Mathématiques de base pour les ingénieurs : Analyse et Algèbre

Christophe BOURLIER
Chargé de Recherche CNRS au laboratoire IETR, Site de Nantes

Cours ETN3
Département ETN, Polytech'Nantes

25 juillet 2012

Table des matières

Table des figures

1 Fonction d'une seule variable réelle

1.1 Quelques définitions

Les fonctions dont il sera question dans ce chapitre sont des applications d'une partie de l'ensemble des **réels**, à valeurs dans l'ensemble des **réels**.

Définition 1.1 *Domaine. Si f est une fonction on appelle domaine de définition de f, D_f, l'ensemble des réels pour lesquels $f(x)$ existe.*

Exemple 1.1 *Si*

$$f(x) = \ln\left[\frac{1}{(x-1)(x-3)}\right],$$

alors $D_f =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$. C'est l'ensemble ou le dénominateur est positif et non nul. Soit $(x-1)(x-3) > 0$.

Exemple 1.2 *Si*

$$f(x) = -\ln(x-1) - \ln(x-3),$$

alors $D_f =]3; +\infty[$. C'est l'ensemble pour lequel chacun des arguments des fonctions logarithmiques est strictement positif. Soit $x-1 > 0$ et $x-3 > 0$.

Définition 1.2 *Image. On appelle image de f, I_f, l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $f(x)$.*

Exemple 1.3 *Si $f(x) = \sqrt{|x|}$, alors $D_f =]-\infty; +\infty[$ et $I_f = [0; +\infty[$.*

Exemple 1.4 *Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $D_f = [0; +\infty[$ et $I_f = [0; +\infty[$.*

Définition 1.3 *Bijective. Soit l'application f de E dans F, alors f est bijective si tout élément de F (arrivée) admet alors un antécédent et un seul dans E (départ).*

Définition 1.4 *Fonction Réciproque. Si f est une bijection de E dans F, alors pour tout y de F, il existe un unique x de E tel que $y = f(x)$. On peut donc définir x comme l'image de y par l'application réciproque de f notée f^{-1}. Dans un repère orthonormé, le graphe de f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la bissectrice d'équation $y = x$.*

Exemple 1.5 *Par exemple la fonction "racine carrée" est une bijection de* $D_f = [0, +\infty[$ *sur lui même* ($I_f = D_f$)*, dont la réciproque est la fonction "carrée", mais prise uniquement sur* $[0, +\infty[$.

Définition 1.5 *Paire. Une fonction est dite paire, si* $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f,\ f(-x) = +f(x)$.

Définition 1.6 *Impaire. Une fonction est dite impaire, si* $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemple 1.6 *La fonction* $f(x) = x^2$ *est une fonction paire tandis que la fonction* $f(x) = x^3$ *est une fonction impaire.*

1.2 Limite d'une fonction

La notion de limite est très difficile à définir en termes rigoureux, il est d'ailleurs plus utile de comprendre quelle réalité concrète elle entend traduire, et comment en faire l'évaluation dans la pratique, plutôt que d'en saisir la définition formelle. Expérimentalement L est la limite au voisinage de a, de la fonction f lorsque la variable se rapproche (en restant dans le domaine de f) de a, si "plus x est proche de a" alors "plus f est proche de L".

Lorsque la fonction n'est pas définie en a, alors on est ramené à calculer la limite de f en a^+ (à droite de la valeur de a) et en a^- (à gauche de la valeur de a).

Exercice 1.1 *Soit* $f(x) = x + \sqrt{x^2}/x$. *Déterminer le domaine de définition de* f*, noté* D_f*, étudier la limite de* f *en* $\{0^+, 0^-\}$ *et simplifier* f *pour* $x \in D_f$.

Théorèmes principaux sur les limites :

Théorème 1.1 *"Théorèmes des gendarmes". Si au voisinage de* a*, fini ou non,* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim\limits_{x\to a} h = \lim\limits_{x\to a} g = L$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f = L$.

Théorème 1.2 *Fonction composée. Soit* f *l'application de* E *dans* F *et* g *l'application de* F *dans* G *et* a*,* L*,* L' *finis ou non, alors si* $\lim\limits_{x\to a} f = L$ *et* $\lim\limits_{x\to L} g = L'$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g \circ f = L'$.

Théorème 1.3 *Opération sur les limites. Avec les conventions de calcul sur* $\pm\infty$*, et surtout lorsque le membre de droite de ces égalités ne conduit pas à une forme indéterminée, on montre les résultats suivants (toutes les limites sont au même point) :* $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$, $\lim(fg) = \lim f \lim g$, $\lim(f/g) = \lim f / \lim g$.

Exercice 1.2 *Calculer la limite de* $f(x) = 2x^3 - 5x$ *pour* $x \to +\infty$. *Montrer pour un polynôme de degré* n *défini par* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *avec* a_n *réel est différent de zéro, que* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

Théorème 1.4 *Limite d'une fonction rationnelle. Lorsque* x *tend vers* $\pm\infty$*, une fonction rationnelle a la même limite que, le quotient de ses termes de plus haut degré.*

Exercice 1.3 *Demontrer ce théorème.*

Les formes indéterminées (nécessitant un calcul parfois difficile) sont

$$\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, 1^{\infty}, +\infty - \infty}, \tag{1.1}$$

indépendamment des signes. L'indétermination peut être levée de la manière suivante :

1. un changement de variable sur la fonction et utilisation du théorème 1.2,
2. un changement de variable sur la valeur où est évaluée la limite,
3. pour une fonction comportant des radicaux, en multipliant la fonction par son expression conjuguée,
4. en utilisant un développement limité de la fonction au voisinage de la valeur a où est évaluée la limite,
5. règle de l'Hospital (cas particulier du développement limité) : si une expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ pour $x = a$ et si $g'(a) \neq 0$ (dérivée de g au point a), alors

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}}. \tag{1.2}$$

Exercice 1.4 *Calculer les limites suivantes :*

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}} & \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \\ \\ \lim_{x \to 0^+} x \ln x & \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^x \end{cases}.$$

1.3 Continuité

Définition 1.7 *Continuité. Une fonction f, définie au voisinage d'un réel a, est dite continue en a, si $\lim_{x \to a} = f(a) = L$ où L est un nombre* ***fini****.*

Théorème 1.5 *Continuité d'une fonction polynôme. Toute fonction polynôme est continue sur l'ensemble des réels.*

Théorème 1.6 *Continuité d'une fonction rationnelle. Une fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.*

Théorème 1.7 *Si f est continue sur $[a; b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet* ***au moins*** *une solution dans $]a; b[$.*

Exercice 1.5 *Montrer que l'équation $f(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1$ admet au moins une solution dans $]a; b[$.*

Théorème 1.8 *Si f est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur $[a;b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution* ***unique*** *dans $]a;b[$.*

Théorème 1.9 *Si f est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a;b]$, alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$ (resp. $[f(b);f(a)]$).*

Ce théorème est utilisée pour la définition des fonctions réciproques.

Définition 1.8 *Prolongement par continuité. Si f n'admet pas de valeur en a mais admet une limite finie L en a, il suffit de poser $f_1(a) = L$ et $f_1(x) = f(x)$ pour $x \neq a$, pour que cette nouvelle fonction f_1 soit continue en a. On dit alors que f_1 est un prolongement par continuité de f en a.*

Exercice 1.6 *Prolonger par continuité en zéro la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.*

1.4 Dérivée

Définition 1.9 *Dérivée en un point. Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement de f en x, admet une limite finie quand x tend vers x_0 et on note*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}. \tag{1.3}$$

Exercice 1.7 *Donner une interprétation physique de la dérivée et donner l'équation de la tangente en x_0 à la courbe correspondante à f.*

Théorème 1.10 *Dérivabilité et continuité. Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque est* ***fausse****.*

Exercice 1.8 *Donner les domaines de continuité et de dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.*

Définition 1.10 *Dérivée à droite, dérivée à gauche. Il se peut que le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ait une limite à gauche seulement, on dit alors que f est dérivable à gauche, mais pas dérivable. On définit de même la dérivée à droite. Si les dérivées à droite et à gauche sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable.*

Théorème 1.11 *Croissance et décroissance d'une fonction. Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$, alors f est croissante sur $[a;b]$, ssi $\forall x \in [a;b]$, $f'(x) \geq 0$ et f est décroissante sur $[a;b]$, ssi $\forall x \in [a;b]$, $f'(x) \leq 0$.*

Si l'inégalité devient stricte alors f est **strictement** croissante ou décroissante. Si au point x_0, la dérivée existe et change de signe alors f présente en x_0 un extremum (minimum ou maximum).

Un point d'inflexion est un point pour lequel la courbe traverse la tangente. Le théorème ci-dessous fournit une condition suffisante pour l'existence d'inflexion.

Théorème 1.12 *Point d'inflexion. Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors f est* ***convexe*** *sur $[a;b]$ ssi et $f''(x) \geq 0$ est* ***concave*** *sur $[a;b]$ ssi et $f''(x) \leq 0$. Si $f''(x)$ s'annule et change de signe en x_0, alors f présente en x_0 un point d'inflexion.*

Exercice 1.9 *Donner le point d'inflexion de la fonction de $f(x) = x^3$.*

Exercice 1.10 *Remplir le tableau suivant :*

Fonctions	Dérivées
$\cos(x)$	
$\sin(x)$	
$\tan(x)$	
$f(x) + g(x)$	
$f(x)g(x)$	
$f(x)/g(x)$	
$\ln[f(x)]$	
$\exp[f(x)]$	
$[f(x)]^{g(x)}$	
$f^{-1}(x)$	
$\arctan(x)$	
$\arccos(x)$	
$\sqrt{f(x)}$	
$[f(x)]^p$	

TABLE 1.1 – Dérivées usuelles.

1.5 Développement limité

Théorème 1.13 *Formule de Taylor. Si f est n fois dérivable au voisinage de x_0, alors elle admet un développement limité suivant à l'ordre n :*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o\left[(x - x_0)^n\right]}. \tag{1.4}$$

Notation de Landau : on note $y(x) = \mathrm{o}\left[(x - x_0)^n\right]$ si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{y(x)}{(x - x_0)^n}$ est nulle. La formule de Mac-Laurin est obtenue pour $x_0 = 0$. Le tableau ci-dessous donne les développements limités de quelques fonctions.

Fonctions	Dérivées
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\exp(x)$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$

TABLE 1.2 – Développements limités en zéro de fonctions usuelles.

Exercice 1.11 *Démonter les développements limités du tableau 1.2.*

Exercice 1.12 *Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$ à l'ordre 2 et au voisinage de $x = x_0 = 0$.*

Exercice 1.13 *Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = \tan(x)$ à l'ordre 3 et au voisinage de $x = x_0 = 0$.*

1.6 Intégrale

1.6.1 Définition au sens de Riemann

Définition 1.11 *Intégrale définie. Soit un axe orienté (Ox) sur lequel on place deux points A_1 et A_2 d'abscisses respectives a_1 et a_2 ($a_2 > a_1$). Divisons le segment $[A_1 A_2]$ en petits segments* *à l'aide des points arbitraires d'abscisses successives x_1, x_2, ..., x_{n-1} et considérons les abscisses ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n situées respectivement dans les intervalles $[a_1; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; a_2]$. Considérons maintenant une fonction $f(x)$* ***définie*** *et* ***continue*** *sur $[a_1; a_2]$; au point d'abscisse ξ_n, elle prend la valeur $y_n = f(x_n)$.*

A la fonction f, on associe la somme S_n (qui est une somme de ***Riemann****)*

$$S_n = y_1(x_1 - a_1) + y_2(x_2 - x_1) + \ldots + y_n(a_2 - x_{n_1}) = \sum_{i=1}^{i=n} y_i \Delta x_i,$$

avec $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a_1$ et $x_n = a_2$. La limite lorsqu'elle existe, de S_n quand n tend vers l'infini et que tous les Δx_i du partage de $[A_1 A_2]$ tendent vers zéro est appelée ***intégrale définie*** *de $f(x)$ sur l'intervalle d'intégration $[a_1; a_2]$; elle s'écrit :*

$$\boxed{I = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} y_i \Delta x_i}, \tag{1.5}$$

où a_1 et a_2 sont les bornes (inférieure et supérieure) d'intégration et dx l'élément différentiel d'intégration.

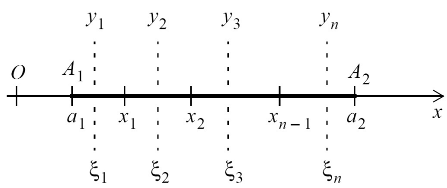

FIGURE 1.1 – Définition d'une intégrale définie.

Une autre représentation possible est de considérer la courbe Γ représentative de la fonction $y = f(x)$. Dans ce cas, le premier terme $y_1(x_1 - a_1)$ de la série S_n représente l'aire du rectangle de largeur $x_1 - a_1$ et de hauteur y_1. Dans le cas où y est positif, la somme S_n représente une valeur *approchée* de l'aire du domaine D limité par Γ, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a_1$ et $x = a_2$. Lorsque $n \to +\infty$, la limite de S_n correspond **exactement** à l'aire du domaine D.

1.6.2 Propriétés générales des intégrales définies

Si f est une fonction définie et continue sur $[a; b]$ $(a < b)$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Si $c \in [a; b]$ et si f est intégrable sur $[a; c]$ et $[c; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

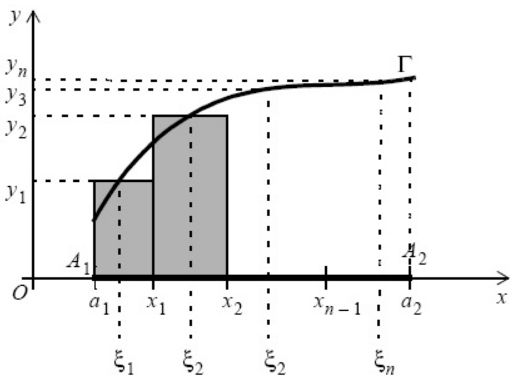

FIGURE 1.2 – Signification graphique d'une intégrale définie.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ (constante), alors

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Si f est un fonction paire et impaire, on a respectivement

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \qquad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Si deux fonctions f et g sont intégrables sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

1.6.3 Primitive

Définition 1.12 *Relation entre intégrale et primitive. On appelle primitive de la fonction f définie et continue, toute fonction F telle que :*

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)}. \tag{1.6}$$

Théorème 1.14 *Si la fonction F est une primitive de la fonction f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

1.6.4 Méthodes usuelles d'intégration

Si la détermination de $\int f(x)dx$ n'est pas immédiate, un changement de variable $x = g(t)$ avec $dx = g'(t)dt$ peut conduire à

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f\,[g(t)]\, g'(t)dt = \int \phi(t)dt}, \tag{1.7}$$

où la primitive de la fonction $\phi(t)$ est connue. Pour les intégrales bornées on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[g(t)\right] g'(t)dt = \int_\alpha^\beta \phi(t)dt \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{array} \right.}. \tag{1.8}$$

Exercice 1.14 *Calculer l'intégrale* $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$. *On pourra poser* $x = cos(t)$.

Théorème 1.15 *Intégration par partie. Soient u et v deux fonctions dérivables de x telles que $f(x) = u(x)v'(x)$, alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}. \tag{1.9}$$

Exercice 1.15 *Calculer la primiive de* $\ln x$ *pour* $x \in]0; +\infty[$.

1.6.5 Méthodes spécifiques d'intégration

1.6.5.1 Fonctions rationnelles

Définition 1.13 *Fonction rationnelle. On appelle fonction rationnelle le rapport $N(x)/D(x)$ de deux polynômes $N(x)$ (numérateur) et $D(x)$ (dénominateur) de degrés respectifs n et d.*

Pour calculer la primitive d'une fonction rationnelle, pour $n \geq d$, on effectue au préalable la division

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{D(x)}}, \tag{1.10}$$

où le **polynôme** E est appelé partie entière et où le degré r de la fonction R est tel que $r < d$. L'intégrale de la fonction E s'obtient alors facilement en appliquant la relation

$$\boxed{\int x^n dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{avec} \quad n+1 \neq 0 \quad \text{et} \quad C \in \mathbb{R}}. \tag{1.11}$$

• **Cas où la fonction D possède des racines simples et réelles.** Dans le cas où les N racines $\{x_n\}$ de $D(x)$ sont **simples** et **réelles** alors

$$\boxed{\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{A_n}{x - x_n}}. \tag{1.12}$$

Les éléments de la somme sont appelés **éléments simples de première espèce**. Les constantes $\{A_n\}$ sont calculées soit en identifiant les puissances égales à x où en calculant la limite suivante

$$\lim_{x \to x_n} \frac{R(x)}{D(x)}(x - x_n) = A_n.$$

La primitive $\frac{R(x)}{D(x)}$ s'écrit alors

$$\boxed{\int \frac{R(x)}{D(x)}dx = C + \sum_{n=1}^{n=N} A_n \ln|x - x_n|}. \tag{1.13}$$

Exercice 1.16 *Montrer que*

$$f(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 6}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 3 + \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Décomposer alors f en éléments simples et en déduire une primivite sur son ensemble de définition D_f.

