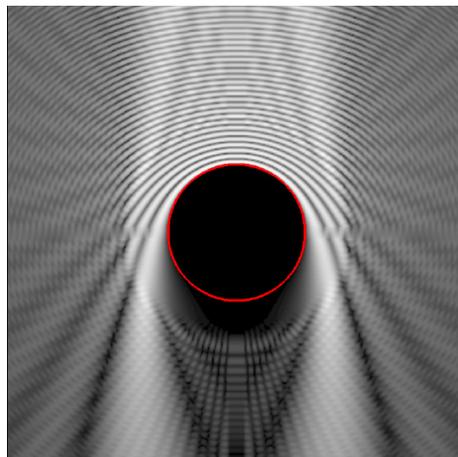
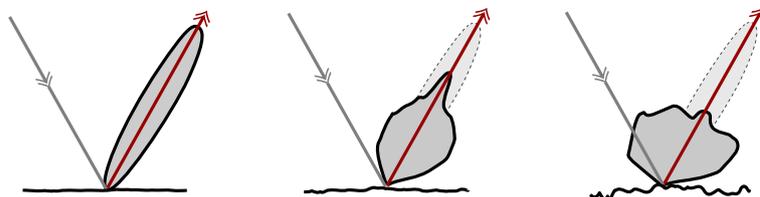


DIFFRACTION ELECTROMAGNETIQUE PAR DES OBSTACLES

Christophe BOURLIER
Chargé de Recherche CNRS à IREENA, Nantes



Cours du MASTER2 RECHERCHE
Systèmes Electroniques et Génie Electrique



16 décembre 2009

Table des matières

1	Propagation en espace libre	1
1.1	Equations de Maxwell	1
1.2	Equation de propagation	3
1.2.1	Absence de charge et de courant : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$	3
1.2.2	Absence de charge : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$	4
1.2.3	Cas général : $\rho \neq 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$	4
1.3	Régime harmonique	6
1.3.1	Définition	6
1.3.2	Equation d’Helmholtz	7
1.3.3	Potentiels retardés	7
1.4	Conditions aux limites	8
1.5	Onde plane	8
1.5.1	Concept de l’onde plane	8
1.5.2	Onde plane progressive monochromatique	9
1.5.3	Propagation dans un milieu conducteur	9
1.5.4	Epaisseur de peau	11
1.5.5	Réflexion et réfraction par une surface plane <i>infinie</i>	12
1.5.5.1	Relations de Snell-Descartes	12
1.5.5.2	Coefficients de Fresnel	13
1.5.6	Onde évanescente ou onde de surface	16
2	Equations intégrales	19
2.1	Cas d’un problème à deux dimensions : cas <i>scalaire</i>	19
2.1.1	Fonction de Green	19
2.1.2	Application sur l’équation d’Helmholtz	20
2.1.3	Polarisations TE et TM et conditions aux limites	21
2.1.4	Second théorème de Green	23

2.1.5	Principe d'Huygens et théorème d'extinction	23
2.1.6	Principe d'Huygens en champ lointain	26
2.2	Cas d'un problème à trois dimensions : cas <i>vectoriel</i>	27
2.2.1	Définition d'une dyade	27
2.2.2	Fonction de Green vectorielle : dyade de Green	29
2.2.3	Second théorème de Green	30
2.2.4	Principe d'Huygens et théorème d'extinction	31
2.2.5	Principe d'Huygens en champ lointain	33
2.3	Conclusion	34
3	Résolution des équations	35
3.1	Position du problème	35
3.1.1	Introduction	35
3.1.2	Unicité des solutions	36
3.1.3	Quelques solutions	36
3.2	Diffraction et propagation dans la cas scalaire	37
3.2.1	Solution de l'équation de propagation scalaire	37
3.2.2	Cas du cylindre circulaire <i>infini</i> selon son axe de révolution	38
3.2.2.1	Calcul de la fonction scalaire ψ du champ <i>diffracté</i>	40
3.2.2.2	Cas parfaitement conducteur en polarisation TE	42
3.2.2.3	Cas parfaitement conducteur en polarisation TM	46
3.2.2.4	Cas diélectrique en polarisation TE	46
3.2.3	Propagation guidée	48
3.2.3.1	Ecriture des équations	48
3.2.3.2	Conditions aux limites et vecteur de Poynting en TE et TM	51
3.2.3.3	Guide d'onde de section droite rectangulaire	53
3.2.3.4	Guide d'onde de section droite circulaire	55
3.3	Approximations de l'optique physique	56
3.3.1	Problème 2D : cas scalaire	57
3.3.1.1	Introduction	57
3.3.1.2	Expression du champ rayonné en zone lointaine	57
3.3.1.3	Cas d'une plaque linéique parfaitement conductrice	58
3.3.1.4	Cas d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur	59
3.3.2	Problème 3D : cas vectoriel	61
3.3.2.1	Introduction	62

3.3.2.2	Description de la géométrie	63
3.3.2.3	Calcul dans le cas général en polarisation TE	64
3.3.2.4	Calcul dans le cas général en polarisation TM	65
3.3.2.5	Cas où la normale est dirigée selon $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$	66
3.4	Méthode des moments	68
3.4.1	Formulation mathématique	69
3.4.1.1	Trois étapes	69
3.4.1.2	Exemple	71
3.4.1.3	Choix des fonctions test et de base	72
3.4.2	Diffraction par une surface monodimensionnelle	74
3.4.2.1	Matrices impédances	74
3.4.2.2	Application sur un cylindre parfaitement conducteur	78
3.4.2.3	Application sur un cylindre elliptique parfaitement conducteur	81
3.4.2.4	Application sur une plaque linéique parfaitement conductrice	83
3.4.3	Résolution du système linéaire	84
A	Programme Maple sur la méthode des moments	III
B	Examen du M2R SEGE, 17 février 2005	VII
B.1	Champ EM transmis par une interface plane d'aire infinie (8 pts)	VII
B.2	Approximation de l'optique géométrique avec effet d'ombre	VII
C	Examen du M2R SEGE, juin 2005	IX
C.1	Cas où la surface est lisse	IX
C.2	Cas où la surface est rugueuse	X
D	Examen du M2R SEGE, 15 février 2006	XI
D.1	Traitement anti-reflets	XI
D.2	Surface rugueuse de statistique non gaussienne	XII
E	Exam of the M2R SEGE, 2 February 2007	XIII
E.1	Poynting vector in dielectric media with lossy	XIII
E.2	Kirchhoff approximation for a one-dimensional surface	XIII
F	Exam of the M2R SEGE, 13 June 2007	XVII
F.1	Reflection coefficient from two infinite interfaces separating homogeneous media	XVII
F.2	Diffraction from an infinite perfectly conducting cylinder	XVIII

G Examen du M2R SEGE, 14 février 2008	XXI
G.1 Approximation de l'optique physique	XXI
G.2 Calcul de la fonction d'illumination	XXII
G.3 Etude de $S(\theta_i)$ au voisinage de $\pi/2$	XXII
Bibliographie	XXIII

1 Propagation en espace libre

1.1 Equations de Maxwell

James Clerk Maxwell publie en 1864 un traité où est relié l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques, tout comme l'avait fait auparavant Newton en mécanique classique. A l'origine, les équations formulées par Maxwell formaient un système de 20 équations à 20 inconnues. Réécrites sous forme vectorielle par Oliver Heaviside et Josiah W. Gibbs en 1884, les équations mettent alors en évidence la symétrie qui existe entre les différents champs. Elles sont données, sous forme locale, par :

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

Il est à noter que toutes les grandeurs figurant dans les quatre équations de Maxwell dépendent à la fois du temps, t , et de la position \mathbf{R} de coordonnées x , y et z .

La relation (1.1) est appelée équation de Maxwell-Ampère; en effet, elle a été établie par Maxwell en généralisant au cas des régimes variables au cours du temps, les résultats qui avaient été établis par Ampère dans le cas des régimes indépendants du temps (électrostatique¹). En régimes variables, il se crée un "courant de déplacement électrique" supplémentaire, i. e. $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$, dû à un déplacement d'électrons entre les molécules. L'équation (1.2) représente la loi de Maxwell-Faraday². Les équations (1.3) et (1.4)³ sont appelées les équations de Maxwell-Gauss magnétique et électrique.

Pour plus de clarté, les grandeurs qui entrent en jeu dans ces équations sont rassemblées dans le tableau 1.1. Nous avons conservé pour \mathbf{H} l'appellation ancienne mais courante de *champ magnétique*. Ainsi le couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est appelé champ électromagnétique; les champs \mathbf{D} et \mathbf{B}

¹En électrostatique, i. e. $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, le théorème d'Ampère indique que la circulation du champ magnétique \mathbf{H} sur un chemin fermé C est égale à la somme des courants I qui traverse toute surface S s'appuyant sur C , soit $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$. En notant \mathbf{J} la densité de courant électrique, nous pouvons écrire $I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$. De plus, d'après le théorème de Stokes, nous avons $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot}\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$. Donc, $\forall d\mathbf{S}$, $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$.

²D'après la loi de Lentz, la f.e.m induite, e , due à une variation de flux, Φ , s'écrit $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, où $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ et $e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ d'après le théorème de Stokes. Donc, $\forall d\mathbf{S}$, $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.

³L'énoncé du théorème de Gauss conduit à $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon$, où Q est la charge totale à l'intérieur de la surface fermée S . D'après le théorème d'Ostrogradski, nous avons $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{div}\mathbf{E}dV$, où le volume V est délimité par S . En écrivant que $Q = \iiint_V \rho dV$ où ρ est la densité volumique de charge électrique, on obtient donc $\forall dV$, que $\mathbf{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon$.

sont inclus pour rendre compte des relations entre le champ électromagnétique et la matière environnante.

Grandeur	Nom	Unité
E	champ électrique	V/m
H	champ magnétique	A/m
D	induction électrique	C/m ²
B	induction magnétique	Wb/m ²
J	densité de courant électrique	A/m ²
ρ	densité de charge électrique	A/m ³

TAB. 1.1 – Variables figurant dans les équations de Maxwell.

Dans ce manuscrit, les grandeurs en **gras** désignent des **vecteurs**
Les vecteurs notés avec des **chapeaux**, sont des vecteurs **unitaires**

Dans un problème de rayonnement par des sources, les grandeurs inconnues sont les champs vectoriels **E**, **H**, **B** et **D** et les grandeurs connues sont **J** et ρ . D'après les quatre équations de Maxwell, les 2 équations (1.3) et (1.4) sont scalaires, tandis que les 2 équations (1.1) et (1.2) sont vectorielles, soit au total 8 équations scalaires. En fait ces 8 équations ne sont pas indépendantes⁴, et le système est de rang 7. Pour que ces équations forment un système complet, il faut leur adjoindre des relations constitutives qui tiennent compte des caractéristiques du milieu (vide, matériau diélectrique ou magnétique, ...). En particulier, si le milieu est linéaire⁵, ces relations constitutives relient respectivement **D** et **E**, **B** et **H**, **J** et **E**. Elles sont données sous la forme

$$\mathbf{D} = [\epsilon(\mathbf{R})]\mathbf{E} \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{B} = [\mu(\mathbf{R})]\mathbf{H} \quad (1.5b)$$

$$\mathbf{J} = [\sigma(\mathbf{R})]\mathbf{E} \quad (1.5c)$$

où $[\epsilon]$, $[\mu]$, $[\sigma]$ sont, respectivement, les tenseurs de rang 2 (matrice carrée de dimension 3) de la permittivité électrique, de la perméabilité magnétique et de la conductivité électrique d'un milieu *anisotrope*⁶ et *stationnaire*⁷.

- Si le milieu est *isotrope*, alors les tenseurs deviennent des matrices diagonales et s'écrivent $[\epsilon] = \epsilon[I]$, $[\mu] = \mu[I]$ et $[\sigma] = \sigma[I]$, où $[I]$ est la matrice identité.
- Si le milieu est *homogène*, alors les caractéristiques électrique et magnétique du milieu sont indépendantes de la position **R**.

Dans la suite du cours, on supposera des milieux LHI (linéaires, homogènes et isotropes).

Le vide est un milieu LHI par définition, qui a une permittivité et une perméabilité notées respectivement ϵ_0 et μ_0 ; elles vérifient $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1/c$, où $c = 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la

⁴L'application de l'opérateur divergence sur (1.1), conduit à $\text{div}[\mathbf{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}] = \text{div}\mathbf{J}$. Sachant que $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\text{div}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial t}$ et div peuvent être permutés, l'équation précédente se transforme en $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\mathbf{D}) = -\text{div}\mathbf{J}$. Le remplacement de $\text{div}\mathbf{D}$ par ρ (voir (1.4)) permet d'obtenir l'équation de conservation de la charge électrique : $\text{div}\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, qui traduit le fait que, si il y a variation au cours du temps de la charge électrique ρ contenue dans un volume alors il existe un courant surfacique **J** entre l'intérieur et l'extérieur de ce volume.

⁵Un milieu est dit *linéaire* si la permittivité électrique ϵ et la perméabilité magnétique μ sont indépendants de la puissance des champs **E** et **H**.

⁶Un milieu est dit *anisotrope* si $[\epsilon]$, $[\mu]$ et $[\sigma]$ dépendent de la direction d'observation.

⁷Un milieu est dit *stationnaire* si $[\epsilon]$, $[\mu]$ et $[\sigma]$ sont indépendants du temps.

lumière dans le vide. Par la suite, nous aurons souvent recours aux permittivités et perméabilités relatives ϵ_r et μ_r définies par :

$$\epsilon = \epsilon_r \times \epsilon_0 \text{ et } \mu = \mu_r \times \mu_0 \quad (1.6)$$

où, $\epsilon_0 = 1/(36\pi \times 10^9)$ F/m et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

1.2 Equation de propagation

Nous nous limiterons au cas d'un milieu LHI stationnaire, de perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$ (milieu non magnétique) et de permittivité ϵ . Tout d'abord nous allons présenter le cas où le milieu de propagation est dépourvu de charges ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$). Par exemple, ceci correspond au cas de l'air. Puis le cas général sera traité.

1.2.1 Absence de charge et de courant : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

Dans ce paragraphe, nous supposons l'absence de charge ($\rho = 0$) et de courant ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

Dérivons l'équation de Maxwell-Ampère (1.1) par rapport au temps, en incluant les relations constitutives (1.5a) et (1.5b). On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

D'après la relation (1.2), $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, d'où

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) \quad (1.8)$$

En utilisant l'égalité $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{E})$, où ∇^2 est le laplacien vectoriel et le fait que $\text{div} \mathbf{E} = 0$ selon (1.4), nous avons $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$. Donc d'après (1.7) et (1.8), le champ électrique \mathbf{E} vérifie

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

De même le champ magnétique \mathbf{H} vérifie

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

Les équations (1.9) et (1.10) sont les *équations de propagation* des champs électrique et magnétique. Ces équations sont encore appelées équations d'onde.

Remarque : En coordonnées cartésiennes, si on représente le laplacien scalaire par $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, le laplacien vectoriel $\nabla^2 \mathbf{A}$, où $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, sera défini par

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta A_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta A_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.11)$$

De manière générale, la solution de l'équation de propagation pour un milieu dépourvu de charges et sans pertes, est une solution de type Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}/\|\mathbf{R}\|$ à la vitesse v . Elle s'écrit alors

$$f(\mathbf{R}, t) = \Psi_+ \left(t + \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{v} \right) + \Psi_- \left(t - \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{v} \right) \quad (1.12)$$

La solution est donc donnée par la somme de deux fonctions Ψ_{\pm} . Physiquement, le premier terme dans (1.12) correspond à l'onde réfléchie qui est associée à une propagation dans le sens des \mathbf{R} négatifs et le second à l'onde incidente donnant une propagation dans le sens des \mathbf{R} positifs. Pour un milieu de propagation *infini*, l'onde réfléchie n'existe pas. La solution $f(\mathbf{R}, t)$, est dite à onde *progressive* car ses variations dans le temps et dans l'espace dépendent de $t \pm \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{v}$.

