III.40})$$

En substituant les relations (III.39) et (III.39a) dans (III.36), les angles $\{\theta_1, \phi_1\}$ sont donc donnés par :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = s_{1z} = \frac{2[\cos \theta_2 - \sin \theta_2 (\gamma_x \cos \phi_2 + \gamma_y \sin \phi_2)]}{1 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2} - \cos \theta_2 \\ \tan \phi_1 = \frac{s_{1y}}{s_{1x}} = \frac{\gamma_y (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \sin \theta_2 \sin \phi_2}{\gamma_x (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \sin \theta_2 \cos \phi_2} \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

L'intégrale donnée par l'équation (III.37), est différente de zéro, pour :

$$\theta = \theta_1 \quad \text{et} \quad \phi = \phi_1 \quad (\text{III.42})$$

Il faut donc déterminer les valeurs de $\{\gamma_{x0}, \gamma_{y0}\}$ pour lesquelles les relations (III.42) sont vérifiées, c'est-à-dire résoudre le système (III.41) de deux équations à deux inconnues $\{\gamma_x, \gamma_y\}$. Ainsi on montre que la composante γ_{x0} est solution de l'équation du second degré suivante :

$$\gamma_{x0}^2 s_z^3 + \gamma_{x0} 2s_z^2 \sin \theta_2 \cos \phi_2 + s_z [(\sin \theta_2 \cos \phi_2)^2 - (\sin \theta_1 \cos \phi_1)^2] = 0 \quad (\text{III.43})$$

avec :

$$s_z = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \quad (\text{III.43a})$$

dont les solutions sont :

$$\gamma_{x0} = - \frac{\sin \theta_2 \cos \phi_2 \pm |\sin \theta_1 \cos \phi_1|}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} = - \frac{s_{2x} \pm |s_{1x}|}{s_{2z} + s_{1z}} \quad (\text{III.44})$$

En substituant l'équation (III.44) dans (III.41), la pente dans la direction transverse au vent s'exprime par :

$$\gamma_{y0} = - \frac{\sin \theta_2 \sin \phi_2 \pm |\sin \theta_1 \sin \phi_1|}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} = - \frac{s_{2y} \pm |s_{1y}|}{s_{2z} + s_{1z}} \quad (\text{III.45})$$

Pour un plan, c'est-à-dire lorsque $\{\gamma_{x0}, \gamma_{y0}\} = 0$, la réflexion spéculaire est obtenue pour :

$$\theta_2 = -\theta_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 = \phi_1 \quad (\text{III.46})$$

Cette relation implique donc :

$$\begin{cases} \gamma_{x0} = -\frac{\sin\theta_2 \cos\phi_2 + \sin\theta_1 \cos\phi_1}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} = -\frac{s_{2x} + s_{1x}}{s_{2z} + s_{1z}} \\ \gamma_{y0} = -\frac{\sin\theta_2 \sin\phi_2 + \sin\theta_1 \sin\phi_1}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} = -\frac{s_{2y} + s_{1y}}{s_{2z} + s_{1z}} \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

avec :

$$\begin{cases} \theta_1 \in [-\pi/2; \pi/2] \\ \phi_1 \in [0; \pi] \end{cases} \quad (\text{III.47a})$$

Par conséquent l'intégrale (III.37) s'écrit :

$$w(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) = |r(|\varphi(\theta_2, \phi_2, \gamma_{x0}, \gamma_{y0})|)|^2 \times g(\theta_2, \phi_2, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}) \times J \times S'(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}) \times p(\gamma_{x0}, \gamma_{y0}) \quad (\text{III.48})$$

où φ et g sont obtenus en substituant les relations (III.47) dans (III.39) et (III.40), soit :

$$\begin{cases} \cos\varphi|_{\gamma_{x0}, \gamma_{y0}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}{2}} \\ g|_{\gamma_{x0}, \gamma_{y0}} = \frac{1 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\cos\theta_2 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)} \end{cases} \quad (\text{III.48a})$$

J est le jacobien introduit par le changement de variables. Il est égal à :

$$J = \left| \frac{\partial\gamma_{x0}}{\partial\theta_1} \frac{\partial\gamma_{y0}}{\partial\phi_1} - \frac{\partial\gamma_{x0}}{\partial\phi_1} \frac{\partial\gamma_{y0}}{\partial\theta_1} \right| = \left| \frac{\sin\theta_1 [1 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]}{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^3} \right| \quad (\text{III.48b})$$

La densité de probabilité p s'écrit pour un processus gaussien :

$$p(\gamma_{x0}, \gamma_{y0}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{\gamma_{x0}^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\gamma_{y0}^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (\text{III.48c})$$

où $\{\sigma_x, \sigma_y\}$ sont l'écart type des pentes dans les directions du vent et transverse au vent. Ainsi l'ensemble des fonctions introduites dans la réflectivité sont exprimées selon les angles $\{\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2\}$.

III.4.2.3 Remarques

Lorsque $\phi_1 = \phi_2 = 0$, les expressions (III.47), (III.48a) et (III.48b) s'écrivent :

$$\begin{cases} \gamma_{x0} = -\frac{\sin\theta_2 + \sin\theta_1}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} = -\tan\theta_m = \tan\chi & \gamma_{y0} = 0 \\ \cos\varphi|_{\gamma_{x0}, \gamma_{y0}} = \left| \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right| \\ g|_{\gamma_{x0}, \gamma_{y0}} = 1 + \tan\theta_2 \tan\theta_m \\ J = \left| \frac{1}{2\cos^2\theta_m} \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \right| \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Ainsi les résultats monodimensionnels sont retrouvés, excepté le jacobien car :

$$\frac{\partial\gamma_{y0}}{\partial\phi_1} \Big|_{\phi_1=0} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \neq 1 \quad (\text{III.49a})$$

D'après l'expression (III.48), la réflectivité dépend de la fonction d'ombre bidimensionnelle, bistatique, c'est l'objet de la partie suivante.

III.4.2.4 Fonction d'ombre bidimensionnelle de Smith sans corrélation

Nous avons montré que la fonction d'ombre $S'(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \gamma_{x0}, \gamma_{y0})$ bidimensionnelle, bivariate, décorrélée, moyennée sur les hauteurs s'écrit (annexe 5) :

$$S_S(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \gamma_{x0}, \gamma_{y0}) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1} & \text{si } \begin{cases} \theta_1 \in [-\pi/2; 0] \\ \gamma_{x1,0} \in [-|\mu_1|; 0] \\ \gamma_{x2,0} \in [0; \mu_2] \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\Lambda_2 + 1} & \text{si } \begin{cases} \theta_1 \in [0; \theta_2] \\ \gamma_{x2,0} \leq \mu_2 \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\Lambda_1 + 1} & \text{si } \begin{cases} \theta_1 \in [\theta_2; \pi/2] \\ \gamma_{x1,0} \geq -|\mu_1| \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

avec :

$$\begin{cases} \mu_i = \cot(|\theta_i|) & v_i = \frac{\mu_i}{\sqrt{2}\sigma_i} & i = \{1, 2\} \\ \Lambda_i = \left[e^{-v_i^2} - v_i \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(v_i) \right] / (2v_i \sqrt{\pi}) \end{cases} \quad (\text{III.50a})$$

où μ_i représentent les pentes des faisceaux incident et réfléchi, $\{\gamma_{x1,0}, \gamma_{x2,0}\}$ désignent les pentes de la surface vues par l'émetteur et le récepteur (directions (MX_1) et (MX_2) de la figure III.10). Elles sont définies par :

$$\begin{cases} \gamma_{x1,0} = \gamma_{x0} \cos \phi_1 + \gamma_{y0} \sin \phi_1 = -\frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} \\ \gamma_{x2,0} = \gamma_{x0} \cos \phi_2 + \gamma_{y0} \sin \phi_2 = -\frac{\sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} \end{cases} \quad (\text{III.50b})$$

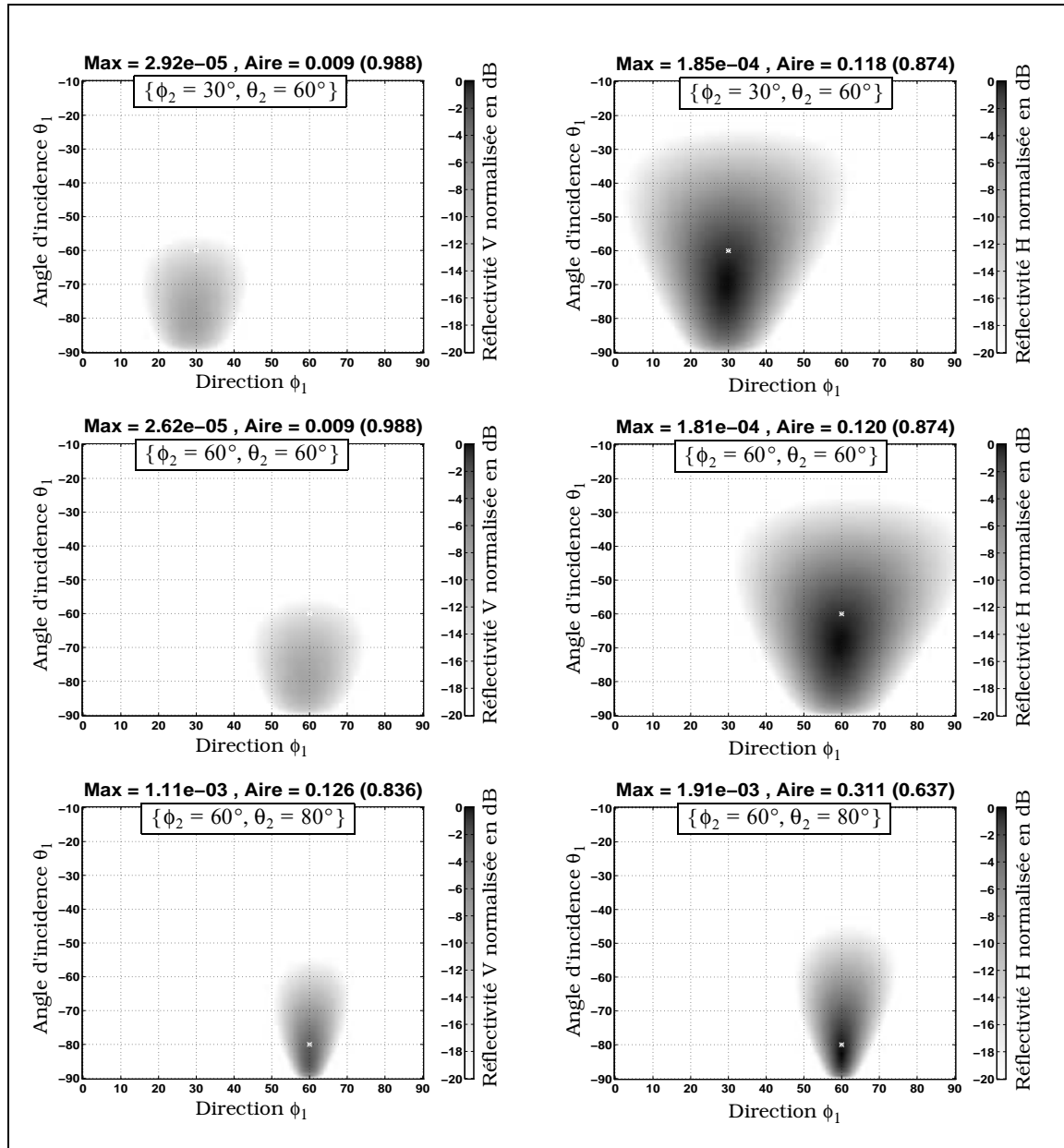
III.4.2.5 Simulations

Sur le graphe III.11, les réflectivités verticale w_V et horizontale w_H normalisées par le maximum de la réflectivité verticale sont tracées en dB ($10 \log[w_{V,H} / \max(w_H)]$), en fonction des angles $\{\phi_1, \theta_1\}$ définissant la position de l'émetteur, pour différentes positions $\{\phi_2, \theta_2\}$ du récepteur. La vitesse de friction u_f est égale à 20 cm/s, la longueur λ d'onde vaut 4 μm . L'indice de mer n_2 est défini dans le paragraphe III.2.2.6 à la température $T = 25^\circ\text{C}$.

On observe que la réflectivité est maximale autour de la direction spéculaire de coordonnées $\{\theta_1 = -\theta_2, \phi_1 = \phi_2\}$. D'après les quatre figures du haut, le maximum Max varie peu avec la direction ϕ_2 , mais comme le montre les quatre figures du bas, il augmente fortement lorsque l'angle d'incidence θ_2 croît, avec une diminution du lobe. Néanmoins ce maximum est très faible devant l'unité, ce qui implique que le phénomène de réflexions multiples est négligeable.

D'après les valeurs du maximum Max et de la réflectivité hémisphérique w_{hem} (notée aire sur le graphe III.11) définie par :

$$w_{\text{hem},V,H} = \int_{\theta_1 = -\pi/2}^{\theta_1 = \pi/2} d\theta_1 \left[\int_{\phi_1 = 0}^{\phi_1 = \pi} w_{V,H}(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) d\phi_1 \right] \quad (\text{III.51})$$

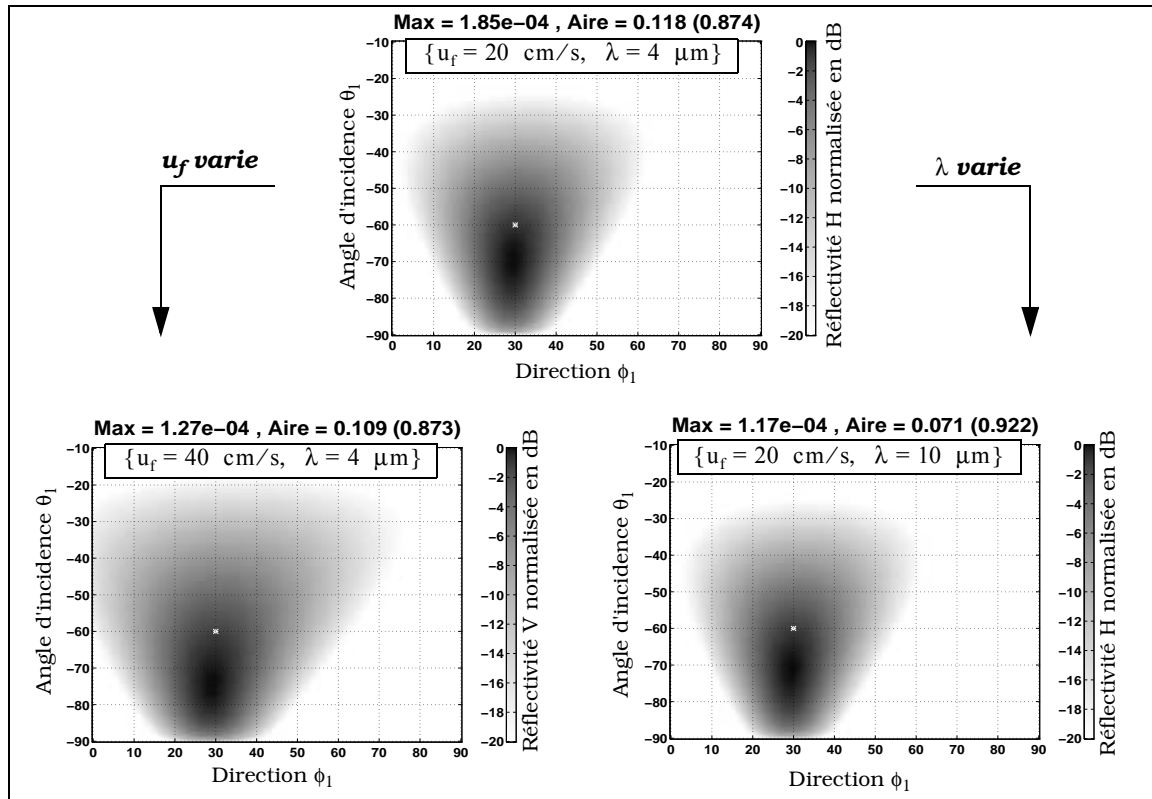


Graphe III.11 Réflectivités bidimensionnelles verticale V et horizontale normalisée par le maximum de la réflectivité V , en fonction de la direction de l'émetteur par rapport au vent ϕ_1 et de son angle d'incidence θ_1 avec $\{u_r = 20 \text{ cm/s}, \lambda = 4 \text{ }\mu\text{m}, T = 25^\circ\text{C}\}$

la réflectivité horizontale H est supérieure à celle définie dans le plan vertical V . Enfin on note que lorsque l'émissivité (donnée entre parenthèses au-dessus des figures) augmente, l'aire diminue car $\varepsilon_{V,H} + \text{aire}_{V,H} \approx \text{cste}$ (cette remarque sera vérifiée dans le paragraphe III.5.4).