• **Cas où la fonction D possède une racine multiple et réelle.** Dans le cas où la racine x_1 de $D(x) = 0$ est réelle, **unique** mais **multiple** d'ordre M alors

$$\boxed{\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{m=1}^{m=M} \frac{B_m}{(x - x_1)^m}}. \tag{1.14}$$

Les constantes $\{B_m\}$ sont calculées soit en identifiant les puissances égales à x où en calculant les limites suivantes

$$\begin{aligned}
B_M &= \lim_{x \to x_1} \left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_1)^M\right], \\
B_{M-1} &= \lim_{x \to x_1} \frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_1)^M\right], \\
B_{M-m} &= \frac{1}{m!} \lim_{x \to x_1} \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{R(x)}{D(x)}(x - x_1)^M\right].
\end{aligned}$$

On intègre alors terme à terme sachant que

$$\boxed{\int \frac{1}{(x - x_1)^m}dx = C + \frac{(x - x_1)^{1-m}}{1 - m} \quad \text{avec} \quad m \neq 1 \quad \text{et } C \in \mathbb{R}}. \tag{1.16}$$

Exercice 1.17 *Décomposer en éléments simples la fonction $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$ et en déduire une primitive.*

• **Cas où la fonction D possède des racines simples et complexes.** Si $D(x) = 0$ admet des racines **complexes** et **simples**, elles sont obligatoirement conjuguées deux à deux. Pour N racines $\{x_n = \alpha_n + j\beta_n, \bar{x}_n = \alpha_n - j\beta_n\}$, la décomposition prend alors la forme

$$\boxed{\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{xA_n + B_n}{(x - x_n)(x - \bar{x}_n)} = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{xA_n + B_n}{x^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 - 2x\alpha_n}}. \tag{1.17}$$

Les éléments de la somme sont appelés **éléments simples de seconde espèce**. De plus on peut écrire

$$x^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 - 2x\alpha_n = (x - \alpha_n)^2 + \beta_n^2 = \beta_n^2\left[1 + \left(\frac{x - \alpha_n}{\beta_n}\right)^2\right].$$

Par conséquent le changement de variable $t = \frac{x-\alpha_n}{\beta_n}$ où $dt = \frac{dx}{\beta_n}$ conduit à

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}dx = \frac{1}{\beta_n}\int \frac{A_n(t\beta_n + \alpha_n) + B_n}{1+t^2} = A_n \int \frac{tdt}{1+t^2} + \frac{A_n\alpha_n + B_n}{\beta_n}\int \frac{dt}{1+t^2}.$$

Soit

$$\boxed{\int \frac{R(x)}{D(x)}dx = C + \frac{A_n}{2}\ln\left|1+t^2\right| + \frac{A_n\alpha_n + B_n}{\beta_n}\arctan(t) \quad \text{avec} \quad t = \frac{x-\alpha_n}{\beta_n}}. \tag{1.18}$$

Exercice 1.18 *Calculer une primitive de* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 5}$.

Dans le cas général, où l'équation possède à la fois des racines réelles, complexess et multiples, la décomposition résultante est une combinaison des décompositions précédentes.

1.6.5.2 Intégration des fonctions trigonométriques

• **Fonction rationnelle en** $\sin(x)$ **et** $\cos(x)$**.** Les intégrales sont de la forme

$$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = \int f(x)dx,$$

où R est une fonction rationnelle.

Règle dite de **Bioche** :

1. Si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$, on pose alors $t = \cos(x)$.
2. Si $f(\pi - x)d(\pi - x) = f(x)dx$, on pose alors $t = \sin(x)$.
3. Si $f(\pi + x)d(\pi + x) = f(x)dx$, on pose alors $t = \tan(x)$.

D'une façon générale, il est toujours possible d'effectuer le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ car

$$\boxed{\begin{cases} \sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\[2ex] dt = \dfrac{dx}{2}\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}}. \tag{1.19}$$

on se ramène ainsi à l'intégration d'une fonction rationnelle selon la variable t.

Exercice 1.19 *Calculer une primitive de* $\frac{1}{\sin(x)}$ *en utilisant deux méthodes*

– *La règle de Bioche.*
– *En posant* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

• **Fonction rationnelle en** $\tan(x)$**.** Dans ce cas on pose $t = \tan(x)$ et $dt = dx(1+t^2)$.

- **Intégrales de la forme** $\sin^m(x)\cos^n(x)$**.** Deux cas possibles :

1. Si m et n sont **pairs**. On linéarise l'expression $\sin^m x \cos^n x$ en l'exprimant en fonction des fonctions sinus et cosinus des arcs multiples de x ($\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$, $\sin(3x)$, $\ldots$). Pour des valeurs de m et n grandes, on utilise les formules d'Euler et le triangle de Pascal.
2. Si m et n sont **impairs**. Pour m **impair**, on pose $t = \cos(x)$. Pour n **impair**, on pose $t = \sin(x)$.

Exercice 1.20 *Calculer une primitive de la fonction* $\sin^4(x)$*.*

1.7 Equation différentielle

Définition 1.14 *Equation différentielle du* $n^{\text{ième}}$ *ordre. On appelle équation différentielle du* $n^{\text{ième}}$ *ordre, vérifiée par une fonction* $y(x)$*, une relation de la forme*

$$\boxed{F\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0}, \tag{1.20}$$

où x *est la variable indépendante.*

On appelle solution ou intégrale de l'équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ *qui vérifie l'équation précédente ; la solution générale est une fonction* $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ *comportant* n ***constantes arbitraires****. Ces constantes sont déterminées par des* ***conditions particulières*** *qui sont les valeurs prises par* y*,* $\frac{dy}{dx}$*,* $\frac{d^2y}{dx^2}$*,* $\ldots$*,* $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ *pour une valeur donnée de* x *; si* $x = 0$*, les conditions sont dites* ***conditions initiales****.*

De plus, si les différentes dérivées $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ *sont du premier degré et ne se multiplient pas entre elles alors l'équation différentielle est dite* ***linéaire****.*

Exercice 1.21 *Donner un "nom" (linéaire ou pas, ordre, coefficients constants ou pas, avec ou sans second membre) aux équations différentielles suivantes :*

1. $xy'(x) + y(x) = 0$.
2. $y'(x) + y(x) = 2x$.
3. $y''(x) + y^2(x) = 0$.
4. $x^2y'(x)y''(x) = \exp(x)$.

1.7.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 1.15 *Equation différentielle linéaire du premier ordre. Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients variables est définie par*

$$\boxed{a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)}. \tag{1.21}$$

Dans tout intervalle, où la fonction $a(x)$ ne s'annule pas, l'équation précédente prend la forme

$$y'(x) + B(x)y(x) = \Phi(x) \quad \text{avec} \quad B(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{f(x)}{a(x)}.$$

$\Phi(x)$ désigne le **second membre** de l'équation **complète** (ou équation **avec** second membre). L'équation $y'(x) + B(x)y(x)$ est l'équation **homogène** associée (ou équation **sans** second membre).

La solution générale de l'équation différentielle complète s'écrit :

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}, \tag{1.22}$$

où y_H est la solution de l'équation **homogène** et y_P une solution **particulière** de l'équation avec second membre.

• **Calcul de la solution homogène.** On a donc pour y_H

$$y_H'(x) + B(x)y_H(x) = 0,$$

qui s'écrit avec $y_H \neq 0$ comme

$$\frac{dy_H(x)}{y_H(x)} = -B(x)dx \quad \text{soit} \quad \ln|y_H(x)| = -\int B(x)dx + C_1 \quad \text{avec} \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Au final

$$\boxed{y_H(x) = C \times u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \exp\left(-\int B(x)dx\right) \quad \text{et} \quad C = \exp(C_1) \in \mathbb{R}}. \tag{1.23}$$

On peut remarquer que $y_H \neq 0$ car la fonction exponentielle est toujours différente de zéro.

• **Calcul de la solution particulière.** Pour la recherche de y_P, on utilise la méthode de **"la variation de la constante" de Lagrange** qui consiste à considérer la constante C de la solution comme une fonction inconnue de la variable x. Ainsi

$$\begin{aligned} y_P(x) = C \times u(x) \to y_P(x) = C(x) \times u(x) \quad \text{et} \quad y_P'(x) &= [C(x) \times u(x)]' \\ &= C(x)u'(x) + u(x)C'(x). \end{aligned}$$

En portant cette équation dans l'équation différentielle **complète**, $y'(x) + B(x)y(x) = \Phi(x)$ avec $y(x) = y_P(x)$, il vient

$$C(x)\left[u'(x) + B(x)u(x)\right] + u(x)C'(x) = \Phi(x).$$

Comme la fonction $Cu(x)$ vérifie l'équation homogène, on a $u'(x)+B(x)u(x) = 0$ qui implique

$$C'(x) = \frac{\Phi(x)}{u(x)} \quad \text{donc} \quad C(x) = \int \frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\boxed{y_P(x) = C(x)u(x) = \left[\int \frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K\right] u(x).}. \tag{1.24}$$

• **Solution générale.** La solution générale est donc

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y_H(x) + y_P(x) = Cu(x) + \left[\int \frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K\right]u(x) \\
&= \left[\int \frac{\Phi(x)}{u(x)}dx + K_1\right]u(x) \quad \text{avec} \quad K_1 = (C+K) \in \mathbb{R} \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Exercice 1.22 *Résoudre l'équation différentielle* $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = x$.

1.7.2 Equation différentielle linéaire du second ordre

Définition 1.16 *La forme générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à* ***coefficients constants*** *s'écrit*

$$\boxed{ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \Phi(x)}, \qquad (1.26)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}$. *La fonction* $\Phi(x)$ *désigne le second membre de l'équation* ***complète*** *(ou équation avec second membre). Le membre* $ay''(x) + by'(x) + c$ *est l'équation* ***homogène*** *associée (ou équation* ***sans*** *second membre).*

Comme précédemment la solution générale de l'équation différentielle complète s'écrit

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}, \qquad (1.27)$$

où y_H est la solution générale de l'équation **homogène** et y_P une solution **particulière** de l'équation **avec** second membre.

• **Calcul de la solution homogène.** On a donc pour y_H

$$ay_H''(x) + by_H'(x) + c = 0.$$

On cherche alors des solutions de la forme $y_H(x) = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$. L'équation homogène devient alors $e^{rx}(ar^2+br+c) = 0$. Comme e^{rx} est toujours différent de zéro, la relation précédente n'est satisfaite, quelque soit x, que si r est racine de l'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0,$$

appelée équation caractéristique de l'équation différentielle. On distingue alors trois cas selon le signe du discriminant $\Delta^2 = b^2 - 4ac$ (tableau 1.3).

La solution de l'équation homogène précédente peut, dans les trois cas, s'écrire sous la forme générale $y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, où C_1 et C_2 sont des constantes et $y_1(x)$, $y_2(x)$ sont deux solutions **linéairement indépendantes** de l'équation homogène. La recherche de la solution particulière $y_P(x)$ s'effectue en utilisant la méthode de la **variation de la constante**. Ainsi on peut montrer que les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ vérifient le système différentiel à deux inconnues suivant

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) = 0 \\
a\left[y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x)\right] = \Phi(x) + c
\end{array}
\right. .
$$

Selon la valeur de la fonction $\Phi(x)$, on obtient alors le tableau 1.4.

Cette méthode de la variation des constantes reste valable si les coefficients a, b, c dépendent de la variable x.

Condition	Solution de l'équation caractéristique	$y_H(x)$
$\Delta > 0$	2 racines réelles : $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\lambda \pm \Omega$ avec $\lambda = \dfrac{b}{2a}$ et $\Omega = \dfrac{\Delta}{2a}$	$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} =$ $e^{-\lambda x}(C_1 e^{\Omega x} + C_2 e^{-\Omega x})$
$\Delta = 0$	1 racine double : $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = -\lambda$	$e^{-\lambda x}(C_1 + C_2 x)$
$\Delta < 0$	2 racines réelles conjuguées : $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\lambda \pm j\omega$ avec $\lambda = \dfrac{b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$e^{-\lambda x}\left[C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\right]$

TABLE 1.3 – Expression de y_H pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

1.7.3 Transformée de Laplace

Pour des signaux causaux, c'est-à-dire définis pour $x \geq 0$ (dans ce cas la variable x est notée t correspondant au temps et donc à des signaux rencontrés en physique), la transformée de Laplace est un outil très puissant pour résoudre les équations différentielles. Dans cette partie, nous donnerons uniquement les résultats principaux nécessaires à la résolution d'une équation différentielle, car la transformée de Laplace sera étudiée en détail dans les cours de signal et d'analyse fonctionnelle.

Définition 1.17 *Transformée de Laplace monolatérale. Pour une fonction f définie pour $t \geq 0$, la transformée de Laplace* ***monolatérale****, notée $\mathcal{L}$, s'écrit*

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{1.28}$$

où p est appelée variable de Laplace. Dans la suite, on supposera que l'intégrale est convergente. Ainsi à partir de la définition, on montre les résultats donnés dans le tableau 1.5.

Exercice 1.23 *Calculer la transformée de Laplace de* 1, e^{-at}, $\cos(\omega t)$ *et* $\sin(\omega t)$.

Exercice 1.24 *Résoudre l'équation différentielle* $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = te^t$ *avec* $y(0) = y'(0) = 0$ *en utilisant la transformée de Laplace.*

Forme du second membre	Forme de la solution particulière
$\Phi(x) = P(x)$ où P est un polynôme de dégré n.	y_P est un polynôme de degré - n, si $c \neq 0$. - $n+1$, si $c = 0$ et $b \neq 0$. - $n+2$, si $c = 0$ et $b = 0$.
$\Phi(x) = \Phi_0 e^{\beta x}$ où $\Phi_0 \in \mathbb{R}$.	Si β n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $y_P(x) = Ce^{\beta x}$. Si β est racine simple, alors $y_P(x) = Cxe^{\beta x}$. Si β est racine double, alors $y_P(x) = Cx^2e^{\beta x}$.
$\Phi(x) = \Phi_1 \cos(\beta x) + \Phi_2 \sin(\beta x)$.	$y_P(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$.
$\Phi(x) = P(x)e^{\beta x}$, où P est un polynôme de dégré n.	$y_P(x) = x^k Q(x)e^{\beta x}$, où Q est un polynôme de dégré n et - $k = 0$, si β n'est pas racine de l'équation caractéristique. - $k = 1$, si β est racine simple. - $k = 2$, si β est racine double.

Table 1.4 – Forme de la solution particulière pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

$f(t)$ pour $t \geq 0$	Transformée de Laplace
1 (Fonction échelon)	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^nF}{dp^n}$

Table 1.5 – Transformées de Laplace usuelles.

2 Fonction de plusieurs variables réelles

2.1 Fonction à deux variables

Définition 2.1 *Fonction dà deux variables. On dit que f est une fonction à deux variables x_1 et x_2 lorsqu'on peut faire correspondre à tout couple de nombre x_1 et x_2 une valeur f.*

Exemple 2.1 *Le produit des facteurs x_1 et x_2 est fonction de deux variables x_1 et x_2. Les valeurs de x_1 et x_2 peuvent être arbitraires. On note alors $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.*

Le couple de valeurs x_1 et x_2 est représenté géométriquement par le point $M(x_1, x_2)$ rapporté au système de coordonnées rectangulaires (Ox, Oy).

Définition 2.2 *Domaine. Si f est une fonction on appelle* ***domaine de définition*** *l'ensemble des réels x_1 et x_2 pour lesquels la fonction f existe.*

Exercice 2.1 *Donner le domaine de définition de la fonction $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.*

Définition 2.3 *Limite. Le nombre L est appelé limite de la fonction f au point $M_0(x_{10}, x_{20})$ si f se rapproche indéfiniment de L chaque fois que le point $M(x_1, x_2)$ se rapproche indéfiniment du point M_0. On note*

$$\boxed{L = \lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ x_2 \to x_{20}}} f(x_1, x_2)}. \tag{2.1}$$

Exercice 2.2 *Donner la limite au point $M_0(0, 0)$ des fonctions $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2$ et $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ln x_1 \ln x_2$.*

Définition 2.4 *Continuité en un point. La fonction f est dite continue au point $M_0(x_{10}, x_{20})$ si*

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2) = f(M_0) = L \text{ où } L \text{ est un réél à valeur } \textbf{finie}}. \tag{2.2}$$

Exercice 2.3 *La fonction f est définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ pour $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Donner le domaine de définition de f et étudier sa continuité en 0.*

2.2 Fonction à trois et plusieurs variables

Les notions de fonctions à trois, quatre, etc..., variables et de domaines de définition sont introduites de la même manière que dans le cas de deux variables.

Le domaine de définition d'une fonction f à trois variables x_1, x_2 et x_3 est représenté par un ensemble de points de l'espace et on note $z = f(x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 2.4 *Soit la fonction* $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{A^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$. *Donner le domaine de définition de* f *et en donner une interprétation géométrique.*

2.3 Dérivées partielles

Définition 2.5 *Dérivée partielle. Soit* f *une fonction à* n *variables* x_1, x_2, $\ldots$, x_n, *si toutes les variables sont fixées à la valeur* x_{i0} *sauf la variable* x_1, *on obtient une fonction* g *de la seule variable* x_1 *dont on peut étudier la dérivabilité au point* x_{10} *; si c'est le cas on note*

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{10}} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}) = g'(x_{10}) \\ &= \lim_{x_1 \to x_{10}} \frac{f(x_1, x_{20}, \ldots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}{x_1 - x_{10}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{10} + h, x_{20}, \ldots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}{h}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le même raisonnement est appliqué pour les autres variables. Soit

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_{i0}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{i0}) \text{ avec } i = \{1, 2, \ldots, n\}}. \tag{2.4}$$

Définition 2.6 *Dérivée partielle seconde. Lorsque la fonction* f *admet une dérivée* $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_{i0}}$ *en tout point de* x_{i0} *de* $D_f \subset \mathbb{R}^n$, *on définit une nouvelle fonction à* n *variables dont on peut examiner les dérivées partielles notées*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}}. \tag{2.5}$$

On a alors une dérivée partielle d'ordre 2.