1.2.2 Absence de charge : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$

Par rapport au cas précédent, le courant de conduction électrique $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ (selon l'équation (1.5c)) présent dans (1.1) est pris en compte. Physiquement ceci correspond à des matériaux bons conducteurs. En appliquant le même raisonnement que précédemment, l'équation de propagation vérifiée par le champ \mathbf{E} s'écrit

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

La résolution de cette équation est plus difficile par rapport au cas précédent. Elle sera résolue en régime harmonique.

1.2.3 Cas général : $\rho \neq 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$

Dans cette section nous traitons la cas général puisque $\rho \neq 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$.

Afin d'obtenir une forme simple des équations de propagation pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} , deux nouvelles quantités sont introduites.

Puisque $\text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) = 0 \forall \mathbf{A}$, nous pouvons poser d'après (1.3)

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (1.14)$$

où \mathbf{A} est un vecteur quelconque dépendant de la position \mathbf{R} et du temps t . Selon (1.2), nous avons

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$$

Puisque $\text{rot}(\text{grad} \phi) = 0 \forall \phi$, nous pouvons poser d'après l'équation ci-dessus

$$-\text{grad} \phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.15)$$

où ϕ est une fonction scalaire quelconque de \mathbf{R} et de t .

Les substitutions de (1.14) et (1.15) dans (1.1) et (1.4) avec l'aide des relations constitutives (1.5a) et (1.5b) conduisent à

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{A}) + \epsilon \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J} \\ -\text{div} \left(\mathbf{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

où $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{A})$ et $\nabla^2 \mathbf{A} = \text{div}(\mathbf{grad} \mathbf{A})$. Donc

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \mathbf{grad} \left(\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (1.16)$$

Puisque \mathbf{A} et ϕ sont quelconques, nous pouvons imposer la relation suivante

$$\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

et les équations (1.16) deviennent

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (1.18)$$

Par conséquent si le potentiel vecteur \mathbf{A} et le potentiel scalaire ϕ sont connus, alors les champs vectoriels \mathbf{E} et \mathbf{H} peuvent être calculés selon les relations (1.14), (1.15) et (1.17). L'équation (1.17) est appelée la jauge⁸ de Lorentz.

Les solutions des équations (1.18), non homogènes, aux dérivées partielles, sont alors données par

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\mathbf{R}', t - R/v)}{R} dR' \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}', t - R/v)}{R} dR' \end{cases} \quad (1.19)$$

avec

$$R = \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\| \quad (1.20)$$

Comme le montre la figure ci-dessous, le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{R}, t)$ en un point \mathbf{R} de l'espace à l'instant t est proportionnel à la somme des densités de charges $\rho(\mathbf{R}', t - R/v)$ en un point \mathbf{R}' de l'espace retardé du temps R/v . La même remarque est à noter pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$.

⁸Puisque le rotationnel d'un gradient est nul, le potentiel vecteur \mathbf{A} défini par (1.14) est défini à un gradient près. En effet le nouveau potentiel vecteur $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad} \phi_1$ vérifie également (1.14) car $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \phi_1) = \mathbf{0} \nabla \phi_1$. Par conséquent la nouvelle fonction scalaire associée à (1.15) obéit à $\phi' = \phi + \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$. \mathbf{A}' et ϕ' constituent un changement de Jauge.

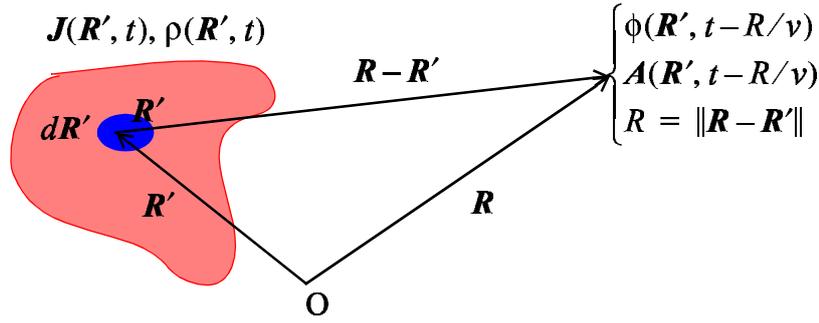


FIG. 1.1 – Illustration des potentiels retardés.

Les formules (1.19) sont par exemple utilisées pour calculer les champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{H} d'un doublet électrique. Un doublet électrique est un fil rectiligne dont la longueur l est très inférieure à la longueur d'onde et qui est parcouru par un courant constant. Il s'agit en fait d'une antenne élémentaire prise comme source de référence mais le plus souvent utilisée pour calculer le champ rayonné par des antennes filaires, considérées comme une succession d'éléments élémentaires dont chacun est un doublet.

1.3 Régime harmonique

1.3.1 Définition

Une OPPM (Onde Plane Progressive Monochromatique ou harmonique) est une fonction périodique spatio-temporelle d'expression *réelle*⁹

$$f(\mathbf{R}, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{v} \right) - \phi \right] = A \cos (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \phi) \quad (1.21)$$

où $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \hat{\mathbf{u}}$ est le vecteur d'onde, ω la pulsation en rad/s, et ϕ un terme de phase constant. En régime harmonique, une OPPM peut donc s'écrire $A \exp[\pm j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \phi)] = A \exp(\pm j\omega t) \exp(\mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \mp \phi)$. La fonction f est alors reconstruite en prenant la partie réelle. Par analogie, une grandeur vectorielle électromagnétique spatio-temporelle $\mathbf{G}(\mathbf{R}, t)$ prend la forme en régime harmonique $\mathbf{G}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{G}_0(\mathbf{R}) \exp(\pm j\omega t)$. Ainsi, pour les calculs, il est plus aisé de travailler avec la fonction exponentielle qu'avec la fonction cosinus. La grandeur physique est alors reconstruite en prenant la partie réelle. Dans ce cours, nous avons choisi la convention $\exp(-j\omega t)$ ¹⁰.

En régime harmonique, l'opérateur dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$ devient alors une multiplication par $-j\omega$. Ainsi les deux premières équations de Maxwell (1.1)-(1.2) s'écrivent

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} + j\omega \mathbf{D} = \mathbf{J} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} - j\omega \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

⁹La solution de l'équation généralement retenue pour l'OPPM étudiée est l'OPP+, car le plus souvent le repère choisi est tel quel l'OPPM incidente étudiée se propage en s'éloignant de l'origine O choisie.

¹⁰Le passage à l'autre convention de temps se fait en prenant le complexe conjugué des grandeurs obtenues.

Remarque : dans (1.22), pour une onde se propageant dans un milieu LHI stationnaire, il est aisé de calculer le rapport du courant de conduction $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (d'après (1.5c)) au courant de déplacement $\mathbf{J}_d = -j\omega \mathbf{D} = -j\omega \epsilon \mathbf{E}$ (d'après (1.5a)). En effet, $|J/J_d| = \sigma/(\omega \epsilon) = \sigma/(2\pi f \epsilon)$, où f est la fréquence de l'onde en Hz. Par exemple pour le cuivre, qui est un très bon conducteur, nous avons $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m et $\epsilon = \epsilon_0$, d'où $|J/J_d| \approx 10^{12}/f$ où f est en MHz. Ainsi dans le domaine des micro-ondes (100 MHz \rightarrow 300 GHz), le courant de conduction reste très largement prépondérant. Pour un très bon diélectrique comme le téflon, nous avons $\sigma = 5.8 \times 10^{-6}$ S/m et $\epsilon = 2\epsilon_0$, d'où $|J/J_d| \approx 10^{-3}/f$ où f est en MHz. Ainsi dans le domaine des micro-ondes, le courant de conduction est négligeable devant de courant de déplacement.

1.3.2 Equation d'Helmholtz

En régime harmonique, l'équation de propagation du champ électromagnétique $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = e^{-j\omega t} \mathbf{E}_0(\mathbf{R})$ dans un milieu dépourvu de charge et de courant devient selon (1.9)

$$(\nabla^2 + \epsilon\mu_0\omega^2)\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

En tenant compte des courants de conduction $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, l'équation ci-dessus devient selon (1.13)

$$(\nabla^2 + [\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega])\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

En posant le nombre d'onde $K = \sqrt{\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega}$, les deux équations ci-dessus peuvent s'écrire

$$(\nabla^2 + K^2)\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (1.26)$$

Cette équation est appelée équation d'Helmholtz dans laquelle l'inconnue $\mathbf{E}_0(\mathbf{R})$ dépend uniquement de la position \mathbf{R} .

En posant $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, le nombre d'onde K peut s'écrire

$$K = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

La solution de (1.26) est alors donnée par (1.12) dans laquelle $K = \omega/v$, conduisant à

$$E(\mathbf{R}, t) = e^{-j\omega t} [\Psi_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) + \Psi_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})] \quad (1.27)$$

où $\mathbf{k} = K\hat{\mathbf{u}}$ ($\|\mathbf{k}\| = K$).

1.3.3 Potentiels retardés

Dans le cas où $\rho \neq 0$, $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$, nous avons vu que le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$ et le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{R}, t)$ étaient donnés par les équations (1.19). En régime harmonique elles se simplifient comme

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} e^{-j\omega(t+\frac{R}{v})} \iiint \frac{\rho(\mathbf{R}')}{R} dR' \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-j\omega(t+\frac{R}{v})} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} dR' \end{cases}$$

1.4 Conditions aux limites

Nous avons présenté précédemment les équations de Maxwell qui sont des équations *locales* ; or il peut être intéressant, dans certaines configurations, de connaître le comportement des champs au passage d'une surface de discontinuité (comme la jonction entre deux matériaux différents). Les relations de continuité à une interface sont rappelées ici sans démonstration.

Soit une surface S séparant un milieu (1) d'un milieu (2) et $\hat{\mathbf{n}}$ la normale à la surface orientée arbitrairement de (1) vers (2). Les relations de continuité s'écrivent alors

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \quad (1.28a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad (1.28b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.28c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad (1.28d)$$

\mathbf{J}_S est la densité de courant surfacique électrique et ρ_S est la densité de charge surfacique électrique. nous avons donc

- *continuité* de la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} et de la composante normale de l'induction magnétique \mathbf{B} .
- *discontinuité* de la composante normale de l'induction électrique \mathbf{D} mesurée par la densité de charge de surface ρ_S et de la composante tangentielle du champ magnétique \mathbf{H} mesurée par la densité de courant superficielle \mathbf{J}_S .

Si les milieux 1 et 2 sont des diélectriques parfaits, alors $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$ et $\rho_S = 0$.

1.5 Onde plane

Dans cette section, nous rappelons les propriétés d'une onde plane.

1.5.1 Concept de l'onde plane

Physiquement une onde plane n'existe pas. Par contre l'onde peut être assimilée comme *localement* plane. La notion d'onde plane est étroitement liée à la notion de champ lointain. En effet, dans le cas général l'onde émanant d'une source peut être modélisée comme une onde sphérique, dont la densité de puissance est répartie sur une sphère de rayon r . En champ lointain ($r \rightarrow \infty$), un récepteur (antenne) va mesurer la puissance transportée par cette onde, qui pourra être considérée comme localement plane puisque en champ lointain, la courbure locale de la sphère peut être assimilée à un plan.

Remarque : En coordonnées cartésiennes, les opérateurs **rot** et **div** s'écrivent à partir de l'opérateur nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$ comme

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

1.5.2 Onde plane progressive monochromatique

Nous supposons un milieu LHI stationnaire assimilé au vide (perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$, permittivité diélectrique $\epsilon = \epsilon_0$, absence de charge $\rho = 0$ et de courant $\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

En régime harmonique une solution possible de l'équation d'Helmholtz donnée par (1.27) est l'onde *plane progressive monochromatique*. Elle est définie par $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R})}$, où \mathbf{E}_0 est un vecteur constant qui donne la polarisation de l'onde et \mathbf{k}_0 désigne le vecteur d'onde dans le vide.

L'opérateur ∇ est équivalent alors à $+j\mathbf{k}_0$. Par conséquent $\mathbf{rot} \mathbf{A} = j\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{A}$ et $\text{div} \mathbf{A} = j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{A}$. D'après (1.4) et (1.5a), et (1.3) nous avons donc

$$j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_0 \perp \mathbf{E}$$

$$j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_0 \perp \mathbf{B}$$

Ces deux relations montrent que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont transverses à la direction de propagation portée par \mathbf{k}_0 . Puisque $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R})}$ est solution de l'équation d'Helmholtz, selon (1.24) le nombre d'onde K_0 doit vérifier l'équation de dispersion suivante

$$-K_0^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \Rightarrow K_0 = \pm \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

La solution physique correspond à une onde incidente, d'où $K_0 = +\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

D'après (1.1) et (1.5a), nous avons

$$j\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{H} = -j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H} \wedge \mathbf{k}_0 = \omega \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.29)$$

qui montre que le triplet $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}_0)$ forme un trièdre direct (règle de la main droite). De plus, selon (1.29), nous avons

$$\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{k}_0\| = \omega \epsilon_0 \|\mathbf{E}\| \Rightarrow Z_0 = \frac{E}{H} = \frac{\|\mathbf{k}_0\|}{\omega \epsilon_0} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\omega \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

où Z_0 est l'impédance d'onde du vide en ohm et $Z_0 \approx 120\pi \Omega$. Elle est réelle et positive dans le vide; les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont donc en phase.

Par exemple si nous considérons une onde plane progressive monochromatique rectiligne polarisée selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ et se propageant selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$, alors $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-j(\omega t - K_0 z)}$ où $\mathbf{k}_0 = K_0 \hat{\mathbf{z}}$. Le champ magnétique s'écrit alors $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-j(\omega t - K_0 z)} / Z_0$. Dans un plan d'onde donné défini par $K_0 z = cste$, le module du champ est alors constant. L'onde est dite homogène car les plans iso-phase et iso-amplitude sont confondus. La vitesse de l'onde est définie par $v_0 = c = \omega / K_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \times 10^8$ m/s.

1.5.3 Propagation dans un milieu conducteur

Nous supposons un milieu LHI stationnaire dans lequel la perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$ (milieu non magnétique), la permittivité électrique $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ avec ϵ_r réel, en absence de charge $\rho = 0$ mais $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$. Par rapport au cas précédent, nous allons montrer que le vecteur d'onde \mathbf{k} est complexe et nous donnerons la signification physique de sa partie imaginaire.