Sur le graphe III.12, la réflectivité horizontale w_H normalisée par son maximum est tracée en dB ($10\log[w_{V,H}/\max(w_H)]$), en fonction des angles $\{\phi_1, \theta_1\}$ définissant la position de l'émetteur, pour une position du récepteur $\{\phi_2 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ\}$ fixe, avec $u_r = \{20, 40\}$ cm/s et $\lambda = \{4, 10\}$ μm pour $T = 25^\circ\text{C}$.

On observe que la réflectivité est inversement proportionnelle à la longueur d'onde, car l'indice de réfraction de la mer diminue lorsque la longueur d'onde augmente (graphe III.3). Pour une surface de mer plus agitée, c'est-à-dire lorsque la vitesse du vent croît, la réflectivité diminue mais la largeur du lobe augmente. On note également que les variations de l'émissivité et de la réflectivité sont antagonistes.



Graph III.12 Réflectivité bidimensionnelle horizontale H normalisée par son maximum, en fonction de la direction de l'émetteur par rapport au vent ϕ_1 et de son angle d'incidence θ_1 avec $\{\phi_2 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ, T = 25^\circ\text{C}\}$

III.4.3 Conclusion

Dans cette partie la réflectivité bidimensionnelle d'une surface aléatoire d'un processus gaussien a été modélisée en fonction des positions de l'émetteur et du récepteur. Notre modèle est basé sur l'article [39], mais contrairement à ces auteurs aucune hypothèse n'est faite sur le comportement des pentes.

Les simulations ont montré que la réflectivité horizontale H est plus importante que la réflectivité verticale V , et que pour chacune d'elles son maximum est au voisinage de la direction spéculaire donnée pour un plan. De plus elles diminuent lorsque la longueur d'onde et la vitesse du vent augmentent, et lorsque l'angle d'incidence de l'observateur diminue. La largeur du lobe observée augmente lorsque la vitesse du vent croît car la surface paraît plus rugueuse, et tend vers un Dirac pour des angles d'incidence rasantes du récepteur. La réflectivité étant très petite devant l'unité, le phénomène de réflexions multiples peut être négligé.

Enfin nous avons remarqué que la réflectivité hémisphérique et l'émissivité sont antagonistes.

III.5 MODÉLISATION D'UNE SCÈNE THERMIQUE MARINE

L'émissivité d'un corps correspond à son rayonnement intrinsèque. La réflectivité, pour une position de l'émetteur et du récepteur fixes, représente le pourcentage du rayonnement ambiant réfléchi sur le corps. La réflectivité hémisphérique, pour une position du récepteur donné, est égale au rayonnement réfléchi par le corps pour des positions de l'émetteur couvrant tout le demi-espace situé au-dessus de l'objet. Le but de cette partie est d'introduire l'ensemble de ces paramètres, en tenant compte de la transmission atmosphérique, afin de quantifier le signal thermique émis par la mer et mesuré par la caméra infrarouge.

Dans le premier paragraphe, nous donnerons l'expression du signal thermique mesuré par la caméra infrarouge. Dans le second paragraphe, le coefficient de transmission atmosphérique est étudié, afin de simuler une scène thermique dans le dernier paragraphe.

Le but de cette partie est de donner une application de l'émissivité et de la réflectivité de la mer, et non pas de décrire avec précision le rayonnement atmosphérique, qui est très complexe à quantifier.

III.5.1 Expression du signal reçu

En considérant le rayonnement atmosphérique, la luminance l_r reçue par le récepteur [41] est donnée par (figure III.11) :

$$l_r = (l_h + l) + l_a - \alpha_a(l_h + l) \quad (\text{III.52})$$

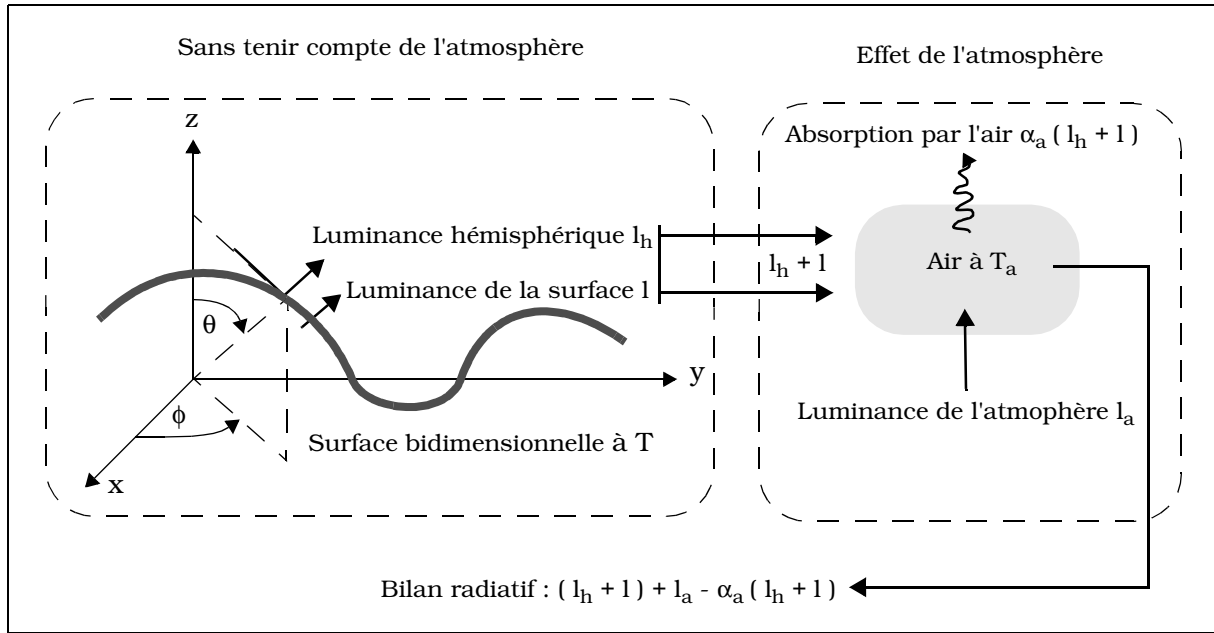


Figure III.11 *Bilan radiatif*

où l_h est la luminance hémisphérique de l'atmosphère sur la mer, elle s'exprime en appliquant la relation (III.4) de Kirchhoff :

$$l_h(\lambda, T_a) = w_{\text{hem}} L(\lambda, T_a) = L(\lambda, T_a) \int_{\theta_1 = -\pi/2}^{\theta_1 = \pi/2} d\theta_1 \left[\int_{\phi_1 = 0}^{\phi_1 = \pi} w(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) d\phi_1 \right] \Bigg|_{\substack{\theta_2 = \theta \\ \phi_2 = \phi}} \quad (\text{III.52a})$$

où $L(\lambda, T_a)$ est la luminance du corps noir (équation (III.4) à la température atmosphérique T_a de la surface, et w_{hem} est la réflectivité hémisphérique de la mer (relation (III.51)). Afin d'alléger la notation les dépendances en $\{\theta, \phi\}$ sont omises.

l est la luminance de la surface qui s'exprime par :

$$l(\lambda, T) = \varepsilon \cdot L(\lambda, T) \quad (\text{III.52b})$$

où ε est l'émissivité de la surface. l_a est la luminance de l'atmosphère à la température T_a donnée par :

$$l_a(\lambda, T_a) = \varepsilon_a \cdot L(\lambda, T_a) = (1 - \tau_a) \cdot L(\lambda, T_a) \quad (\text{III.52c})$$

où ε_a est l'émissivité de l'air égale à $1 - \tau_a$, où τ_a est le coefficient de transmission atmosphérique. Ainsi l'équation (III.52) devient :

$$I_r(\lambda, T) = \tau_a \varepsilon L(\lambda, T) + L(\lambda, T_a) [1 - \tau_a (1 - w_{\text{hem}})] \quad (\text{III.53})$$

L'expression du signal reçu montre que le rayonnement intrinsèque de la surface est perturbé à la fois, par le rayonnement réfléchi sur la surface caractérisé par w_{hem} , et par le rayonnement intrinsèque de l'atmosphère quantifié par $1 - \tau_a$.

III.5.2 Approche qualitative de la transmission atmosphérique

Selon l'équation (III.53), la luminance reçue par le récepteur $I_r(\lambda, T)$ est fonction entre autre du coefficient de transmission atmosphérique τ_a . Le but de ce paragraphe est de quantifier cette grandeur [34].

La transmission du rayonnement optique à travers l'atmosphère est régie principalement par les deux phénomènes suivants :

- l'absorption propre par les constituants gazeux de l'atmosphère,
- l'absorption par diffusion due à la présence des particules qu'elle contient, molécules ou aérosols.

III.5.2.1 Absorption par les constituants gazeux

Les constituants gazeux de l'atmosphère donnant des absorptions notables pour le rayonnement infrarouge sont essentiellement la vapeur d'eau (H_2O), et le dioxyde de carbone (CO_2).

La figure III.12 [34] donne un profil de transmission spectrale atmosphérique dans des conditions météorologiques données.

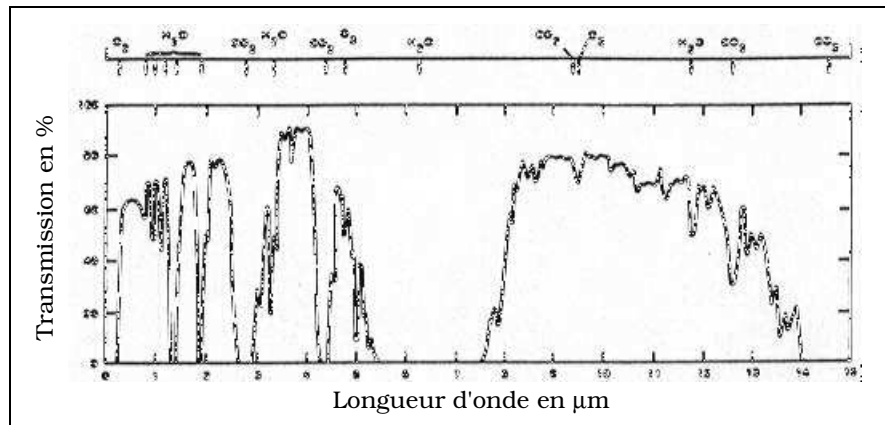


Figure III.12 Transmission atmosphérique en fonction de la longueur d'onde

On observe que les principales bandes d'absorption dues à la vapeur d'eau, sont situées vers $1,3 \mu\text{m}$, $1,9 \mu\text{m}$, $3,2 \mu\text{m}$, entre $5,5$ et $7,5 \mu\text{m}$, elles donnent une absorption pratiquement totale du rayonnement sur une longueur inférieure à 100 mètres. Le dioxyde de carbone quant à lui, présente des bandes d'absorption situées vers $2,9 \mu\text{m}$, $4,2 \mu\text{m}$ et au delà de $14 \mu\text{m}$.

Il convient de noter un point très important pour les applications pratiques, c'est l'existence d'un certain nombre d'intervalles transparents, ou «fenêtres de transmission», c'est-à-dire de bandes spectrales à l'intérieur desquelles l'absorption est très faible, comme par exemples les bandes $[3,5] \mu\text{m}$ et $[8;12] \mu\text{m}$.

En négligeant l'absorption des autres gaz, le coefficient de transmission moléculaire global τ_m résulte du produit des coefficients relatifs à la vapeur d'eau $\tau_{\text{H}_2\text{O}}$ et au dioxyde de carbone τ_{CO_2} , soit :

$$\tau_m = \tau_{H_2O} \times \tau_{CO_2} \quad (III.54)$$

Il existe de nombreux modèles pour déterminer ce coefficient. Par exemple le modèle LOWTRAN [34] est le mieux adapté pour traiter l'influence de l'absorption atmosphérique sur l'imagerie thermique. Il est basé sur la détermination d'une formule empirique, établie à partir de valeurs expérimentales.

III.5.2.2 La diffusion

La diffusion par les particules contenues dans l'atmosphère crée une absorption qui se superpose à celle des gaz. Les particules, en général des gouttelettes d'eau, sont considérées comme sphériques. Suivant leur dimension on peut établir la classification suivante :

- Aérosols : particules très petites en suspension dans l'atmosphère.
- Brumes : constituées à l'origine de poussières macroscopiques (0,5 μm) : ces particules, dans les régions humides, fixent des molécules d'eau par condensation et peuvent ainsi s'accroître en volume.
- Brouillards : lorsque les particules constitutives des brumes deviennent des gouttelettes ou des cristaux de glace, il s'agit de brouillard. Les nuages présentent une telle structure.
- Précipitations : il s'agit de gouttes d'eau dont les dimensions sont de l'ordre de 0,25 mm.

Le facteur de transmission global τ_a , défini pour une distance parcourue D, est composé alors de deux termes, d'une part du coefficient d'absorption moléculaire τ_m , et d'autre part, du coefficient de diffusion τ_d , d'où :

$$\tau_a = \tau_m \times \tau_d \quad (III.55)$$

III.5.3 Approche quantitative de la transmission atmosphérique

En substituant l'équation (III.54) dans (III.55), le coefficient de transmission atmosphérique global s'écrit :

$$\tau_a = \tau_{H_2O} \times \tau_{CO_2} \times \tau_d \quad (III.56)$$

Ce paragraphe décrit une méthode qui permet de comprendre comment il est possible de déterminer ce coefficient à partir du relevé de quelques paramètres météorologiques simples :

- température de l'air,
- humidité relative,
- visibilité.

Ce modèle exposé dans [34] couvre un domaine spectral qui s'étend de 0,3 à 13,9 μm , avec une résolution de $\Delta\lambda = 0,1 \mu\text{m}$. Bien qu'imparfait, il donne des résultats jugés corrects.

III.5.3.1 Coefficient de transmission de la vapeur d'eau τ_{H_2O}

L'absorption par la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère est conditionnée par :

- Le nombre de molécules absorbantes, qui dépend de la pression partielle de la vapeur d'eau, et de la distance D parcourue par le rayonnement dans le milieu absorbant. Ce concept est souvent traduit par la hauteur d'eau précipitable sur le parcours D, définie comme la hauteur h du cylindre de section S, et dont le volume est celui du liquide obtenu par condensation de la vapeur d'eau contenue dans le cylindre d'atmosphère de section S et de longueur D (figure III.13).

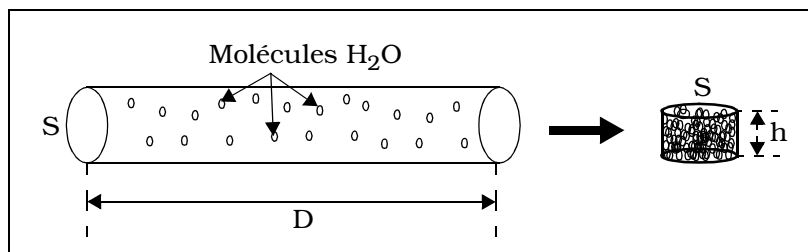
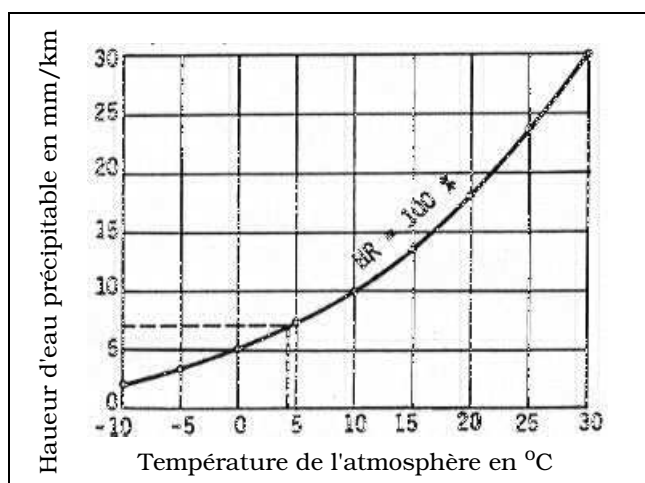


Figure III.13 Définition de la hauteur d'eau précipitable

- La nature des transitions moléculaires, responsable du spectre d'absorption.
- La température et la pression totale du mélange gazeux.