On peut ainsi calculer des dérivées successives, appelées dérivées partielles ; l'ordre p de la dérivée est le nombre de dérivations successives effectuées.

Définition 2.7 *Classe d'une fonction. Une fonction* f *définie sur* $D_f \subset \mathbb{R}^n$ *est dite de* ***classe*** $\mathcal{C}^p$ *sur* D_f *si elle admet des dérivées partielles d'ordre* p ***continues****.*

Théorème 2.1 *Théorème de Schwarz. Si une fonction* f *définie sur* $D_f \subset \mathbb{R}^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$, *alors l'ordre des dérivations n'intervient pas. En d'autres termes*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}}. \tag{2.6}$$

Définition 2.8 *Forme différentielle. Sous condition d'existence des dérivées partielles* $\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\}$ *de la fonction* f*,on appelle* ***forme différentielle*** *de la fonction la quantité*

$$\boxed{\delta f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}. \tag{2.7}$$

La quantité δf représente les variations de f pour des petits déplacements $\{dx_i\}$ (formule utilisée par exemple en physique pour le calcul d'erreur).

Exercice 2.5 *Soit la fonction* $f(x, y) = x^3 - 3x^2 y - 2y^3$*. Déterminer le domaine de définition de* f*. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 selon les variables* x*,* y *et vérifier le théorème de Schwarz. En déduire la forme différentielle de* f*.*

Exercice 2.6 *Aux bornes d'une résistance de valeur* $R = 1 \pm 10\%\ k\Omega$*, la valeur du courant mesurée vaut* $I = 1 \pm 0.05\ A$*. Quelle est alors l'incertitude* ΔU *sur la valeur de la tension* U*.*

Théorème 2.2 *Exemple de dérivation des fonction composées.*

Soit f *une fonction à trois variables* x_1*,* x_2 *et* x_3*, pour lesquelles elles dépendent de la variable* u *; soit* $x_i = x_i(u)$ *avec* $i = \{1, 2, 3\}$*. On cherche alors à calculer la dérivée partielle de* f *selon la variable* u*. Sous la condition d'existence des dérivées partielles on peut alors montrer que*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x_3}}. \tag{2.8}$$

Soit f *une fonction à deux variables* x_1 *et* x_2*, pour lesquelles elles dépendent des variables* u_1 *et* u_2*, soit* $x_i = x_i(u_1, u_2)$ *avec* $i = \{1, 2\}$*. On cherche alors à calculer la dérivée partielle de* f *selon les variables* u_1 *et* u_2*. Sous la condition d'existence des dérivées partielles on peut alors montrer que*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial u_2} = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{cases}}. \tag{2.9}$$

Exercice 2.7 *Soit* f *une fonction à deux variables* x *et* y *exprimée en coordonnées cartésiennes. On cherche alors à exprimer cette fonction en coordonnées polaires* (r, θ)*, où* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$*. On suppose que la fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$*. Montrer alors que le laplacien de* f *vérifie*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

2.4 Formule de Taylor

Soit f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^n$ (où D_f est un espace ouvert de $\mathbb{R}^n$) et de classe $\mathcal{C}^p$, on note

$$\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0})\right]^{[p]} = \sum_{i_1+\ldots+i_n=p} \frac{p!}{i_1! \ldots i_n!} h_1^{i_1} \ldots h_n^{i_n} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}}(x_{10}, \ldots, x_{n0}).$$

Théorème 2.3 *Formule de Taylor-Lagrange. Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$. Si x_{i0} et $x_{i0}+h$ sont deux points tels que les segments $[x_{10}+h_1], \ldots, [x_{n0}+h_n]$ soient contenus dans D_f, alors*

$$\begin{aligned} f(x_{10}+h_1,\ldots,x_{n0}+h_n) &= f(x_{10},\ldots,x_{n0}) + \left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},\ldots,x_{n0})\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},\ldots,x_{n0})\right]^{[2]} + \ldots \\ &+ \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},\ldots,x_{n0})\right]^{[k]} \\ &+ \mathcal{O}\left(\left[h_1^2+\ldots+h_n^2\right]^{k/2}\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Exercice 2.8 *Ecrire un développement limité jusqu'à l'ordre 2, d'une fonction $f(x_{10}+h_1, x_{20}+h_2)$ à deux variables au voisinage de x_{10} et x_{20}.*

2.5 Extremum

Soit f une fonction définie de D_f ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.9 *Extremum relatif. Si $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un **extremum relatif** en un point a de D_f et si f est différentiable en a, alors $\delta f_a = 0$ (en d'autres termes, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout i).*

A noter que la réciproque est fausse.

Un point a pour lequel $\delta f_a = 0$ est appelé **point critique**. Ce résultat nous dit qu'un extremum relatif est nécessairement un point critique. Le problème devient alors : ayant un point critique, comment déterminer que celui-ci est un extremum ? Pour cela écrivons la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f supposée de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{aligned} f(x_{10}+h_1,\ldots,x_{n0}+h_n) - f(x_{10},\ldots,x_{n0}) &= \sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},\ldots,x_{n0}) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},\ldots,x_{n0})\right]^{[2]}. \end{aligned}$$

Au point critique $a = (x_{10},\ldots,x_{n0})$ on a donc

$$f(x_{10}+h_1,\ldots,x_{n0}+h_n) - f(x_{10},\ldots,x_{n0}) = \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{i=n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},\ldots,x_{n0})\right]^{[2]}.$$

Le signe de $f(x_{10}+h_1,\ldots,x_{n0}+h_n) - f(x_{10},\ldots,x_{n0})$ est donc donné par le signe de

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{10},\ldots,x_{n0}) + 2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j<i} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_{10},\ldots,x_{n0}),$$

si cette somme garde un signe constant pour $h_1^2 + \ldots + h_n^2$ suffisamment petit.

Soit la quadrique

$$\boxed{Q(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j<i} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_{10}, \ldots, x_{n0})}, \tag{2.11}$$

si celle-ci demeure :
- **Positive**, la fonction f présentera un **minimum relatif** au point a.
- **Négative**, la fonction f présentera un **maximum relatif** au point a.

Dans le cas où elle ne garde pas un signe constant nous ne pourrons pas conclure.

Pour une fonction à deux variables, une autre méthode consiste à utiliser le théorème suivant ;

Théorème 2.4 *Soit la fonction $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\delta f_a = 0$ pour $a \in D_f$. Posons*

$$\boxed{r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)}, \tag{2.12}$$

alors,
- *Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a.*
- *Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif en a.*
- *Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas un extremum en a.*
- *Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut conclure.*

Exercice 2.9 *Etudier les extrema relatifs de la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.*

Pour une fonction à plusieurs variables, le théorème précédent peut être généralisé. On forme alors la matrice $[H]$ Hessienne de f, dont les éléments sont définis par

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a),$$

et on détermine les valeurs propres ; celles-ci sont réelles car la matrice $[H]$ est réelle symétrique.

- Si elles sont toutes strictement **positives**, on a un **minimum**.
- Si elles sont toutes strictement **négatives**, on a un **maximum**.

Dans tous les autres cas (valeurs propres de signes différents, valeurs propres nulles) on ne peut conclure.

2.6 Intégrale curviligne

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct cartésien (figure 2.1). Considérons une courbe orientée quelconque Γ et un arc $\widehat{AB} \in \Gamma$ que l'on divise en n petits éléments. Soit (x_i, y_i, z_i) les coordonnées cartésiennes d'un point M_i situé à l'intérieur du i-ème élément, dont la longueur est Δl_i. Considérons maintenant une fonction $f(x, y, z)$ donnée **définie** et **continue** sur $\widehat{AB}$, qui prend la valeur $f(x_i, y_i, z_i)$ au point M_i. A la fonction f, on associe la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i.$$

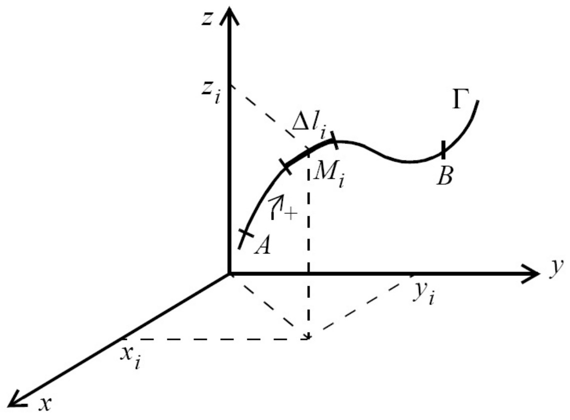

FIGURE 2.1 – Définition d'une intégrale curviligne.

Définition 2.10 *Intégrale curviligne d'une fonction scalaire. La limite, lorsqu'elle existe, de S_n quand n tend vers l'infini et que tous les Δl_i du partage de $\widehat{AB}$ tendent vers zéro est appelée **intégrale curviligne** de f sur $\widehat{AB}$; on la note*

$$\boxed{I = \int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\widehat{AB}} f(M) dl(M) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i}. \tag{2.13}$$

Définition 2.11 *Intégrale curviligne d'une forme différentielle. On appelle **intégrale curviligne** le long de $\widehat{AB}$ de la forme différentielle $\delta f = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, le réel I tel que*

$$\boxed{I = \int_{\widehat{AB}} \delta f = \int_{\widehat{AB}} [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]}. \tag{2.14}$$

Si la courbe Γ admet une représentation paramétrique $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, où le paramètre t est égal à t_A et t_B respectivement aux points A et B, l'intégrale curviligne précédente s'écrit

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_A}^{t_B} \left[P_1(t) x'(t) + Q_1(t) y'(t) + R_1(t) z'(t) \right] dt \\ &\quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} P_1(t) = P\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ Q_1(t) = Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ R_1(t) = R\left(x(t), y(t), z(t)\right) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \frac{dx}{dt} \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} \\ z'(t) = \frac{dz}{dt} \end{array} \right. . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Les fonctions P, Q et R sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\widehat{AB}$.

2.6.1 Propriétés

2.6.1.1 Cas où la courbe Γ est ouverte

1. Pour une forme différentielle donnée, la valeur de I dépend du chemin suivi pour aller de A à B. On note
$$I = \int_{\widehat{AB}} \delta f = f_{AB}.$$
2. Pour une forme différentielle donnée et un arc $\widehat{AB}$ donné, I est indépendante du paramètre t choisi pour décrire Γ.
3. Si $C \in \widehat{AB}$, alors
$$\int_{\widehat{AB}} \delta f = \int_{\widehat{AC}} \delta f + \int_{\widehat{CB}} \delta f \quad \text{et} \quad \int_{\widehat{AB}} \delta f = -\int_{\widehat{BA}} \delta f.$$

2.6.1.2 Cas où la courbe Γ est fermée

Lorsque l'intégrale curviligne se calcule sur un contour fermé, il est nécessaire de préciser le sens de parcours choisi car
$$\oint_{\Gamma+} \delta f = -\oint_{\Gamma-} \delta f.$$

Si aucune précision n'est donnée, le sens de parcours est défini dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2.6.1.3 Intégrale curviligne d'une différentielle totale exacte

Définition 2.12 *Différentielle totale exacte. Une forme différentielle est dite* ***exacte*** *si les fonctions P, Q et R vérifient les équations suivantes*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}}. \tag{2.16}$$

On écrit alors

$$\boxed{Pdx + Qdy + Rdz = \delta f = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz}. \tag{2.17}$$

Dans le cas où la courbe est **ouverte**, il vient

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)}. \tag{2.18}$$

L'intégrale curviligne d'une différentielle totale exacte est alors **indépendante** du chemin suivi pour aller de A à B. Elle ne dépend que du point de “départ” A et du point “d'arrivée” B. Cette propriété est fondamentale en physique pour les fonctions potentiels scalaires.

Dans le cas où la courbe est **fermée**, on a immédiatement

$$\boxed{\oint_{\Gamma} df = 0}. \tag{2.19}$$

2.6.2 Calcul d'une intégrale curviligne

D'une manière générale la calcul d'une intégrale curviligne d'une forme **différentielle** s'effectue :

- En paramétrant la courbe Γ ; on est ainsi ramené au calcul d'une intégrale simple.
- Si la courbe Γ est **plane** et d'équation $y = f(x)$, en utilisant le paramétrage habituel $x = x$ et $y = f(x)$ nous avons alors

$$\boxed{I = \int_{x_A}^{x_B} \left[P\left(x, f(x)\right) + Q\left(x, f(x)\right) f'(x)\right] dx}. \tag{2.20}$$

Exercice 2.10 *Calculer l'intégrale curviligne suivante*

$$I = \int_{\widehat{AB}} \left(y^2 dx - x^2 dy\right),$$

a) Le long du segment $[AB]$, orienté de A vers B et tel que $A(1;0)$ et $B(0;1)$.
b) Le long d'un arc de cercle, orienté de A vers B en effectuant un paramétrage. Conclure.

Dans le cas d'une différentielle *totale*, on peut envisager le calcul :

- Soit en utilisant la méthode habituelle du paramétrage.
- Soit en remontant à l'ensemble des fonctions dont la différentielle est df et en déterminant I par :

$$\boxed{I = f(B) - f(A)}. \tag{2.21}$$

Exercice 2.11 *Calculer l'intégrale curviligne suivante*

$$I = \int_{\widehat{AB}} \left[2xydx + (x^2 + 3y^2)dy\right].$$

2.7 Intégrale double

2.7.1 Définition

L'espace est rapporté au repère plan cartésien (Ox, Oy) dans lequel on considère un domaine D limité par une courbe fermée Γ (figure 2.2). Décomposons D en n domaines élémentaires ΔD_i d'aire ΔA_i ($i = \{1, 2, \ldots, n\}$) et soit $M_i(x_i, y_i)$ un point quelconque de ΔD_i. Soit une fonction $f(x, y)$ donnée **définie** et **continue** sur D. Au point $M_i \in \Delta D_i$ elle prend la valeur $f(x_i, y_i)$. Considérons la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta A_i.$$

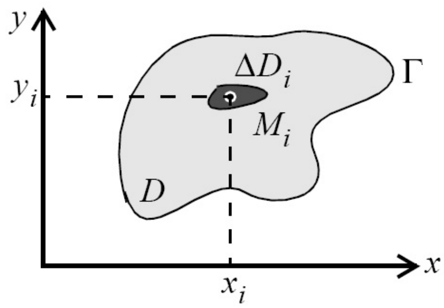

FIGURE 2.2 – Définition d'une intégrale double.

Définition 2.13 *Intégrale double. La limite lorsqu'elle existe, de S_n quand $n \to \infty$ et que tous les ΔD_i tendent vers zéro est appelée intégrale double ordinaire $f(x, y)$ de f sur le domaine D ; elle s'écrit*

$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta A_i}. \tag{2.22}$$

2.7.2 Interprétation géométrique

Soit Σ la surface représentative de la fonction $z = f(x, y)$ (figure 2.3). La somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} z_i \Delta A_i,$$

représente une valeur approchée du volume V compris entre le plan (Ox, Oy), la surface Σ et les droites parallèles à l'axe (Oz) s'appuyant sur le contour Γ de D. Lorsque $n \to \infty$, la limite correspond **exactement** au volume V ; ainsi

$$\boxed{I = \iint_D z(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} z(x_i, y_i)\Delta A_i = V}. \tag{2.23}$$

2.7.3 Propriétés

Si D et D' sont deux domaines n'ayant aucun point commun (**disjoints**), alors

$$\iint_{D+D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D'} f(x,y)dxdy.$$

Si f est une fonction **continue** de **signe constant** et si

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0,$$

alors $f = 0$ en tout point de D.

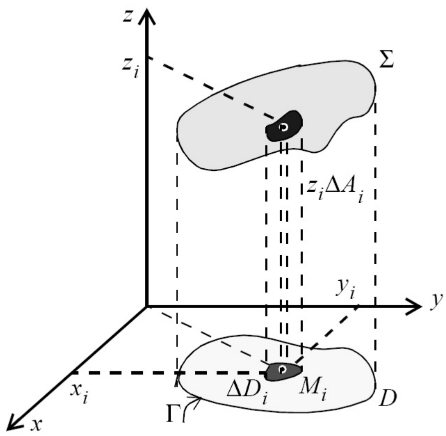

FIGURE 2.3 – Intégrale double représentée comme un volume.