En régime harmonique une solution possible de l'équation d'Helmholtz donnée par (1.27) est $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$, où \mathbf{E}_0 est un vecteur constant qui donne la polarisation de l'onde et \mathbf{k} désigne le vecteur d'onde. D'après (1.4) et (1.5a), et (1.3) nous avons

$$j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E}$$

$$j\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{B}$$

Ces deux relations montrent que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont transverses à la direction de propagation portée par \mathbf{k} . Puisque $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$ est solution de l'équation d'Helmholtz, selon (1.25) le nombre d'onde K doit vérifier l'équation de dispersion suivante

$$-K^2 + (\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega) = 0 \Rightarrow K = \pm \sqrt{\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega}$$

La solution physique correspond à la solution qui donne une partie imaginaire *positive*. En effet si on pose $\mathbf{k} = K\hat{\mathbf{u}} = (a + jb)\hat{\mathbf{u}}$, nous avons $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - a\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R})} \times e^{-b\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}$. Puisque le module du champ, donné par $|\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)| = \mathbf{E}_0 e^{-b\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R}}$, est une grandeur finie, nous devons avoir $b \geq 0$ avec $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R} \geq 0$. Il est alors aisé de montrer que la solution physique est :

$$K = +\sqrt{\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega} = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = K_0 \times n$$

où $K_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ (nombre d'onde dans le vide) et

$$n = \sqrt{\epsilon_r}\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

La quantité n désigne l'*indice de réfraction* du milieu qui est complexe. En effet, par définition $n = c/v$, où c est la célérité de l'onde dans le vide. Donc $n = \frac{\omega}{K_0} \frac{K}{\omega} = \frac{K}{K_0}$. On remarque que l'indice de réfraction est fonction de la fréquence à travers sa partie imaginaire. Le milieu est dit *dispersif*. A noter que ϵ_r et σ peuvent également dépendre de la fréquence. Dans le cas du vide ($\sigma = 0$), $n = \sqrt{\epsilon_r} = 1$. Par analogie, nous pouvons définir une permittivité relative complexe par

$$\epsilon_{r1} = n^2 = \epsilon_r + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \epsilon_r + j\frac{18\sigma}{f} \text{ avec } \begin{cases} \sigma \text{ en S/m} \\ f \text{ en GHz} \end{cases} \quad (1.30)$$

D'après (1.1) et (1.5c), nous avons

$$j\mathbf{k} \wedge \mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H} \wedge \mathbf{k} = (\omega\epsilon + j\sigma)\mathbf{E} \quad (1.31)$$

qui montre que le triplet $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k})$ forme un trièdre direct. De plus, selon (1.31), nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{k}\| = \omega(\epsilon + j\sigma) \|\mathbf{E}\| \Rightarrow Z &= \frac{E}{H} = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\omega\epsilon + j\sigma} \\ &= \frac{K_0 n}{\omega\epsilon + j\sigma} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}n}{\omega\epsilon\left(1 + \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)} = \frac{\epsilon_r\sqrt{\epsilon_0\mu_0}n}{n^2\epsilon} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n} = \frac{Z_0}{n} \end{aligned} \quad (1.32)$$

où Z est l'impédance d'onde en ohm. Le module de Z donne le rapport du module de $|E/H|$ et l'argument de Z donne le déphasage entre E et H . Contrairement au vide, Z est complexe. Par exemple si nous considérons une onde plane progressive monochromatique rectiligne polarisée selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ et se propageant selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$, alors $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = E_0\hat{\mathbf{x}}e^{-j(\omega t - Kz)}$ où $\mathbf{k} = K\hat{\mathbf{z}}$. Le champ magnétique s'écrit alors $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = E_0\hat{\mathbf{y}}e^{-j(\omega t - Kz)}/Z$, soit $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = (E_0/|Z|)\hat{\mathbf{y}}e^{-j(\omega t - Kz - \phi)}$ où $\phi = \arg(Z)$.

1.5.4 Epaisseur de peau

Revenons sur la signification physique d'un nombre d'onde K complexe. Nous avons montré, que l'onde plane pouvait se mettre sous la forme suivante

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - K_0 n \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R})} = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - K_0 n_r \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R})} \times e^{-K_0 n_i \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}} \quad \text{avec } n = n_r + j n_i. \quad (1.33)$$

où $\hat{\mathbf{k}} = K_0 n \hat{\mathbf{u}}$. Les parties réelle, n_r , et imaginaire, n_i , de l'indice de réfraction, n , sont données par

$$\begin{cases} n_r = \sqrt{\epsilon_r} \Re e \left(\sqrt{1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \right) \\ n_i = \sqrt{\epsilon_r} \Im m \left(\sqrt{1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \right) \end{cases}$$

n_r et n_i sont calculées en résolvant l'équation $(n_r + j n_i)^2 = \epsilon_r (1 + j \beta)$ avec $\beta = \sigma / (\omega \epsilon)$. Cette équation est équivalente au système suivant $\{n_r^2 - n_i^2 = \epsilon_r \text{ et } 2n_r n_i = \epsilon_r \beta\}$. En résolvant une équation du second degré en n_r^2 , on obtient alors $2n_r^2 = \epsilon_r \pm \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}$. La solution physique correspond au signe + car $n_r \in \mathbb{R}^+$, d'où $2n_r^2 = \epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}$ et $\sqrt{2}n_r = +\sqrt{\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}$. En appliquant le même raisonnement pour $n_i \in \mathbb{R}^+$, on montre $\sqrt{2}n_i = \sqrt{-\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}$. En conclusion

$$\begin{cases} n_r = \frac{\sqrt{+\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+ \\ n_i = \frac{\sqrt{-\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Par exemple pour le cuivre, qui est un très bon conducteur, nous avons $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m et $\epsilon = \epsilon_0$, d'où $\beta \approx 10^{12}/f$ où f est en MHz. Ainsi dans le domaine des micro-ondes (100 MHz \rightarrow 300 GHz), $\beta \gg 1$, et $n_r \approx n_i \approx \sqrt{\beta/2} = 0.7 \times 10^6 / \sqrt{f}$. De plus, l'impédance d'onde devient $Z \approx Z_0 / \sqrt{+j\beta} \approx e^{-j\pi/4} Z_0 / \sqrt{\beta}$ qui implique que $H = \|\mathbf{H}\|$ et $E = \|\mathbf{E}\|$ sont déphasés de $-\pi/4$ et que $|E| \ll |H|$ puisque $Z \ll 1$ ($\beta \gg 1$).

Pour une onde polarisée selon $\hat{\mathbf{x}}$ se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$, le module de (1.33) s'écrit $E_0 \hat{\mathbf{x}} \exp(-K_0 n_i z)$. L'épaisseur de peau, δ , correspond à la distance au bout de laquelle le module du champ normalisé, $\hat{\mathbf{x}} \exp(-K_0 n_i z)$, est atténuée de $1/e \approx 0.37$, soit $K_0 n_i \delta = 1$. En conclusion

$$\delta = \frac{1}{K_0 n_i} = \frac{\lambda_0}{2\pi n_i}$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Pour un milieu très conducteur comme le cuivre, $n_i \approx \sqrt{\beta/2} \gg 1$ donc $\delta/\lambda_0 \ll 1$ pour des fréquences micro-ondes. Pour une mer peu salée, n_i est de l'ordre 10^{-9} pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$, d'où $\delta \approx 1.6 \times 10^8 \lambda_0 \approx 80$ mètres. Ceci explique qu'en deçà d'une centaine de mètres, les rayons du soleil ne pénètrent plus.

1.5.5 Réflexion et réfraction par une surface plane *infinie*

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au comportement d'une onde monochromatique plane illuminant une surface plane supposée *infinie* et d'indice de réfraction différent de celui où l'onde est émise.

1.5.5.1 Relations de Snell-Descartes

Considérons une onde monochromatique plane qui tombe sur une surface plane *infinie* séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 (voir figure 1.2). Cette onde, d'expression $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i}e^{-j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R})}$ se décompose en deux ondes de pulsations et de vecteurs d'onde différents : l'une est l'onde réfléchie $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r}e^{-j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{R})}$, l'autre est l'onde transmise $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t}e^{-j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R})}$.

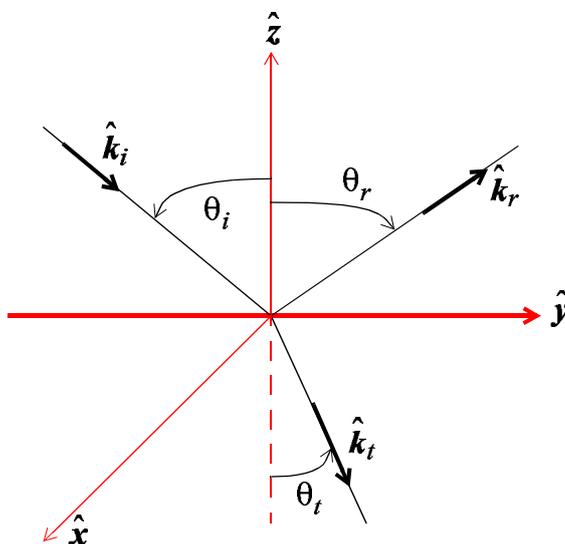


FIG. 1.2 – Lois de Snell-Descartes.

Pour qu'une relation entre les amplitudes de ces trois ondes puisse exister, en tout point \mathbf{R} de la surface de séparation et à tout instant t , il est nécessaire que les termes de phase soient égaux¹¹. Il en résulte que

$$\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R} = \omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{R} = \omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R} \quad \forall (\mathbf{R} \in S, t)$$

Soit

$$\omega_i t - k_{ix}x + k_{iy}y = \omega_r t - k_{rx}x + k_{ry}y = \omega_t t - k_{tx}x + k_{ty}y$$

avec $\mathbf{R} = (x, y, z)$ et $\mathbf{k}_{i,r,t} = (k_{ix,rx,tx}, k_{iy,ry,ty}, k_{iz,rz,tz})$ puisque pour $\mathbf{R} \in S$, $z = 0$. En notant que \mathbf{k}_i est dans le plan $(y0z)$ ($k_{ix} = 0$), $\forall (x, y, t)$, l'équation précédente devient

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \\ k_{ix} = 0 = k_{rx} = k_{tx} \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \end{cases}$$

¹¹Ceci traduit la continuité de la composante tangentielle du champ électrique $\forall (\mathbf{R} \in S, t)$, où S est la surface.

La première équation implique qu'il y a *invariance* de la pulsation. La seconde relation montre que les plans d'incidence, de réflexion et de transmission formés respectivement par les vecteurs $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{k}_i)$, $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{k}_r)$ et $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{k}_t)$ sont *confondus*. D'après la figure 1.2, la troisième relation implique

$$K_i \sin \theta_i = K_r \sin \theta_r = K_t \sin \theta_t$$

De plus $K_i = K_r$ car le milieu de propagation est identique et $K_{i,t} = K_0 n_{1,2}$. Donc

$$\begin{cases} \theta_r = +\theta_i \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \end{cases}$$

1.5.5.2 Coefficients de Fresnel

a) Polarisation horizontale : \mathbf{E} transverse

Le cas où le champ électrique \mathbf{E} est transverse (orthogonal au plan d'incidence) à la direction de propagation \mathbf{k}_i est tout d'abord considéré. On parle alors de polarisation *horizontale* ou *TE*.

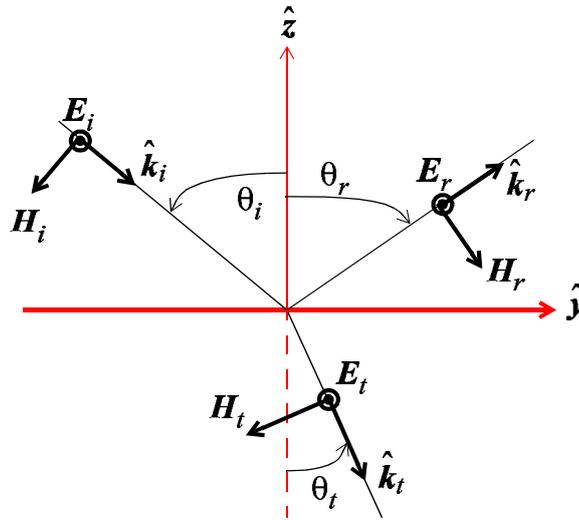


FIG. 1.3 – Coefficients de Fresnel en polarisation TE pour deux milieux de même perméabilité magnétique.

Il est à noter sur la figure 1.3, que les vecteurs $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ doivent former un trièdre direct. D'après les relations (1.28a) et (1.28c), il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique sur l'interface $\forall (t, y)$. Donc

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ -H_{0i} \cos \theta_i + H_{0r} \cos \theta_r = -H_{0t} \cos \theta_t \end{cases}$$

De plus, d'après (1.32), $H = E/Z = nE/Z_0$, d'où $H_{0i} = n_1 E_{0i}/Z_0$, $H_{0r} = n_1 E_{0r}/Z_0$ et

$H_{0t} = n_2 E_{0t} / Z_0$. Par conséquent avec $\theta_i = \theta_r$

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ E_{0i} - E_{0r} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} E_{0t} \end{cases}$$

En posant $\mathcal{R}_\perp = E_{0r}/E_{0i}$ et $\mathcal{T}_\perp = E_{0t}/E_{0i}$, on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\perp = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \\ \mathcal{T}_\perp = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \end{cases} \quad (1.34)$$

\mathcal{R}_\perp et \mathcal{T}_\perp désignent respectivement les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission en polarisation TE. En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, nous pouvons exprimer les coefficients de Fresnel en fonction de θ_i par

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\perp = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ \mathcal{T}_\perp = 1 + \mathcal{R}_\perp = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \end{cases}$$

b) Polarisation verticale : H transverse

Dans ce cas, c'est le champ magnétique qui est transverse à la direction de propagation. On parle alors de polarisation *verticale* ou *TM*.

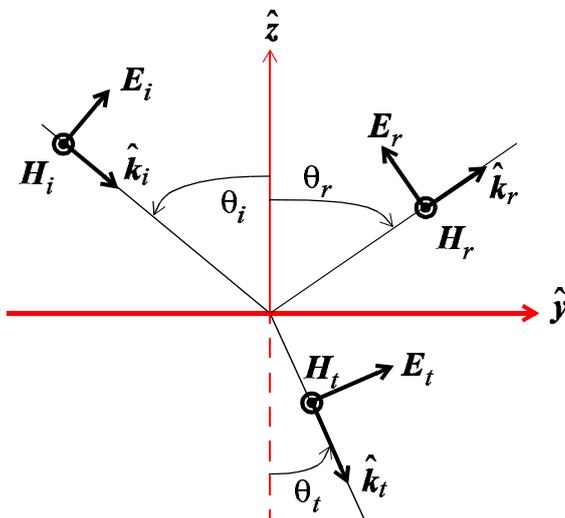


FIG. 1.4 – Coefficients de Fresnel en polarisation TM pour deux milieux de même perméabilité magnétique.

En appliquant le même raisonnement que dans le cas TE, nous avons

$$\begin{cases} H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \\ E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} E_{0t} \\ E_{0i} - E_{0r} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} E_{0t} \end{cases}$$

En posant $\mathcal{R}_{//} = E_{0r}/E_{0i}$ et $\mathcal{T}_{//} = E_{0t}/E_{0i}$, on obtient au final

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{//} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ \mathcal{T}_{//} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i) \sin(\theta_i - \theta_t)} \end{cases} \quad (1.35)$$

$\mathcal{R}_{//}$ et $\mathcal{T}_{//}$ désignent respectivement les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission en polarisation TM. En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, nous pouvons exprimer les coefficients de Fresnel en fonction de θ_i par

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{//} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ \mathcal{T}_{//} = \frac{n_1}{n_2} (1 + \mathcal{R}_{//}) = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \end{cases}$$

c) Discussion sur les formules de Fresnel

Pour des incidences proches de la normale, (θ_i proche de zéro), nous avons $\sin \theta_i \approx \theta_i$ et $\sin \theta_t \approx n_1 \theta_i / n_2 \approx \theta_t$. Par conséquent les coefficients de Fresnel en réflexion deviennent selon (1.34) et (1.35)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\theta_t - \theta_i}{\theta_t + \theta_i} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ \mathcal{R}_{//} \approx -\mathcal{R}_{\perp} \end{cases}$$

Dans le cas air ($n_1 = 1$)-verre ($n_2 = 1.5$), $\mathcal{R}_{\perp} = -0.2$ et $\mathcal{R}_{//} = 0.2$. Ceci signifie qu'en polarisation TE, il y a retournement du champ puisque $\mathcal{R}_{\perp} < 0$.

Pour des incidences rasantes, $\theta_i = \pi/2$ nous avons selon (1.34) et (1.35)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \pi/2)}{\sin(\theta_t + \pi/2)} = -\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_t} = -1 \\ \mathcal{R}_{//} = \frac{\tan(\pi/2 - \theta_t)}{\tan(\pi/2 + \theta_t)} = -\frac{\cot \theta_t}{\cot \theta_t} = -1 \end{cases}$$

Les figures 1.5 et 1.6 représentent les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission selon les polarisations TM ($\mathcal{R}_{//}, \mathcal{T}_{//}$) et TE ($\mathcal{R}_{\perp}, \mathcal{T}_{\perp}$) pour une interface air-verre.