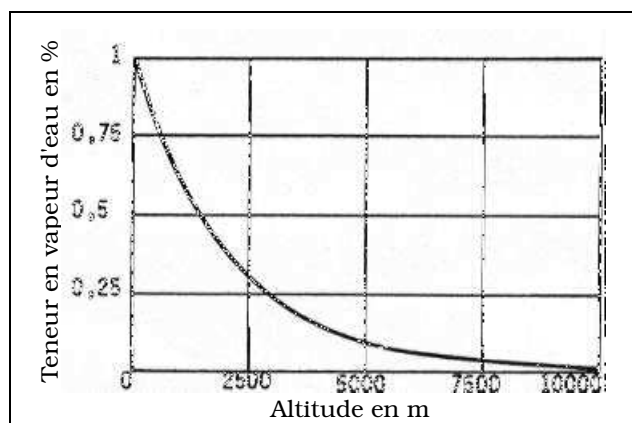
Il existe une relation entre la hauteur d'eau précipitable h , la température T_a de l'atmosphère et l'humidité relative H_R . Elle est représentée sur le graphe III.13. pour un parcours de 1 km.



Graphe III.13 Hauteur h d'eau précipitable en fonction de la température T_a de l'atmosphère pour un taux $H_R = 100\%$ d'humidité saturée.

Pour une atmosphère d'humidité relative H_R donnée, il suffit de multiplier l'ordonnée de la courbe par H_R . Par exemple pour $H_R = 80\%$, à une température $T_a = 10^\circ\text{C}$, $h = 8$ mm par km d'atmosphère.

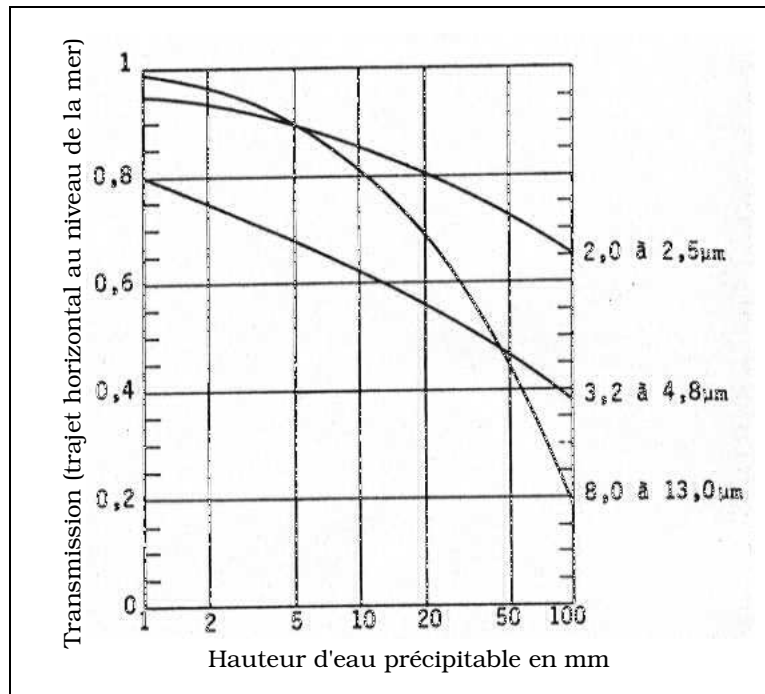
En altitude, on observe un rétrécissement des bandes spectrales d'absorption dû à la diminution de la pression, ce qui a pour effet d'améliorer la transmission, d'autant que la teneur en vapeur d'eau diminue avec l'altitude (graphe III.14).



Graphe III.14 Teneur en vapeur d'eau en fonction de l'altitude, pour un taux d'humidité au sol de 100%.

Pour une humidité relative H_R au sol donnée, il suffit de multiplier l'ordonnée de la courbe par H_R .

Dans la pratique il est souvent intéressant de connaître la transmission globale des «fenêtres» atmosphériques comme le montre le graphe III.15.



Graphe III.15 transmission globale des «fenêtres» atmosphériques

III.5.3.2 Coefficient de transmission du dioxyde de carbone τ_{CO_2}

La concentration en gaz carbonique dans l'atmosphère ne dépend pratiquement que de la pression, à l'altitude zéro ce paramètre peut être considéré comme constant. Le facteur de transmission du gaz carbonique τ_{CO_2} sera donc fonction uniquement de la distance parcourue D .

Les tables de PASSMAN et LARMORE [34] fournissent ces valeurs pour un trajet horizontal au niveau de la mer. Elles donnent également τ_{H_2O} .

III.5.3.3 Coefficient de transmission de la diffusion τ_d

En considérant une tranche d'atmosphère d'épaisseur D , le coefficient de transmission dû à la diffusion s'exprime par :

$$\tau_d = \exp(-\nu_d D) \quad (III.57)$$

où ν_d est le coefficient de diffusion proportionnel à la longueur d'onde λ , soit :

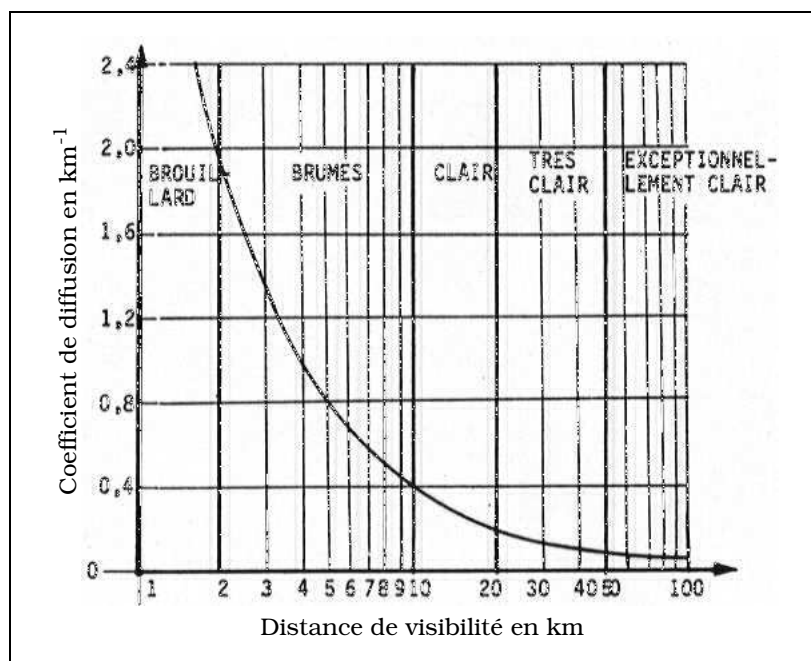
$$\nu_d = f(\lambda^{-a}) \quad (III.58)$$

Lorsque les particules sont petites devant la longueur d'onde, il s'agit de la diffusion Rayleigh avec $a = 4$. Ce phénomène existe même en atmosphère très claire, expliquant la couleur bleue du ciel par diffusion Rayleigh de la lumière solaire sur les molécules gazeuses de l'atmosphère.

Pour les brumes, les mesures de a donnent une valeur de 1,3. A noter que c'est une valeur empirique qui concorde bien avec l'expérience.

Dans le cas des brouillards, les particules deviennent plus grandes et a tend vers zéro, il s'agit de la diffusion de Mie pour laquelle ν_d est indépendant de la longueur d'onde. Les brouillards les plus fréquents sont tels que $a = 0$, et présentent une couleur blanche due à cette diffusion non sélective.

Il est assez facile d'évaluer le coefficient de diffusion ν_{dV} dans le visible ($\lambda_V = 0,6 \mu\text{m}$) à partir de la distance de visibilité D_V qui exprime les conditions de visibilité de l'atmosphère (graphe III.16).



Grphe III.16 Coefficient de diffusion ν_{dV} dans le visible en fonction de la distance de visibilité D_V

Connaissant le coefficient de diffusion ν_{dV} à la longueur d'onde λ_V , le coefficient de diffusion en infrarouge ν_{dIR} à λ_{IR} se calcule en utilisant la propriété (III.58), alors :

$$\nu_{dIR} = \nu_V \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_{IR}} \right)^a \tag{III.59}$$

Les gouttes de pluie sont de dimensions grandes devant la longueur d'onde et $a = 0$, ce qui donne une diffusion non sélective. Le coefficient de diffusion par la pluie peut se calculer par la formule de Middleton :

$$\nu_p = 1,25 \times 10^{-6} \cdot \frac{Z}{r^3} \tag{III.60}$$

avec ν_p en cm^{-1} , Z la hauteur d'eau en cm précipitée par seconde, r le rayon des gouttes en cm. Le tableau III.3 donne la valeur de ν_p pour différentes pluies avec $r = 0,1 \text{ cm}$.

Conditions	Pluviométrie (littérature) (cm/heure)	Pluviométrie (cm/s)	ν_p en km^{-1}
Pluie fine	0,25	$6,94 \times 10^{-5}$	0,009
Pluie moyenne	1,25	$3,47 \times 10^{-4}$	0,043
Pluie forte	2,5	$6,94 \times 10^{-4}$	0,087
Pluie très forte	10	$2,78 \times 10^{-3}$	0,347

Tableau III.3 Coefficient de diffusion pour différentes conditions de pluie

III.5.3.4 Exemples

Afin d'appliquer les résultats précédents, un exemple est traité, pour une longueur d'onde de 4 μm . Les conditions d'observation sont les suivantes :

- température de la mer : $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$,
- température de l'atmosphère à $H = 200 \text{ m}$ d'altitude : $T_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$,
- taux d'humidité de l'atmosphère $H_R = 60 \%$,
- distance de visibilité $D_V = 10 \text{ km}$ correspondant d'après le graphe III.16 à un temps clair-brumeux.

Selon le graphe III.13 la hauteur précipitable est de $h = 18 \times 0,6 = 10,8 \text{ mm/km}$ pour $T_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, soit pour un trajet $D = H = 200 \text{ m}$, $h = 2,16 \text{ mm}$. En se rapportant aux tables de TAYLOR et LARMORE [34] nous obtenons les coefficients de transmission moléculaire suivants :

$$\tau_{\text{H}_2\text{O}} = 0,986 \quad \tau_{\text{CO}_2} = 0,997 \quad \tau_m = \tau_{\text{H}_2\text{O}} \times \tau_{\text{CO}_2} = 0,983$$

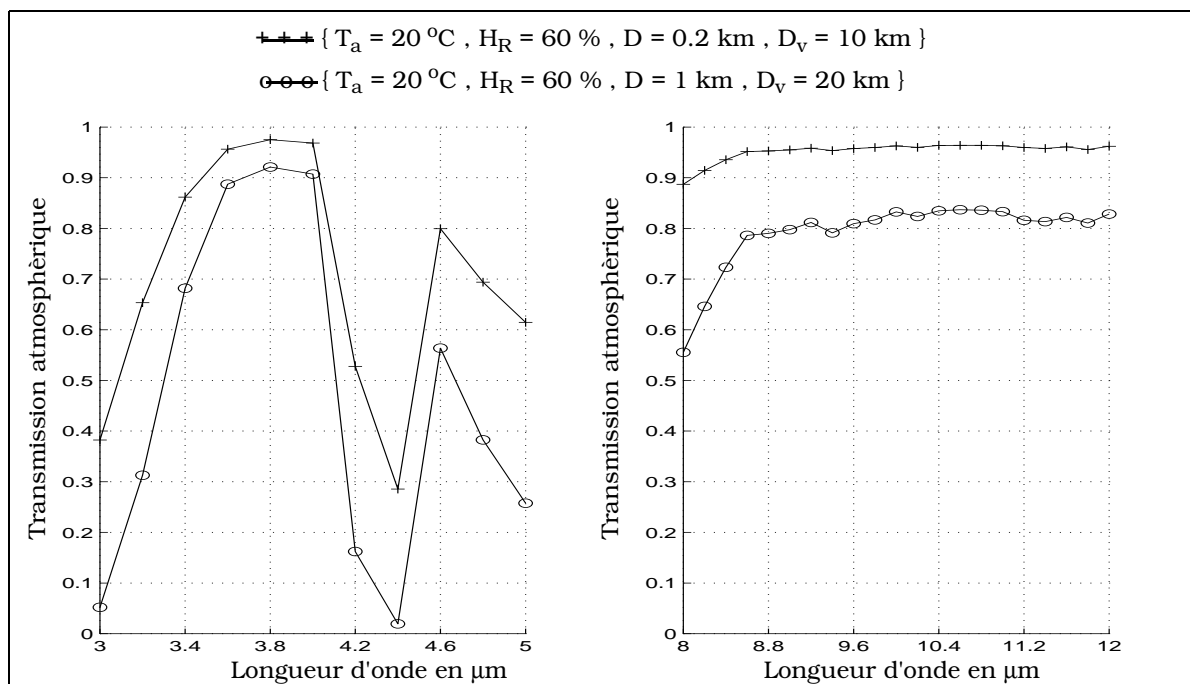
Pour une distance de visibilité de 10 km, d'après le graphe III.16, le coefficient de diffusion ν_d vaut $0,4 \text{ km}^{-1}$ pour une longueur d'onde $\lambda = 0,6 \text{ } \mu\text{m}$. En utilisant la relation (III.59) avec $a = 1,3$ nous obtenons :

$$\nu_d = 0,033 \text{ km}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \tau_d = \exp(-\nu_d D) = 0,993$$

En considérant une pluie moyenne et d'après le tableau III.3, le coefficient de diffusion dû à la pluie vaut 0,043, soit $\tau_p = \exp(-\nu_p D) = 0,991$. Le coefficient de transmission global τ_a est donc :

$$\tau_a = \tau_{\text{H}_2\text{O}} \times \tau_{\text{CO}_2} \times \tau_d \times \tau_p = 0,968$$

Sur le graphe III.17 le coefficient de transmission τ_a est tracé en fonction de la longueur d'onde dans les fenêtres de transparence [3,5] μm et [8;12] μm par pas de 0.2 μm . Les courbes en croix correspondent aux conditions météorologiques définies précédemment, et celles en cercles sont données pour $\{D_V = 20 \text{ km}, D = 1 \text{ km}\}$.



Graph III.17 Coefficient de transmission atmosphérique global en fonction de la longueur d'onde pour des conditions météorologiques données

On observe que dans des conditions plus défavorables, le coefficient de transmission global de l'atmosphère diminue.