2.7.4 Calcul d'une intégrale double

2.7.4.1 En coordonnées cartésiennes.

Théorème 2.5 *Illustration du théorème de Fubini. On peut calculer l'intégrale double en considérant les domaines ΔD_i comme des rectangles obtenus en construisant une grille de droites parallèles aux axes (Ox) et (Oy) ; on écrit alors*

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Il faut ensuite prendre en compte l'ensemble des ΔD_i par un mécanisme logique de "balayage". Si d'une part $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $x = x_i \in [a_1; a_2]$ avec Γ et si d'autre part $x_1(y)$ et $x_2(y)$ sont les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = y_i \in [b_1; b_2]$ avec Γ, l'intégrale double peut se transformer en deux intégrales successives par les deux types de balayage suivants :

Dans le cas 1, on effectue successivement :

- Un balayage parallèlement à (Oy) (c.a.d. que x est fixé) et on intègre $f(x,y)$ par rapport à y de $y_1(x)$ à $y_2(x)$; le résultat est une **fonction** de x (figure 2.4).
- Puis une intégration de la fonction précédente de a_1 à a_2. On a donc

$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{a_1}^{a_2} dx \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]}. \tag{2.24}$$

Dans le cas 2, on réalise :

- D'abord un balayage parallèle à (Ox) (y est fixe) et on intègre $f(x,y)$ de $x_1(y)$ à $x_2(y)$; le résultat est une **fonction** de y (figure 2.5).
- Puis une intégration de la fonction précédente de b_1 à b_2.

$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{b_1}^{b_2} dy \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right]}. \tag{2.25}$$

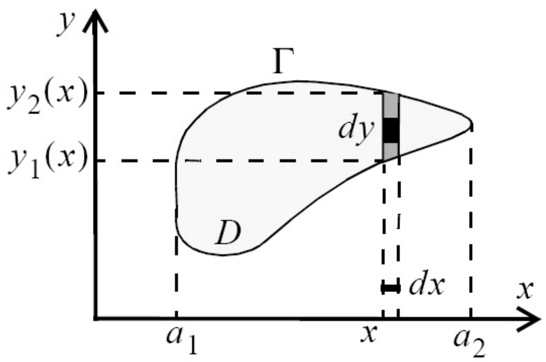

FIGURE 2.4 – Cas 1.

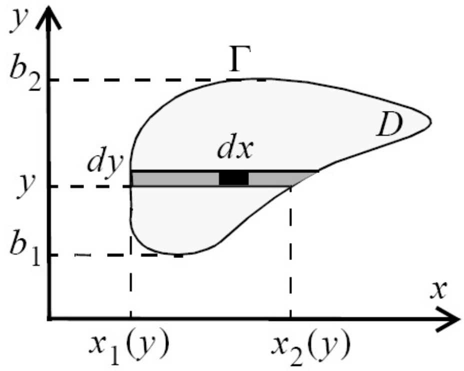

FIGURE 2.5 – Cas 2.

Exercice 2.12 *Calculer I où D est le domaine intérieur au rectangle $(ABCD)$ tel que $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;4)$ et $D(1;4)$.*

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

2.7.4.2 Autres repères : théorème du changement de variable.

Théorème 2.6 *Théorème du changement de variables. Par le changement de variables $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$, on fait correspondre au domaine D du plan des (x,y) le domaine D_{uv} du plan des (u,v) ; J étant le* ***jacobien*** *de la transformation, on a alors*

$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} |J| \times f\left(x(u,v), y(u,v)\right) dudv}, \tag{2.26}$$

avec

$$\boxed{J = \det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice jacobienne}}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}. \tag{2.27}$$

Exercice 2.13 *Calculer I où D est défini par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} \leq 1$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.*

$$I = \iint_D 2\,(x-y)\,dxdy.$$

Exercice 2.14 *Calculer I où D est défini par le plan (Ox, Oy) avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.*

$$I = \iint_D e^{-ax^2 - bx^2} dxdy \quad avec \quad (a,b) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}.$$

3 Analyse vectorielle

3.1 Champs scalaire et vectoriel

Définition 3.1 *Champ scalaire. Si à tout point de l'espace, on peut associer une grandeur locale scalaire $f(x, y, z)$, on définit une fonction de point à valeur* ***scalaire*** *$f(M) = f(x, y, z)$. L'ensemble des valeurs prises par $f(M)$ en tout point de l'espace constitue un* ***champ scalaire****.*

Exemple 3.1 *Potentiel électrique $V(M)$ et pression $p(M)$.*

Ce champ scalaire peut être également fonction d'autres variables et en particulier du temps t (noté alors $f(M, t)$).

Définition 3.2 *Champ vectoriel. Si à tout point de l'espace, on peut associer une grandeur locale vectorielle $\overrightarrow{F}(x, y, z)$, on définit une fonction de point à valeur* ***vectorielle*** *$\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{F}(x, y, z)$. L'ensemble des valeurs prises par $\overrightarrow{F}(M)$ en tout point de l'espace constitue un champ* ***vectoriel****.*

Exemple 3.2 *Champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ et champ de pesanteur $\overrightarrow{g}(M)$.*

Ce champ vectoriel peut être également fonction d'autres variables et en particulier du temps t (noté alors $\overrightarrow{F}(M, t)$).

3.2 Circulation d'un champ vectoriel

Définition 3.3 *Circulation d'un champ vectoriel. On appelle circulation du champ du vecteur $\overrightarrow{F}(M)$ le long de la courbe Γ entre les points A et B, le scalaire tel que*

$$\boxed{\Gamma_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F}(M_c) \cdot \overrightarrow{dl}(M_c)}, \tag{3.1}$$

où M_c est un point appartenant à Γ et $\overrightarrow{dl}$ le vecteur déplacement élémentaire ***tangent*** *au point M_c (figure 3.1).*

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M)$ et une courbe **orientée** Γ **quelconque**. Dans un repère orthonormé direct cartésien $(0, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, si on définit le point $M_c(x, y, z)$ alors

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{F}(M_c) = F_x \overrightarrow{e}_x + F_y \overrightarrow{e}_y + F_z \overrightarrow{e}_z \\ \overrightarrow{dl}(M_c) = dx \overrightarrow{e}_x + dy \overrightarrow{e}_y + dz \overrightarrow{e}_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \Gamma_{AB} = \int_{\widehat{AB}} F_x dx + F_y dy + F_z dz}. \tag{3.2}$$

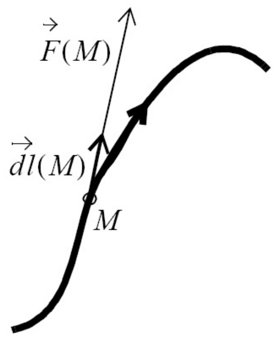

FIGURE 3.1 – Définition de la circulation d'un champ vectoriel avec $M \equiv M_c$.

La circulation Γ_{AB} est donc une **intégrale curviligne**. Les propriétés propres à la circulation sont celles de l'intégrale curviligne.

En général la circulation dépend du chemin suivi pour aller de A à B. Dans ce cas la circulation élémentaire est une forme différentielle qui s'écrira $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}$; ainsi

$$C_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} \delta l.$$

Par exemple, en électrostatique, la circulation du vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$, appelée f.e.m (force électromotrice), a pour expression

$$e_{AB} = -\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} \delta E.$$

Pour un contour **fermé**, on a le plus souvent

$$\oint_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} \neq 0.$$

Lorsque la circulation **ne dépend pas** du chemin suivi pour aller de A à B, la circulation élémentaire est une différentielle **totale exacte**. Dans ce cas

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)}. \tag{3.3}$$

$f(A)$ et $f(B)$ sont les valeurs aux points A et B d'une fonction $f(M)$ (définie à une constante près) appelée **fonction potentiel**. En coordonnées cartésiennes, on aura successivement

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} & = F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ & = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ F_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ F_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right.}. \tag{3.4}$$

Comme la circulation n'est fonction que des coordonnées spatiales de A et B, la circulation le long d'un contour **fermé** quelconque est évidemment nulle ; on dit alors que la **circulation est conservative**.

Exercice 3.1 *Considérons dans le repère orthonormé direct cartésien* $(0, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, *un champ vectoriel uniforme* $\overrightarrow{F} = F_0 \overrightarrow{e}_z$ *avec* $F_0 > 0$. *Calculer la circulation du vecteur* $\overrightarrow{F}$ *entre les points d'abscisses respectives* z_A *et* z_B.

Application : soit $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e}_z$ *le poids d'un point matériel* M *dans une région de l'espace où le vecteur champ de pesanteur est supposé uniforme. Calculer la circulation du vecteur* $m\overrightarrow{g}$ *entre un point de cote* z_A *et un point de cote* z_B. *En déduire la fonction potentiel scalaire associée.*

3.3 Flux d'un champ vectoriel

Soit une surface ouverte S dont l'unique "ouverture" est délimitée par un contour fermé Γ (on dit que S s'appuie sur Γ). Orienter la surface S consiste à définir en tout point $M_s \in S$ un vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_n$ orthogonal à S dont l'orientation est préalablement déterminée (considération physique). Si autour du point M_s, on peut définir le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ orienté suivant $\overrightarrow{e}_n$ alors

$$dS(M_s) = \overrightarrow{e}_n \cdot \overrightarrow{dS} > 0.$$

Définition 3.4 *Flux d'une surface ouverte. Soit un champ vectoriel* $\overrightarrow{F}(M)$ *et une surface ouverte orientée* S. *On appelle flux de* $\overrightarrow{F}_M$ *à travers* S *le scalaire* Φ *représenté par l'intégrale de surface (figure 3.2)*

$$\boxed{\Phi = \iint_S \overrightarrow{F}(M_s) \cdot \overrightarrow{dS}(M_s) \quad \text{avec} \quad M_s \in S}. \tag{3.5}$$

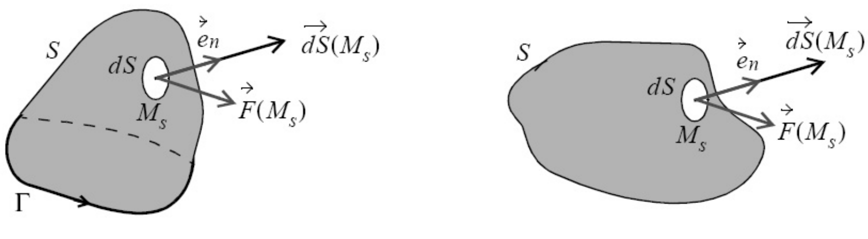

FIGURE 3.2 – Définition du flux d'une surface ouverte et fermée.

Définition 3.5 *Flux d'une surface fermée. Soit une surface* S *fermée et un point* $M_s \in S$. *Les vecteurs* $\overrightarrow{e}_n$ *et* $\overrightarrow{dS}$ *sont dans ce cas orientés par* ***convention*** *de l'intérieur vers l'extérieur. Le flux de* $\overrightarrow{F}_M$ *à travers une surface fermée s'écrit*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \overrightarrow{F}(M_s) \cdot \overrightarrow{dS}(M_s)}. \tag{3.6}$$

Exercice 3.2 *L'espace étant rapporté au repère cartésien (Ox, Oy, Oz), on considère un cylindre droit de bases circulaires, symétrique par rapport au plan (Ox, Oy). Si P est un point quelconque de la surface cylindrique, calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F}(P) = k\frac{\overrightarrow{OP}}{OP^3}$ (k étant une constante) à travers la surface fermée S constituée par la surface latérale S_l et les surfaces des bases inférieures S_m et S_p.*

3.4 Gradient et potentiel scalaire

Définition 3.6 *Gradient. Soit f une fonction* ***scalaire*** *définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$; on appelle gradient de f au point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f$, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ avec $i = \{1, 2, \ldots, n\}$. Il est noté*

$$\vec{F}(x) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\vec{e}_i. \tag{3.7}$$

Les vecteurs $\{\vec{e}_i\}$ sont les vecteurs unitaires définissant l'espace euclidien.

En physique, les champs scalaire et vectoriel rencontrés dépendent en général des coordonnées spatiales (x, y, z). Le gradient s'écrit alors

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}. \tag{3.8}$$

L'opérateur gradient transforme un champ **scalaire** $f(M)$ en un champ **vectoriel** $\overrightarrow{\mathrm{grad}}[f(M)]$.

On peut exprimer également le gradient à l'aide de l'opérateur vectoriel nabla $\vec{\nabla}$ défini uniquement en coordonnées cartésiennes ; ce qui conduit à

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{\nabla} f \quad \text{où} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z}. \tag{3.9}$$

Pour un petit déplacement élémentaire $\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \vec{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

La circulation de ce champ vectoriel le long de la courbe Γ entre les points A et B est donc

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \delta f.$$

Si de plus f est une différentielle **totale exacte**, alors $\delta f = df$ et la circulation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ est indépendante du chemin suivi ; on peut donc lui associer une fonction potentielle.

Exemple 3.3 *Si la circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour* ***fermé*** *est* ***conservative****, alors*

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dU.$$

Comme par définition, $dU = \overrightarrow{grad}(U) \cdot \overrightarrow{dl}$*, par idendification on en déduit* $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}(U)$*.*

C'est le cas, par exemple, du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ *qui dérive du potentiel électrostatique* V*,* $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$*.*

L'opérateur gradient n'agit que sur les coordonnées **spatiales** de la fonction scalaire $f(M)$. Si le champ scalaire est non stationnaire (dépend du temps) alors

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\overrightarrow{\mathrm{grad}}[f(M,t)]\right\} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}\right]}. \tag{3.10}$$

3.5 Rotationnel

Définition 3.7 *Rotationnel. Soit* $\overrightarrow{F}$ *une fonction* ***vectorielle*** *définie sur un domaine* $D_f \subset \mathbb{R}$*, de classe* $\mathcal{C}^1$*, on appelle rotationnel de* $\overrightarrow{F}$ *au point* $x = (x, y, z) \in D_f$ *le* ***vecteur*** $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *de composantes*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e}_z}. \tag{3.11}$$

Le rotationnel peut être également donné à partir de l'opérateur nabla (uniquement en coordonnées cartésiennes) comme

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = \left|\begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_x & \overrightarrow{e}_y & \overrightarrow{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}\right| \quad \text{où} \quad \overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z}. \tag{3.12}$$

L'opérateur rotationnel transforme donc un champ **vectoriel** $\overrightarrow{F}$ en un champ également **vectoriel** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}$.

Exercice 3.3 *Démontrer à l'aide de deux méthodes que* $\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{grad}f] = \overrightarrow{0}$ *avec* f *une fonction scalaire de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $D_f \subset \mathbb{R}^3$*.*

Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, alors d'après l'équation (3.11)

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

En comparant cette équation avec l'équation (2.16), on peut écrire

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}.$$

D'ou le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Un champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ défini dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$, dérive d'un potentiel scalaire f (à une constante près) s'il est de* ***rotationnel nul****.*

Par conséquent si le rotationnel d'un champ vectoriel est **nul** alors le champ est à **circulation convervative**.

Exercice 3.4 *Soit le champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\overrightarrow{F}(M) = 2xz\overrightarrow{e}_x + yz\overrightarrow{e}_y + (x^2 + y^2/2)\overrightarrow{e}_z$. Montrer que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ et en déduire la fonction scalaire f associée.*

L'opérateur rotationnel n'agit que sur les coordonnées **spatiales** d'une fonction vectorielle. Si le champ vectoriel est non stationnaire (dépend du temps), alors

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}(M,t)\right] = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\frac{\partial \overrightarrow{F}(M,t)}{\partial t}\right]}. \tag{3.13}$$

Théorème 3.2 *Théorème de Stokes (figure 3.3) : passage d'une intégrale* ***curviligne*** *à une intégrale* ***surfacique****. Soit Γ une courbe fermée orientée sur laquelle s'appuie la surface S. Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M)$ défini dans le domaine spatial contenant S et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, si $M_\Gamma \in \Gamma$ et $M_s \in S$ alors*

$$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{F}(M_\Gamma) \cdot \overrightarrow{dl}(M_\Gamma) = \iint_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}(M_s) \cdot \overrightarrow{dS}(M_s)}. \tag{3.14}$$

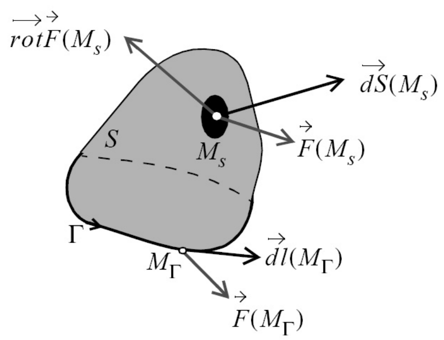

FIGURE 3.3 – Enoncé du théorème de Stokes.

En d'autres termes : la circulation du champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M)$ le long d'un contour **fermé quelconque** Γ est égale au flux du champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}(M)$ à travers toute surface **ouverte** s'appuyant sur Γ.

Exercice 3.5 *A partir de la loi de Lentz $e = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ où Φ est le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B}$, montrer que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$.*

3.6 Divergence

Définition 3.8 *Divergence. Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction **vectorielle** définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}^n$ et de composantes $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle divergence de $\overrightarrow{F}$, notée div$\overrightarrow{F}$, au point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le scalaire de $\mathbb{R}$ tel que*

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)}. \tag{3.15}$$

L'opérateur divergence transforme donc un champ **vectoriel** $\overrightarrow{F}$ en **scalaire**. Pour une fonction à trois variables, la divergence s'écrit

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}. \tag{3.16}$$

A l'aide de l'opérateur nabla, il peut également s'écrire

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z}. \tag{3.17}$$

Exercice 3.6 *Montrer que div$(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}) = 0$ par deux méthodes avec $\overrightarrow{F}$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^2$.*

Par conséquent si div$\overrightarrow{F} = 0$ alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$; on dit que le vecteur $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$. En fait le vecteur $\overrightarrow{A}$ est défini à un gradient près car si $\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f$, il vient

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} + \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)}_{\overrightarrow{0}\ \forall f} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}.$$

Théorème 3.3 *Théorème d'Ostrogradski (figure 3.4). Passage d'une intégrale **surfacique** à une intégrale **volumique**. Soit S une surface qui délimite le volume V et un champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M)$ défini dans le domaine V et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, si $M_s \in S$ et $M_v \in V$ alors*

$$\boxed{\oiint_S \overrightarrow{F}(M_s) \cdot \overrightarrow{dS}(M_s) = \iiint \operatorname{div}\left[\overrightarrow{F}(M_v)\right] dV(M_v)}. \tag{3.18}$$

En d'autres termes : le flux du champ vectoriel $\overrightarrow{F}(M)$ à travers une surface **fermée** quelconque S est égale à l'intégrale triple du champ scalaire div$\overrightarrow{F}(M)$ étendue au volume V délimité par S.