On observe, qu'en polarisation verticale (cas TM), $\mathcal{R}_{//}$ passe par zéro. D'après (1.35), l'angle correspondant vérifie $\theta_{iB} + \theta_{tB} = \pi/2$ (changement de signe du dénominateur) soit $\theta_{tB} = \pi/2 - \theta_{iB}$. Or $n_1 \sin \theta_{iB} = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_{iB}) = n_2 \cos \theta_{iB}$, soit

$$\tan \theta_{iB} = n_2/n_1$$

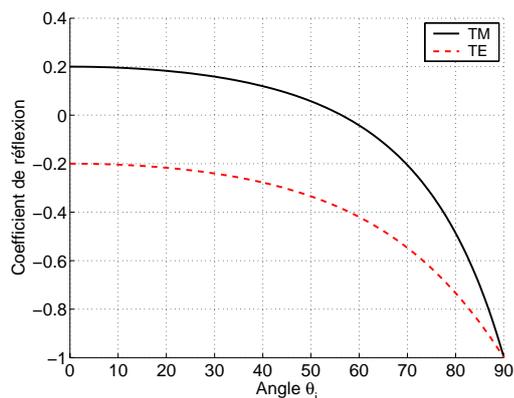


FIG. 1.5 – Coefficient de réflexion d’une surface plane en polarisations TE et TM dans le cas où $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$.

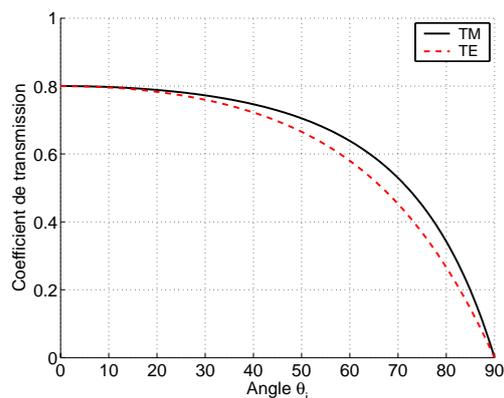


FIG. 1.6 – Coefficient de transmission d’une surface plane en polarisations TE et TM dans le cas où $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$.

θ_{iB} est appelé l’*angle de Brewster*. Dans le cas d’une interface air-verre, il vaut 56.3 degrés. Pour cet angle particulier, $\mathcal{T}_{//}(\theta_{iB}) \neq 0$, $\mathcal{T}_{\perp}(\theta_{iB}) \neq 0$ et $\mathcal{R}_{\perp}(\theta_{iB}) \neq 0$, tandis que $\mathcal{R}_{//}(\theta_{iB}) = 0$. Cette propriété est alors utilisée dans des dispositifs optiques pour générer des polarisations particulières. Il est à noter que lorsque n_1 ou/et n_2 sont complexes les coefficients de Fresnel sont également complexes.

Lorsque $n_1 > n_2$ (passage d’un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent), nous pouvons calculer un angle d’incidence limite, θ_{iL} , pour lequel l’angle de transmission vaut $\theta_t = \pi/2$. Soit $\sin \theta_{iL} = n_2/n_1 \leq 1$. Pour une interface verre-air, il vaut 42 degrés. Comme le montrent les figures 1.7-1.10, au delà de cet angle, les coefficients de Fresnel deviennent complexes. De plus, on note que les parties réelle et imaginaire des coefficients de transmission en polarisations TE et TM peuvent être supérieures à 1. En fait, il faut raisonner non pas sur les coefficients de Fresnel en champ mais en puissance. En effet, dans ce cas les coefficients de Fresnel en puissance (rapport de deux puissances), s’écrivent

$$\begin{cases} R_{\perp} = \mathcal{R}_{\perp}^2 \\ T_{\perp} = \mathcal{T}_{\perp}^2 \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t} \end{cases}$$

en polarisation TE et

$$\begin{cases} R_{//} = \mathcal{R}_{//}^2 \\ T_{//} = \mathcal{T}_{//}^2 \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t} \end{cases}$$

en polarisation TM. A partir des relations (1.34) et (1.35), nous pouvons alors montrer $R_{\perp, //} + T_{\perp, //} = 1$ traduisant la conservation de l’énergie.

1.5.6 Onde évanescente ou onde de surface

Lorsque $n_1 > n_2$ et $\theta_i > \theta_{iL}$, nous allons montrer qu’une onde de surface se propage le long de la surface en calculant la structure de l’onde transmise.

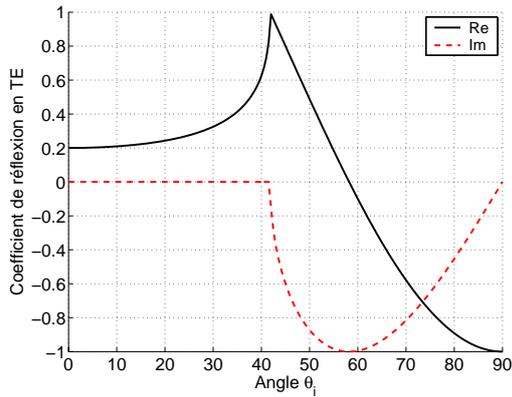


FIG. 1.7 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **réflexion** d'une surface plane en polarisations **TE** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

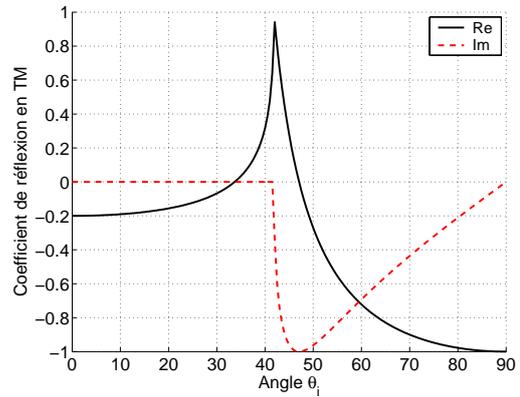


FIG. 1.8 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **réflexion** d'une surface plane en polarisations **TM** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

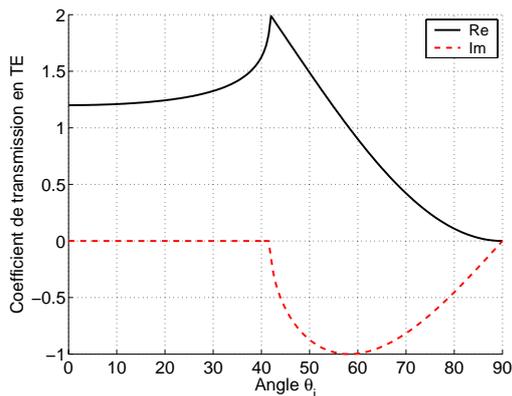


FIG. 1.9 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **transmission** d'une surface plane en polarisations **TE** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

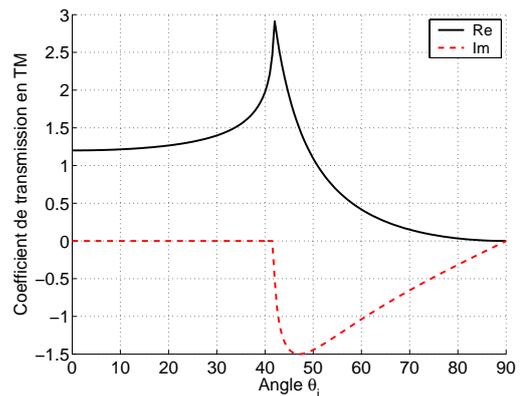


FIG. 1.10 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **transmission** d'une surface plane en polarisations **TM** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

L'onde se propageant dans le milieu 2 s'écrit $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R})}$. Or d'après la figure 1.2, $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R} = K_t(y \sin \theta_t - z \cos \theta_t) = K_0 n_2 (y \sin \theta_t - z \cos \theta_t)$. Dans la suite on supposera que n_2 est réel. Or $\sin \theta_t = \sin \theta_i / n_{21} > 1$ pour $\theta_i > \theta_{iL}$, où $n_{21} = n_2 / n_1 < 1$ et $1/n_{21} > 1$. Par conséquent, $\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i / n_{21}^2} = \pm j \sqrt{\sin^2 \theta_i / n_{21}^2 - 1}$. En retenant la solution physique donnée par le signe $-$, le produit scalaire $+j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R}$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} +j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R} &= +j K_0 n_2 \left(y \frac{\sin \theta_i}{n_{21}} + j z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{21}^2} - 1} \right) \\ &= K_0 n_2 \left(+j y \frac{\sin \theta_i}{n_{21}} - z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{21}^2} - 1} \right) \end{aligned}$$

La structure de l'onde transmise s'écrit donc

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \exp\left(-\frac{z}{\delta'}\right) \exp[-j(\omega t - yK'_t)]$$

avec

$$\begin{cases} K'_t = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_i \in \mathbb{R}^+ \\ \delta' = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Il s'agit d'une onde qui se propage à la vitesse de $c/(n_1 \sin \theta_i)$ le long de l'interface entre les deux milieux, puisque la variation de phase n'a lieu que selon l'axe des y . De plus, l'amplitude de l'onde diminue exponentiellement lorsqu'on s'écarte de l'interface selon l'axe des z . Cette onde est appelée *onde évanescente* ou *onde de surface*.

Pour des incidences rasantes, la profondeur de pénétration, δ' , devient $\delta' = \lambda_0 / (2\pi \sqrt{n_1^2 - n_2^2}) = 0.14\lambda_0$ pour une interface verre-air. Pour de l'eau douce à $f = 0.675$ MHz, $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ S/m, $\epsilon_r = 80$, qui implique selon (1.30) que $\epsilon_{r1} = 80 - 80j$ soit $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}} = 9.8 - 4.1j$. Ainsi, δ' est de l'ordre de $\lambda_0 / [2\pi \Re(n_1)] = 0.016\lambda_0 = 7.2$ mètres pour $\theta_i = \pi/2$. Les radars côtiers observent à très basse altitude (d'une dizaine de mètres) et sous des incidences très rasantes de l'ordre de 1 à 5 degrés par rapport à l'horizontale. Par conséquent une onde de surface rétro-diffusée (direction anti-spéculaire $\theta_s = -\theta_i$) par une surface de mer peut contribuer à la puissance reçue par le radar. D'ailleurs de nombreux travaux de recherche sont en cours sur cette problématique ardue du fait que la surface de mer est rugueuse et que la condition d'onde quasi-plane n'est pas valide.

Puisque les coefficients de réflexion sont complexes, le champ réfléchi a donc un déphasage par rapport au champ incident, qui dépend de la polarisation utilisée. Il en résulte qu'une onde incidente à polarisation rectiligne, non située dans le plan d'incidence, va se transformer après réflexion totale, en une onde réfléchie à polarisation elliptique puisque les composantes TE et TM de cette onde, sont déphasées l'une par rapport aux autres.

2 Equations intégrales

Les équations de Maxwell sont des équations locales, c'est-à-dire qu'elles expriment les champs électromagnétiques en fonction des sources en tout point de l'espace. Dans les deux paragraphes suivants, ces relations locales vont être transformées en intégrales de surface qui vont nous conduire aux équations intégrales. Tout d'abord, le problème plan est étudié (à 2 dimensions) où les champs peuvent être traités comme des scalaires, puis le formalisme est étendu au cas tridimensionnel où les champs électromagnétiques deviennent des grandeurs vectorielles.

Nous supposons dans ce chapitre des milieux LHI non-magnétiques, stationnaire de perméabilité magnétique μ et de permittivité diélectrique ϵ .

2.1 Cas d'un problème à deux dimensions : cas *scalaire*

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème plan (ou à deux dimensions) en se focalisant plus précisément sur la diffraction par une surface ouverte ou fermée. Dans ce cas, les champs électromagnétiques peuvent être traités comme des grandeurs *scalaires*.

Sur le plan pédagogique, les équations pour un problème 2D sont beaucoup plus simples que pour un problème 3D. En effet, les grandeurs impliquées sont scalaires et donc les opérations vectorielles sont simples à réaliser. Physiquement, cela signifie que l'onde incidente n'est pas dépolarisée ; c.a.d que si l'onde incidente est TE (respectivement TM), l'onde diffractée par la surface restera TE (respectivement TM). A contrario, pour un problème 3D, un champ incident TE ou TM peut donner naissance à un champ diffracté possédant deux composantes TE et TM. L'onde incidente a donc subi une dépolarisation.

2.1.1 Fonction de Green

Dans cette section nous allons nous intéresser à la fonction de Green qui joue un rôle essentiel dans la résolution de l'équation de propagation. Elle correspond physiquement au rayonnement d'une source ponctuelle.

Considérons un opérateur intégral-différentiel *linéaire* $\mathcal{L}[\bullet]$ et l'équation avec second membre suivante :

$$\mathcal{L}[f(\mathbf{R})] = h(\mathbf{R}) \quad (2.1)$$

où $f(\mathbf{R})$ et $h(\mathbf{R})$ sont deux fonctions de la variable spatiale \mathbf{R} . Nous montrerons que les équations intégrales peuvent se mettre sous cette forme, où la fonction $h(\mathbf{R})$ correspond aux sources (champ

incident) et $f(\mathbf{R})$ n'est autre que l'inconnue, c'est-à-dire le champ diffracté par l'objet. De plus, l'opérateur \mathcal{L} sera construit à partir de l'équation de propagation.

La fonction de Green scalaire, $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$, associée à cette équation est définie par :

$$\mathcal{L} [g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.2)$$

où δ est la fonction de Dirac. La fonction de Green est donc définie comme la réponse impulsionnelle de l'opérateur \mathcal{L} . Les fonctions de Green dépendent toujours de deux vecteurs position \mathbf{R} et \mathbf{R}' , appelés respectivement point source et point d'observation. Il est à noter que l'opérateur $\mathcal{L}[\bullet]$ opère uniquement sur \mathbf{R} .

La fonction de Green est connue pour un grand nombre d'opérateurs différentiels, et joue un grand rôle en mathématiques pour la théorie des équations différentielles puisque sa connaissance suffit à résoudre toute forme de solution particulière associée à l'équation différentielle de départ. En effet, à partir de l'équation (2.1) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}) &= \mathcal{L}^{-1} [h(\mathbf{R})] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\int \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') h(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \right] \\ &= \int \mathcal{L}^{-1} [\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] h(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \\ &= - \int g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') h(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \end{aligned} \quad (2.3)$$

En résumé, la solution recherchée $f(\mathbf{R})$ est formulée à l'aide de la fonction donnée $h(\mathbf{R})$ et de la fonction de Green adaptée au problème étudié.

2.1.2 Application sur l'équation d'Helmholtz

D'après les équations (1.1) et (1.2) et les relations constitutives (1.5a) et (1.5b), nous avons en régime harmonique avec la convention $e^{-j\omega t}$ ($\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$)

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} - j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$$

Par conséquent, $\mathbf{H} = +\mathbf{rot}\mathbf{E}/(j\omega\mu)$. En reportant cette équation dans (2.4) et en notant $\mathbf{rot}\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, nous obtenons

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - K^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.5)$$

où $K = \omega^2\mu\epsilon$ est le nombre d'onde dans le milieu considéré. Pour un milieu dépourvu de densité de charge volumique ($\rho = 0$), nous avons d'après (1.4), $\text{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon = 0$. D'où $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} + \mathbf{grad}\text{div}\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$ et l'équation ci-dessus devient

$$\nabla^2\mathbf{E} + K^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.6)$$

Nous retrouvons l'équation de Helmholtz où le terme de droite de l'égalité est différent de zéro. En projetant cette équation dans la base cartésienne $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, l'équation de propagation devient

$$(\nabla^2 + K^2)\psi = -j\omega\mu J \quad (2.7)$$

où $\psi = \{E_x, E_y, E_z\}$ et $J = \{J_x, J_y, J_z\}$ sont des scalaires.