III.5.4 Simulations

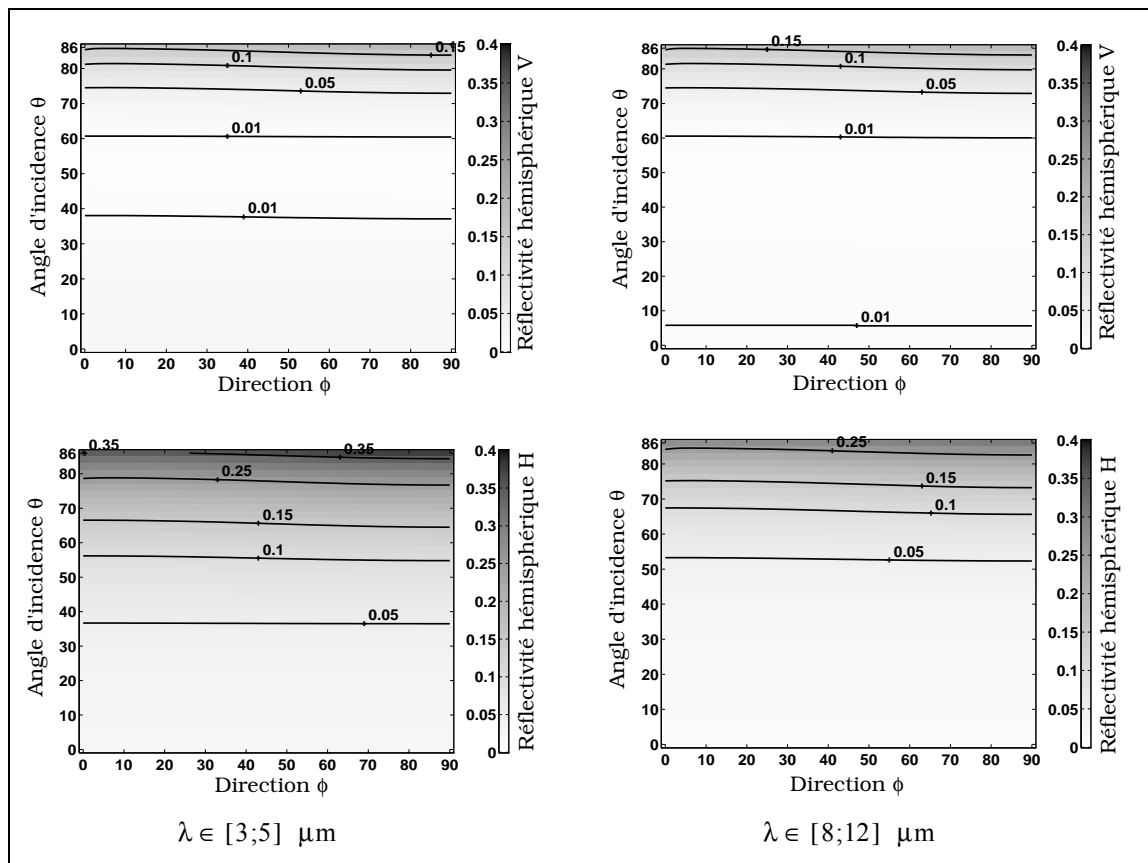
Ce paragraphe simule les différentes composantes de l'équation (III.53) :

$$I_r(\lambda, T) = \tau_a \varepsilon L(\lambda, T) + L(\lambda, T_a) [1 - \tau_a (1 - w_{\text{hem}})] \quad (\text{III.61})$$

Sur le graphe III.18, les variations des réflectivités hémisphériques verticale V $\bar{w}_{V\text{hem}}$ et horizontale H $\bar{w}_{H\text{hem}}$, intégrées sur les fenêtres de transparence [3,5] et [8;12] μm par pas de 0.2 μm , sont représentées en fonction de l'angle d'incidence θ , de la direction ϕ par rapport au vent, pour $u_f = 40 \text{ cm/s}$. Elles s'écrivent mathématiquement :

$$\bar{w}_{V,H\text{hem}} = \int w_{V,H\text{hem}} d\lambda \quad (\text{III.61a})$$

Contrairement aux émissivités V et H (graphes III.4 et III.5), on observe que les réflectivités hémisphériques sont proportionnelles à l'angle d'incidence. Au voisinage de l'angle de Brewster défini par $\theta_B = \text{atan}(|n_2|/n_1) = \{54, 51\}^\circ$ pour $\lambda \in [3;5]$ et $\lambda \in [8;12]$ μm , la réflectivité hémisphérique en polarisation verticale est très faible.



Graphe III.18 *Réflectivités hémisphériques verticale V et horizontale H intégrées sur [3,5] et [8;12] μm , en fonction de l'angle d'incidence θ , de la direction ϕ par rapport au vent, pour $u_f = 40 \text{ cm/s}$*

Si on souhaite annuler le rayonnement dû à la réflectivité, il faut choisir des angles d'incidences proches de la normale, travailler au voisinage de l'angle de Brewster en polarisation verticale, et choisir l'intervalle [8;12].

L'équation (III.61) peut s'écrire :

$$I_r = I_1 + I_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_1 = \varepsilon L(\lambda, T) \tau_a \\ I_2 = L(\lambda, T_a) [1 - \tau_a (1 - w_{\text{hem}})] \end{cases} \quad (\text{III.61b})$$

I_1 correspond au rayonnement intrinsèque de la surface de la mer à travers l'atmosphère, et I_2 est le rayonnement global dû à l'atmosphère qui est le rayonnement perturbateur. Le but des simulations est d'évaluer le contraste C_1 entre le rayonnement intrinsèque de la surface I_1 , et le rayonnement perturbateur I_2 . Il s'écrit :

$$C_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \quad (\text{III.62})$$

Le contraste intégré sur la longueur d'onde devient donc :

$$\bar{C}_1 = \frac{\int I_1 d\lambda - \int I_2 d\lambda}{\int I_1 d\lambda + \int I_2 d\lambda} \neq \int C_1 d\lambda \quad (\text{III.63})$$

Les coefficients de transmission atmosphérique utilisés sont ceux calculés dans le paragraphe précédent pour $\{H = 200 \text{ m}, D_v = 10 \text{ km}\}$ et $\{H = 1000 \text{ m}, D_v = 20 \text{ km}\}$ (graphe III.17). On suppose qu'ils sont isotropes, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants de l'angle d'incidence θ et de la direction par rapport au vent ϕ . A noter que $D = H / \cos \theta$ (figure III.14).

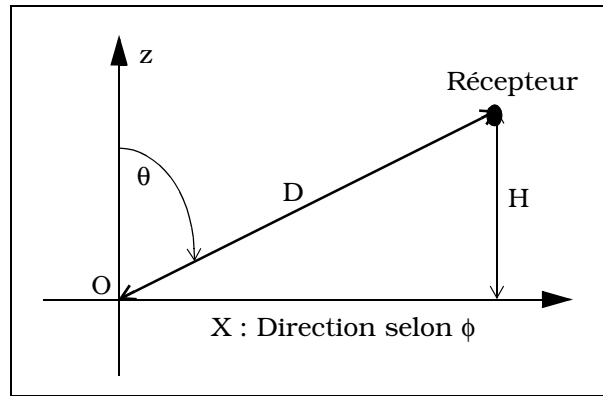


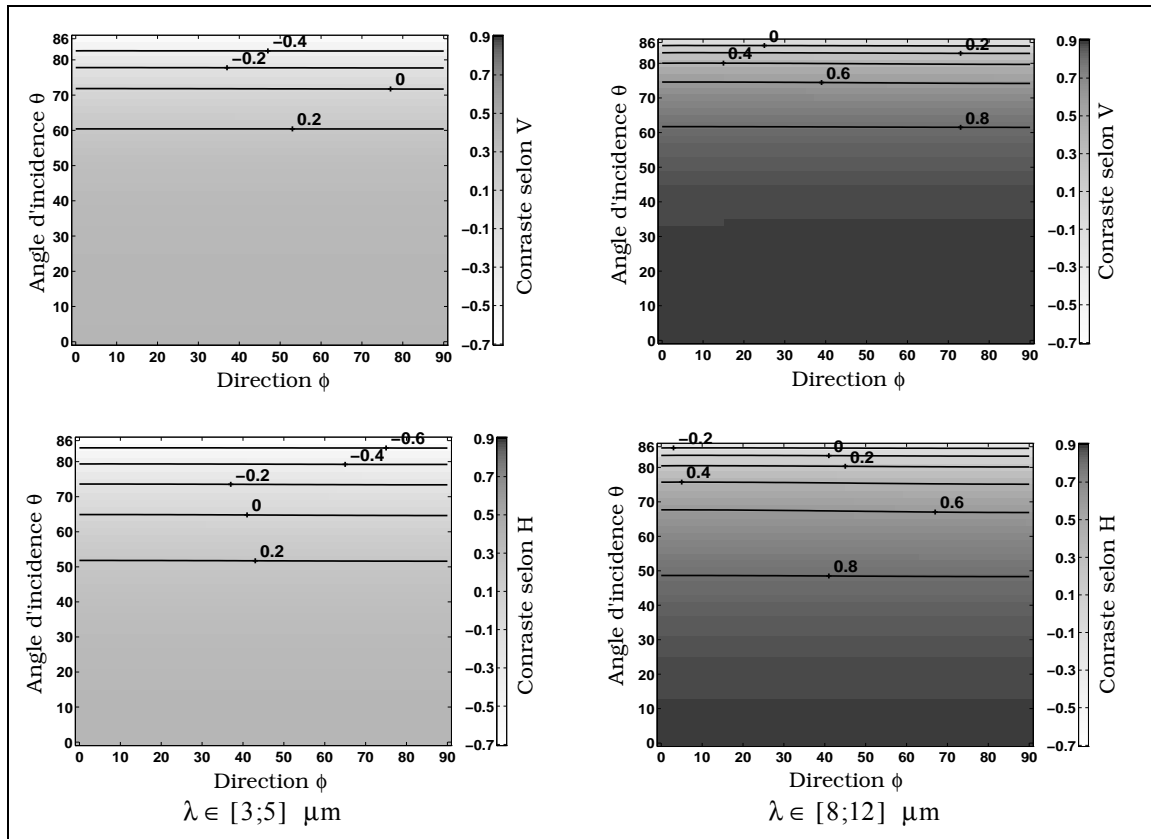
Figure III.14 Relation entre la hauteur H et la distance parcourue D

Sur le graphe III.19, les contrastes vertical $V \bar{C}_{V1}$ et horizontal $H \bar{C}_{H1}$ intégrés sur $[3,5]$ et $[8;12]$ μm par pas de $0,2 \mu\text{m}$, sont tracés en fonction des angles $\{\theta, \phi\}$, pour $\{u_r = 40 \text{ cm/s}, D_v = 10 \text{ km}, H = 0,2 \text{ km}\}$.

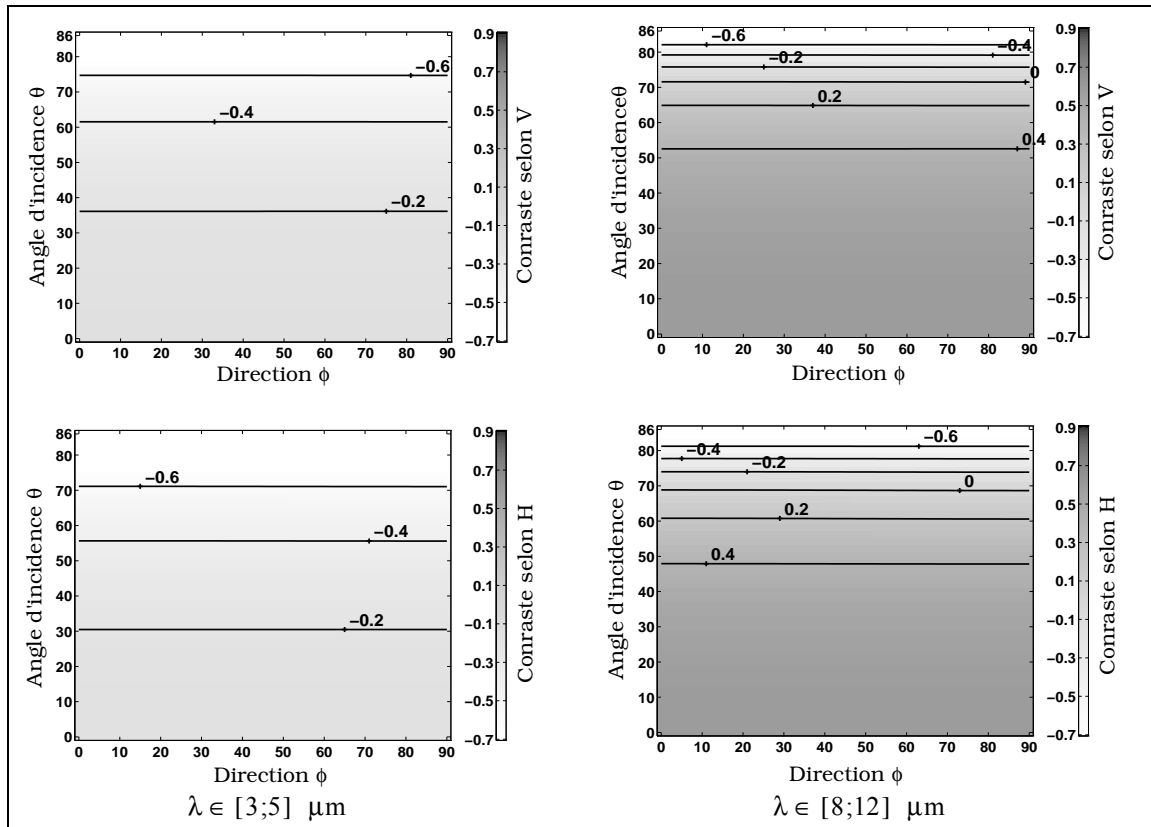
On observe que le contraste diminue avec l'angle d'incidence car le rayonnement perturbateur croît, et qu'il est plus important en polarisation verticale. De plus, selon la fenêtre de transparence, le contraste est plus faible sur $[8;12] \mu\text{m}$.

Sur le graphe III.20, sont représentées les mêmes courbes que celles du graphe III.19, mais $\{D_v = 20 \text{ km}, H = 1 \text{ km}\}$. On observe que les contrastes sont plus faibles que ceux obtenus avec $\{D_v = 10 \text{ km}, D = 0,2 \text{ km}\}$, car les conditions de transmission sont plus défavorables.

Pour favoriser le rayonnement intrinsèque de la surface, il est donc conseillé de choisir la composante verticale, et la fenêtre de transparence $[8;12] \mu\text{m}$.



Graph III.19 Contrastes vertical V et horizontal H intégrés sur $[3,5]$ et $[8;12] \mu\text{m}$, en fonction de l'angle d'incidence θ , de la direction ϕ par rapport au vent pour $\{u_f = 40 \text{ cm/s}, D_v = 10 \text{ km}, H = 0,2 \text{ km}\}$



Graph III.20 Contrastes vertical V et horizontal H intégrés sur $[3,5]$ et $[8;12] \mu\text{m}$, en fonction de l'angle d'incidence θ , de la direction ϕ par rapport au vent pour $\{u_f = 40 \text{ cm/s}, D_v = 20 \text{ km}, H = 1 \text{ km}\}$

III.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre les émissivités corrélée et décorrélée d'une surface stochastique bidimensionnelle, ont été déterminées pour un processus gaussien. Elles dépendent pour une surface océanique des paramètres suivants :

- L'angle d'incidence θ .
- La direction ϕ par rapport au vent.
- Les variances des pentes $\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ définies respectivement dans les directions du vent et transverse au vent.
- Les coefficients de Fresnel $\{r_V, r_H\}$ en polarisation verticale V et horizontale H, fonctions de l'indice de réfraction de la mer n_2 , qui dépend de la température T et de la longueur d'onde λ .

L'effet de la corrélation sous des incidences rasantes provoque une surestimation de l'émissivité, qui physiquement est impossible. Par conséquent nous avons conservé uniquement le modèle de l'émissivité sans corrélation.

En raison de l'absorption atmosphérique, les fenêtres infrarouge étudiées sont [3;5] μm et [8;12] μm , où l'indice de réfraction de l'eau varie globalement entre 1,1 et 1,5, et dont la partie imaginaire est faible. A noter que l'effet de la salinité de la mer n'est pas pris en compte.

La réflectivité décorrélée a été également déterminée en fonction des précédents paramètres. Elle dépend notamment de la position de l'émetteur caractérisée par les angles $\{\theta_1, \phi_1\}$ et du récepteur dont la position est repérée par les angles $\{\theta_2, \phi_2\}$. Le modèle présenté néglige les réflexions multiples; les résultats obtenus valident cette hypothèse.

Les modèles d'émissivité et de réflectivité sont basés sur l'article [39], mais contrairement à ces auteurs nous ne supposons aucune hypothèse sur le comportement des pentes. En effet ils supposent que la variance des pentes dans la direction du vent est très supérieure à celle définie dans la direction transverse au vent. Cette hypothèse leur permet alors d'utiliser la fonction d'ombre monostatique monodimensionnelle pour le calcul de l'émissivité, et la fonction d'ombre bistatique monodimensionnelle pour l'évaluation de la réflectivité. Nos modèles quant à eux, introduisent les fonctions d'ombre monostatique et bistatique bidimensionnelles établies dans le second chapitre.

Les simulations montrent que l'émissivité et la réflectivité ont des variations antagonistes. L'émissivité est notamment une fonction croissante avec la vitesse du vent, et la longueur d'onde, alors qu'elle décroît avec l'angle d'incidence et la direction par rapport au vent. A noter qu'elle est peu sensible à la direction par rapport au vent. Selon la polarisation, l'émissivité est plus importante en polarisation verticale, tandis que la réflectivité est plus faible, et peut devenir négligeable au voisinage de l'angle de Brewster.

A partir de ces deux grandeurs, une scène thermique a été simulée en présence de l'atmosphère dans des conditions météorologiques données qui sont :

- taux d'humidité relatif de l'atmosphère H_R ,
- température de l'atmosphère T_a ,
- distance de visibilité D_V .

Puis pour une longueur d'onde donnée, le coefficient global de la transmission atmosphérique supposé isotrope est estimé [34], et ainsi en effectuant un bilan radiatif, le contraste entre le rayonnement global et le rayonnement de la surface est déterminé.

Les simulations montrent que le rayonnement intrinsèque de la surface est maximum sous des incidences proches de la normale ou proches de l'angle de Brewster, en polarisation verticale.