Exercice 3.7 *Montrer à partir du théorème de Gauss que div$\overrightarrow{E} = \rho/\epsilon_0$ où ρ est la densité volumique de charge et ϵ_0 la permittivité du vide.*

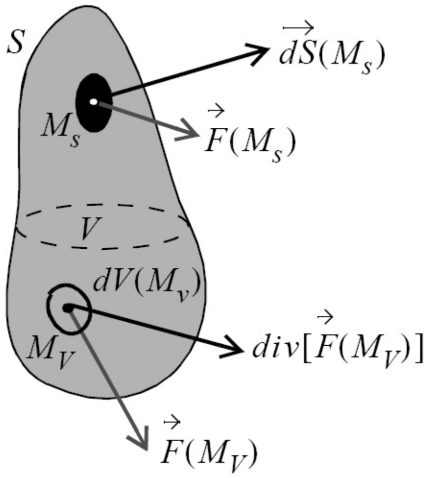

FIGURE 3.4 – Enoncé du théorème d'Ostrogradski.

3.7 Laplacien

C'est un opérateur du second ordre, noté $\vec{\nabla}^2$, qui peut agir sur un champ **scalaire** ou **vectoriel**.

Définition 3.9 *Laplacien* ***scalaire****. Le laplacien d'un champ scalaire $f(M)$ défini sur $\mathbb{R}^3$ et de classe $\mathcal{C}^2$ s'écrit*

$$\boxed{\nabla^2 f(M) = \text{div}\left[\overrightarrow{\text{grad}} f(M)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}. \tag{3.19}$$

La notation ∇^2, pour désigner le laplacien, découle du formalisme utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$

$$\text{div}\left[\overrightarrow{\text{grad}} f(M)\right] = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} f(M)\right] = \vec{\nabla}^2 f(M) = \nabla^2 f(M).$$

Définition 3.10 *Laplacien* ***vectoriel****. Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ défini sur $\mathbb{R}^3$ et de classe $\mathcal{C}^2$ s'écrit*

$$\boxed{\nabla^2 \vec{F}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{F}(M)\right] - \overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}(M)\right] = \nabla^2 F_x \vec{e}_x + \nabla^2 F_y \vec{e}_y + \nabla^2 F_z \vec{e}_z}. \tag{3.20}$$

Exercice 3.8 *Démontrer la relation ci-dessous :*

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{F}(M) &= \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right) \vec{e}_x \\
&+ \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right) \vec{e}_y \\
&+ \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right) \vec{e}_z .
\end{aligned}$$

3.8 Opérateurs en coordonées cylindriques et sphèriques

En physique, pour des raisons de symétrie du système étudié, les coordonnées cylindriques ou sphériques sont souvent utilisées. Il est donc nécessaire de connaître l'expression des opérateurs vectoriels pour de tels systèmes.

3.8.1 Coefficients métriques

Soit (x, y, z) les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque exprimées comme des fonctions de (q_1, q_2, q_3) par

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} .$$

Supposons que l'équation ci-dessus puisse se résoudre en q_1, q_2 et q_3 comme fonctions de x, y, et z, c'est à dire

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases} .$$

Les fonctions x, y, z, q_1, q_2 et q_3 sont supposées prendre une seule valeur en chaque point et posséder des dérivées continues, de sorte que la correspondance entre (x, y, z) et (q_1, q_2, q_3) soit unique.

Etant donné un point de coordonnées rectangulaires nous pouvons lui associer un seul ensemble de coordonnées (q_1, q_2, q_3) appelées les coordonnées curvilignes du point $M(x, y, z)$. Les deux équations ci-dessous définissent un changement de coordonnées.

Les coefficients $\{h_i\}$ $(i = \{1, 2, 3\})$ sont appelés coefficients **métriques** ou coefficients multiplicateurs, qui dépendent du système de repérage utilisé. Ils peuvent être déterminés géométriquement ou analytiquement par

$$\boxed{h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}}. \tag{3.21}$$

Pour les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique nous obtenons alors le tableau 3.1.

Exercice 3.9 *Calculer les coefficients métriques $\{h_i\}$ en coordonnées cylindriques et sphériques.*

	Cordonnées cylindriques	Cordonnées sphériques
Définition	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ et $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = \phi \end{cases}$
Base locale	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$
Coefficient métriques	$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_2 = h_\theta = r \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_2 = h_\theta = r \\ h_3 = h_\phi = r\sin\theta \end{cases}$
Déplacement élémentaires	$\begin{cases} dx = dr \\ dy = rd\theta \\ dz = dz \end{cases}$	$\begin{cases} dx = dr \\ dy = rd\theta \\ dz = r\sin\theta d\phi \end{cases}$
Représentation géométrique	Figure 3.5	Figure 3.6

TABLE 3.1 – Expression des coefficients métriques en coordonnées cylindriques et sphériques.

3.8.2 Expression des opérateurs vectoriels

Dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales ($\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$ et $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$), l'opérateur gradient s'exprime comme

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\vec{e}_i}. \tag{3.22}$$

L'opérateur divergence s'exprime comme

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(h_1h_2h_3\frac{F_i}{h_i}\right)}. \tag{3.23}$$

L'opérateur rotationnel d'exprime comme

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\|\begin{bmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{bmatrix}\right\| = \left|\begin{array}{l} \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3F_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2F_2)\right] \\ \\ \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1F_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3F_3)\right] \\ \\ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2F_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1F_1)\right] \end{array}\right.}. \tag{3.24}$$

Exercice 3.10 *Montrer que l'opérateur laplacien scalaire s'écrit dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales comme*

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right].$$

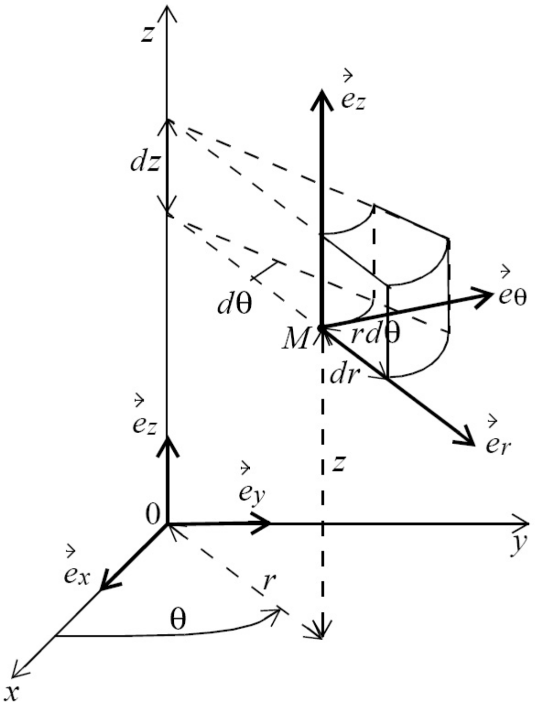

FIGURE 3.5 – Coordonnées cylindriques.

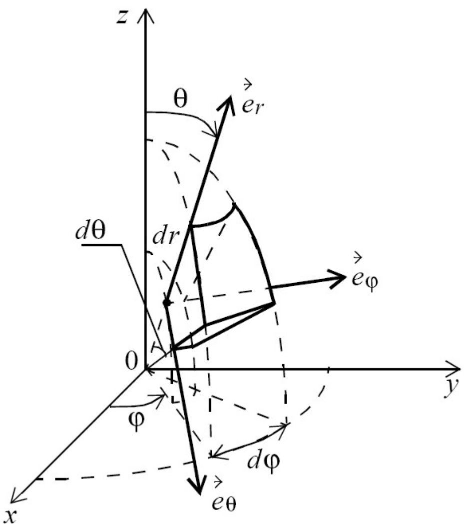

FIGURE 3.6 – Coordonnées sphériques.

Exercice 3.11 *A l'aide du tableau 3.1, montrer que l'opérateur gradient s'écrit en coordonnées cylindriques comme*

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e}_z.$$

Exercice 3.12 *A l'aide du tableau 3.1, montrer que l'opérateur divergence s'écrit en coordonnées sphériques comme*

$$div\overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\theta \sin\theta\right) + \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}\right].$$

4 Calcul matriciel

4.1 Matrices rectangulaires

4.1.1 Définition

Définition 4.1 *Définition d'une matrice. Une matrice dans le corps des réels* $\mathbb{R}$ *est un tableau rectangulaire de nombres réels* a_{ij} *de la forme*

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cours, une matrice sera notée **entre crochets** et ses éléments seront notés a_{ij}.

Les m $n-$uplets (éléments) **horizontaux**

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}),$$

sont les **lignes** de la matrice et les n $m-$uplets (éléments) **verticaux**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

sont les **colonnes**.

Remarquons que l'élément a_{ij}, appelé le ij-élément ou la ij-ième composante de la matrice, se trouve à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. Un matrice ayant m lignes et n colonnes est appelée une (m, n) matrice, ou matrice $m \times n$. Le couple de nombres (m, n) est appelé le **format** ou la **dimension** de la matrice.

Deux matrices $[A]$ et $[B]$ de **mêmes dimensions** sont égales si leur éléments sont respectivement égaux, soit $\forall i \in [1; m],\ \forall j \in [1; n],\ a_{ij} = b_{ij}$.

Exercice 4.1 *Soit la matrice définie par*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Donner les lignes et les colonnes de $[A]$.

Exercice 4.2 *Soit l'égalité matricielle suivante :*

$$\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

En déduire les valeurs de x, y, w et z.

Une matrice à une ligne peut être considérée comme un **vecteur ligne**, et une matrice à une colonne peut être considérée comme un **vecteur colonne**. Un élément du corps des réels peut être interprété comme une matrice 1×1.

4.1.2 Addition matricielle et multiplication par un scalaire

Soit $[A]$ et $[B]$ deux matrices de même format, *i.e.*, ayant le même nombre de lignes et de colonnes ; c'est à dire deux matrices $m \times n$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Définition 4.2 *Somme de deux matrices. La* ***somme*** *de $[A]$ et $[B]$, écrit $[A]+[B]$, est la matrice obtenue en ajoutant les éléments correspondants des deux matrices. Soit*

$$\boxed{[A]+[B] = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}}. \tag{4.1}$$

Définition 4.3 *Produit d'une matrice avec un réel. Le produit d'une matrice $[A]$ par un réel k, noté $k[A]$, est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice $[A]$ par k. Soit*

$$\boxed{k[A] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}}. \tag{4.2}$$

A noter que $[A]+[B]$ et $k[A]$ sont des matrices $m \times n$. On définit aussi

$$-[A] = (-1) \times [A] \quad \text{et} \quad [A]-[B] = [A] + (-[B]).$$

La somme de deux matrices de dimensions différentes n'est pas **définie**.

Exercice 4.3 *Soit les matrices définies par*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calculer $[A]+[B]$, $3[A]$ *et* $2[A]-3[B]$.

La matrice nulle est définie par $\forall i \in [1;m]$, $\forall j \in [1;n]$, $a_{ij} = 0$. Elle est notée $[0]$. Par conséquent

$$[A]+[0] = [0]+[A] = [A].$$

4.1.3 Multiplication matricielle

Le produit de deux matrices $[A]$ et $[B]$, écrit $[A][B]$, est plus compliqué. Pour cette raison, étudions un cas particulier.

La produit matriciel $[A][B]$ d'une matrice **ligne** $[A]$ par une matrice **colonne** $[B]$, ayant le même nombre d'éléments est défini par

$$\boxed{[a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i}. \tag{4.3}$$

Remarquons que le produit $[A][B]$ est un réel (ou une matrice 1×1). Le produit matriciel $[A][B]$ n'est pas défini lorsque $[A]$ et $[B]$ ont un nombre **différent** d'éléments.

Exercice 4.4 *Calculer le produit*

$$[8, -4, 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la définition précédente, nous pouvons définir la multiplication des matrices dans le cas général.

Définition 4.4 *Supposons que* $[A]$ *et* $[B]$ *soient des matrices dont le nombre de colonnes de* $[A]$ *soit égal au nombre de lignes de* $[B]$ *; c'est à dire que* $[A]$ *est une matrice* $m \times p$ *et* $[B]$ *est une matrice* $p \times n$*. Alors le produit matriciel* $[A][B]$ *est une matrice* $m \times n$ *où le* $ij-$*ième élément est obtenu en multipliant la* $i-$*ième ligne de* $[A]$ *par la* $j-$*ième colonne de* $[B]$*. Soit*

$$\boxed{[A][B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = [C]}, \tag{4.4}$$

où

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}}. \tag{4.5}$$

Il est important de remarquer que le produit $[A][B]$ n'est pas défini si $[A]$ est une matrice $n \times p$ et $[B]$ une matrice $q \times n$ avec $p \neq q$.

Exercice 4.5 *Calculer le produit*

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4.6 *Calculer les produits matriciels suivants et conclure.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.1.4 Transposée d'une matrice

Définition 4.5 *Transposée d'une matrice. La matrice transposée d'une matrice $[A]$, notée $[A]^T$, est la matrice obtenue en écrivant les lignes de $[A]$ en colonnes. Soit*

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}. \tag{4.6}$$

En d'autres termes, si $[A]$ est une matrice $m \times n$, alors $[A]^{\mathrm{T}} = [B]$ est une matrice $n \times m$, dont les éléments $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j.

Remarquons que la transposée d'un vecteur ligne est un vecteur colonne et vice versa.

4.1.5 Matrice et systèmes d'équations linéaires

Considérons le système de m équations à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & +\vdots & +\ddots & +\vdots & =\vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [A][X] = [B],$$

où la matrice $[A]$ est appelée la **matrice des coefficients**, $[X]$ la matrice colonne (vecteur colonne) des **inconnues** et $[B]$ la matrice colonne (vecteur colonne) des **constantes**.

Exercice 4.7 *Mettre sous forme matricielle le système d'équations linéaires suivant*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 \\ x - 2y - 5z = 3 \end{cases}.$$

4.1.6 Résumé des propriétés

Soit $[A]$, $[B]$ et $[C]$ trois matrices de même dimension et k_1, k_2 deux réels alors

$$\begin{cases} ([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C]) \\ [A] + [0] = [A] \\ [A] + (-[A]) = [0] \\ [A] + [B] = [B] + [A] \\ k_1 ([A] + [B]) = k_1[A] + k_1[B] \\ (k_1 + k_2) [A] = k_1[A] + k_2[A] \\ 1 \times [A] = [A] \\ 0 \times [A] = [0] \end{cases}, \tag{4.7}$$

$$\left\{\begin{array}{l}([A][B])\,[C]=[A]\,([B][C]) \\ {[A]\,([B]+[C])=[A][B]+[A][C]} \\ ([B]+[C])\,[A]=[B][A]+[C][A] \\ k\,([A][B])=(k[A])\,[B]=[A]\,(k[B]) \\ {[A]\,[B] \neq [B][A]} \\ {[0]\,[A]=[A][0]=[0]}\end{array}\right. . \tag{4.8}$$

$$\left\{\begin{array}{l}([A]+[B])^{\mathrm{T}}=[A]^{\mathrm{T}}+[B]^{\mathrm{T}} \\ \left([A]^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=[A] \\ (k[A])^{\mathrm{T}}=k[A]^{\mathrm{T}} \\ ([A][B])^{\mathrm{T}}=[B]^{\mathrm{T}}[A]^{\mathrm{T}}\end{array}\right. . \tag{4.9}$$

4.2 Cas des matrices carrées

Définition 4.6 *Matrice carrée. Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes. Une matrice carrée $n \times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n.*

Rappelons que l'addition et la multiplication ne sont pas définies pour des matrices quelconques. Cependant, si on considère uniquement des matrices carrées d'ordre n, alors les opérations d'addition, de multiplication, de multiplication par une réel et de transposée de matrices sont définies et leurs résultats sont encore des matrices carrées d'ordre n.

Exercice 4.8 *Soit*

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \quad et \quad [B]=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}.$$

Calculer $[A]+[B]$, $2[A]$, $[A]^T$ et $[A][B]$.

Définition 4.7 *Matrices commutantes. On dit que les matrices $[A]$ et $[B]$* ***commutent*** *si $[A][B]=[B][A]$, condition qui exige que les deux matrices $[A]$ et $[B]$ soient des matrices carrées de même ordre.*

Exercice 4.9 *Soit*

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad et \quad [B]=\begin{bmatrix}5 & 4 \\ 6 & 11\end{bmatrix}.$$

Calculer $[A][B]$ et $[B][A]$. Conclure.