Cette équation non homogène est résolue en utilisant la fonction de Green solution de (2.7) en remplaçant le terme de droite de l'égalité par la fonction de Dirac $-\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ et en posant $\mathcal{L} = \nabla^2 + K^2$. Selon la dimension du problème à traiter elle est donnée dans le tableau 2.1. D'après (2.3), la solution de (2.7) s'écrit

$$\psi(\mathbf{R}) = -j\omega\mu \int g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') J(\mathbf{R}') dR'$$

Opérateurs	Laplace ∇^2	Helmholtz $\nabla^2 + K^2$	Helmholtz modifié $\nabla^2 - K^2$
1 dimension ($\mathbf{R} \equiv z\hat{\mathbf{z}}$)	Pas de solution	$\frac{j}{2K} \exp(jK z - z')$	$\frac{1}{2K} \exp(-K z - z')$
2 dimensions ($\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$)	$-\frac{1}{2\pi} \ln \ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ $	$\frac{j}{4} H_0^{(1)}(K \ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\)$	$\frac{1}{2\pi} K_0(K \ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\)$
3 dimensions ($\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$)	$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\ }$	$\frac{\exp(jK\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\)}{4\pi\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\ }$	$\frac{\exp(-K\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\)}{4\pi\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\ }$

TAB. 2.1 – Fonctions de Green pour différents opérateurs \mathcal{L} . La fonction de Green satisfait la condition aux limites $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = 0$ lorsque $\|\mathbf{R}\| \rightarrow \infty$ pour les opérateurs de Laplace et de Helmholtz modifié. Pour l'opérateur de Helmholtz, $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ correspond à une onde réfléchie. $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel du premier type et d'ordre zéro et $K_0(x) = \frac{j\pi}{2} H_0^{(1)}(jx)$.

La fonction de Hankel du premier type et d'ordre zéro, $H_0^{(1)}(x)$, est représentée sur la figure 2.1 en fonction de $x > 0$. Pour $x \gg 1$, elle se comporte comme une fonction circulaire. En effet, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \exp\left[j\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.8)$$

De plus, on peut noter que l'équation de son enveloppe s'écrit $\sqrt{\frac{2}{x\pi}} \propto \sqrt{\frac{1}{x}}$, caractéristique d'une onde *cylindrique*.

2.1.3 Polarisation TE et TM et conditions aux limites

Soit $\hat{\mathbf{n}}$ la normale à la surface contenue dans le plan $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ (problème à deux dimensions) et séparant deux milieux de même perméabilité magnétique.

- En polarisation TE (Transverse électrique où le champ électrique est normal au plan d'incidence, voir figure 1.3 du chapitre 1), le champ électrique s'écrit dans le milieu supérieur $\mathbf{E} = \psi\hat{\mathbf{x}}$. Or $\text{rot}\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$, d'où

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla \psi$$

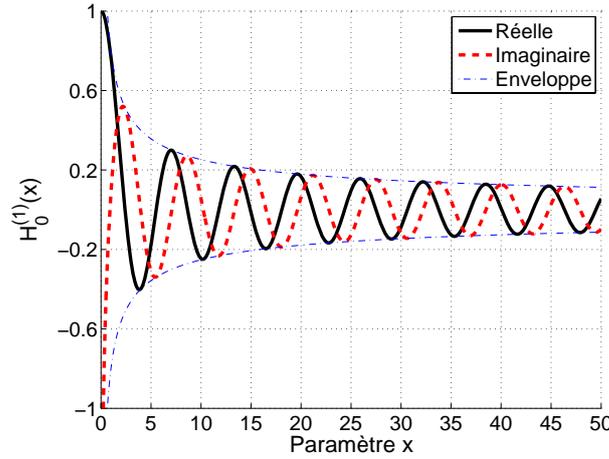


FIG. 2.1 – Parties réelle et imaginaire de la fonction de Hankel $H_0^{(1)}(x)$ en fonction de $x > 0$. Il est également représenté son enveloppe.

et sachant que $\mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3)\mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi) = -\frac{1}{j\omega\mu} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi)\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\nabla\psi] \\ &= -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{j\omega\mu} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi) \end{aligned}$$

Dans le milieu inférieur nous avons les mêmes relations pour \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 et ψ_1 où l'indice 1 correspond aux grandeurs définies dans le milieu inférieur. Les conditions aux limites sur l'interface nous indique qu'il y a continuité des champs électrique et magnétique tangentiels d'où

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi_1(\mathbf{r}) \text{ avec } \mu = \mu_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

• En polarisation TM (Transverse Magnétique où le champ magnétique est normal au plan d'incidence, voir figure 1.4 du chapitre 1), le champ magnétique s'écrit dans le milieu supérieur $\mathbf{H} = \psi\hat{\mathbf{x}}$. Or $\text{rot}\mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{E}$, d'où

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \wedge \mathbf{H} = +\frac{1}{j\omega\epsilon} \hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi$$

et sachant que $\mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3)\mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{n}} &= +\frac{1}{j\omega\epsilon} (\hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi) \wedge \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi)\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\nabla\psi] \\ &= -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{j\omega\epsilon} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi) \end{aligned}$$

De plus, dans le milieu inférieur $\mathbf{H}_1 = \psi_1\hat{\mathbf{x}}$ d'où

$$\mathbf{E}_1 \wedge \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{j\omega\epsilon_1} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi_1)$$

Les conditions aux limites sur l'interface nous indique qu'il y a continuité des champs électrique et magnétique tangentiels d'où

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \text{ avec } \mu = \mu_1 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.10)$$

- D'une façon générale, nous pouvons donc écrire d'après les équations (2.9) et (2.10)

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = \rho_{01} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \text{où } \rho_{01} = \begin{cases} \rho_{01} = 1 \text{ dans le cas TE} \\ \rho_{01} = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \text{ dans le cas TM} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.1.4 Second théorème de Green

La démonstration du théorème de Green est basée sur le théorème d'Ostrogradski qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface. Il s'écrit

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

où le volume V est délimité par la surface *fermée* S . En posant $\mathbf{A} = f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1$, alors $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) = \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 + f_1 \nabla^2 f_2 - \nabla f_2 \cdot \nabla f_1 - f_2 \nabla^2 f_1 = f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1$. L'application du théorème d'Ostrogradski conduit alors à

$$\iiint_V (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1) dV = \oiint_S (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.12)$$

2.1.5 Principe d'Huygens et théorème d'extinction

Soit la figure 2.2, sur laquelle Ω_1 désigne le domaine délimité par la surface S_1 et le contour $C_{1\infty}$. Ω_0 désigne le domaine délimité par la surface S_1 et le contour C_∞ .

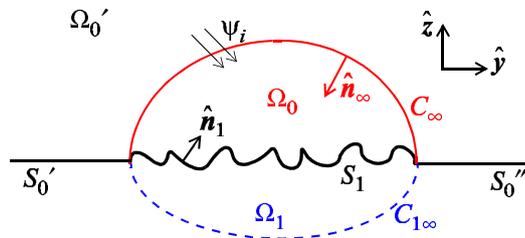


FIG. 2.2 – Equation intégrale pour un problème à trois dimensions. Sur les contours S'_0 et S''_0 , le champ incident est supposé nul. Le domaine Ω_0 est délimité par le contour C_∞ et la surface S_1 tandis que le domaine Ω_1 est délimité par le contour $C_{1\infty}$ et la surface S_1 . Le domaine ouvert Ω'_0 est délimité par le contour C_∞ et les surfaces S'_0 et S''_0 .

Les champs ψ et ψ_1 vérifient dans les domaines Ω_0 et Ω_1 dépourvus de sources ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$) l'équation de Helmholtz scalaire donnée par (2.7)

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + K^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \text{ pour } \mathbf{r} \in \Omega_0 \quad (2.13a)$$

$$\nabla^2 \psi_1(\mathbf{r}) + K_1^2 \psi_1(\mathbf{r}) = 0 \text{ pour } \mathbf{r} \in \Omega_1 \quad (2.13b)$$

où $K = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ et $K_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu}$ sont les nombres d'onde dans les espaces Ω_0 et Ω_1 . De plus, les fonctions de Green, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, associées aux espaces Ω_0 et Ω_1 vérifient

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + K^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14a)$$

$$\nabla^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + K_1^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14b)$$

Pour un problème à deux dimensions, la fonction de Green s'écrit d'après le tableau 2.1

$$g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(K_q \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}[K_q \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}] \quad (2.15)$$

avec $K_0 = K$. Ses dérivées selon y et z s'écrivent alors ($\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ et $D = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$)

$$\begin{cases} \frac{\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y} = \frac{\partial g_q(K_q D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial y} = -\frac{jK_q}{4} H_1^{(1)}(K_q D) \frac{y - y'}{D} \\ \frac{\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z} = \frac{\partial g_q(K_q D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z} = -\frac{jK_q}{4} H_1^{(1)}(K_q D) \frac{z - z'}{D} \end{cases}$$

La quantité $\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') / \partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ s'écrit donc

$$\frac{\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = -\frac{jK_q}{4} \frac{H_1^{(1)}(K_q \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.16)$$

Appliquons l'équation (2.12) en dimension 2 avec $f_1 = \psi$ et $f_2 = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\iint_{\Omega_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r})] dr = \int_{C_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \quad (2.17)$$

où le contour $C_0 = S_1 \cup C_\infty$ délimite l'espace Ω_0 . En substituant (2.13a) et (2.14a) dans (2.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r})] dr \\ &= \iint_{\Omega_0} \{ \psi(\mathbf{r}) [-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - K^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') K^2 \psi(\mathbf{r}) \} dr \\ &= - \iint_{\Omega_0} \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dr \\ &= \begin{cases} -\psi(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \\ &= \int_{C_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.18)$$

En écrivant $C_0 = S_1 \cup C_\infty$, le dernier terme de l'équation ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{C_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \\ & \quad + \int_{C_\infty} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \end{aligned} \quad (2.19)$$

où $\partial f / \partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f$. Le signe $-$ devant l'intégrale sur S_1 provient du fait que la normale est dirigée vers l'intérieur du milieu Ω_0 , tandis que la normale à C_∞ est dirigée vers l'extérieur du milieu Ω_0 .

Dans l'espace Ω'_0 au dessus du contour C_∞ de même caractéristique physique que l'espace Ω_0 (donc même fonction de Green), le champ incident, $\psi_i(\mathbf{r})$, vérifie d'après (2.18)

$$\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_{C_\infty} \left[\psi_i(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{où } \mathbf{r}' \in \Omega'_0 \quad (2.20)$$

Cette relation suppose que le champ incident soit nul sur les surfaces S'_0 et S''_0 .

Pour deux milieux de même permittivité, les conditions aux limites énoncées par (2.11) impose qu'il ait continuité du champ, ψ , et de sa dérivée, $\partial \psi / \partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi$. Par conséquent d'après (2.20) et (2.18)-(2.19) avec $\mathbf{r}' \notin \Omega_0$ et dans lesquelles nous faisons tendre $\mathbf{r}' \rightarrow C_\infty$, l'application des conditions aux limites, valides $\forall \mathbf{r}' \in S_\infty$, nous conduit à

$$\psi_i(\mathbf{r}) = - \int_{C_\infty} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad (2.21)$$

En substituant (2.21) dans (2.19) puis dans (2.18), nous obtenons

$$\psi_i(\mathbf{r}') + \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Lorsque $\mathbf{r}' \in \Omega_0$, l'équation ci-dessus correspond au principe d'Huygens et montre que le champ diffracté par la surface s'exprime à partir du champ ψ sur la surface S_1 et de sa dérivée normale $\frac{\partial \psi}{\partial n}$. Le champ diffracté sur la surface, $\psi_d(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}') - \psi_i(\mathbf{r}')$, s'écrit alors

$$\boxed{\psi_d(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0} \quad (2.23)$$

En d'autres termes, le principe d'Huygens permet d'exprimer le champ diffracté dans l'espace Ω_0 à partir des champs sur la surface S_1 .

Lorsque $\mathbf{r}' \notin \Omega_0$, (2.22) correspond au théorème d'extinction qui s'écrit

$$\boxed{\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0} \quad (2.24)$$

En appliquant le même raisonnement dans l'espace Ω_1 dépourvu de sources, le théorème d'extinction devient pour $\mathbf{r}' \in \Omega_1$

$$\boxed{0 = \int_{S_1} \left[\psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_1} \quad (2.25)$$

Les inconnues à déterminer dans (2.23) sont les champs $\psi(\mathbf{r})$ et $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$, nécessitant deux équations. Ces équations sont données par (2.24) et (2.25), exprimées respectivement dans les espaces Ω_0 et Ω_1 , dans lesquels $\psi_i(\mathbf{r}')$, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sont connues. Par conséquent elles comportent 4 inconnues, $\psi(\mathbf{r})$, $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$, $\psi_1(\mathbf{r})$ et $\partial\psi_1(\mathbf{r})/\partial n$ pour uniquement deux équations. Afin de réduire le nombre d'inconnues à 2, les conditions aux limites sont appliquées sur la surface S_1 valides $\forall dS$ en faisant tendre \mathbf{r}' vers S_1 pour les deux espaces Ω_0 et Ω_1 .

Ainsi en appliquant les conditions aux limites données par (2.11), l'équation (2.25) devient

$$0 = \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - \rho_{01} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_1 \quad (2.26)$$

Par conséquent les équations (2.24) et (2.26) forment un système de deux équations à deux inconnues, qui sont $\psi(\mathbf{r})$ et $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$.

Connaissant les champs $\psi(\mathbf{r})$ et $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$ sur la surface S_1 , le champ diffracté est calculé en tout point \mathbf{r}' de Ω_0 en appliquant le principe d'Huygens.

Pour une surface *parfaitement conductrice* deux cas peuvent se présenter selon la polarisation de l'onde :

- cas TE : $\psi(\mathbf{r})$ s'annule sur la surface. Nous parlons alors de la condition aux limites de *Dirichlet*.

- cas TM : $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$ s'annule sur la surface. Nous parlons alors de la condition aux limites de *Neuman*.

Dans la cas général, la condition aux limites sur S_1 est une combinaison des conditions aux limites de Dirichlet et de Neuman.

2.1.6 Principe d'Huygens en champ lointain

La surface équivalente radar (SER) est une grandeur électromagnétique qui se définit en champ lointain et qui quantifie le pouvoir réflecteur de l'obstacle. Par conséquent, nous allons exprimer dans cette section le principe d'Huygens en champ lointain.

Comme le montre la figure 2.3, en champ lointain ($r' \gg r$ et $r' \gg \lambda$, où $\lambda = 2\pi/K$ est la longueur d'onde et $\|\mathbf{k}_d\| = K$), $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| \approx r' - \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{r}$. Selon (2.15) et (2.8), dans la direction $\hat{\mathbf{k}}_d$ d'observation, la fonction de Green scalaire devient en champ lointain

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(K \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \approx \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \exp[j(Kr' - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r})]$$

De plus

$$\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -j \mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

En substituant ces deux équations dans le principe d'Huygens (2.23), le champ diffracté par une surface en champ lointain s'écrit alors

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \psi_{d0}^\infty$$

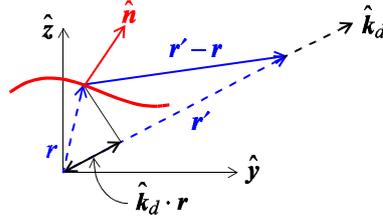


FIG. 2.3 – Principe d’Huygens en champ lointain d’un problème à deux dimensions.

avec

$$\psi_{d0}^{\infty} = - \int_{S_1} \underbrace{\left[j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}\psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right]}_{f(\mathbf{r})} \exp(-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}) dS \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (2.27)$$

On retrouve ainsi la propriété générale qu’il existe une relation de type Fourier entre la fonction $f(\mathbf{r})$ définie sur la surface et le champ rayonné en zone lointaine.

2.2 Cas d’un problème à trois dimensions : cas *vectoriel*

Dans cette partie, le formalisme établi dans le cas scalaire est étendu au cas vectoriel. **Cette partie ne sera pas enseignée.**

2.2.1 Définition d’une dyade

Dans cette section nous allons définir une dyade qui est une extension du cas vectoriel.