CONCLUSION - PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce mémoire a porté sur l'étude de la signature infrarouge d'une surface aléatoire bidimensionnelle supposée ergodique et stationnaire du second ordre, dont la distribution statistique des pentes est gaussienne, en présence d'un fond thermique, comme par exemple l'atmosphère.

La résolution de ce problème demande la connaissance de trois principaux facteurs :

- l'émissivité, correspondant au rayonnement intrinsèque de la surface,
- la réflectivité, définie comme le pourcentage de la puissance réfléchiée par la surface,
- le rayonnement du fond thermique.

Les résultats ont été ensuite appliqués à la mer.

Le modèle obtenu est basé sur la loi de Kirchhoff donnant l'émissivité d'une surface plane. De plus la longueur d'onde étant très inférieure au rayon de courbure moyen de la surface, la diffusion est négligeable, ce qui implique que toute l'énergie est contenue dans la composante spéculaire, donnée par la théorie de l'optique géométrique. La réflectivité est calculée sans tenir compte des réflexions multiples.

La première originalité de cette thèse repose sur les modélisations des fonctions d'ombre monostatique (émetteur et récepteur confondus) et bistatique (récepteur et émetteur distincts), égales au rapport de la surface illuminée sur la surface totale. C'est un paramètre pertinent dans les déterminations de l'émissivité et de la réflectivité.

L'effet de l'ombre par une surface aléatoire a été estimé pour la première fois en 1967 par Wagner [22] et Smith [23]-[24] en émettant les hypothèses suivantes : la surface est considérée monodimensionnelle, la longueur d'observation est infinie, la densité de probabilité conjointe des pentes et des hauteurs de la surface est prise gaussienne et décorrélée. De plus Ricciardi et Sato [27]-[28] ont montré que la fonction d'ombre s'exprime rigoureusement à partir de la série de Rice. On observe alors que Wagner, ne conserve que la premier terme de la série, alors que Smith reprend le formalisme de Wagner en y introduisant une fonction de normalisation.

Nous avons donc tout d'abord, dans le cas d'une surface monodimensionnelle, généralisé les résultats monostatiques de Smith et de Wagner en considérant un processus quelconque mais décorrélé.

Les résultats décorrélés classiques de Smith et de Wagner n'étant pas assez précis, nous avons introduit la corrélation, en considérant un processus gaussien corrélé (la formulation de Ricciardi-Sato avec corrélation n'a pas été étudiée car elle est trop complexe). Ainsi nous avons exprimé analytiquement les fonctions d'ombre monostatique et bistatique monodimensionnelles corrélées de Smith et de Wagner, pour une fonction d'autocorrélation quelconque et pour une longueur d'observation donnée. Des simulations sur des fonctions d'autocorrélation gaussienne et lorentzienne ont montré que les résultats corrélés sont meilleurs que ceux décorrélés, et deviennent identiques lorsque l'angle d'incidence est inférieur à $\theta_c = \text{atan}(0,5/\sigma)$, où σ est l'écart type des pentes.

La mer étant une surface bidimensionnelle, les fonctions d'ombre monodimensionnelles de Smith et de Wagner, pour des processus gaussiens décorrélés et corrélés, ont été étendues en configuration bidimensionnelle, en tenant compte de la deuxième dimension, correspondant à la direction par rapport au vent. Les résultats ont été appliqués sur une surface de mer dont la fonction d'autocorrélation a été également rigoureusement modélisée à partir du spectre de Elfouhaily [11], alors que la variance des pentes de la surface est évaluée avec le modèle de Cox et Munk [20].

La seconde originalité du travail présenté dans cette thèse repose sur les calculs de l'émissivité et de la réflectivité d'une surface aléatoire bidimensionnelle. Les fonctions d'ombre bidimensionnelles monostatique et bistatique n'étant pas modélisées rigoureusement, les articles récents [15], [39] étaient dans l'obligation d'effectuer une hypothèse sur le comportement des pentes. Par conséquent ces modèles ont été repris en éliminant cette hypothèse par introduction des fonctions d'ombre bidimensionnelles décorrélée d'une part, et corrélée d'autre part. La figure synthétise l'originalité des travaux réalisés dans les chapitres II et III.

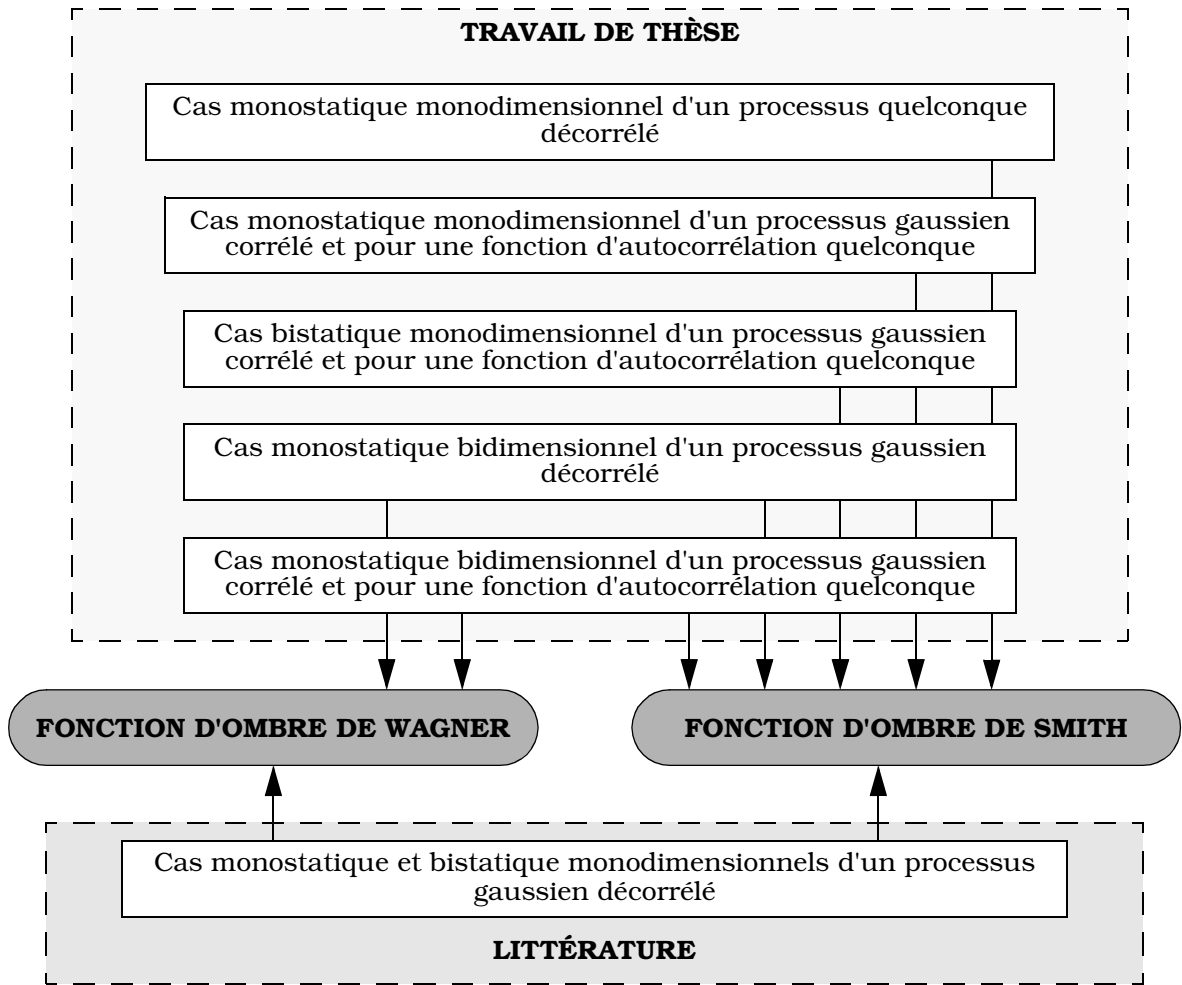
Des simulations réalisées sur une surface de mer, ont montré que l'émissivité corrélée présente une incohérence physique sous incidences rasantes, tandis qu'elle devient identique à l'émissivité décorrélée au-dessous d'un angle d'incidence critique. Cette incohérence physique provient de la surestimation de la fonction d'ombre, plus particulièrement du choix de la fonction d'autocorrélation, mais ne remet pas en cause le calcul analytique de la fonction d'ombre corrélée. La scène thermique a donc été simulée sans corrélation. Ainsi à partir des nouveaux modèles d'émissivité et de réflectivité de la mer, nous avons simulé la signature infrarouge de la mer en présence de l'atmosphère quantifiée par son coefficient de transmission global atmosphérique [34]. Les deux premiers chapitres et une partie du troisième chapitre ont fait l'objet de trois chapitres publiés dans un ouvrage de la collection PIER [43].

En infrarouge passif, les applications directes de ce travail peuvent s'inscrire dans la détection d'objet placé en surface, en comparant le contraste avec (donnée par la mesure) et sans (calculée selon notre modèle) l'objet, mais également dans les échanges thermiques entre l'atmosphère et les océans. En infrarouge actif, c'est-à-dire où la source est parfaitement caractérisée, comme par exemple un Laser, il serait intéressant d'effectuer une inversion de mesure, c'est-à-dire déterminer par exemple la vitesse du vent, ou sa direction. Ce traitement pourrait être optimisé en introduisant les concepts de la polarimétrie par la mesure de la matrice de Mueller.

Concernant les perspectives de ce travail, plusieurs points peuvent être envisagés :

- Simuler des surfaces bidimensionnelles composées d'un très grand nombre d'échantillons, afin de valider la description bidimensionnelle de la fonction d'ombre, selon la fonction d'autocorrélation.
- Tenir compte des trois premiers termes de la série de Rice, dans le calcul des fonctions d'ombre monodimensionnelle et bidimensionnelle avec corrélation.
- Inclure le phénomène de réflexions multiples dans les déterminations de l'émissivité et de la réflectivité.
- Introduire les concepts de la polarimétrie afin d'enrichir le traitement.
- Valider notre modèle par des mesures.

FONCTION D'OMBRE



RAYONNEMENT INFRAROUGE DE LA SURFACE DE LA MER

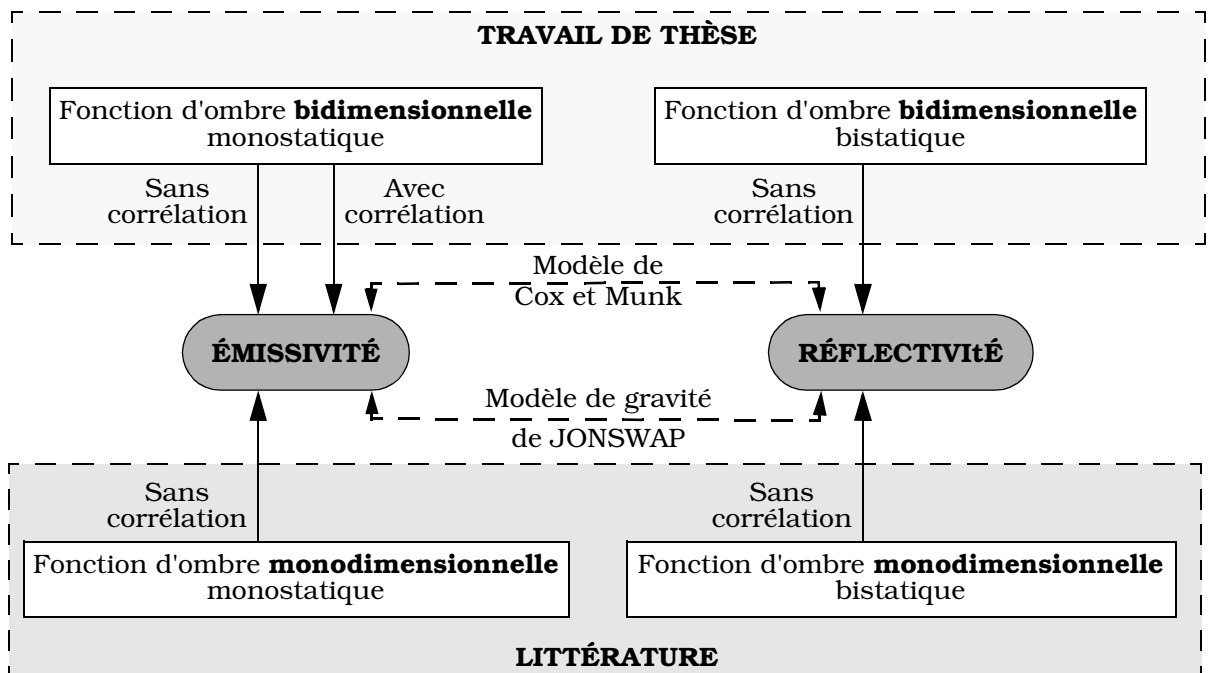


Figure 1 Comparaison de nos travaux et ceux de la littérature

Annexe 1 Fonctions d'ombre monodimensionnelles monostatiques de Wagner et de Smith d'un processus décorrélé

Dans cette annexe, les fonctions d'ombre de Wagner et de Smith sont déterminées pour un processus décorrélé, et pour une longueur d'observation infinie (relation (II.5)) soit :

$$S(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\mu} p(\xi_0, \gamma_0) \exp\left(-\int_0^{\infty} g(\tau|F, \theta) d\tau\right) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (1.1)$$

1.1 Fonction d'ombre de Wagner

La probabilité conditionnelle de Wagner s'écrit (équation (II.6)) :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) p(\xi = \xi_0 + \mu\tau, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\gamma \quad (1.2)$$

En utilisant le théorème de Bayes, la densité de probabilité $p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau)$ devient :

$$p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) = \frac{p(\xi, \gamma, \xi_0, \gamma_0; \tau)}{p(\xi_0, \gamma_0; \tau)} \quad (1.2a)$$

La corrélation étant supposée nulle, $p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau)$ se simplifie :

$$p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) = \frac{p(\xi, \xi_0)p(\gamma, \gamma_0)}{p(\xi_0, \gamma_0)} = \frac{p(\xi)p(\xi_0)p(\gamma)p(\gamma_0)}{p(\xi_0)p(\gamma_0)} = p(\xi)p(\gamma) \quad (1.3)$$

Par conséquent en substituant la relation (1.3) dans (1.2), la fonction $g_w(\tau|F, \theta)$ de Wagner s'exprime par :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \mu\Lambda p(\xi) \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) p(\gamma) d\gamma \quad (1.4)$$

De plus $\xi = \xi_0 + \mu\tau$, D'où :

$$\int_0^{\infty} g_w(\tau|F, \theta) d\tau = \mu\Lambda \int_0^{\infty} p(\xi_0 + \mu\tau) d\tau = \Lambda \int_{\xi_0}^{\infty} p(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

En substituant (1.5) dans (1.1), la fonction d'ombre s'écrit :

$$S_w(\theta) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_0) \exp\left[-\Lambda \int_{\xi_0}^{\infty} p(\xi) d\xi\right] d\xi_0 \right\}^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} p(\gamma_0) d\gamma_0 \quad (1.6)$$

Soit P une primitive de $p(h)$:

$$P = \int p(h) dh \quad (1.7)$$

D'où :

$$S_w(\theta) = \left\{ \exp[-\Lambda P(\infty)] \int_{-\infty}^{\infty} dP(\xi_0) \exp[\Lambda P(\xi_0)] \right\}^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} p(\gamma_0) d\gamma_0 \quad (1.7a)$$

Soit après intégration sur ξ_0 :

$$S_w(\theta) = \left[\frac{1 - \exp\{-\Lambda[P(\infty) - P(-\infty)]\}}{\Lambda} \right] \int_{-\infty}^{\mu} p(\gamma_0) d\gamma_0 \quad (1.7b)$$

De plus :

$$P(\infty) - P(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(h) dh = 1 \quad (1.7c)$$

Par conséquent la fonction d'ombre de Wagner s'écrit finalement :

$$S_w(\theta) = \Lambda' \times \frac{1 - \exp(-\Lambda)}{\Lambda} \quad (1.8)$$

avec :

$$\Lambda = \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) p(\gamma) d\gamma \quad \Lambda' = \int_{-\infty}^{\mu} p(\gamma) d\gamma \quad (1.8a)$$

1.2 Fonction d'ombre de Smith

La probabilité conditionnelle de Smith s'écrit (équation (II.7)) :

$$g_s(\tau|F, \theta) = \frac{g_w(\tau|F, \theta)}{\int_{-\infty}^{\xi_0 + \mu\tau} p(\xi) d\xi} \quad (1.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\xi$$