4.2.1 Diagonale, trace d'une matrice, matrice identité

Définition 4.8 *Diagonale et trace d'une matrice. Soit* $[A]$ *une matrice carrée d'ordre* n. *La* ***diagonale*** *(ou diagonale principale) de* $[A]$ *est constituée des éléments* $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$. *La* ***trace*** *de* $[A]$, *qu'on note* $Tr[A]$, *est la somme des éléments diagonaux de* $[A]$. *Soit*

$$\boxed{\mathrm{Tr}[A] = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}}. \tag{4.10}$$

La matrice d'ordre n ayant des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs se note $[I]$ et s'appelle **matrice identité** ou **matrice unité**. La matrice $[I]$ est semblable au scalaire 1 en ceci que pour toute matrice $[A]$ (du même ordre)

$$\boxed{[A][I] = [I][A] = [A]}. \tag{4.11}$$

Exemple 4.1 *Le symbole de Kronecker* δ_{ij} *est défini par*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} .$$

Ainsi, la matrice identité peut être définie par $[I]_{ij} = \delta_{ij}$.

Les matrices scalaires d'ordre 2, 3 et 4 correspondant au scalaire $k = 5$ *sont, respectivement*

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}.$$

4.2.2 Puissance d'une matrice, polynômes de matrices

Définition 4.9 *Puissance d'une matrice. Soit* $[A]$ *une matrice carrée d'ordre* n *sur le corps des réels. Les puissances de* $[A]$ *sont définies de la manière suivante*

$$\boxed{[A]^2 = [A][A] \quad [A]^3 = [A]^2[A] \quad [A]^{n+1} = [A]^n[A] \qquad \text{et} \quad [A]^0 = [I]}. \tag{4.12}$$

Définition 4.10 *Polynômes de matrices. Pour tout polynôme*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

où les a_i *sont des réels, le polynôme de la matrice* $[A]$ *associé s'écrit*

$$\boxed{f([A]) = a_0[I] + a_1[A] + a_2[A]^2 + \ldots + a_n[A]^n}. \tag{4.13}$$

A noter que $f([A])$ s'obtient à partir de $f(x)$ en remplaçant la variable x par la matrice $[A]$ et le réel a_n par la matrice scalaire $a_n[I] = a_n\delta_{ij}$.

Dans le cas où $f([A])$ est la matrice nulle, la matrice $[A]$ est dite un **zéro** ou une **racine** du polynôme $f(x)$.

Exercice 4.10 *Soit*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. *Calculer* $[A]^2$ *et* $[A]^3$.
2. *Montrer alors que*

$$f([A]) = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix},$$

où $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

Théorème 4.1 *Soit* $f(x)$ *et* $g(x)$ *deux polynômes et soit* $[A]$ *une matrice carrée d'ordre* n *(sur tout* $\mathbb{R}$*). Alors*
- $(f+g)([A]) = f([A]) + g([A])$.
- $(fg)([A]) = f([A])\, g([A])$.
- $f([A])\, g([A]) = g([A])\, f([A])$.

4.2.3 Matrices diagonale, triangulaire, symétrique et orthogonale

Définition 4.11 *Matrice diagonale. Une matrice carrée* $[D]$ *est dite* ***diagonale*** *si tous les éléments non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est fréquemment notée* $[D] = Diag(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$*, où certains ou tous les réels* d_{ii} *peuvent être égaux à zéro.*

Exemple 4.2

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & & & \\ & 0 & & \\ & & -9 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice identité est un cas particulier de matrice diagonale.

Définition 4.12 *Matrice triangulaire supérieure. Une matrice* $[A]$ *est dite* ***triangulaire supérieure*** *si tous les éléments situés* ***en dessous*** *de la diagonale sont nuls ; si* $a_{ij} = 0$ *pour* $i > j$.

Les matrices supérieures d'ordre 2, 3 et 4 sont respectivement

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Comme pour les matrices diagonales, les blocs de zéros ont été supprimés.

Théorème 4.2 *Soit $[A]$ et $[B]$ deux matrices triangulaires supérieures d'ordre n. Alors*

- *$[A]+[B]$ est une matrice triangulaire supérieure avec la diagonale $a_{11}+b_{11}$, $a_{22}+b_{22}$, ..., $a_{nn}+b_{nn}$.*
- *$k[A]$ est une matrice triangulaire supérieure avec la diagonale ka_{11}, ka_{22}, ..., ka_{nn}.*
- *$[A][B]$ est une matrice triangulaire supérieure avec la diagonale $a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$, ..., $a_{nn}b_{nn}$.*
- *Pour tout polynôme $f(x)$, la matrice $f([A])$ est une matrice triangulaire supérieure avec la diagonale $f(a_{11})$, $f(a_{22})$, ..., $f(a_{nn})$.*

D'une manière analogue, une matrice est dite **triangulaire inférieure** si tous des éléments situés **au-dessus** de la diagonale sont nuls. On peut énoncer l'analogue du théorème ci-dessus pour les matrices **triangulaires inférieures**.

Définition 4.13 *Matrice orthogonale. Une matrice $[A]$ est dite **orthogonale** si $[A][A]^T = [I]$.*

Exercice 4.11 *Soit*

$$[A] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $[A]$ est une matrice orthogonale.

Considérons maintenant une matrice d'ordre 3 quelconque

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Si $[A]$ est orthogonale alors

$$[A][A]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rrr} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=0 & b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0 & c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3=0 & c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \end{array}\right..$$

En d'autre termes

$$\left\{\begin{array}{lll} \vec{u}_1\cdot\vec{u}_1=1 & \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0 & \vec{u}_1\cdot\vec{u}_3=0 \\ \vec{u}_2\cdot\vec{u}_1=0 & \vec{u}_2\cdot\vec{u}_2=1 & \vec{u}_2\cdot\vec{u}_3=0 \\ \vec{u}_3\cdot\vec{u}_1=0 & \vec{u}_3\cdot\vec{u}_2=0 & \vec{u}_3\cdot\vec{u}_3=1 \end{array}\right.,$$

où $\overrightarrow{u}_1 = [a_1\ a_2\ a_3]$, $\overrightarrow{u}_2 = [b_1\ b_2\ b_3]$, $\overrightarrow{u}_3 = [c_1\ c_2\ c_3]$ sont les lignes de la matrice $[A]$ (vecteurs lignes). Par conséquent, les vecteurs lignes $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ et $\overrightarrow{u}_3$ sont orthogonaux deux à deux et de normes unitaires. En d'autres termes, les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ et $\overrightarrow{u}_3$ forment une base orthonormée. La condition $[A][A]^{\mathrm{T}}$ montre également que les vecteurs colonnes forment une base orthonormée.

De manière très condensée, on peut alors écrire que

$$\boxed{\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j = \delta_{ij}}. \tag{4.14}$$

4.2.4 Déterminant d'une matrice

A chaque matrice carrée $[A]$ d'ordre n on peut associer un nombre réel appelé le *déterminant* de $[A]$, noté habituellement $\det[A]$, $|[A]|$, ou encore

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \right|.$$

Le déterminant est un **nombre réel**. Ce n'est pas une matrice.

4.2.4.1 Déterminant d'ordre 1 et 2

Les déterminants d'ordre 1 et d'ordre 2 sont définis comme suit

$$\boxed{|[A]| = a_{11} \qquad |[A]| = \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{4.15}$$

Ainsi, le déterminant d'ordre 2 est égal au produit des éléments de la diagonale principale, affecté du signe plus, moins le produit des éléments de l'anti-diagonale, affecté du signe moins (règle du "gamma").

Exercice 4.12 *Montrer que*

$$\left| \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right| = 7 \quad et \quad \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \right| = 16.$$

Une application directe du déterminant est la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Si

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Alors la solution s'exprime comme

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{\det[A]} = \dfrac{\left|\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}\right|}{\det[A]} = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y = \dfrac{D_y}{\det[A]} = \dfrac{\left|\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}\right|}{\det[A]} = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}}. \tag{4.16}$$

Les numérateurs D_x et D_y des quotients donnant x et y, respectivement, peuvent être obtenus en remplaçant la colonne des coefficients de l'inconnue à déterminer, dans la matrice des coefficients, par la colonne des termes constants.

Exercice 4.13 *Montrer que la solution du système linéaire suivant*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases},$$

est $x = 2$ et $y = -1$.

4.2.4.2 Déterminant d'ordre 3

Le déterminant d'ordre 3 peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de déterminants d'ordre 2. En effet

$$\begin{aligned} |[A]| &= \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right| = +a_{11}\left|\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right| - a_{12}\left|\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right| + a_{13}\left|\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right| \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Exercice 4.14 *Montrer que le déterminant de la matrice suivante*

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

est 5.

4.2.4.3 Déterminant d'ordre n

Définition 4.14 *Cofacteur. Considérons une matrice $[A]$ d'ordre n. Appelons $[M]$ la sous matrice d'ordre $n-1$ de $[A]$, obtenue en supprimant la $i-$ème ligne et la $j-$ième colonne de $[A]$. Le déterminant de la matrice $[M]$ est appelé le mineur de l'élément de a_{ij} de la matrice $[A]$. Le cofacteur de a_{ij}, noté c_{ij}, est le mineur m_{ij} affecté de sa signature défini par*

$$\boxed{c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}}. \tag{4.18}$$

Notons que les “signes” $(-1)^{i+j}$ des mineurs forment un arrangement en échiquier, avec les signes $+$ sur la diagonale principale. Soit

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Exercice 4.15 *Montrer que* $m_{23} = -6$ *et* $c_{23} = 6$ *de la matrice suivante*

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème 4.3 *Déterminant d'ordre* n. *Le déterminant de la matrice* $[A]$ *est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne (resp. d'une colonne) quelconque par leurs cofacteurs respectifs. Soit*

$$\boxed{|[A]| = \begin{cases} a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in} = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}c_{ij} \\ a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj} = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}c_{ij} \end{cases}}. \tag{4.19}$$

Exercice 4.16 *Calculer le déterminant de la matrice suivante*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Une application directe du déterminant est la résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. Soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & + \vdots & + \ddots & + \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle comme $[A][X] = [B]$, où $[A]$ est une matrice d'ordre n dont les éléments sont a_{ij}, $[X]$ un vecteur colonne contenant les inconnues x_i et $[B]$ le vecteur colonne contenant les constantes b_i.

Soit $[M]$ la matrice obtenue à partir de la matrice $[A]$ en remplaçant la $i-$ème colonne par le vecteur colonne $[B]$. Soit

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Soit $D = \det[A]$ et soit $D_i = \det[M]_i$ pour $i = \{1, 2, \dots, n\}$. La relation fondamentale entre les déterminants et la solution du système précédent est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.4 *Le système précédent admet une solution unique si, et seulement si $D \neq 0$. Dans ce cas la solution unique est donnée par*

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad \dots x_n = \frac{D_n}{D}}. \tag{4.20}$$

Le théorème précédent est connu sous le nom de **règle de Cramer** pour la résolution des systèmes d'équations linéaires. Cependant, ce théorème s'applique uniquement à un système qui a autant d'équations que d'inconnues, et il donne uniquement une solution dans le cas où $D \neq 0$. En fait, si $D = 0$, le théorème ne nous dit pas si le système admet ou non une solution. Cependant, dans le cas d'un système homogène, nous avons le résultat suivant qui s'avère d'un grand intérêt.

Théorème 4.5 *Le système homogène $[A][X] = [0]$ admet une solution non nulle si, et seulement si $D = \det[A] = 0$.*

Exercice 4.17 *Montrer que la solution du système linéaire suivant*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases},$$

est $x = 2$, $y = -1$ et $z = 0$.

4.2.5 Inverse d'une matrice

Définition 4.15 *Matrice adjointe. Considérons une matrice $[A]$ d'ordre n sur le corps des réels. La matrice adjointe de $[A]$, notée Adj$[A]$, est la transposée de la matrice des cofacteurs $[C]$ des éléments a_{ij} de $[A]$. Soit*

$$\boxed{\mathrm{Adj}[A] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}. \tag{4.21}$$

Exercice 4.18 *Soit la matrice [A] suivante*

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Montrer alors que

$$Adj\,[A] = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Définition 4.16 *Inverse d'une matrice. Soit [A] une matrice d'ordre n sur le corps des réels. L'inverse de la matrice [A], notée $[A]^{-1}$, s'écrit alors*

$$\boxed{[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]}\text{Adj}[A] = \frac{1}{\det[A]}[C]^{\mathrm{T}}}, \tag{4.22}$$

si $\det[A] \neq 0$.

Si $[A]^{-1}$ existe alors la matrice $[A]$ est dite **inversible** ou non **singulière**.

Si $[A]$ est une matrice orthogonale, soit $[A][A]^{\mathrm{T}} = [I]$, alors $[A]^{-1} = [A]^{\mathrm{T}}$.

Exercice 4.19 *Soit*

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Montrer alors que

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}.$$

4.2.6 Quelques propriétés

Soit $[A]$ et $[B]$ deux matrices de même dimension et k un réel alors

$$\begin{cases} ([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1} \\ \det\left([A]^{\mathrm{T}}\right) = \det[A] \\ \det([A][B]) = \det[A]\det[B] \\ \text{Si } [A] \text{ a 1 ligne (ou 1 colonne) de zéros alors } \det[A] = 0 \\ \text{Si } [A] \text{ a 2 lignes (ou 2 colonnes) identiques alors } \det[A] = 0 \\ \text{Si } [A] \text{ est triangulaire alors } \det[A] = \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii} \\ \text{Si 2 lignes (ou 2 colonnes) de } [A] \text{ ont été échangées donnant } [B] \text{ alors } \det[B] = -\det[A] \\ \text{Si 1 ligne (ou 1 colonne) de } [A] \text{ a été multipliée par } k \text{ alors } \det[B] = k\det[A] \end{cases} . \tag{4.23}$$

et

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}([A]+[B]) = \mathrm{Tr}([A]) + \mathrm{Tr}([B]) \\ \mathrm{Tr}(k[A]) = k\mathrm{Tr}([A]) \\ \mathrm{Tr}\left([A]^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Tr}([A]) \\ \mathrm{Tr}([A][B]) = \mathrm{Tr}([B][A]) \end{cases} . \tag{4.24}$$

4.2.7 Diagonalisation : valeurs propres et vecteurs propres

4.2.7.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 4.17 *Valeurs et vecteurs propres. Soit $[A]$ une matrice carrée arbitraire. Un scalaire λ est appelé* ***valeur propre*** *de $[A]$ s'il existe un vecteur (colonne) non nul $[v]$ tel que*

$$\boxed{[A][v] = \lambda[v]}. \tag{4.25}$$

Le vecteur $[v]$ vérifiant cette relation est appelé ***vecteur propre*** *correspond à la valeur propre λ.*

On peut remarquer que tout multiple $k[v]$ d'un vecteur propre est encore vecteur propre pour la même valeur propre λ.

Théorème 4.6 *Diagonalisation d'une matrice. Une matrice d'ordre n est diagonalisable, donc représentable par une matrice diagonale $[D]$, si et seulement si elle possède n vecteurs propres* ***linéairement indépendants****. La matrice diagonale $[D]$ ainsi définie a pour éléments les valeurs propres de $[A]$, et la matrice $[P]$ (de passage) telle que $[D] = [P]^{-1}[A][P]$ a pour colonnes les composantes des vecteurs propres correspondants.*

Si une matrice $[A]$ est diagonalisable, soit $[P]^{-1}[A][P] = [D]$, où la matrice $[D]$ est diagonale, la formule suivante est particulièrement utile pour mettre $[A]$ sous forme diagonale, et est appelée **décomposition diagonale** de $[A]$. Soit

$$\boxed{[A] = [P][D][P]^{-1}}. \tag{4.26}$$

On peut alors remplacer tout calcul où intervient la matrice $[A]$ par un calcul sur une matrice diagonale, qui est beaucoup plus simple. Par exemple, en posant $[D] = \mathrm{Diag}\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, on a

$$\boxed{[A]^m = \left([P][D][P]^{-1}\right)^m = [P][D]^m[P]^{-1} = [P]\mathrm{Diag}\,(k_1^m, k_2^m, \ldots, k_n^m)\,[P]^{-1}}. \tag{4.27}$$

Plus généralement, pour tout polynôme f, on a

$$\boxed{f\,([A]) = f\left([P][D][P]^{-1}\right) = [P]f\,([D])\,[P]^{-1}}. \tag{4.28}$$

Exercice 4.20 *Soit*

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad [v_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad [v_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que les vecteurs $[v_1]$ et $[v_2]$ sont des vecteurs propres de la matrice $[A]$ et déterminer leur valeur propre respective, λ_1 et λ_2.*
2. *En déduire la matrice de passage $[P]$ associée et montrer que*
$$[P]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$
3. *Calculer alors $[P]^{-1}[A][P]$. Conclure.*
4. *Montrer que $[P][D][P]^{-1} = [A]$.*
5. *Montrer que*
$$[A]^4 = \begin{bmatrix} 171 & 85 \\ 170 & 86 \end{bmatrix}.$$
6. *Montrer que*
$$[A]^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$
7. *Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6$. Montrer alors que*
$$f\,([A]) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.2.7.2 Polynôme caractéristique

Définition 4.18 *Polynôme caractéristique. Soit $[A]$ une matrice d'ordre n. Considérons la matrice $[M] = [A] - \lambda[I]$, où $[I]$ est la matrice identité et λ un nombre réel indéterminé. La matrice*

$[M]$ s'obtient simplement en soustrayant λ à tous les éléments diagonaux de $[A]$. L'opposé de $[M]$ est la matrice $\lambda[I]-[A]$ et son déterminant

$$\boxed{D(\lambda)=\det(\lambda[I]-[A])=(-1)^n\det([A]-\lambda[I])}, \qquad (4.29)$$

est un polynôme de degré n, appelé polynôme caractéristique de la matrice $[A]$.