Une fonction vectorielle ou un vecteur en coordonnées cartésiennes est définie par

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^{i=3} A_i \hat{\mathbf{u}}_i$$

où A_i ($i = \{1, 2, 3\}$) sont les coordonnées du vecteur \mathbf{A} dans la base cartésienne $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) = (\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$.

Considérons maintenant trois fonctions vectorielles distinctes définies par

$$\mathbf{A}_j = A_{1j} \hat{\mathbf{u}}_1 + A_{2j} \hat{\mathbf{u}}_2 + A_{3j} \hat{\mathbf{u}}_3 = \sum_{i=1}^{i=3} A_{ij} \hat{\mathbf{u}}_i \quad (2.28)$$

La fonction dyade, notée $\bar{\mathbf{A}}$, est alors définie par

$$\bar{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{j=3} \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{u}}_j = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où \mathbf{A}_j ($j = \{1, 2, 3\}$) sont les trois vecteurs, composantes de la dyade $\bar{\mathbf{A}}$. Le terme de droite entre crochets est une représentation matricielle de la dyade dans laquelle \mathbf{A}_j est un vecteur colonne. Par conséquent, à la dyade $\bar{\mathbf{A}}$, nous pouvons lui associer une matrice carrée de dimension 3 (ou tenseur de rang 2), notée $[A]$, dont les éléments sont A_{ij} .

La substitution de (2.28) dans (2.29) conduit alors à

$$\bar{\mathbf{A}} = \sum_i \sum_j A_{ij} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j \quad (2.30)$$

Dans l'équation ci-dessus l'ordre des indices est important puisque $\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j \neq \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_i$. En effet en calculant la transposée d'une dyade, notée $\bar{\mathbf{A}}^T$, nous avons

$$\bar{\mathbf{A}}^T = \sum_j \hat{\mathbf{u}}_j \mathbf{A}_j = \sum_i \sum_j A_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_j \sum_i A_{ji} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j$$

Par conséquent $\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j = \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_i$ si $A_{ij} = A_{ji}$. En d'autres termes, la matrice $[A]$ associée à la dyade $\bar{\mathbf{A}}$ doit être symétrique.

Une dyade particulière symétrique est définie par

$$F_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Cette dyade, notée $\bar{\mathbf{I}}$, est appelée dyade identité. Elle est définie explicitement par

$$\bar{\mathbf{I}} = \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i$$

La dyade identité est associée à la matrice identité suivante

$$\bar{\mathbf{I}} \equiv [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Une autre dyade très employée est $\nabla \nabla \equiv \bar{\Delta}$, où l'opérateur nabla ∇ est définie par

$$\nabla = \sum_i A_i \hat{\mathbf{u}}_i \text{ avec } A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

D'après (2.30), nous obtenons

$$\nabla \nabla \equiv \bar{\Delta} = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j \quad (2.32)$$

dont la matrice associée s'écrit

$$\bar{\Delta} \equiv [\Delta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Si l'ordre de dérivation n'importe pas ($\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$) (fonction de classe \mathcal{C}^2) alors la matrice $[\Delta]$ est symétrique.

Le produit scalaire à *gauche* d'un vecteur \mathbf{Q} par une dyade s'écrit

$$\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} = \sum_j (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_j) \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_i \sum_j Q_i F_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j$$

qui donne un vecteur.

Le produit scalaire à *droite* d'un vecteur \mathbf{Q} par une dyade s'écrit

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q} = \sum_j \mathbf{A}_j (\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{Q}) = \sum_i \sum_j Q_j F_{ij} \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_i \sum_j Q_i F_{ji} \hat{\mathbf{u}}_j$$

qui donne également un vecteur. Ceci est équivalent à multiplier une matrice par un vecteur.

En général les deux produits scalaires précédemment définis ne sont pas égaux, excepté lorsque la dyade $\bar{\mathbf{A}}$ est symétrique ($F_{ij} = F_{ji}$).

Par exemple nous avons

$$\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Q} = \sum_i \sum_j Q_i I_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_i Q_i I_{ii} \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_i Q_i \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{Q}$$

2.2.2 Fonction de Green vectorielle : dyade de Green

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas scalaire qui peut s'appliquer à un problème à 2 dimensions. Pour un problème à 3 dimensions, les champs électromagnétiques doivent être traités comme des grandeurs vectorielles si nous souhaitons traiter la polarisation de façon rigoureuse. Ceci entraîne que la fonction de Green devient également une grandeur vectorielle et plus précisément une dyade solution de l'équation vectorielle suivante

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}} - K^2 \bar{\mathbf{G}} = +\bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.34)$$

L'équation (2.34) a été obtenue en substituant dans (2.5), \mathbf{E} par $\bar{\mathbf{G}}$ et $+j\omega\mu\mathbf{J}$ par $+\bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$. Puisque $\nabla \wedge \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}} = -\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{grad}(\text{div} \bar{\mathbf{G}}) = -\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}})$, l'équation (2.34) devient

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + K^2 \bar{\mathbf{G}} = -\bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}) \quad (2.35)$$

En prenant la divergence de (2.34) et en notant que $\text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \forall \mathbf{A}$, nous avons

$$-K^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{G}} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \nabla \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{G}} = -\frac{\nabla \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{K^2} \quad (2.36)$$

En substituant (2.36) dans (2.35), nous obtenons

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + K^2 \bar{\mathbf{G}} = -\left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{K^2} \right) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$$

L'équation ci-dessus peut s'exprimer en fonction de la fonction de Green scalaire g qui vérifie l'équation d'Helmoltz scalaire (équation (2.2) avec $\mathcal{L} = \nabla^2 + K^2$), où

$$\bar{\mathbf{G}} = \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{K^2} \right) g \quad (2.37)$$

où

$$\nabla^2 g + K^2 g = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$$

Selon le tableau 2.1, g s'écrit pour un problème de dimension 3

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{\exp(jK \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|)}{4\pi \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|} \quad (2.38)$$

D'après (2.31) et (2.33), la dyade de Green s'écrit

$$K^2 \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_2} & K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Les éléments de la matrice de Green associée à la dyade $\bar{\mathbf{G}}$, s'écrivent sous forme condensée, $G_{ij} = K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = G_{ji}$.

2.2.3 Second théorème de Green

Comme dans le cas 2D, l'obtention des équations intégrales est basée sur le second théorème de Green *vectoriel*. Ce théorème est basé sur le théorème d'Ostrogradski qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface. Il s'écrit

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

où le volume V est délimité par la surface *fermée* S . En posant $\mathbf{A} = \mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}$, alors

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) dV = \oiint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S}$$

Sachant que $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}), \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$, nous obtenons avec $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ et $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) dV &= \iiint_V [(\nabla \wedge \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dV \\ &= \oiint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Puisque \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont quelconques, l'équation ci-dessus peut s'écrire également en permutant \mathbf{Q} avec \mathbf{P}

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) dV &= \iiint_V [(\nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P})] dV \\ &= \oiint_S (\mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Le second théorème de Green est alors obtenu en effectuant la différence des deux équations ci-dessus, conduisant à

$$\iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dV = \oiint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S}$$

Il est à noter que le produit scalaire est commutatif mais que le double produit vectoriel n'est pas commutatif.

2.2.4 Principe d'Huygens et théorème d'extinction

Soit \mathbf{J} une source électromagnétique dans la région V_0 de permittivité diélectrique ϵ et de perméabilité magnétique μ , tandis que la région V_1 possède une permittivité diélectrique et une perméabilité magnétique notées respectivement ϵ_1 et μ . Soit S_1 une surface fermée qui délimite un volume V_1 correspondant à la région 1, et S_∞ une surface fermée, dont la normale est notée $\hat{\mathbf{n}}_\infty$, qui délimite un volume V_0 . La région 2 est délimitée par les surfaces S_1 et S_∞ (voir figure 2.4).

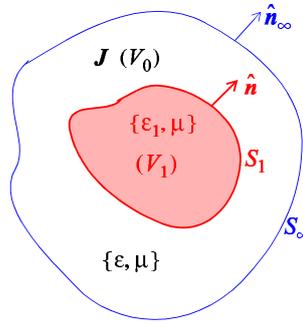


FIG. 2.4 – Equation intégrale en présence d'une source \mathbf{J} dans le volume V_0 d'un problème à trois dimensions. Nous supposons que dans le volume V_1 , $\mu_1 = \mu$.

D'après (2.5), dans les volumes V_1 et V_0 , le champ électrique vérifie respectivement

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R}) - K_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) - K^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) = j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.41)$$

D'après la section 2.2.2, pour $\mathbf{R} \in V_0$, la dyade de Green obéit à

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}} - K^2 \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.42)$$

où le vecteur d'observation \mathbf{R}' peut appartenir soit au volume V_1 ou V_0 .

En notant $\hat{\mathbf{n}}$, la normale à la surface S_1 dirigée vers l'extérieur du volume V_1 , le second théorème de Green vectoriel s'écrit

$$\iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dV = \iint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

En posant dans l'équation ci-dessus $\mathbf{Q} = \mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ et $V = V_0$, où \mathbf{A} est un vecteur quelconque, alors

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_0} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E})] dV = \\ & - \iint_{S_1} [\mathbf{G} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ & + \iint_{S_\infty} [\mathbf{G} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (2.43)$$

nous pouvons noter sur la figure 2.4 que la normale $\hat{\mathbf{n}}$ est dirigée vers l'intérieur du volume V_0 tandis que la normale $\hat{\mathbf{n}}_\infty$ est dirigée vers l'extérieur du volume V_0 . Ceci explique le signe moins devant l'intégrale de surface S_1 .

La condition de rayonnement à l'infini impose que l'intégrale de surface sur S_∞ s'annule. De plus, la substitution de (2.41) et (2.42) dans (2.43) conduit à

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_0} \{ \mathbf{E} \cdot [\mathbf{A}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + K^2\mathbf{G}] - \mathbf{G} \cdot (j\omega\mu\mathbf{J} + K^2\mathbf{E}) \} dV = \\ & - \iint_{S_1} [\mathbf{G} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dans l'équation ci-dessus, la fonction de Dirac contribue si le champ \mathbf{E} est dans le volume V_0 . De plus, $\nabla \wedge \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$ selon (1.2). Par conséquent l'équation (2.44) devient

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') \cdot \mathbf{A} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = j\omega\mu \iiint_{V_0} \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) dV \\ & + \iint_{S_1} [j\omega\mu\mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \mathbf{E}(\mathbf{R}) \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned}$$

De plus $\forall (\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}), \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{A})$. En supprimant le vecteur \mathbf{A} , l'équation ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = j\omega\mu \iiint_{V_0} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) dV \\ & + \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \} dS \end{aligned}$$

Comme dans le cas 2D, à partir des conditions aux limites, nous pouvons montrer que le premier terme de l'égalité est égal au champ incident, noté \mathbf{E}_i , conduisant à

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') + \iint_{S_1} \left\{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] \right. \\ & \left. + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \right\} dS \end{aligned} \quad (2.45)$$

Lorsque $\mathbf{R}' \in V_0$, l'équation ci-dessus correspond au principe d'Huygens et montre que le champ diffracté par la surface s'exprime à partir des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sur la surface. Le champ diffracté sur la surface, $\mathbf{E}_d(\mathbf{R}') = \mathbf{E}(\mathbf{R}') - \mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$, s'écrit alors

$$\boxed{\mathbf{E}_d(\mathbf{R}') = \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \} dS} \quad (2.46)$$

En d'autres termes, le principe d'Huygens permet d'exprimer le champ diffracté dans le volume V_0 à partir des champs sur la surface S_1 .

Lorsque $\mathbf{R}' \in V_1$, (2.45) correspond au théorème d'extinction qui s'écrit

$$\boxed{\mathbf{E}_i(\mathbf{R}') = - \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \} dS} \quad (2.47)$$

En appliquant le même raisonnement dans le volume V_1 dépourvu de sources, le théorème d'extinction devient pour $\mathbf{R}' \in V_1$

$$\mathbf{0} = \oint_{S_1} \{j\omega\mu\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}_1(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R})]\} dS \quad (2.48)$$

où $\bar{\mathbf{G}}_1$ est la fonction de Green du volume V_1 .

Les inconnues à déterminer dans (2.46) sont les champs électromagnétiques tangentiels $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})$, nécessitant deux équations. Ces équations sont données par (2.47) et (2.48), exprimées respectivement dans les volumes V_0 et V_1 , dans lesquelles $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$, $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ et $\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ sont connues. Par conséquent elles comportent 4 inconnues pour uniquement deux équations. Afin de réduire le nombre d'inconnues à 2, les conditions aux limites sont appliquées sur la surface S_1 en faisant tendre \mathbf{R}' vers S_1 pour les deux volumes V_0 et V_1 . A noter qu'elles sont plus compliquées à écrire par rapport à un problème à deux dimensions.

Connaissant les champs tangentiels sur la surface S_1 , le champ diffracté est calculé en tout point \mathbf{R}' de V_0 en appliquant le principe d'Huygens. Les trois équations ci-dessous plus les conditions aux limites sont à la base du calcul du champ diffracté par un obstacle.

Pour une surface parfaitement conductrice, il y a continuité du champ *électrique* tangential sur S_1 , qui implique que dans (2.46), $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$. Dans le cas où il y a continuité du champ *magnétique* tangential sur S_1 , qui implique que dans (2.46), $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$.

2.2.5 Principe d'Huygens en champ lointain

La surface équivalente radar (SER) est une grandeur électromagnétique qui se définit en champ lointain et qui quantifie le pouvoir réflecteur de l'obstacle. Par conséquent, nous allons exprimer dans cette section le principe d'Huygens en champ lointain.

D'après la figure (2.5), en champ lointain nous avons $\|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\| = \|\mathbf{R}' - \mathbf{R}\| \approx R' - \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}$, où $\hat{\mathbf{k}}_d$ est la direction d'observation. Par conséquent selon (2.38), la fonction de Green scalaire devient

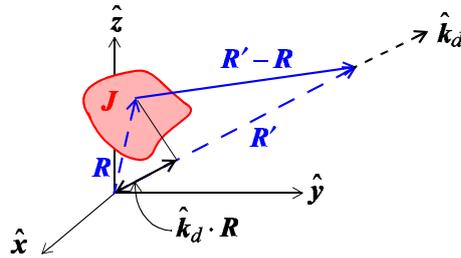


FIG. 2.5 – Fonction de Green en champ lointain pour un problème 3D.

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{\exp(jKR')}{4\pi R'} \exp(-jK\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}) \quad (2.49)$$

De plus, l'opérateur nabla qui agit sur R devient $\nabla = -jK\hat{\mathbf{k}}_d$. La dyade de Green donnée par (2.37) s'écrit alors

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \approx (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d\hat{\mathbf{k}}_d) \frac{\exp(jKR')}{4\pi R'} \exp(-jK\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}) \quad (2.50)$$

Le principe d'Huygens s'écrit donc en champ lointain avec $\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -jK \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$

$$\mathbf{E}_d^\infty(\mathbf{R}') = \mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') \cdot \iint_{S_1} e^{-jK \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}} \left\{ \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \right\} dS \quad (2.51)$$

avec

$$\mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') = -j\omega\mu \frac{e^{jKR'}}{4\pi R'} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d)$$

$Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance d'onde du volume V_0 .

2.3 Conclusion

En comparant les équations du cas 2D, (2.23), (2.24) et (2.25) avec celles du cas 3D, (2.46), (2.47) et (2.48), nous avons l'analogie suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}) \leftrightarrow \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \leftrightarrow j\omega\mu \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) \\ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \leftrightarrow \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \\ \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \leftrightarrow \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Dans chacun des cas, les champs électromagnétiques sur les surfaces sont déterminés à partir du théorème d'extinction appliqué dans chacun des milieux et des conditions aux limites. Le champ diffracté par la surface est alors calculé en utilisant le principe d'Huygens.