En substituant les relations (1.3) et (1.4) dans (1.9), on a :

$$g_s(\tau|F, \theta) = \mu \Lambda p(\xi) / \int_{-\infty}^{\xi} p(\xi_1) d\xi_1 \quad (1.10)$$

Afin d'éviter toute ambiguïté la variable ξ de l'intégrale du dénominateur est remplacée par ξ_1 (variable muette). En effectuant le changement de variable $\xi = \xi_0 + \mu\tau$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} g_s(\tau|F, \theta) d\tau = \mu \Lambda \int_0^{\infty} \left[\frac{p(\xi)}{\int_{-\infty}^{\xi} p(\xi_1) d\xi_1} \right] d\tau = \Lambda \int_{\xi_0}^{\infty} \left[\frac{p(\xi)}{\int_{-\infty}^{\xi} p(\xi_1) d\xi_1} \right] d\xi \quad (1.11)$$

Soit en utilisant l'expression (1.7) :

$$\int_0^{\infty} g_s(\tau|F, \theta) d\tau = \Lambda \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{dP(\xi)}{P(\xi) - P(-\infty)} = \Lambda [\ln|P(\xi) - P(-\infty)|]_{\xi_0}^{\infty} = -\ln|P(\xi_0) - P(-\infty)|^{\Lambda} \quad (1.12)$$

En substituant la relation (1.12) dans (1.1), la fonction d'ombre de Smith s'écrit :

$$S_s(\theta) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_0) \cdot |P(\xi_0) - P(-\infty)|^{\Lambda} d\xi_0 \right\} \int_{-\infty}^{\mu} p(\gamma_0) d\gamma_0 \quad (1.13)$$

soit après intégration sur ξ_0 :

$$S_s(\theta) = \left\{ \frac{1}{\Lambda + 1} [P(\xi_0) - P(-\infty)]^{\Lambda} \right\} \int_{-\infty}^{\mu} p(\gamma_0) d\gamma_0 \quad (1.13a)$$

Par conséquent la fonction d'ombre de Smith s'écrit finalement d'après l'équation (1.7c) :

$$S_s(\theta) = \frac{\Lambda'}{\Lambda + 1} \quad (1.14)$$

Annexe 2 Fonction d'ombre monodimensionnelle monostatique de Ricciardi-Sato d'un processus gaussien décorrélé

Dans cette annexe, la fonction d'ombre de Ricciardi-Sato est déterminée pour un processus gaussien décorrélé, et pour une longueur d'observation infinie (relation (II.8)), soit :

$$S(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\mu} p(\xi_0, \gamma_0) \cdot \exp\left(-\int_0^{\infty} g(l|F, \theta) dl\right) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (2.1)$$

2.1 Introduction

La fonction $g_R(l|F, \theta)$ de Ricciardi-Sato est définie par (II.8) :

$$g_R(l|F, \theta) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} I_n(l|F, \theta) \quad (2.2)$$

$$\text{avec } \begin{cases} I_1(l|F, \theta) = W_1(l|F, \theta) & I_n(l|F, \theta) = \int_0^l dl_1 \int_{l_1}^l dl_2 \dots \int_{l_{n-2}}^{l_{n-1}} W_n(l, l_1, \dots, l_{n-1}|F, \theta) dl_{n-1} \\ W_n(l, l_1, \dots, l_{n-1}|F, \theta) = \int_{\mu}^{\infty} d\gamma_1 \int_{\mu}^{\infty} d\gamma_2 \dots \int_{\mu}^{\infty} d\gamma_n \prod_{i=1}^n (\gamma_i - \mu) \cdot p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; l) \end{cases} \quad (2.2a)$$

En utilisant le théorème de Bayes, la densité de probabilité $p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; l)$ vaut :

$$p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; l) = p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}, \xi_0, \gamma_0; l) / p(\xi_0, \gamma_0; l) \quad (2.3)$$

Par conséquent $p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; l)$ s'écrit pour un processus gaussien décorrélé :

$$p_{2n+2}(\vec{S}, \vec{G}|\xi_0, \gamma_0; l) = p_{2n}(\vec{S}, \vec{G}; l) = \frac{1}{(2\pi\omega\sigma)^n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(\xi_0 + \mu l_i)^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.3a)$$

où ω^2 est la variance de hauteurs et σ^2 la variance de pentes. En substituant la relation (2.3a) dans l'expression de W_n , nous obtenons :

$$W_n = \exp\left[-\frac{1}{2\omega^2} \sum_{i=1}^n (\xi_0 + \mu l_i)^2\right] \left\{ \frac{1}{2\pi\omega\sigma} \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) \cdot \exp\left[-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right] d\gamma \right\}^n \quad (2.4)$$

Après intégration sur γ le terme W_n s'écrit finalement :

$$W_n = \exp\left[-\frac{1}{2\omega^2} \sum_{i=1}^n (\xi_0 + \mu l_i)^2\right] \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}}\right]^n \quad \text{avec } \begin{cases} v = \mu/(\sigma\sqrt{2}) \\ \Lambda = [e^{-v^2} - v\sqrt{\pi}\text{erfc}(v)]/(2v\sqrt{\pi}) \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 Détermination de l'intégrale I_n

Cas où $n=1$

Le cas où $n = 1$, I_1 vaut :

$$I_1 = W_1 = \exp\left[-\frac{\xi_1^2}{2\omega^2}\right] \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}}\right] \quad \text{avec } \xi_1 = \xi_0 + \mu l_0 = \xi_0 + \mu l \quad (2.6)$$

Cas où n=2

$$I_2 = \int_0^1 W_2 dl_1 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^2 \int_0^1 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2} - \frac{(\xi_0 + \mu l_1)^2}{2\omega^2} \right] dl_1 \quad (2.7)$$

Soit :

$$I_2 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^2 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2} \right] \int_0^1 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l_1)^2}{2\omega^2} \right] dl_1 \quad (2.7a)$$

En posant $u = (\xi_0 + \mu l_1)/\sqrt{2\omega^2}$, nous obtenons après intégration :

$$I_2 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^2 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2} \right] \left\{ \frac{\Lambda}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] \right\} \quad (2.7b)$$

Cas où n=3

$$I_3 = \int_0^1 dl_1 \left[\int_{l_1}^1 W_3 dl_2 \right] \quad (2.8)$$

* Intégration selon l_2 :

$$\int_{l_1}^1 W_3 dl_2 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^3 \exp \left[-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\omega^2} \right] \int_{l_1}^1 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l_2)^2}{2\omega^2} \right] dl_2 \quad (2.8a)$$

or :

$$\left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^3 \int_{l_1}^1 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l_2)^2}{2\omega^2} \right] dl_2 = \frac{\Lambda}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l_1}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] \quad (2.8b)$$

d'où :

$$\int_{l_1}^1 W_3 dl_2 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^2 \cdot \exp \left[-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\omega^2} \right] \frac{\Lambda}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l_1}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] \quad (2.8c)$$

* Intégration selon l_1 :

En substituant l'équation (2.8c) dans (2.8), I_3 s'écrit :

$$I_3 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^2 \frac{\Lambda}{2} \exp \left[-\frac{\xi_1^2}{2\omega^2} \right] \int_0^1 \exp \left[-\frac{(\xi_0 + \mu l_1)^2}{2\omega^2} \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l_1}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] dl_1 \quad (2.8d)$$

En posant $u = (\xi_0 + \mu l_1)/\sqrt{2\omega^2}$ on a :

$$\int_0^1 e^{-\frac{(\xi_0 + \mu l_1)^2}{2\omega^2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l_1}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] dl_1 = \frac{\omega\sqrt{2}}{\mu} \int_{\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}}^{\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}} e^{-u^2} \left[-\operatorname{erf}(u) + \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] du \quad (2.8e)$$

De plus :

$$\int_{u_1}^{u_2} \exp[-u^2] \operatorname{erf}(u) du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} [\operatorname{erf}^2(u_2) - \operatorname{erf}^2(u_1)] \quad (2.8f)$$

En substituant l'équation (2.8f) dans (2.8e) l'intégrale s'écrit :

$$\frac{\omega\sqrt{2}}{\mu} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[\operatorname{erf}^2\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}^2\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) \right] + \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) \right] \right\} \quad (2.8g)$$

Après simplification nous obtenons :

$$\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\mu} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) \right]^2 \quad (2.8h)$$

en substituant (2.8h) dans (2.8d) nous obtenons :

$$I_3 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right]^2 \frac{\Lambda}{2} \exp\left[-\frac{\xi_1^2}{2\omega^2}\right] \frac{\omega\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\mu} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) \right]^2 \quad (2.8i)$$

Soit finalement :

$$I_3 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{\xi_1^2}{2\omega^2}\right] \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Lambda}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) \right] \right\}^2 \quad (2.8j)$$

Cas où $n=4$

$$I_4 = \int_0^1 dl_1 \left\{ \int_{l_1}^1 W_3 \left[\int_{l_2}^1 W_4 dl_3 \right] dl_2 \right\} \quad (2.9)$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment nous obtenons :

$$I_4 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{\xi_1^2}{2\omega^2}\right] \frac{1}{6} \left\{ \frac{\Lambda}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) \right] \right\}^3 \quad (2.9a)$$

$n \geq 1$ **entier**

En généralisant les équations (2.6), (2.7b), (2.8j), (2.9a), nous montrons :

$$\begin{cases} I_1 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2}\right] & n = 1 \\ I_n = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2}\right] \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} & n > 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{avec } X = \frac{\Lambda}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 + \mu l}{\sqrt{2\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}\right) \right] \quad (2.10a)$$

2.3 Calcul de la fonction d'ombre

En substituant la relation (2.10) dans (2.2), la fonction g_R s'écrit :

$$g_R = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2}\right] \left[1 - X + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} + \dots + (-1)^p \frac{X^p}{p!} \right] \quad (2.11)$$

Soit :

(2.11a)

$$g_R = g_0 \exp(-X) \quad \text{avec} \quad g_0 = \left[\frac{\mu\Lambda}{\omega\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{(\xi_0 + \mu l)^2}{2\omega^2} \right] \quad (2.11b)$$

En substituant (2.11b) dans (1.1), puis en effectuant l'intégration sur γ_0 , la fonction d'ombre de Ricciardi-Satio $S_R(\theta)$ s'écrit pour un processus gaussien décorrélé :

$$S_R(\theta) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(v) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2\omega^2} \right) \exp\left[-\int_0^{\infty} g_0 \cdot \exp(-X) dl \right] d\xi_0 \quad (2.12)$$

où erfc est la fonction complémentaire de erf ($\operatorname{erfc}(v) = 1 - \operatorname{erf}(v)$). En posant $u = (\xi_0 + \mu l)/(\omega\sqrt{2})$, l'intégrale sur l s'écrit :

$$\int_0^{\infty} g_0 \exp(-X) dl = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \exp\left[\frac{\Lambda}{2} \operatorname{erf}(v) \right] \int_{\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}}}^{\infty} e^{-u^2} \exp\left[-\frac{\Lambda}{2} \operatorname{erf}(u) \right] du \quad (2.13)$$

or :

$$\int e^{-u^2} \exp\left[-\frac{\Lambda}{2} \operatorname{erf}(u) \right] du = -\frac{\sqrt{\pi}}{\Lambda} \exp\left[-\frac{\Lambda}{2} \operatorname{erf}(u) \right] \quad (2.13a)$$

d'où :

$$\int_0^{\infty} g_0 \exp(-X) dl = 1 - \exp\left[-\frac{\Lambda}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\omega}} \right) \right] \quad (2.13b)$$

En posant $x = \xi_0/(\omega\sqrt{2})$, puis en substituant la relation (2.13b) dans (2.12), la fonction d'ombre est donnée par :

$$S_R(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(v) \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-1 + \exp\left[-\frac{\Lambda}{2} \operatorname{erfc}(x) \right]} dx \quad (2.14)$$

En posant $z = -\Lambda \operatorname{erfc}(x)/2$, l'intégrale (2.14) s'écrit :

$$S_R(v) = \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(v) \right] \frac{e^{-1}}{\Lambda} \int_{-\Lambda}^0 e^{\exp(z)} dz = \frac{e^{-1}}{\Lambda} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(v) \right] \int_{e^{-\Lambda}}^1 \frac{e^t}{t} dt \quad (2.14a)$$

avec $t = \exp(z)$. La fonction d'ombre de Ricciardi-Satio s'écrit finalement en utilisant la fonction exponentielle intégrale E_1 :

$$S_R(v) = \left[1 - \frac{\operatorname{erfc}(v)}{2} \right] \left[\frac{E_1(-e^{-\Lambda}) - E_1(-1)}{\Lambda e^1} \right] \quad E_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{y} dy = \int_{-x}^{-\infty} \frac{e^t}{t} dt \quad (2.15)$$

Annexe 3 Probabilité conditionnelle monodimensionnelle de Wagner d'un processus gaussien corrélé

Cette annexe donne l'expression de la probabilité conditionnelle de Wagner d'un processus gaussien corrélé (relation (II.6)) :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) p(\xi = \xi_0 + \mu\tau, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau) d\gamma \quad (3.1)$$

3.1 Détermination de la densité de probabilité

D'après le théorème de Bayes, la densité de probabilité $p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau)$ s'écrit :

$$p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau) = p(\xi, \gamma, \xi_0, \gamma_0; \tau) / p(\xi_0, \gamma_0) \quad (3.2)$$

Pour un processus gaussien à quatre dimensions, $p(\xi, \gamma, \xi_0, \gamma_0; \tau)$ est donc donnée par :

$$p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau) = \frac{\sqrt{C_{11}C_{33} - C_{31}C_{13}}}{2\pi\sqrt{|[C]|}} e^{-\frac{1}{2}\vec{v}^T [C]^{-1} \vec{v} + \frac{1}{2}[\xi_0 \ \gamma_0] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}} \quad \vec{v}^T = [\xi_0 \ \xi \ \gamma_0 \ \gamma] \quad (3.3)$$

où $|[C]|$ est le déterminant de la matrice de covariance $[C]$. $[C]$ s'exprime à l'aide de quatre autres matrices de covariance $[C_{HH}]$, $[C_{PP}]$, $[C_{HP}]$ et $[C_{PH}]$ données par :

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{HH}] & [C_{HP}] \\ [C_{PH}] & [C_{PP}] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C_{HH}^{ij} = \langle \xi_i(\tau_i) \xi_j(\tau_j) \rangle = R_0(\tau_i - \tau_j) \\ C_{PP}^{ij} = \langle \dot{\xi}_i(\tau_i) \dot{\xi}_j(\tau_j) \rangle = -R_2(\tau_i - \tau_j) \\ C_{HP}^{ij} = \langle \xi_i(\tau_i) \dot{\xi}_j(\tau_j) \rangle = -R_1(\tau_i - \tau_j) \\ C_{PH}^{ij} = \langle \dot{\xi}_i(\tau_i) \xi_j(\tau_j) \rangle = -R_1(\tau_j - \tau_i) \end{cases} \quad \{i, j\} = \begin{cases} 1 \rightarrow \xi_0 \\ 2 \rightarrow \xi \end{cases} \quad (3.4)$$

où $\{R_1, R_2\}$ sont les dérivées première et seconde de la fonction d'autocorrélation R_0 . La parité de la fonction d'autocorrélation impliquent :

$$\begin{cases} R_0(-[\tau_i - \tau_j]) = R_0(\tau_i - \tau_j) \\ R_1(-[\tau_i - \tau_j]) = -R_1(\tau_i - \tau_j) \\ R_2(-[\tau_i - \tau_j]) = R_2(\tau_i - \tau_j) \end{cases} \quad R_1(0) = 0 \quad (3.4a)$$

Par conséquent la matrice de corrélation s'écrit avec $\tau = \tau_2 - \tau_1$:

$$[C] = \begin{bmatrix} R_0(0) & R_0(-\tau) & -R_1(0) & -R_1(-\tau) \\ R_0(\tau) & R_0(0) & -R_1(\tau) & -R_1(0) \\ -R_1(0) & -R_1(\tau) & -R_2(0) & -R_2(-\tau) \\ -R_1(-\tau) & -R_1(0) & -R_2(\tau) & -R_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 & R_0 & 0 & R_1 \\ R_0 & \omega^2 & -R_1 & 0 \\ 0 & -R_1 & \sigma^2 & -R_2 \\ R_1 & 0 & -R_2 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

où ω^2 est la variance des hauteurs égale à $R_0(0)$, σ^2 la variance des pentes qui vaut $-R_2(0)$. On montre que la matrice inverse $[C]^{-1}$ est donnée par :

$$[C]^{-1} = \frac{1}{|[C]|} \begin{bmatrix} C_{i11} & C_{i12} & C_{i13} & C_{i14} \\ C_{i12} & C_{i11} & -C_{i14} & -C_{i13} \\ C_{i13} & -C_{i14} & C_{i33} & C_{i34} \\ C_{i14} & -C_{i13} & C_{i34} & C_{i33} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

avec :

$$\begin{cases} C_{i11} = \omega^2(\sigma^4 - R_2^2) - R_1^2\sigma^2 \\ C_{i12} = R_0(R_2^2 - \sigma^4) - R_1^2R_2 \\ C_{i13} = -R_1(R_0\sigma^2 + \omega^2R_2) \\ C_{i14} = R_1(R_1^2 - R_0R_2 - \omega^2\sigma^2) \end{cases} \quad \begin{cases} C_{i33} = \sigma^2(\omega^4 - R_0^2) - R_1^2\omega^2 \\ C_{i34} = R_2(\omega^4 - R_0^2) + R_1^2R_0 \\ |[C]| = (C_{33}^2 - C_{34}^2)/(\omega^4 - R_0^2) \end{cases} \quad (3.6)$$

En substituant l'équation (3.5) et (3.4b) dans (3.3) nous obtenons :

$$p(\xi, \gamma | \xi_0, \gamma_0; \tau) = \frac{\sigma\omega}{2\pi\sqrt{|[C]|}} \times \exp \left[-\frac{C_{i11}(\xi_0^2 + \xi^2) + C_{i33}(\gamma_0^2 + \gamma^2)}{2|[C]|} + \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} \right. \\ \left. - \frac{2C_{i12}\xi_0\xi + 2C_{i34}\gamma_0\gamma + 2C_{i13}(\xi_0\gamma_0 - \xi\gamma) + 2C_{i14}(\xi_0\gamma - \xi\gamma_0)}{2|[C]|} \right] \quad (3.7)$$

Les hauteurs sont totalement décorréllées si $C_{i12} = 0$. De même, les pentes sont totalement décorréllées si $C_{i34} = 0$. Enfin l'intercorrélacion des pentes et des hauteurs est nulle si $C_{i13} = 0$ et $C_{i14} = 0$. L'approche de Wagner et de Smith suppose que ces quatre conditions sont vérifiées, et par conséquent la matrice de covariance est purement diagonale.