Théorème 4.7 *Théorème de Cayley-Hamilton. Toute matrice $[A]$ est racine de son polynôme caractéristique. Soit $D([A])=[0]$.*

Exercice 4.21 *Soit*

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que $D(\lambda)=\lambda^2-6\lambda-7$.*
2. *Montrer que*
$$[A]^2=\begin{bmatrix}13 & 18\\ 24 & 37\end{bmatrix}.$$
3. *Montrer que $D([A])=[0]$.*

Exercice 4.22 *Si $[A]$ est une matrice d'ordre 2 montrer que*

$$\boxed{D(\lambda)=\lambda^2-\lambda\,Tr[A]+\det[A]}. \qquad (4.30)$$

Exercice 4.23 *Si $[A]$ est une matrice d'ordre 3 montrer que*

$$\boxed{D(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2\,Tr[A]+\lambda\,(c_{11}+c_{22}+c_{33})-\det[A]}, \qquad (4.31)$$

où les réels $\{c_{ii}\}$ sont les cofacteurs des éléments $\{a_{ii}\}$ de $[A]$.

4.2.7.3 Calcul des valeurs et vecteurs propres et diagonalisation

Cette section fournit un algorithme de calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice et établit, ou non, l'existence d'une matrice régulière (inversible) $[P]$ telle que la matrice $[P]^{-1}[A][P]$ soit diagonale.

1. Trouver le polynôme caractéristique $D(\lambda)$ de $[A]$.
2. Déterminer les racines de $D(\lambda)$, qui sont les valeurs propres λ_i de $[A]$.
3. Pour chacunes des valeurs propres λ_i de $[A]$, réitérer les deux points suivants :
   a) Construire la matrice $[M_i]=[A]-\lambda_i[I]$ en soustrayant λ_i à chacun des éléments diagonaux.
   b) Déterminer une base de l'espace des solutions du système homogène d'équations linéaires $[M_i][X]=[0]$: ces vecteurs sont les vecteurs propres de $[A]$ linéairement indépendants correspondant à la valeur propre λ_i.

4. Examiner le système de valeurs $S = \{[v_1], [v_2], \ldots, [v_m]\}$ obetenu à l'étape 3 :
   a) Si $m \neq n$, $[A]$ n'est pas diagonalisable.
   b) Si $m = n$, $[A]$ est diagonalisable. Construire alors la matrice $[P]$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $[v_1], [v_2], \ldots, [v_n]$, d'où

$$D(\lambda) = [P]^{-1}[A][P] = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,, \tag{4.32}$$

   où λ_i est la valeur propre correspondant au vecteur propre $[v_i]$.

Exercice 4.24 *Soit*

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que* $D(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$.
2. *En déduire les valeurs propres* λ_1 *et* $\lambda_2 < \lambda_1$ *de la matrice* $[A]$.
3. *Montrer que les vecteurs propres associés sont*

$$[v_1] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [v_2] = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. *En déduire la matrice* $[P]$, *puis* $[P]^{-1}$.
5. *Montrer alors que*

$$[D] = [P]^{-1}[A][P] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

4.2.7.4 Diagonalisation des matrices réelles symétriques

Beaucoup de matrices réelles ne sont pas diagonalisables. Il existe en particulier des matrices réelles n'ayant aucune valeur propre. Mais ce n'est jamais le cas si la matrice est **symétrique**.

Théorème 4.8 *Soit* $[A]$ *une matrice réelle symétrique. Alors toutes les racines de son polynôme caractéristique sont réelles.*

Théorème 4.9 *Soit* $[A]$ *une matrice réelle symétrique. Si* $[u]$ *et* $[v]$ *sont deux vecteurs propres de* $[A]$, *alors* $[u]$ *et* $[v]$ *sont orthogonaux.*

Ces deux théorèmes conduisent au résultat fondamental suivant :

Théorème 4.10 *Soit* $[A]$ *une matrice réelle symétrique. Alors il existe une matrice* ***orthogonale*** $[P]$ *telle que la matrice* $[D] = [P]^{-1}[A][P]$ *soit diagonale avec* $[P]^{-1} = [P]^T$.

Comme nous allons le voir, la matrice orthogonale $[P]$ s'obtient en **normalisant** une base de vecteurs propres orthogonaux.

Exercice 4.25 *Soit la matrice réelle symétrique*

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que les valeurs propres de la matrice* $[A]$ *sont* $\lambda_1 = 6$ *et* $\lambda_2 = 1$.
2. *Montrer que les vecteurs propres associés sont*

$$[v_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad [v_2] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. *Montrer que les vecteurs* $[v_1]$ *et* $[v_2]$ *sont orthogonaux.*
4. *Calculer les vecteurs normalisés associés* $[\hat{v}_1]$ *et* $[\hat{v}_2]$.
5. *En déduire la matrice* $[P]$.
6. *Vérifier que* $[P]$ *est une matrice orthogonale.*
7. *Montrer que*

$$[D] = [P]^{-1}[A][P] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

A TDs du chapitre 1

A.1 Développement limité

1. Est-il exact qu'au voisinage de 0, on a l'égalité $\dfrac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)$.

2. Est-il exact qu'au voisinage de 0, on a l'égalité $\dfrac{\sin x}{x+x^2} = 1 - x + \mathcal{O}(x^2)$.

3. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

4. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = e^{\cos x}$.

5. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

6. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

A.2 Limite

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)}$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} [\tan x \tan(2x)]$.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln[\cos(ax)]}{\ln[\cos(bx)]}$ avec a et b réels.

6. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}^{+,*}$.

7. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$.

A.3 Primtive

Soit D_f l'ensemble de définition de la primivite.

1. Calculer D_f et $\displaystyle\int x \ln x dx$.
2. Calculer D_f et $\displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$.
3. Calculer D_f et $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.
4. Calculer D_f et $\displaystyle\int \frac{dx}{(a-x)(b-x^2)} dx$.
5. Calculer D_f et $\displaystyle\int \frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos\theta}$.
6. Calculer D_f et $\displaystyle\int \frac{d\theta}{D + R\cos\theta}$ avec $D > R$.
7. Calculer D_f et $\displaystyle\int \tan^2\theta$.
8. Calculer D_f et $\displaystyle\int \sin^3\theta \cos^2\theta d\theta$.

A.4 Intégrale

1. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} e^x \sqrt{1 - e^x} dx$. On pourra poser $t = e^x$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(1 + x^2\right) \sqrt{1 - x^2} dx$. On pourra poser $x = \sin t$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_{-0}^{\pi/4} \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx$.
4. Calculer $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + x + 1} dx$.

A.5 Equation différentielle

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) - y(x) = x^2$. Quelle est la solution correspondant à la condition initiale $y(0) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $xy'(x) - y(x) = \ln(x)$ avec $x > 0$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) - By(x) = A\sin\omega x$. Quelle est la solution correspondant à la condition initiale $y(0) = 0$. En déduire la solution complète pour $A = 6$, $B = \sqrt{3}$ et $\omega = 1$.

4. Résoudre l'équation $y''(x) - \omega_0^2 y(x) = 0$ avec ω_0 réel. Que devient la solution générale si $\omega_0 = 2$ et si $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ et $y'(0) = 0$.

5. Résoudre l'équation $y''(x) - 4y(x) = 4x^2$ en utilisant la méthode de la variation de la constante.

B TDs du chapitre 2

B.1 Dérivées partielles

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, le domaine de définition est demandé.

1. Si $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au point $M_0(x_0, y_0)$ directement à partir de la définition de la dérivée partielle d'une fonction à deux variables.

2. Si $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$.

3. Montrer que $U(x, y, x) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ avec x, y et z différents de zéro satisfait l'équation aux dérivées partielles de Laplace $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

4. Si $f(x, y) = x^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ au point $M_0(1, 1)$.

5. La capacité d'un condensateur plan est donné par $C = \frac{\epsilon S}{d}$ où S est la surface de l'armature, ϵ la permittivité du diélectrique et d la distance entre les deux armatures. Calculer la variation de C, notée ΔC, lorsque ϵ et d subissent respectivement des petites variations $\Delta\epsilon$ et Δd.

B.2 Différentation des fonctions composées

1. Si $x(r, \phi) = r\cos\phi$, $y(r, \phi) = r\sin\phi$ avec $r > 0$ et $\phi \in [0; 2\pi[$, montrez que $V(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie
$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2.$$

2. Démontrer que la fonction $Y = f(x + at) + g(x - at)$ satisfait la relation $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, où f et g sont deux fois dérivables et $a \in \mathbb{R}$.

3. On considère une fonction à deux variables $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de D_f dans $\mathbb{R}$. Soit les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et définie de D_f dans $\mathbb{R}$.
   a) Calculer la différentielle δf de f selon le couple (x, y).

b) Calculer la différentielle δf de f selon le couple (u, v).
c) Conclure.

B.3 Intégrale Curviligne

Rappel. Une forme différentielle $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est dite **exacte** si les fonctions P et Q de classe $\mathcal{C}^1$ vérifient la relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On écrit alors $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. L'intégrale curviligne s'écrit alors pour une courbe ouverte

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)}. \tag{B.1}$$

1. Calculer l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_\Gamma \left[(x^2 - y)dx + (y^2 + x))dy\right]$ le long des chemins Γ suivants :
   a) D'une ligne droite joignant le point $A(0,1)$ au point $B(1,2)$.
   b) D'une ligne droite joignant le point $A(0,1)$ au point $C(1,1)$ et d'une ligne droite joignant le point C au point $B(1,2)$.
   c) De la parabole paramétrée par $x = t$ et $y = t^2 + 1$.

2. Si $\overrightarrow{A} = (3x^2 - 6yz)\overrightarrow{i} + (2y + 3xz)\overrightarrow{j} + (1 - 4xyz^2)\overrightarrow{k}$, calculer $\displaystyle\int \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r}$ du point $A(0,0,0)$ au point $B(1,1,1)$ le long des chemins Γ suivants :
   a) $x = t$, $y = t^2$ et $z = t^3$.
   b) Les segments de droite joignant le point $(0,0,0)$ au point $(0,0,1)$, puis du point $(0,0,1)$ au point $(0,1,1)$ et enfin du point $(0,1,1)$ au point $(1,1,1)$.
   c) La ligne droite allant du point $(0,0,0)$ au point $(1,1,1)$.

3. Calculer le travail effectué en déplaçant une particule une seule fois le long d'une ellipse Γ dans le plan (Ox, Oy), sachant que l'ellipse a pour centre l'origine, pour demi-grand axe et pour demi-petit axe, respectivement 4 et 3 et sachant que le champ de force est donné par
$$\overrightarrow{F} = (3x - 4y + 2z)\overrightarrow{i} + (4x + 2y - 3z^2)\overrightarrow{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\overrightarrow{k}.$$

4. Démontrer que $\displaystyle\int_A^B \left[\left(6xy^2 - y^3\right)dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right)dy\right]$ est indépendant du chemin joignant le point $A(1,2)$ au point $B(3,4)$ et calculer alors de deux façons différentes cette intégrale.

5. Calculer sur un contour *fermé* $\oint \left[\left(x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x\right)dx + \left(x^2 \sin x - 2ye^x\right)dy\right]$ sur l'hypocycloïde d'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ avec $a > 0$.

B.4 Intégrale double

1. Tracez le domaine D du plan (Ox, Oy) délimité par les courbes $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$ et calculez l'intégrale double
$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy.$$

2. Calculer l'intégrale double
$$I = \iint_D (2x + y^2) dxdy,$$
où D est le triangle délimité par les axes (Ox) et (Oy), et la droite d'équation $y = -2x+2$.

3. Calculer l'intégrale double
$$I = \iint_D e^{x+y} dxdy,$$
sur le losange $|x| + |y| \leq 1$.

4. Calculer l'intégrale double
$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$$
où D est le domaine du plan (Ox, Oy) limité par les courbes d'équations $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 9$.

5. Calculer l'intégrale double
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x+a)^2-(\beta y+b)^2} dxdy,$$
avec $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

B.5 Extrema

1. Ecrire le polynôme de Taylor d'ordre 2 en $(0, \pi/2)$ de la fonction définie par $f(x, y) = e^x \sin(x + y)$.

2. Trouver les points stationnaires ou critiques de la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + 14x^2y^2 - 7y^4 - 4x + 6$.

3. Trouver les maxima et minima relatifs de la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

4. Soit une boîte rectangulaire d'un volume de 32 m^3. Quelle doivent être ses dimensions pour que la surface totale soit minimale ?

C TDs du chapitre 3

C.1 Rotationnel et intégrale curviligne

Soit le champ de vecteur défini dans le corps des réels par $\overrightarrow{F}(x,y,z) = F_x\overrightarrow{e}_x + F_y\overrightarrow{e}_y + F_z\overrightarrow{e}_z$ où $F_x = y\cos z$, $F_y = x\cos z$ et $F_z = -xy\sin z$.

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.
2. En déduire la fonction scalaire f associée dont dérive le champ vectoriel $\overrightarrow{F}$.
3. En déduire l'intégrale curviligne
$$I = \int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl},$$
où $\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{e}_x + dy\overrightarrow{e}_y + dz\overrightarrow{e}_z$ sur un chemin quelconque joignant les points $A(0,0,0)$ et $B(1,1,\pi)$.

C.2 Equation de propagation

Dans l'air (assimilé au vide), les champs électrique $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(x,y,z,t)$ et magnétique $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}(x,y,z,t)$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\mu_0\dfrac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t} & \mathrm{div}\overrightarrow{H} = 0 \\ \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{H} = \epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} & \mathrm{div}\overrightarrow{E} = 0 \end{array}\right. ,$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide. Ce sont des constantes.

1. En prenant le rotationnel de l'équation (1) et en utilisant la relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}) = -\nabla^2\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\overrightarrow{F})$, montrer que $\overrightarrow{E}$ vérifie l'équation de propagation suivante
$$\nabla^2\overrightarrow{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}.$$
2. En supposant que $\overrightarrow{E}(x,y,z,t) = E_x(x,y,z)e^{j\omega t}\overrightarrow{e}_x$, montrer que l'équation de propagation devient
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 E_x = 0 \quad \text{avec} \quad k_0^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2.$$

3. En supposant que $E_x(x,y,z) = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-j\beta x}$ avec E_0 et a constants, en déduire à l'aide de la question 2. une relation entre $\beta > 0$ et le couple (k_0, a).

C.3 Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques

1. Donner l'expression de l'opérateur rotationnel en coordonnées cartésiennes.
2. A l'aide du tableau 3.1, montrer que l'opérateur rotationnel s'écrit en coordonnées sphériques comme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) - \frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\right]\overrightarrow{e}_r \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right]\overrightarrow{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e}_\phi.\end{aligned}$$

3. Donner l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes.
4. A l'aide du tableau 3.1, montrer que l'opérateur gradient s'écrit en coordonnées sphériques comme

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\overrightarrow{e}_\phi.$$

D TDs du chapitre 4

Une matrice est notée entre crochets. Par exemple $[A]$.

D.1 Addition matricielle et multiplication scalaire

A) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer [A]+[B].
2. Calculer 2[A]-3[B].

B) Déterminer x, y, z et t tels que

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}.$$

D.2 Produit de matrices

A) Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a)}\ [8\ -4\ 5]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{b)}\ [6\ -1\ 7\ 5]\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{c)}\ [3\ 8\ -2\ 4]\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

B) Désignons par la notation $(r \times s)$ une matrice quelconque de dimension $r \times s$. Déterminer, les dimensions des matrices produit, si elles existent, dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a)}\ (2\times 3)(3\times 4) & \text{c)}\ (1\times 2)(3\times 1) & \text{e)}\ (4\times 4)(3\times 3) \\ \text{b)}\ (4\times 1)(1\times 2) & \text{d)}\ (5\times 2)(2\times 3) & \text{f)}\ (2\times 2)(2\times 4) \end{array}.$$

C) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calculer $[A][B]$ et $[B][A]$.

D) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculer $[A][B]$.

E) Calculer les produits suivants :

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{c)}\ [2\ -7] \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

D.3 Transposée d'une matrice

Déterminer les transposées des matrices suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad [C] = [1\ -3\ 5\ -7] \quad [D] = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

D.4 Matrice carrée

A) Indiquer la diagonale et calculer la trace des matrices suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 9 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

B) Soit $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x - 11$ et

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calculer

1. $[A]^2$.
2. $[A]^3$.
3. $f([A])$.
4. $g([A])$.

C) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Trouver un vecteur colonne non nul $[u]^{\mathrm{T}} = [x\ y]$ tel que $[A][u] = 3[u]$.
2. Déterminer tous les vecteurs vérifiant cette équation.

D.5 Matrices diagonales et triangulaires

A) Ecrire les matrices diagonales $[A] = \mathrm{Diag}\,(4,-3,7)$, $[B] = \mathrm{Diag}\,(2,-6)$ et $[C] = \mathrm{Diag}\,(3,-8,0,5)$.