Comme le montre la figure 2.6, le principe d'Huygens conduit au principe d'équivalence suivant

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{R}') = - \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{J}_S + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot \mathbf{M}_S \} dS \quad (2.53)$$

avec $\mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}$ et $\mathbf{M}_S = -\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}$, où \mathbf{J}_S et \mathbf{M}_S sont les courants électrique et magnétique de *surface* calculés sur l'objet.

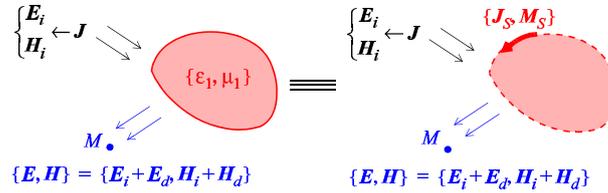


FIG. 2.6 – Principe d'équivalence à l'aide des courants électrique et magnétique de *surface* ($\mu_1 = \mu$).

3 Résolution des équations

3.1 Position du problème

3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons essayer de préciser les difficultés de résolution d'un problème de diffraction et les différentes solutions qui se présentent pour les surmonter.

Pour un problème 3D, les équations à notre disposition sont (voir chapitre 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') = - \iint_{S_1} \{j\omega\mu\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})]\} dS \\ \mathbf{0} = \iint_{S_1} \{j\omega\mu\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}_1(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R})]\} dS \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{E}_d(\mathbf{R})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{H}_d(\mathbf{R})$ les champs électromagnétiques sur la surface. L'équation de propagation peut être également utilisée. La résolution de ces équations s'accompagne des conditions aux limites appliquées sur la surface.

Pour un problème 2D, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \text{ si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \\ \mathbf{0} = \int_{S_1} \left[\psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_1 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0$$

Dans ces équations les éléments connus sont :

- les champs incidents $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$ et $\mathbf{H}_i(\mathbf{R}')$ ($\psi_i(\mathbf{r}')$) en tout point de l'espace donc en particulier sur l'objet.
- les dyades de Green $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ ($g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) et $\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ ($g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) reliées aux fonctions de Green scalaires $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ et $g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$.
- Les grandeurs physiques des milieux tels que ϵ , ϵ_1 , μ , ω et K .

L'élément inconnu est :

- le champ diffracté $\mathbf{E}_d(\mathbf{R}')$ ($\psi_d(\mathbf{r}')$) où le champ total $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{E}_d(\mathbf{R})$ ($\psi(\mathbf{r}')$) au point de mesure.

3.1.2 Unicité des solutions

Pour assurer l'unicité de la solution, les conditions suivantes doivent être vérifiées

- Condition de rayonnement à l'infini appelée "Condition de Silver-Müller"

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}) \end{array} \right\} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^p}\right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) - Z\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^p}\right) \quad (3.3)$$

où $R = \|\mathbf{R}\|$, $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ et Z est l'impédance d'onde.

Ces relations traduisent le fait que, à grande distance, le champ est transverse à $\hat{\mathbf{n}}$ et décroît en $\frac{1}{R^p}$. $p = 1$ (onde *sphérique*) pour un problème 3D et $p = \frac{1}{2}$ (onde *cylindrique*) pour un problème 2D.

- Condition d'énergie finie également appelée "Condition de Meixner"

$$\iiint_V \left| \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}) \end{array} \right\} \right|^2 dV < +\infty$$

Cette équation traduit le fait que, dans tout domaine borné V extérieur aux sources, la densité de puissance emmagasinée est bornée.

3.1.3 Quelques solutions

Toute la difficulté réside dans le fait que le champ diffracté ou total se trouve être relié à lui-même ; il se retrouve à gauche du signe égal mais également à droite sous le signe somme. Pour résoudre un tel problème plusieurs solutions sont possibles :

- Soit un calcul analytique est possible auquel cas le développement exact des calculs est possible. C'est le cas par exemple d'objets de formes simples (cylindre infini, la sphère, ...) et le problème est alors résolu en partant de l'équation de propagation vectorielle. Le second paragraphe présente le cas général d'un objet *canonique* invariant selon une direction, correspondant alors à un problème plan ou 2D. Afin d'illustrer la démarche, le cas du cylindre infini parfaitement conducteur et diélectrique est traité.

- Soit l'équation à résoudre peut être simplifiée à l'aide d'approximations adaptées au problème à étudier. L'approximation de l'optique physique est présentée dans le troisième paragraphe pour les cas 2D (scalaire) et 3D (vectoriel).

- Soit seule la résolution numérique est possible. Une méthode (méthode des moments sur un problème 2D) est présentée dans le dernier paragraphe. De plus, elle est comparée à la solution du cylindre infini et parfaitement conducteur et à l'approximation de l'optique physique.

3.2 Diffraction et propagation dans la cas scalaire

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la diffraction par des objets 2D ou invariants selon une direction, choisie selon $\hat{\mathbf{x}}$. Physiquement, ceci impose que selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ l'objet est infini. En d'autres termes, il ne subit pas de diffraction selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$. De plus, afin de résoudre l'équation de propagation analytiquement, la forme de l'objet est simple (circulaire, elliptique, hyperbolique, ...). Enfin, l'exemple du cylindre circulaire est exposé.

A noter que dans le cas d'une sphère, le problème est 3D et donc le point de départ est l'équation de propagation *vectorielle*. Pour cette forme particulière, il est possible de calculer les champs diffractés par un tel objet en introduisant des fonctions dites spéciales, comme les polynômes de Legendre et les fonctions de Bessel sphériques. Ce problème fut résolu par Mie au début du 20^{ème} siècle. Dans ce cours, ce problème n'est pas abordé compte tenu de sa complexité.

De plus, le calcul des modes dans un guide d'onde de section de droite constante sera également traité.

3.2.1 Solution de l'équation de propagation scalaire

D'après le tableau 3.1, dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, l'équation de propagation scalaire, $\nabla^2\psi + K^2\psi = 0$, peut s'écrire

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right] + K^2 \psi = 0 \quad (3.4)$$

où ψ et les coefficients métriques $\{h_i\}$ dépendent des coordonnées $\{q_1, q_2\}$. Il est important de noter que pour un problème 2D, $\hat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{0}$ et $h_3 = 0$ dans le tableau 3.1. Le tableau 3.2 rappelle le système orthogonal des coordonnées cylindriques.

Cette équation aux dérivées partielles est alors résolue en utilisant la méthode des séparations des variables, qui consiste à écrire que $\psi = \psi_1(q_1)\psi_2(q_2)$. En reportant cette équation dans l'équation ci-dessus nous aboutissons alors

$$\mathcal{L}_1[\psi_1(q_1)] - \mathcal{L}_2[\psi_2(q_2)] = 0$$

où $\mathcal{L}_i[\psi_i(q_i)]$ est une application qui dépend des dérivées de $\psi_i(q_i)$ selon la variable q_i . Pour des systèmes de coordonnées assez simples (cylindrique par exemple), l'équation ci-dessus s'obtient aisément, mais il n'est pas toujours possible d'obtenir ce type de décomposition.

Nous avons donc $\mathcal{L}_1[\psi_1(q_1)] = \mathcal{L}_2[\psi_2(q_2)]$. Le premier membre de l'équation, fonction de q_1 seulement, et le second membre, fonction de q_2 , ne peuvent être égaux que s'ils sont constants, soit $\mathcal{L}_1[\psi_1(q_1)] = \lambda_1$ et $\mathcal{L}_2[\psi_2(q_2)] = \lambda_1$. Par conséquent l'équation différentielle ci-dessus revient à résoudre deux équations différentielles *indépendantes* dont les solutions sont les fonctions $\{\psi_i(q_i)\}$

$$\mathcal{L}_1[\psi_1(q_1)] = \lambda_1 \quad \mathcal{L}_2[\psi_2(q_2)] = \lambda_1$$

La constante λ_1 est fonction des propriétés de symétrie de l'objet. Nous montrerons par exemple dans le cas d'un cylindre circulaire infini selon son axe de révolution que λ_1 est un entier.

Opérateurs	Expression
$\mathbf{grad}f = \nabla f$	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \hat{\mathbf{u}}_3$
$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
$\mathbf{rot}\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$	$\frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] \hat{\mathbf{u}}_1 +$ $\frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right] \hat{\mathbf{u}}_2 +$ $\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] \hat{\mathbf{u}}_3$
$\text{div}(\mathbf{grad}f) = \nabla^2 f$	$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]$

TAB. 3.1 – Expression des opérateurs vectoriels dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales $\{q_1, q_2, q_3\}$ dont les vecteurs de bases sont $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$. $\{q_1, q_2, q_3\}$ sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par des relations univoques $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$ et $z = z(q_1, q_2, q_3)$. $\{h_1, h_2, h_3\}$ sont les coefficients métriques définis par $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$. Pour un problème 2D, $\hat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{0}$ et $h_3 = 1$.

3.2.2 Cas du cylindre circulaire *infini* selon son axe de révolution

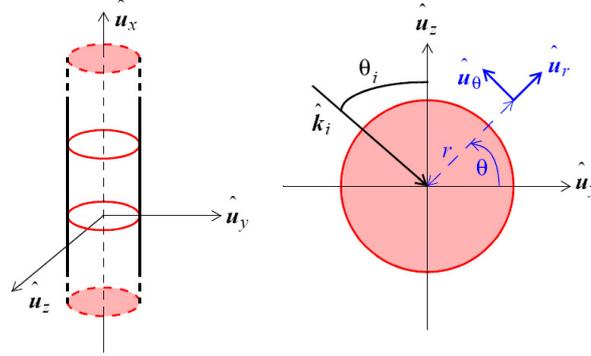
Dans cette section nous allons traiter le cas particulier de la diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire 2D (voir figure 3.1). Par cylindre 2D on entend un cylindre de section circulaire dont la longueur selon la génératrice est *infinie*. Cette propriété implique que le problème devient invariant selon l'axe des x et il peut alors être traité scalairement en considérant les deux polarisations TE et TM.

Dans un système de coordonnées cylindriques, d'après le tableau 3.2, nous avons $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = x$, $h_1 = h_3 = 1$ et $h_2 = r$. Le cylindre est supposé homogène placé dans un milieu supposé LHI et stationnaire.

• Dans le cas TM, le champ magnétique $\mathbf{H} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x$, et les composantes transverses du champ électrique E_y et E_z sont *non nulles*. La connaissance de ψ suffit à déterminer les composantes E_y et E_z . En effet d'après (1.1), en coordonnées cartésiennes, avec la convention $e^{-j\omega t}$, nous avons $\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{rot}\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{u}}_x) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z - \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y \right)$, tandis qu'en coordonnées cylindriques

Définition	Base	Coefficients métriques
$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ x = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = x \end{cases}$	$(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_x)$	$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_2 = h_\theta = r \\ h_3 = h_x = 1 \end{cases}$

TAB. 3.2 – Systèmes de coordonnées cylindriques.

FIG. 3.1 – Configuration du problème 2D de la diffraction d'une onde plane par un cylindre infini selon l'axe des z .

nous avons d'après les tableaux 3.1 et 3.2, $\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r \right)$. En conclusion

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z - \frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y \right) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r \right) \quad \text{dans le cas TM} \quad (3.5)$$

De plus, la condition de rayonnement à l'infini (3.3) ($r \rightarrow \infty$) devient avec $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{u}}_r$ et $\mathbf{H} \wedge \hat{\mathbf{n}} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = \psi \hat{\mathbf{u}}_\theta$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - Z\mathbf{H} \wedge \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta &= \left(\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial r} - Z\psi \right) = Z \left(\frac{1}{j\omega\epsilon Z} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi \right) \\ &= Z \left(\frac{1}{jK} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi \right) = \frac{Z}{jK} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

• Dans le cas TE, le champ électrique $\mathbf{E} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x$, et les composantes transverses du champ magnétique H_y et H_z sont *non nulles*. La connaissance de ψ suffit à déterminer les composantes H_y et H_z . En effet d'après (1.2), en coordonnées cartésiennes, nous avons $\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{u}}_x) = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z \right)$, tandis qu'en coordonnées cylindriques nous avons d'après les tableaux 3.1 et 3.2, $\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right)$. En conclusion

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z \right) = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \quad \text{dans le cas TE} \quad (3.6)$$

De plus la condition de rayonnement à l'infini (3.3) devient avec $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{u}}_r$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E} - Z\mathbf{H} \wedge \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x &= \psi + \frac{Z}{j\omega\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} (\hat{\mathbf{u}}_\theta \wedge \hat{\mathbf{u}}_r) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x = \psi - \frac{Z}{j\omega\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
&= \psi - \frac{Z}{jKv\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \psi - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{jK\mu} \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
&= \psi - \frac{1}{jK} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, quelque soit la polarisation, la condition de rayonnement à l'infini s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

3.2.2.1 Calcul de la fonction scalaire ψ du champ *diffracté*

En utilisant la méthode des séparations des variables, $\psi_d(r, \theta) = \psi_1(r)\psi_2(\theta)$, nous avons d'après (3.4) et le tableau 3.2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial [\psi_1(r)\psi_2(\theta)]}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 [\psi_1(r)\psi_2(\theta)]}{\partial \theta^2} + K^2 \psi_1(r)\psi_2(\theta) &= 0 \\
\frac{\psi_2(\theta)}{r} \left\{ \frac{d[\psi_1(r)]}{dr} + r \frac{d^2[\psi_1(r)]}{dr^2} \right\} + \frac{\psi_1(r)}{r^2} \frac{d^2\psi_2(\theta)}{d\theta^2} + K^2 \psi_1(r)\psi_2(\theta) &= 0 \\
\frac{r^2}{\psi_1(r)} \psi_1''(r) + \frac{r}{\psi_1(r)} \psi_1'(r) + K^2 r^2 &= -\frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)}
\end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation, fonction de r seulement, et le second membre, fonction de θ seulement, ne peuvent être égaux que s'ils sont constants. En posant la constante égale à α^2 , nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)} = -\alpha^2 \\ \frac{r^2}{\psi_1(r)} \psi_1''(r) + \frac{r}{\psi_1(r)} \psi_1'(r) + K^2 r^2 = +\alpha^2 \end{cases}$$

La solution de la première équation différentielle est bien connue, c'est $\psi_2(\theta) = e^{j\alpha\theta}$. Le fait que la fonction $\psi_2(\theta)$ doit être égale à $\psi_2(\theta + 2\pi)$ implique que $\alpha = n$, où n est un entier. La seconde équation différentielle s'écrit alors

$$r^2 \psi_1''(r) + r \psi_1'(r) + (K^2 r^2 - n^2) \psi_1(r) = 0$$

C'est une équation de type Bessel dont les solutions sont bien connues

$$\begin{cases} J_n(Kr) \text{ fonction de Bessel de première espèce et d'ordre } n \\ Y_n(Kr) \text{ ou } N_n(Kr) \text{ fonction de Neuman de première espèce et d'ordre } n \end{cases}$$

avec $Y_n(x) = [J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)] / \sin(n\pi)$.

De plus toutes combinaisons linéaires de ces deux solutions comme, par exemple, les fonctions de Hankel définies par

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(Kr) = J_n(Kr) + jY_n(Kr) \text{ fonction de Hankel de première espèce et d'ordre } n \\ H_n^{(2)}(Kr) = J_n(Kr) - jY_n(Kr) \text{ fonction de Hankel de seconde espèce et d'ordre } n \end{cases}$$

sont également solution de l'équation différentielle.

En conclusion la solution de l'équation de propagation scalaire en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\begin{aligned} \psi_d(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [A_n J_n(Kr) + B_n Y_n(Kr)] e^{jn\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [C_n H_n^{(1)}(Kr) + D_n H_n^{(2)}(Kr)] e^{jn\theta} \end{aligned}$$

avec $A_n = C_n + D_n$ et $B_n = i(C_n - D_n)$.