3.2 Calcul de la probabilité conditionnelle

En substituant l'équation (3.7) dans (3.1), la probabilité conditionnelle de Wagner est donnée par :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \frac{\sigma\omega}{2\pi\sqrt{|[C]|}} \int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) \exp(-A\gamma^2 - 2B\gamma - D) d\gamma \quad (3.8)$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{C_{i33}}{2|[C]|} & B = \frac{\xi_0 C_{i14} - \xi C_{i13} + \gamma_0 C_{i34}}{2|[C]|} \\ D = \frac{(\xi_0^2 + \xi^2)C_{i11} + 2\xi_0\xi C_{i12} + 2\gamma_0(\xi_0 C_{i13} - \xi C_{i14}) + \gamma_0^2 C_{i33}}{2|[C]|} - \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} \end{cases} \quad (3.8a)$$

Or :

$$\int_{\mu}^{\infty} (\gamma - \mu) \exp(-A\gamma^2 - 2B\gamma - D) d\gamma = \\ \frac{\exp[-D - \mu(\mu A + 2B)]}{2A} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{(B + \mu A)^2}{A}\right] \sqrt{\pi} \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B + \mu A}{\sqrt{A}}\right) \right\} \quad (3.8b)$$

D'où :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \frac{\sigma\omega \exp[-D - \mu(\mu A + 2B)]}{4\pi A \sqrt{|[C]|}} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{(B + \mu A)^2}{A}\right] \sqrt{\pi} \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B + \mu A}{\sqrt{A}}\right) \right\} \quad (3.9)$$

A noter que $g_w(\tau|F, \theta)$ est réelle si les conditions $A > 0$ et $|[C]| > 0$ sont satisfaites.

Annexe 4 Probabilité conditionnelle monodimensionnelle de Smith d'un processus gaussien corrélé

Cette annexe donne l'expression de la probabilité conditionnelle de Smith d'un processus gaussien corrélé (relation (II.7)) :

$$g_s(\tau|F, \theta) = \frac{g_w(\tau|F, \theta)}{\int_{-\infty}^{\xi_0 + \mu\tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \gamma|\xi_0, \gamma_0; \tau) d\xi d\gamma} \quad (4.1)$$

D'après l'annexe 3, la probabilité conditionnelle de Wagner s'écrit :

$$g_w(\tau|F, \theta) = \frac{\sigma\omega \exp[-D - \mu(\mu A + 2B)]}{4\pi A \sqrt{|[C]|}} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{(B + \mu A)^2}{A}\right] \sqrt{\pi} \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B + \mu A}{\sqrt{A}}\right) \right\} \quad (4.2)$$

et le dénominateur s'écrit :

$$I = \frac{\sigma\omega}{2\pi \sqrt{|[C]|}} \int_{-\infty}^{\xi_0 + \mu\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-A\gamma^2 - 2B\gamma - D] d\gamma \right) d\xi \quad (4.3)$$

Soit après intégration sur γ :

$$I = \frac{\sigma\omega}{2\pi \sqrt{|[C]|}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \int_{-\infty}^{\xi_0 + \mu\tau} \exp\left(\frac{B^2}{A} - D\right) d\xi \quad (4.4)$$

En posant :

$$\frac{B^2}{A} - D = -A_1 \xi^2 - 2B_1 \xi - D_1 \quad (4.5)$$

et en appliquant la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{\xi'} \exp(-A_1 \xi^2 - 2B_1 \xi - D_1) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A_1}} \exp\left(\frac{B_1^2}{A_1} - D_1\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{A_1 \xi' + B_1}{\sqrt{A_1}}\right) + 1 \right] \quad (4.5a)$$

on montre après intégration que I s'écrit finalement :

$$I = \frac{\sigma\omega}{4\sqrt{A_1} A} \exp\left(\frac{B_1^2}{A_1} - D_1\right) \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{A_1(\xi_0 + \mu\tau) + B_1}{\sqrt{A_1}}\right] + 1 \right\} \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{C_{i11}C_{i33} - C_{i13}^2}{2C_{i33}|[C]|} \\ B_1 = \xi_0 \frac{C_{i12}C_{i33} + C_{i14}C_{i13}}{2C_{i33}|[C]|} + \gamma_0 \frac{C_{i13}C_{i34} - C_{i14}C_{i33}}{2C_{i33}|[C]|} \\ D_1 = \xi_0^2 \frac{C_{i11}C_{i33} - C_{i14}^2}{2C_{i33}|[C]|} + \gamma_0^2 \frac{C_{i33}^2 - C_{i34}^2}{2C_{i33}|[C]|} + 2\xi_0\gamma_0 \frac{C_{i13}C_{i33} - C_{i14}C_{i34}}{2C_{i33}|[C]|} - \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2} \end{cases} \quad (4.6a)$$

En substituant l'équation (4.6) et (4.2) dans (4.1), la fonction $g_s(\tau)$ s'écrit finalement :

$$g_s(\tau|F, \theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{A_1}{A}}} \frac{\exp[-D - \mu(\mu A + 2B)] \left\{ 1 - \exp\left[\frac{(B + \mu A)^2}{A}\right] \sqrt{\pi} \frac{B + \mu A}{\sqrt{A}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B + \mu A}{\sqrt{A}}\right) \right\}}{\exp\left(\frac{B_1^2}{A_1} - D_1\right) \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{A_1(\xi_0 + \mu\tau) + B_1}{\sqrt{A_1}}\right] + 1 \right\}} \quad (4.7)$$

Annexe 5 Fonction d'ombre monodimensionnelle bistatique décorrélée de Smith d'un processus gaussien

La fonction d'ombre monostatique décorrélée de Smith dans la direction d'observation θ est donnée par :

$$S_s(\theta|F) = \Upsilon(\mu - \gamma_0) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(h_0) \right]^{\Lambda(v)} \quad (5.1)$$

Cas (a) : $\theta_2 \in [0; \pi/2]$

En substituant la relation (5.1) dans (II.38), nous avons :

$$S_s(\theta_1, \theta_2|F) = S_s(\theta_1|F) S_s(\theta_2|F) = \Upsilon(\mu_1 + \gamma_0) \left[1 - \frac{\operatorname{erfc}(h)}{2} \right]^{\Lambda(|v_1|)} \Upsilon(\mu_2 - \gamma_0) \left[1 - \frac{\operatorname{erfc}(h)}{2} \right]^{\Lambda(v_2)} \quad (5.2)$$

A noter que dans la fonction échelon $\Upsilon(\mu_1 + \gamma_0)$, le signe devant γ_0 est positif, car l'émission est définie selon les y négatifs. Or figure 5.1 :

$$\Upsilon(\mu_1 + \gamma_0) \Upsilon(\mu_2 - \gamma_0) = \Pi_{[\mu_1; \mu_2]} \quad (5.3)$$

où $\Pi_{[\mu_1; \mu_2]}$ est la fonction porte de largeur $[\mu_1; \mu_2]$ ($\mu_1 < 0$ et $\mu_2 > 0$). En substituant l'équation (5.3) dans (5.2), la fonction d'ombre s'écrit :

$$S_s(\theta_1, \theta_2|F) = \Pi_{[\mu_1; \mu_2]} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(h) \right]^{\Lambda(|v_1|) + \Lambda(v_2)} \quad (5.4)$$

En substituant l'équation (5.4) dans (II.39), la fonction d'ombre moyennée s'écrit :

$$S_s(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi\sigma\omega} \int_{-\infty - |\mu_1|}^{\infty - \mu_2} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(h) \right]^{\Lambda(|v_1|) + \Lambda(v_2)} \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma^2}\right) d\xi_0 d\gamma_0 \quad (5.5)$$

Soit après intégrations :

$$S_s(\theta_1, \theta_2) = \frac{1 - \frac{1}{2} [\operatorname{erfc}(|v_1|) + \operatorname{erfc}(v_2)]}{\Lambda(|v_1|) + \Lambda(v_2) + 1} \quad (5.6)$$

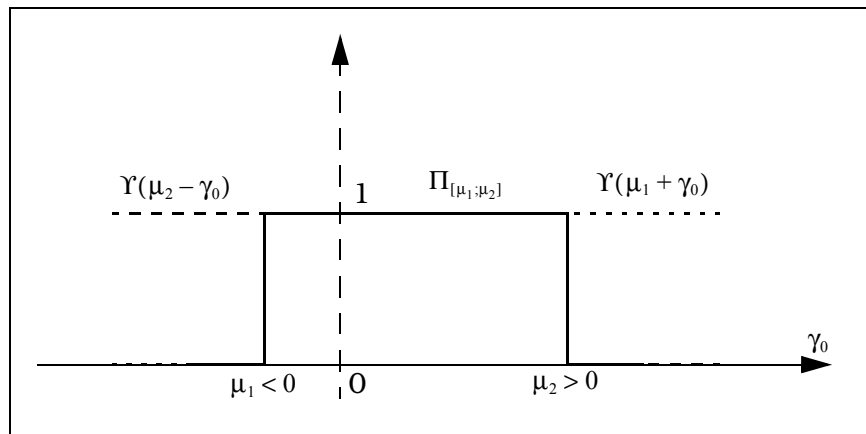


Figure 5.1 Définition de la fonction porte

Conclusion

Les cas (b) et (c) sont des cas purement monostatiques parfaitement connus (équation (II.33)). Par conséquent, la fonction d'ombre bistatique de Smith décorrelée et moyennée sur $\{\gamma, \xi\}$ s'écrit finalement :

$$S_S(v_1, v_2) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{1}{2}[\operatorname{erfc}(v_1) + \operatorname{erfc}(v_2)]}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + 1} & \text{pour } 0 \leq v_2 < \infty \\ \frac{1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(v_2)}{\Lambda_2 + 1} & \text{pour } -v_1 \leq -v_2 < 0 \\ \frac{1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(v_1)}{\Lambda_1 + 1} & \text{pour } -\infty \leq -v_2 < -v_1 \end{cases} \quad (5.7)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i = \frac{\cot(|\theta_i|)}{\sqrt{2}\sigma} \\ \Lambda_i = \left[e^{-v_i^2} - v_i \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(v_i) \right] / (2v_i \sqrt{\pi}) \end{array} \right. \quad i = \{1, 2\} \quad (5.7a)$$

Annexe 6 Éléments de la matrice de covariance bidimensionnelle en coordonnées cylindriques

6.1 Description du problème

Cette annexe donne les expressions analytiques des éléments C_{ij}^{XY} de la matrice de covariance bidimensionnelle corrélée $[C^{XY}]$ en coordonnées cylindriques. Ils sont donnés par (équations (II.56a) et (II.56b)) :

$$\begin{cases} C_{14}^{XY} = R_{1x} \cos \phi + R_{1y} \sin \phi \\ C_{16}^{XY} = -R_{1x} \sin \phi + R_{1y} \cos \phi \\ C_{34}^{XY} = -R_{2x} \cos(\phi)^2 - R_{2y} \sin(\phi)^2 - R_{2xy} \sin(2\phi) \\ C_{56}^{XY} = R_{2x} \sin(\phi)^2 + R_{2y} \cos(\phi)^2 - R_{2xy} \sin(2\phi) \\ C_{36}^{XY} = -\frac{(R_{2x} - R_{2y})}{2} \sin(2\phi) + R_{2xy} \cos 2\phi \end{cases} \quad (6.1)$$

et :

$$\begin{cases} C_{33}^{XY} = \sigma_x^2 \cos(\phi)^2 + \sigma_y^2 \sin(\phi)^2 \\ C_{55}^{XY} = \sigma_x^2 \sin(\phi)^2 + \sigma_y^2 \cos(\phi)^2 \\ C_{35}^{XY} = -\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}{2} \sin(2\phi) \end{cases} \quad (6.2)$$

Le problème revient donc à exprimer les dérivées partielles $\{R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}, R_{2xy}\}$ en coordonnées cylindriques $\{R, \phi\}$ sachant que :

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R \cos(\phi) \\ y = R \sin(\phi) \end{cases} \quad (6.3)$$

6.2 Calculs des dérivées partielles

Par définition, les dérivées partielles du premier ordre sont définies par :

$$\begin{cases} R_{1x} = \frac{\partial R_0}{\partial x} = \frac{\partial R_0}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R_0}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ R_{1y} = \frac{\partial R_0}{\partial y} = \frac{\partial R_0}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (6.4)$$

où $R_0(x, y)$ est la fonction d'autocorrélation exprimée en coordonnées cartésiennes. Or :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos(\phi) \\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin(\phi) \end{cases} \quad (6.4a)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\text{atan}[y/x])}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin(\phi)}{R} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial(\text{atan}[y/x])}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos(\phi)}{R} \end{cases} \quad (6.4b)$$

En substituant les relations (6.4a) et (6.4b) dans (6.4), nous obtenons :

$$\begin{cases} R_{1x} = R_{1R} \cos(\phi) - R_{1\phi} \frac{\sin(\phi)}{R} \\ R_{1y} = R_{1R} \sin(\phi) + R_{1\phi} \frac{\cos(\phi)}{R} \end{cases} \quad (6.5)$$

avec :

$$R_{1R} = \frac{\partial R_0}{\partial R} \quad \text{et} \quad R_{1\phi} = \frac{\partial R_0}{\partial \phi} \quad (6.5a)$$

En appliquant une nouvelle fois les équations (6.4), les dérivées partielles du second ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} R_{2x} = \frac{\partial R_{1x}}{\partial x} = \frac{\partial R_{1x}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R_{1x}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ R_{2y} = \frac{\partial R_{1y}}{\partial y} = \frac{\partial R_{1y}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R_{1y}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ R_{2xy} = \frac{\partial R_{1x}}{\partial y} = \frac{\partial R_{1x}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R_{1x}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (6.6)$$

De plus nous montrons :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{1x}}{\partial R} = R_{2R} \cos(\phi) + \left(\frac{R_{1\phi}}{R^2} - \frac{R_{2R\phi}}{R} \right) \sin(\phi) \\ \frac{\partial R_{1y}}{\partial R} = R_{2R} \sin(\phi) - \left(\frac{R_{1\phi}}{R^2} - \frac{R_{2R\phi}}{R} \right) \cos(\phi) \end{cases} \quad (6.6a)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{1x}}{\partial \phi} = \left(R_{2R\phi} - \frac{R_{1\phi}}{R} \right) \cos(\phi) - \left(R_{1R} + \frac{R_{2\phi}}{R} \right) \sin(\phi) \\ \frac{\partial R_{1y}}{\partial \phi} = \left(R_{2R\phi} - \frac{R_{1\phi}}{R} \right) \sin(\phi) + \left(R_{1R} + \frac{R_{2\phi}}{R} \right) \cos(\phi) \end{cases} \quad (6.6b)$$

avec :

$$R_{2R} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial R^2} \quad R_{2\phi} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial \phi^2} \quad R_{2R\phi} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial R \partial \phi} \quad (6.6c)$$

Ainsi en substituant les équations (6.6a) et (6.6b) dans (6.6), nous montrons :

$$\begin{cases} R_{2x} = \frac{R^2 R_{2R} \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)(RR_{1R} + R_{2\phi}) - \sin(2\phi)(RR_{2R\phi} - R_{1\phi})}{R^2} \\ R_{2y} = \frac{R^2 R_{2R} \sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)(RR_{1R} + R_{2\phi}) + \sin(2\phi)(RR_{2R\phi} - R_{1\phi})}{R^2} \\ R_{2xy} = \frac{2 \cos(2\phi)(RR_{2R\phi} - R_{1\phi}) + \sin(2\phi)(R^2 R_{2R} - RR_{1R} - R_{2\phi})}{2R^2} \end{cases} \quad (6.7)$$

D'après les équations (6.7) et (6.5), nous remarquons que les dérivées partielles $\{R_{1x}, R_{2x}\}$ s'obtiennent à partir de celles $\{R_{1y}, R_{2y}\}$ définies selon y , en remplaçant respectivement $\{\sin(\phi), -\cos(\phi)\}$ en $\{\cos(\phi), \sin(\phi)\}$, qui est équivalent à changer ϕ en $\phi + \pi/2$.