B) Soit $[A] = \mathrm{Diag}\,(2,3,5)$ et $[B] = \mathrm{Diag}\,(7,0,-4)$ et soit $f(x) = x^2 + 3x - 2$. Calculer

1. $[A][B]$, $[A]^2$ et $[B]^2$.
2. $f([A])$.
3. $[A]^{-1}$ et $[B]^{-1}$.

C) Trouver la matrice 2×2 non diagonale $[A]$ dont les éléments sont non nuls, telle que $[A]^2$ soit diagonale.

D) Trouver une matrice $[A]$ triangulaire supérieure telle que

$$[A]^3 = \begin{bmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

D.6 Matrices réelles symétriques

A) Dire si les matrices suivantes sont symétriques ($[A]^{\mathrm{T}} = [A]$), ou antisymétriques ($[A]^{\mathrm{T}} = -[A]$) :

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B) Déterminer x pour que la matrice

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix},$$

soit symétrique.

C) Soit $[A]$ une matrice arbitraire 2×2, réelle et orthogonale définie par

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}.$$

1. Montrer alors que

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [A] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

2. Montrer alors qu'il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

D.7 Déterminants et inversion d'une matrice

A) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} t-5 & 6 \\ 3 & t+2 \end{bmatrix}.$$

B) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

C) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Déterminer

1. $\det[A]$.
2. $\mathrm{Adj}[A]$.
3. $[A]^{-1}$ à l'aide de $\mathrm{Adj}[A]$.

D) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculer

1. $[A]^{-1}$ en écrivant $[A][A]^{-1} = [I]$.
2. $[A]^{-1}$ à l'aide de $\mathrm{Adj}[A]$.

E) A l'aide des déterminants, résoudre le système

$$\begin{cases} 3y - 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases}.$$

F) Soit le système

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}.$$

En utilisant les déterminants, déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système a

1. Une solution unique.
2. Plus d'une solution.
3. Zéro solution.

D.8 Diagonalisation : valeurs propres et vecteurs propres

A) Trouver le polynôme caractéristique $D(\lambda)$ des matrices suivantes

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}.$$

B) Trouver le polynôme caractéristique $D(\lambda)$ des matrices suivantes

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

C) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.
2. Trouver une matrice régulière (inversible) $[P]$ est une matrice diagonale $[D]$ telles que $[D] = [P]^{-1}[A][P]$.

D) Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.
2. Trouver une matrice régulière (inversible) $[P]$ est son inverse $[P]^{-1}$, telles que la matrice $[D] = [P]^{-1}[A][P]$ soit diagonale.
3. Exprimer $[A]^6$ et $f([A])$, pour $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 3$.

E) Soit la matrice **symétrique** suivante

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice **orthogonale** $[P]$ telle que la matrice $[D] = [P]^{-1}[A][P]$ soit diagonale.

F) Problème

1. Calculer les coordonnées du point $M_1(x_1, y_1)$ ayant subi une rotation d'une angle $\theta > 0$ en fonction des coordonnées du point initial $M(x, y)$.
2. Exprimer les deux relations obtenues sous forme matricielle. En déduire la matrice de rotation $[R]$ associée.
3. Vérifier que la matrice de rotation $[R]$ est orthogonale.
   - Soit la conique Γ dans le plan (x, y) définie par

$$q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{D.1}$$

4. Donner un nom à Γ lorsque $b = a$.
5. Représenter graphiquement Γ. Donner un nom à Γ, a et b.

   • On cherche à déterminer l'équation de Γ après une rotation d'un angle θ. On note la courbe obtenue Γ_1.
6. Exprimer le membre de gauche $q(x, y)$ de l'équation (D.1) sous forme matricielle en introduisant le vecteur $[v]^{\mathrm{T}} = [x\ y]$ et une matrice $[A]$ carrée diagonale d'ordre 2 fonction de a et b.
7. Exprimer $[v_1] = [x_1\ y_1]$ en fonction de $[v]$.
8. Montrer alors que
$$q(x_1, y_1) = [v_1]^{\mathrm{T}}[A_1][v_1],$$
   où les éléments de la matrice $[A_1]$ sont fonction de a, b et θ.
9. Donner alors l'équation de Γ_1.
10. Si $a = b$ que devient cette équation. Ce résultat vous parait-il logique ?
11. Représenter Γ_1 pour $a = 3$, $b = 2$ et $\theta = \pi/4$.

E Examen du cours "Mathématiques de base pour les ingénieurs : Analyse et Algèbre", mardi 18 novembre 2008 - Durée 1H30 avec cours uniquement

E.1 Intégrales (6 points)

Les questions 1 et 2 sont **indépendantes**.

1. Calculer une primitive de $\cos^3(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $F(x) = \int f(x)dx$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
   (a) Donner le domaine de définition de F, D_F, et calculer F lorsque $\Delta > 0$ (4 points).
   (b) Donner le domaine de définition de F, D_F, et calculer F lorsque $\Delta = 0$ (2 points).

E.2 Dérivées partielles (5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a+x+y^2}}$ avec a une constante réelle. On effectue alors le changement de variables $x(r, \theta) = r\cos(2\theta)$ et $y(r, \theta) = r\sin(2\theta)$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial r}$ (3 points).
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ (2 points).

E.3 Equation différentielle (5 points)

Soit l'équation différentielle (E) suivante $y'(x)x^2 + y(x) = e^{\frac{2}{x}}$.

1. Donner un nom à (E) (1 point).
2. Réoudre (E) (4 points).

E.4 Intégrale curviligne (5 points)

Soit l'intégrale curviligne suivante

$$I = \oint_{\Gamma} ydx - xdy, \tag{E.1}$$

définie sur un contour **fermé**.

1. Sans calculer explicitement I, montrer que la valeur de I est différente de zéro.
2. Le contour Γ et défini par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_1$ avec
   - $\Gamma_1 = \left\{x = 1 + \cos t, y = 1 + \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$,
   - Γ_2 est le segment $[AB]$ avec $A(1, 2)$ et $B(2, 1)$.

   (a) Réprésenter graphiquement Γ_1 et Γ_2 avec deux couleurs différentes (1 point).

   (b) Calculer I (4 points).

F Examen du cours “Mathématiques de base pour les ingénieurs : Analyse et Algèbre”, mardi 17 novembre 2008 - Durée 1H15 avec cours uniquement

2 points sont réservés à la présentation.

F.1 Intégrales (8 points)

Les questions 1 et 2 sont **indépendantes**.

1. Soit l'intégrale suivante $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{D + R\cos\theta}$ avec $D > R$.
   (a) Donner le domaine de définition de l'intégrande, D_F (**1 point**).
   (b) Calculer I (**4 points**).
2. Soit l'intégrale suivante $F(\theta) = \displaystyle\int (\sin\theta)^3(\cos\theta)^2 d\theta$.
   (a) Donner le domaine de définition de F, D_F (**1 point**).
   (b) Calculer F (**2 points**).

F.2 Développement limité (4 points)

Calculer le développement limité de la fonction $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$ au voisiange de 0 et à l'ordre 3.

On rappelle que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

F.3 Analyse vectorielle (7 points)

Soit le champ de vecteur défini dans le corps des réels par $\overrightarrow{F}(x,y,z) = F_x\overrightarrow{e}_x + F_y\overrightarrow{e}_y + F_z\overrightarrow{e}_z$ où $F_x = y\cos z$, $F_y = x\cos z$ et $F_z = -xy\sin z$.

1. Montrer que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ (**2 points**).
2. En déduire la fonction scalaire $f(x,y,z)$ associée (**3 points**).

3. A l’aide du théorème de Stokes en déduire l’intégrale $I = \int\int_S \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS}$ (**2 points**).

G Examen du cours "Mathématiques de base pour les ingénieurs : Analyse et Algèbre", mercredi 29 septembre 2010 - Durée 1H15 avec cours uniquement

1. Calculer la limite suivante (**4 points**) :

$$L = \lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{2}{x}}.$$

2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de (**5 points**)

$$f(x) = \frac{\ln [1 + \sin(ax)]}{\ln [1 + \sin(bx)]},$$

   avec a et b réels.

3. Soit la primitive suivante :

$$F(x) = \int \frac{x\left(2x^2 - 8x + 17\right)}{x^2 - 4x + 8} dx = \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 17x}{x^2 - 4x + 8} dx.$$

   a) Donner l'ensemble de définition de F (**1 point**).
   b) Calculer F (**5 points**).

4. Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$xy'(x) - y(x) = \ln(x),$$

   avec $x > 0$.
   a) Donner un "nom" à (E) (**1 point**).
   b) Résoudre (E) (**4 points**).

Rappels :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^5).$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^4).$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^4).$$

H Examen du cours “Mathématiques de base pour les ingénieurs : Analyse et Algèbre”, lundi 18 octobre 2010 - Durée 1H15 avec cours uniquement

A) - (6 points) Soit l'intégrale curviligne I suivante :

$$I = \int_A^B ye^{xy}dx + axe^{xy}dy,$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Représenter Γ et caculer I dont le chemin Γ est le segment $[AB]$ avec $A(0;0)$ et $B(1;1)$. **(2 points)**
2. Donner la condition sur a afin que I ne dépende pas du chemin suivi. **(2 points)**
3. Pour un contour Γ quelconque, proposer alors une méthode pour le calcul de I. Comparer alors la valeur obtenue avec celle de la question 1. Conclure. **(2 points)**

B) - (6 points) Soit l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} dxdy.$$

Le domaine D_{xy} est défini par

$$D_{xy} = \left\{x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1, (x \geq 0, y \geq 0), (x \leq 0, y \leq 0)\right\}.$$

1. Réprésenter D_{xy} dans le plan (x, y). **(1.5 points)**
2. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = 2r\sin\theta$, réprésenter le nouveau domaine $D_{r\theta}$ associé à D_{xy} dans le plan (r, θ). **(1.5 points)**
3. En déduire I. **(3 points)**.

C) - (9 points) Soit la matrice $[A]$ suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b^2 \\ c^2 & a \end{bmatrix},$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^{*+}$ et $c \in \mathbb{R}^{*+}$.

1. Donner la condition pour que $[A]$ soit inversible ? **(1 point)**

2. Calculer l'inverse de $[A]$? **(1 point)**
3. Calculer les valeurs propres λ_1 et $\lambda_2 < \lambda_1$ de $[A]$? **(2 points)**
4. Montrer que les vecteurs $[v_1]$ et $[v_2]$ définis par

$$[v_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{c}{b} \end{bmatrix} \quad [v_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{c}{b} \end{bmatrix},$$

   sont vecteurs propres de $[A]$ et donner leur valeur propre associée. **(2 points)**
5. A quelle condition les vecteurs $[v_1]$ et $[v_2]$ sont orthogonaux ? **(1 point)**

   - Dans la suite on suppose que $c = b$.

6. Soit la matrice $[P] = k[v_1 \ v_2]$ avec $k \in \mathbb{R}^+$. Calculer alors k vérifiant $[P]^{-1} = [P]^{\mathrm{T}}$. **(1 point)**
7. Montrer que **(1 point)**

$$[P]^{-1}[A][P] = [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

I Examen du cours “Mathématiques de base pour les ingénieurs : Analyse et Algèbre”, vendredi 19 novembre 2010 - Durée 1H15 avec cours uniquement

I.1 Analyse vectorielle (4 points)

Montrer que $\operatorname{div}\left(\vec{A} \wedge \vec{F}\right) = -\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{F}$ où le vecteur $\vec{A} = A_x \overrightarrow{e}_x + A_y \overrightarrow{e}_y + A_z \overrightarrow{e}_z$ est un vecteur **constant** (indépendant des coordonnées x, y et z, contrairement à $\vec{F}$).

I.2 Intégrale curviligne (6 points)

Soit l'intégrale curviligne suivante

$$I = \oint_{\Gamma} ydx - xdy, \tag{I.1}$$

définie sur un contour **fermé**.

1. Sans calculer explicitement I, montrer que la valeur de I est différente de zéro (1 point).
2. Le contour Γ est défini par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_1$ avec
   - $\Gamma_1 = \left\{x = 1 + \cos t, y = 1 + \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$,
   - Γ_2 est le segment $[AB]$ avec $A(1, 2)$ et $B(2, 1)$.

   (a) Représenter graphiquement Γ_1 et Γ_2 avec deux couleurs différentes (1 point).

   (b) Calculer I (4 points).

I.3 Intégrale double (4 points)

Calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_{D_{xy}} x^2 e^{-\left(x^2+y^2\right)^2} dxdy,$$

en utilisant le système de coordonnées polaires (r, θ) et avec $D_{xy} = \{x \geq 0, y \geq 0\}$.

I.4 Inversion d'une matrice (6 points)

Soit la matrice $[A]$ suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \end{bmatrix}.$$

- A quelle condition la matrice $[A]$ est inversible (2 points).
- Calculer $[A]^{-1}$ (4 points).

J Examen du cours "Mathématiques de base pour les ingénieurs", jeudi 29 septembre 2011 - Durée 1H15 avec cours uniquement

1. Soit la fonction f définie par $f(x,y)=\cos(2x^2y)$ (**7 points**).

   (a) Donner le domaine de définition D_f de f (1 point).
   (b) Donner la classe de f (1 point).
   (c) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (1 points).
   (d) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (2 points).
   (e) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et en déduire $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en justifiant votre réponse (2 points).

2. Calculer la limite suivante (**4 points**) :

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x$$

3. Donner le domaine de définition de f, D_f, et calculer (**4=1+3 points**) :

$$f(x)=\int\frac{x^2}{x-1}dx$$

4. Soit l'équation différentielle suivante (**6 points**) :

$$y''(x)+4y(x)=16xe^{2x} \quad \text{(E)}$$

   (a) Donner un nom à (E) (1 point).
   (b) Calculer la solution homogène $y_H(x)$ (2 points).
   (c) Calculer la solution particulière $y_P(x)$. On pourra utiliser un tableau du cours (2 points).
   (d) En déduire $y(x)$ (1 point).

Rappels :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathcal{O}(x^4).$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\mathcal{O}(x^4).$$

K Examen du cours “Mathématiques de base pour les ingénieurs”, lundi 17 octobre 2011 - Durée 1H15 avec cours uniquement

K.1 Intégrale curviligne (6 points)

Soit Γ le chemin défini par

$$\Gamma = \left\{ \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ x \geq 0,\ a > 0 \right\}.$$

a) Réprésenter le chemin Γ dans le repère cartésien (x, y) (1 point).

b) Calculer alors l'intégrale curviligne I suivante (3 points) :

$$I = \int_\Gamma ydx + 2xdy$$

Soit l'intégrale curviligne suivante :

$$I = \oint_\Gamma P(x, y)dx + (x\cos x + y)dy$$

c) Calculer la fonction P afin que I soit nulle où Γ est un chemin quelconque (2 points).

K.2 Intégrale double (6 points)

Soit I l'intégrale double suivante

$$I = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^0 xe^{-(x^2+y^2)^{3/2}}dy$$

a) Réprésenter le domaine d'intégration D_{xy} en coordonnées cartésiennes (x, y) (1 point).

b) Réprésenter le domaine d'intégration $D_{r\theta}$ en coordonnées polaires (r, θ) (1 point).

c) En déduire la valeur de I (4 points).

K.3 Résolution d’un système linéaire (4 points)

A l’aide de la méthode dite du “déterminant” résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

K.4 Valeurs propres et vecteurs propres (5 points)

Soit

$$[A] = \begin{bmatrix} 1-a & 2a \\ 2a & 1-a \end{bmatrix}$$

où $a > 0$.

a) Calculer les valeurs propres (λ_1, λ_2) de $[A]$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$ (2 points).

b) Calculer les vecteurs propres $([v_1], [v_2])$ associés (2 points).

c) En déduire les vecteurs propres $([\hat{v}_1], [\hat{v}_2])$ de norme unitaire associés (1 point).

Bibliographie

[1] Xavier Gourdon, Les maths en tête, Ellipses, 1994.

[2] Louis Gacôgne, *Algébre et analyse cours de mathématiques tome 1*, Eyrolles, 1990.

[3] André Baumy et Michel Bonnaud, *Mathématique pour le physicien tome 1*, McGraw-Hill (Paris), 1989.

[4] Gabriel Soum, Raymond Jagut et Pierre Dubouix, *Techniques mathématiques pour la physique - I*, Hachette, 1995.

[5] Gabriel Soum, Raymond Jagut et Pierre Dubouix, *Techniques mathématiques pour la physique - II*, Hachette, 1995.

[6] Murray R. Spiegel, *Analyse vectorielle cours et problème*, McGraw-Hill (New-York), douzième édition, 1973.

[7] Murray R. Spiegel, *Analyse cours et problème*, McGraw-Hill (New-York), dix-septième édition, 1973.

[8] Frank Ayres, *Equations différentielles cours et problème*, McGraw-Hill (New-York), quinzième édition, 1972.

[9] G. Hirsch et G. Eguether, *Fonctions de plusieurs variables*, Masson, 1994.

[10] K. Arbenz et A. Wohlhauser, *Complèments d'analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993.

[11] M. Chossat, *Aide Mémoire de Mathématiques de l'ingénieur*, Dunod, 1996.

[12] Marie-Pascale Avignon et Jacques Rogniaux, *Analyse 369 exercices corrigés*, Ellipses, 1991.

[13] Seymour Lipschutz et Marc Lipson, *Algèbre linéaire - 3ème édition*, Dunod, 2003.

[14] Seymour Lipschutz, *Algèbre linéaire, Cours et problèmes - 2ème édition*, McGraw-Hill (New-York), 1994.