6.3 Conclusion

En substituant les relations (6.7) et (6.5), les éléments C_{ij}^{XY} s'écrivent finalement en coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{14}^{XY} = R_{1R} \\ C_{16}^{XY} = \frac{R_{1\phi}}{R} \\ C_{34}^{XY} = -R_{2R} \\ C_{56}^{XY} = \frac{1}{R^2}(RR_{1R} + R_{2\phi}) \\ C_{36}^{XY} = \frac{1}{R^2}(RR_{2R\phi} - R_{1\phi}) \end{array} \right. \quad (6.8)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{33}^{XY} = \alpha + \beta \cos(2\phi) \\ C_{55}^{XY} = \alpha - \beta \cos(2\phi) \\ C_{35}^{XY} = -\beta \sin 2\phi \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \\ \beta = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2} \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Annexe 7 Probabilité conditionnelle bidimensionnelle de Smith d'un processus gaussien corrélé

Cette annexe calcule la probabilité conditionnelle bidimensionnelle de Smith $g_S(\mathbf{R}, \phi | \{\xi_0, \gamma_{0X}\}, \theta)$ d'un processus gaussien corrélé (équation (II.7)) :

$$g_S = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_X - \mu) p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, ; \mathbf{R}, \phi) d\gamma_X}{\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_X \left[\int_{-\infty}^{\xi_0 + \mu\tau} p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, ; \mathbf{R}, \phi) d\xi \right]} = \frac{I_1}{I_2} \quad (7.1)$$

avec :

$$p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, ; \mathbf{R}, \phi) = \frac{\omega \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi \sqrt{E/\sigma_Y^2}} \exp\left(\frac{\xi_0^2}{2\omega^2} + \frac{\gamma_{0X}^2}{2\sigma_X^2} - \frac{a_1 \xi_0^2 + a_2 \xi^2 + a_9 \gamma_X^2 + a_{10} \gamma_{0X}^2}{2|[C^{XY}]|} \right. \\ \left. - \frac{a_3 \xi_0 \xi + a_4 \gamma_{0X} \gamma_X + a_5 \xi_0 \gamma_{0X} - a_6 \xi \gamma_X + a_7 \xi_0 \gamma_X - a_8 \xi \gamma_{0X}}{|[C^{XY}]|} \right) \quad (7.1a)$$

Nous appliquons le même raisonnement que dans l'annexe 4. Nous avons :

$$p(\xi, \gamma_X | \xi_0, \gamma_{0X}, ; \mathbf{R}, \phi) = \frac{\omega \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi \sqrt{E/\sigma_Y^2}} \exp(-A_X \gamma_X^2 - 2B_X \gamma_X - D_X) \quad (7.2)$$

avec :

$$\begin{cases} A_X = \frac{a_9}{2|[C^{XY}]|} & B_X = \frac{a_7 \xi_0 - a_9 \xi + a_4 \gamma_{0X}}{2|[C^{XY}]|} \\ D_X = \frac{a_1 \xi_0^2 + a_2 \xi^2 + 2a_3 \xi_0 \xi + 2a_5 \xi_0 \gamma_{0X} - 2a_8 \xi \gamma_{0X} + a_{10} \gamma_{0X}^2}{2|[C^{XY}]|} - \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_{0X}^2}{2\sigma_X^2} \end{cases} \quad (7.2a)$$

L'intégration sur γ_X donne pour le numérateur I_1 (équation (3.8b)) :

$$\frac{\omega \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2} \exp[-D_X - \mu(\mu A_X + 2B_X)]}{4\pi A_X \sqrt{E/\sigma_Y^2}} \left[1 - \exp\left[\frac{(B_X + \mu A)^2}{A} \right] \sqrt{\pi} \frac{B_X + \mu A_X}{\sqrt{A_X}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B_X + \mu A_X}{\sqrt{A_X}} \right) \right] \quad (7.3)$$

et pour le dénominateur nous obtenons :

$$I_2 = \frac{\omega \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2}}{2\pi \sqrt{E/\sigma_Y^2}} \sqrt{\frac{\pi}{A_X}} \int_{-\infty}^{\xi_0 + \mu R} \exp\left(\frac{B_X^2}{A_X} - D_X \right) d\xi \quad (7.4)$$

En posant :

$$\frac{B_X^2}{A_X} - D_X = -A_{1X} \xi^2 - 2B_{1X} \xi - D_{1X} \quad (7.5)$$

nous montrons que l'intégration sur ξ (équation (4.5a)) est :

$$I_2 = \frac{\omega \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2}}{4\sqrt{A_{1X}} A_X \sqrt{E/\sigma_Y^2}} \exp\left(\frac{B_{1X}^2}{A_{1X}} - D_{1X} \right) \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{A_{1X}(\xi_0 + \mu R) + B_{1X}}{\sqrt{A_{1X}}} \right] + 1 \right\} \quad (7.6)$$

avec :

$$\begin{cases} A_{1X} = \frac{a_2 a_9 - a_6^2}{2a_9 |[C^{XY}]|} \\ B_{1X} = \xi_0 \frac{a_3 a_9 + a_6 a_7}{2a_9 |[C^{XY}]|} + \gamma_0 \frac{a_6 a_4 - a_8 a_9}{2a_9 |[C^{XY}]|} \\ D_{1X} = \xi_0^2 \frac{a_1 a_9 - a_7^2}{2a_9 |[C^{XY}]|} + \gamma_0^2 \frac{a_{10} a_9 - a_4^2}{2a_9 |[C^{XY}]|} + 2\xi_0 \gamma_0 \frac{a_5 a_9 - a_4 a_7}{2a_9 |[C^{XY}]|} - \frac{\xi_0^2}{2\omega^2} - \frac{\gamma_0^2}{2\sigma_x^2} \end{cases} \quad (7.6a)$$

En substituant les équations (7.6) et (7.3) dans (7.1), la fonction $g_s(R|F, \theta, \phi)$ est donnée par :

$$g_s = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{A_{1X}}{A_X}}} \frac{\exp[-D_X - \mu(\mu A_X + 2B_X)] \left[1 - e^{-\frac{(B_X + \mu A)^2}{A}} \sqrt{\pi} \frac{B_X + \mu A_X}{\sqrt{A_X}} \operatorname{erfc}\left(\frac{B_X + \mu A_X}{\sqrt{A_X}}\right) \right]}{\exp\left(\frac{B_{1X}^2}{A_{1X}} - D_{1X}\right) \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{A_{1X}(\xi_0 + \mu R) + B_{1X}}{\sqrt{A_{1X}}}\right] + 1 \right\}} \quad (7.7)$$

A noter que g_s est réelle si :

$$\begin{cases} A_X > 0 \\ A_{1X} > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |[C^{XY}]| > 0 \\ a_9 > 0 \\ a_2 a_9 - a_6^2 > 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **K. Oumansour**, *Modélisation de la rétrodiffusion des sillages de navires, en imagerie radar polarimétrique*, Thèse de doctorat, IRESTE, Nantes, 1996.
- [2] **D.T. Gjessing**, *Target adaptive matched illumination radar: Principles and Applications*, IEE Electromagnetic waves series, Vol. 22, IEE eds, 1989.
- [3] **F.T. Ulaby, R.K. Moore, A.K. Fung**, *Microwave remote sensing, Volume III From Theory to Applications*, ARTECH House, INC., 1986.
- [4] **F. Gérard**, *La Houle, Théorie et prévision*, Météorologie Maritime, Vol 117, 4ème trimestre, pages 5-23, 1982.
- [5] **S. Pond and G. L. Pickard**, *Introductory Dynamical*, Second edition, Chapter 12.
- [6] **Papoulis**, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Company, 1984, Second Edition.
- [7] **M. Kunt**, *Techniques modernes de traitement numériques des signaux*, Collection électricité, 1991.
- [8] **K. Yoshimori, K. Itoh, and Y. Ichioka**, *Statistical formulation for an inhomogeneous random water surface a basis for optical remote sensing of oceans*, J. Opt. Soc. Am. ,Vol. 11, No. 2, 1994.
- [9] **J.R. Appel**, *An Improved Model of the Ocean Surface Wave Vector Spectrum and Its Effects on Radar Backscatter*, J. of Geo. Res. Oceans, Vol1. 99, 1994.
- [10] **F. Daout**, *Etude de la dépolarisation des ondes centimétriques par une surface rugueuse - Application au domaine maritime*, Thèse de Doctorat, IRESTE, Nantes 1996.
- [11] **T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, D. Vandemark**, *A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves*, J. of Geo. Res., Vol. 102, No. C7, July 15, 1997.
- [12] **D. Laurent**, *Contribution à l'étude du comportement polarimétrique de la rétrodiffusion des océans*, Thèse de doctorat, IRESTE, Nantes, 1993.
- [13] **H.T. Wang**, *Temporal and Spatial Simulations of Random Ocean Waves*, Proceeding of the Fourth Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, ASME, Vol. 1, page 72-80, 1985.
- [14] **A.K. Fung, K.K. Lee**, *A semi-empirical Sea-Spectrum Model for Scattering Coefficient Estimation*, IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 7, No. 4, 1982.
- [15] **K. Yoshimori, K. Itoh, and Y. Ichioka**, *Optical characteristics of a wind-roughened water surface: a two dimensional theory*, Applied Optics, Vol. 34, No. 27, 1995.
- [16] **Abramowitz, M., and I. A. Segun**, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972.
- [17] **C. Bourlier, J. Saillard, G. Berginc**, *Modeling of the spatial autocorrelation function of the heights of the sea*, Oceans'98 IEEE/OES Conference, 28 Sept-1 Oct., Vol. 2, 904-908, 1998, France.
- [18] **C. Bourlier, J. Saillard, G. Berginc**, *Spatial autocorrelation function of the heights of an even sea spectrum*, RADAR, May 17-21 1999, France (Brest), Poster Sessions (Phenomenology).
- [19] **J.A. Olgilvy**, *Theory of wave scattering from random rough surfaces*, Bristol, Philadelphia and New York, Adam Hilger, 1991.
- [20] **Cox, C. S., and W. H. Munk**, *Statistics of the sea surface derived from sun glitter*, J. Mar. Res., 13, pp 198-226, 1954.
- [21] **C. Bourlier, J. Saillard, G. Berginc**, *Study of the slopes variance of the sea surface*, PIERS 13-17 July 1998, page 585, Vol.2, FRANCE.
- [22] **R. J. Wagner**, *Shadowing of Randomly Rough Surfaces*, J. Opt. Soc. Am., Vol. 41, No. 1, pp 138-147, Juin 1966.

- [23] **B. G. Smith**, *Lunar Surface Roughness, Shadowing and Thermal Emission*, J. Geophysical Research, Vol. 72, No. 16, pp 4059-4067, Août 1967.
- [24] **B. G. Smith**, *Geometrical Shadowing of a Random Rough Surface*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, Ap-15, No. 5, pp 668-671, Sept. 1967.
- [25] **C. Bourlier, J. Saillard, G. Berginc**, *Effect of correlation between shadowing and shadowed points on the Wagner and Smith monostatic one-dimensional shadowing functions*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, à paraître en Février-Mars 2000.
- [26] **M. I. Sancer**, *Shadow-Corrected Electromagnetic Scattering from a Randomly Rough Surface*, IEEE Trans. Antennas Propagation, Ap-17, No. 5, pp 577-585, 1969.
- [27] **L. M. Ricciardi, S. Sato**, *On the evaluation of First passage Time Densities for Gaussian Processes*, Signal Processing 11, pp 339-357, 1986.
- [28] **L. M. Ricciardi, S. Sato**, *A note on First passage Time Problems for Gaussian Processes and Varying Boundaries*, IEEE Transactions on information Theory, Vol IT-29, No. 3, May 1983.
- [29] **P. Beckman**, *Shadowing of Random Rough surfaces*, IEEE Trans. Antennas Propagation, Ap-13, pp 384-388, Mai 1965.
- [30] **R. A. Brokelman, T. Hagfors**, *Note of the Effect of Shadowing on the Backscattering of Waves from a Random Rough Surface*, IEEE Trans. Antennas Propagation, Ap-14, pp 621-627, Sept. 1967.
- [31] **Gary S. Brown**, *Shadowing by Non-Gaussian Random Surfaces*, IEEE Transactions on antennas, Vol AP-28, No. 6, November 1980.
- [32] **F. de Coulon**, *Théorie et traitement des signaux*, Dunod 1984.
- [33] **K. Yoshimori, K. Itoh, and Y. Ichioka**, *Optical characteristics of a wind-roughened water surface : a two-dimensional theory*, Applied Opt., Vol. 34, No. 27, September 1995
- [34] **G. Gaussorgues**, *La thermographie infrarouge, Principes, Technologies, Applications*, 4ème édition, 1999.
- [35] **F. Papini, P. Gallet**, *Thermographie infrarouge, image et mesure*, MASSON 1994.
- [36] **K. Masuda, T. Takashima, and Y. Takayama**, *Emissivity of pure and sea waters for the model sea surface in the infrared window regions*, Remote Sensing Environ., 24, 313-329, 1988.
- [37] **P. M. Saunders**, *Shadowing on the ocean and the existence of the horizon*, J. Geophys. Res. 72, 4643-4649 (1967).
- [38] **X. Wu and W. L. Smith**, *Emissivity of rough sea surface for 8-13 μm : modeling and verification*, Applied Optics, Vol. 36, No. 12, April 1997
- [39] **K. Yoshimori, K. Itoh, and Y. Ichioka**, *Thermal radiative and reflective characteristics of a wind-roughened water surface*, J. Opt. Soc. Am., Vol. 11, No. 6, June 1994.
- [40] **G. M. Hale and M. R. Querry**, *Optical constants of water in the 200-nm to 200- μm wavelength region*, Appl. Opt. 12, 555-563 (1973)
- [41] **K. Yoshimori, K. Itoh, and Y. Ichioka**, *statistically corrected ocean thermography*, Applied Opt., Vol. 33, No. 30, October 1994
- [42] **D. Lemaire, P. Sobieski**, *Full range Sea Surface Spectrum in Nonfully Developed State for Scattering Calculations*, IEEE Trans. Geos. and Remote Sensing, Vol. 37, No. 2, March 1999.
- [43] **C. Bourlier, J. Saillard, G. Berginc**, *Three chapters : "Study of the sea behavior", "The shadowing function" and "Emissivity of the sea surface"*, Progress In Electromagnetic Research, Chief Editor J.A. Kong, à paraître dans l'année 2000 dans l'ouvrage PIER 27, pages 185-335.