Les développements à l'infini des fonctions $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont donnés par

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{j(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)} \\ H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)} \end{cases} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Le calcul du membre de gauche de la condition de rayonnement à l'infini (3.7) conduit alors avec $z = Kr$ à

$$\begin{cases} \frac{\partial H_n^{(2)}(z)}{\partial r} - jKH_n^{(2)}(z) = -\frac{K}{\sqrt{2z\pi z}} e^{j(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cong \frac{1}{z\sqrt{z}} \\ \frac{\partial H_n^{(1)}(z)}{\partial r} - jKH_n^{(1)}(z) = -\frac{K}{\sqrt{2z\pi z}} e^{-j(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} (4jz + 1) \cong \frac{1}{\sqrt{z}} \end{cases} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty$$

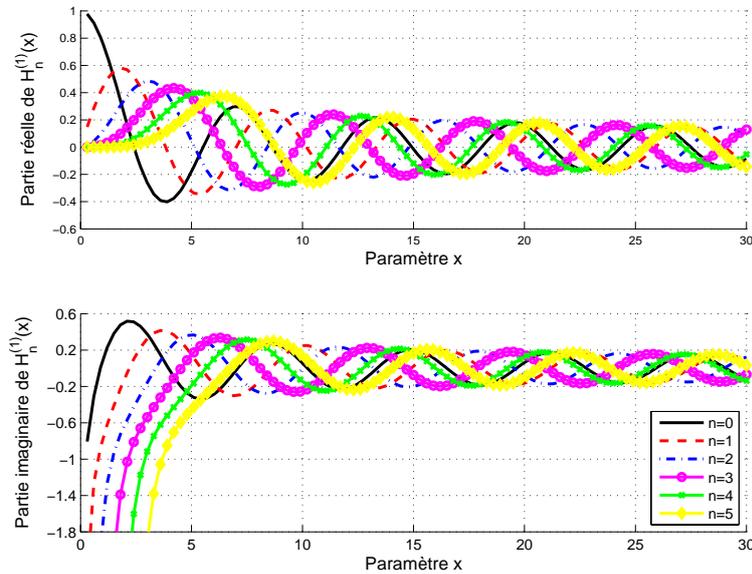
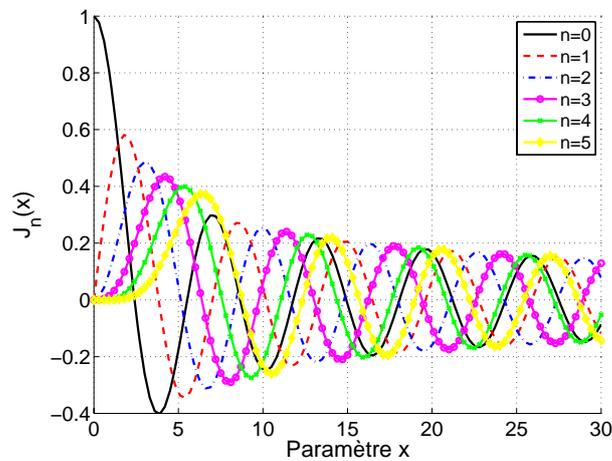
Par conséquent $H_n^{(2)}(Kr)$ ne vérifie pas (3.7) et ne peut donc pas faire partie de la solution ($D_n = 0$). La solution se simplifie donc en :

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(Kr) e^{jn\theta} \quad (3.9)$$

La constante C_n sera déterminée à partir des conditions aux limites. Tout d'abord nous allons traiter le cas parfaitement conducteur puis le cas diélectrique.

La figure 3.2 présente les parties réelle et imaginaire de $H_n^{(1)}(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n . La figure 3.3 présente $J_n(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n .

H]

FIG. 3.2 – Parties réelle et imaginaire de $H_n^{(1)}(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n .FIG. 3.3 – $J_n(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n .

3.2.2.2 Cas parfaitement conducteur en polarisation TE

Pour un objet parfaitement conducteur, il y a continuité du champ électrique tangentiel total, ce qui implique que pour $r = a$, $\psi(r, \theta) = 0 \forall \theta$, où a est le rayon du cylindre. Soit $\psi_d(a, \theta) + \psi_i(a, \theta) = 0 \forall \theta$.

En prenant la convention $e^{-j(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, et en prenant $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \geq 0$, une onde plane incidente s'écrit $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jK(y \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jKr \sin(\theta_i - \theta)}$ ($\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{y}} \sin \theta_i - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_i$) avec $\tan \theta = z/y$ et

$r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Nous pouvons donc écrire pour $r = a$

$$\psi_{i0} e^{jKa \sin(\theta_i - \theta)} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(Ka) e^{-jn\theta} = 0 \quad \forall \theta \quad (3.10)$$

Afin de regrouper les termes sous le signe somme, nous allons décomposer l'onde plane sur une base de fonctions de Bessel à l'aide de la relation suivante

$$e^{\frac{1}{2}z \left(t - \frac{1}{t} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t^n J_n(z)$$

où le terme à gauche de l'égalité correspond à la fonction génératrice. Ainsi en posant $z = Kr$ et $t = e^{j(\theta_i - \theta)}$, il est aisé de montrer que

$$e^{jKr \sin(\theta - \theta_i)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{jn(\theta_i - \theta)} J_n(Kr) \quad (3.11)$$

L'équation (3.10) devient alors

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\psi_{i0} e^{jn\theta_i} J_n(Ka) + C_n H_n^{(1)}(Ka) \right] e^{-jn\theta} = 0 \quad \forall \theta$$

Cette égalité doit être vérifiée $\forall (\theta, n)$, d'où

$$C_n = - \frac{\psi_{i0} e^{jn\theta_i} J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)}$$

En conclusion, le champ diffracté par un cylindre parfaitement conducteur en polarisation TE s'écrit

$$\psi_d(r, \theta) = -\psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Kr) e^{jn(\theta_i - \theta)} \quad \text{pour } r \geq a \quad (3.12)$$

Il est à remarquer que le champ est fonction d'un nombre sans dimension Ka , ce qui implique que dans le cas d'une multiplication par p de la fréquence et une division par p du rayon du cylindre a , le champ diffracté n'est pas modifié.

Afin de réduire les calculs numériques, nous pouvons utiliser la relation de récurrence suivante où $f_n(z) = \{J_n(z), H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)\}$

$$f_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} f_n(z) - f_{n-1}(z) \quad (3.13)$$

De plus pour n entier, les fonctions de Bessel vérifient

$$f_{-n}(z) = (-1)^n f_n(z) \quad (3.14)$$

En conclusion, les connaissances de $f_0(z)$ et $f_1(z)$ permettent de calculer la somme pour $n > 1$, et

$$\begin{aligned} - \frac{\psi_d(r, \theta)}{\psi_{i0}} &= \frac{J_0(Ka)}{H_0^{(1)}(Ka)} H_0^{(1)}(Kr) + \\ &\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Kr) \left[e^{jn(\theta_i - \theta)} + (-1)^n e^{-jn(\theta_i - \theta)} \right] \quad \text{pour } r \geq a \end{aligned}$$

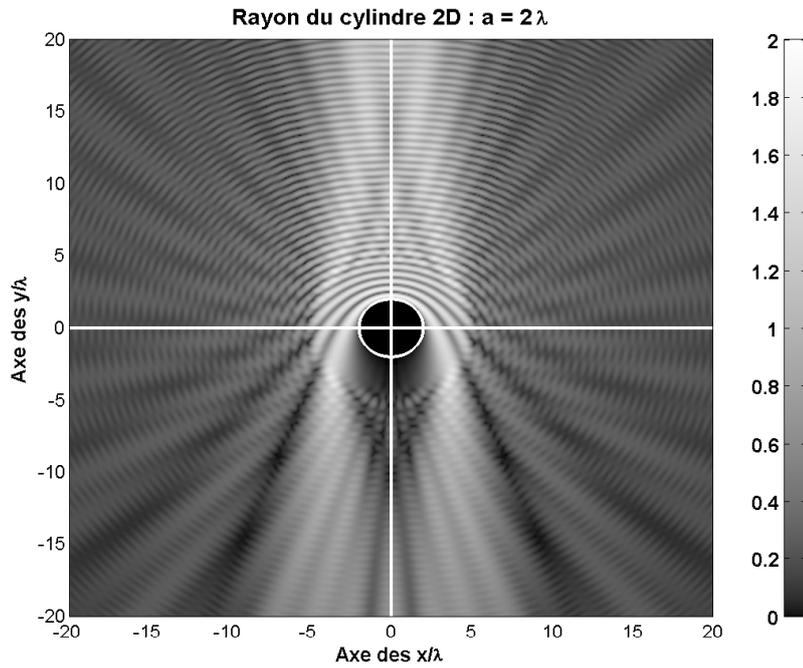


FIG. 3.4 – Module du champ total rayonné par un cylindre 2D parfaitement conducteur en polarisation TE de rayon $a = 2\lambda$. L'onde incidente est supposée plane se propageant dans le vide ($\epsilon_r = 1$) selon l'axe des z ($\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x e^{-j\omega t + Kz}$, soit $\theta_i = 0$) et les axes sont normalisés par λ .

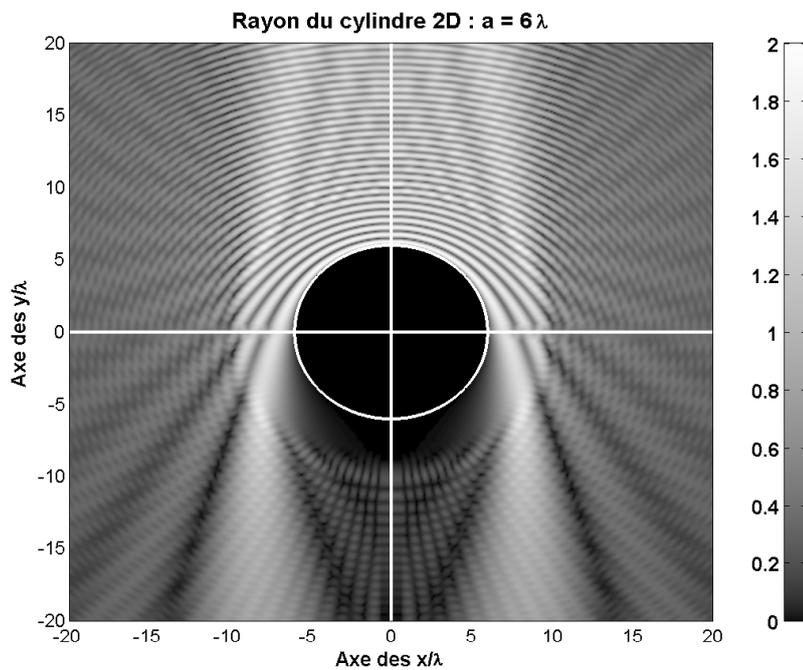


FIG. 3.5 – Figure similaire à la figure 3.4 avec $a = 6\lambda$.

Les figures 3.4 et 3.5 représentent le module du champ rayonné total diffracté par un cylindre

2D parfaitement conducteur en polarisation TE pour des rayons respectifs $a = 2\lambda$ et $a = 6\lambda$. L'onde incidente est supposée plane se propageant dans le vide ($\epsilon_r = 1$) selon l'axe des z ($\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x e^{-j\omega t + Kz}$, soit $\theta_i = 0$) et les axes sont normalisés par la longueur d'onde λ .

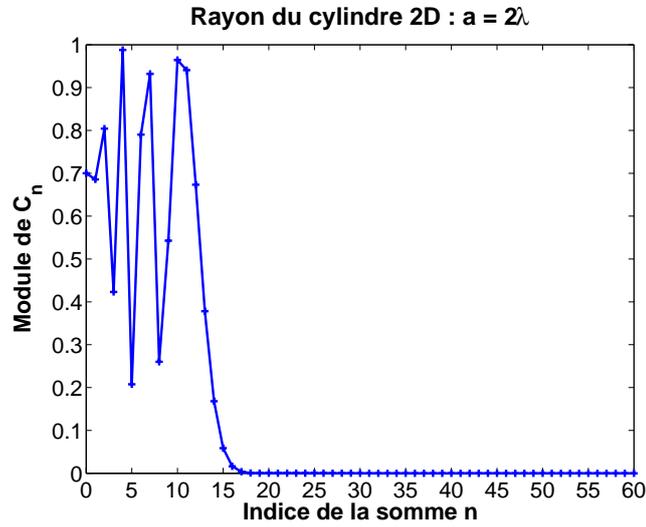


FIG. 3.6 – Module du coefficient de la somme, $|C_n| = \left| \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} \right|$, en fonction de l'indice de la somme n , pour un cylindre 2D parfaitement conducteur en polarisation TE de rayon $a = 2\lambda$.

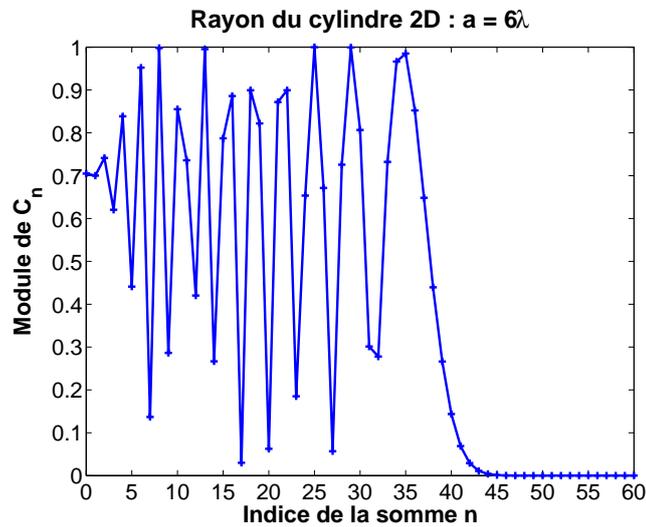


FIG. 3.7 – Figure similaire à la figure 3.6 avec $a = 6\lambda$.

Les figures 3.6 et 3.7 représentent le module du coefficient de la somme, $|C_n| = \left| \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} \right|$, en fonction de l'indice de la somme n pour des rayons respectifs $a = 2\lambda$ et $a = 6\lambda$.

3.2.2.3 Cas parfaitement conducteur en polarisation TM

D'après (3.5), la continuité de la composante tangentielle du champ électrique s'écrit

$$\mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

Par conséquent d'après (3.9), en utilisant le même raisonnement que dans le cas TE, nous obtenons avec $\mathbf{H} = \psi \hat{\mathbf{u}}_\theta = \psi_{i0} \hat{\mathbf{u}}_\theta e^{-j[\omega t - Kr \sin(\theta_i - \theta)]}$

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(Kr) e^{-jn\theta}$$

où C_n vérifie la condition aux limites suivante

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\psi_{i0} e^{-jn\theta_i} J_n(Kr) + C_n H_n^{(1)}(Kr) \right] e^{-jn\theta} \right\} \right|_{r=a} = 0 \quad \forall \theta$$

soit

$$C_n = -\frac{\psi_{i0} e^{jn\theta_i} \dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)}$$

avec $\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Le champ diffracté s'écrit donc

$$\psi_d(r, \theta) = -\psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Kr) e^{jn(\theta_i - \theta)} \quad \text{pour } r \geq a \quad (3.15)$$

Afin d'éviter de calculer numériquement les dérivées des fonctions de Bessel, nous pouvons utiliser les relations de récurrences suivantes où $f_n(x) = \{J_n(z), H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)\}$

$$\begin{aligned} \dot{f}_n(z) &= f_{n-1}(z) - \frac{n}{z} f_n(z) \\ &= -f_{n+1}(z) + \frac{n}{z} f_n(z) \\ &= \frac{f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z)}{2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Connnaissant $f_0(z)$ et $f_1(z)$, il alors possible selon (3.14) de construire $\dot{f}_n(z)$ pour $|n| > 1$.

3.2.2.4 Cas diélectrique en polarisation TE

Dans ce cas, l'équation de propagation s'écrit

$$[\nabla^2 + K^2(r)] \psi = 0$$

avec

$$K^2(r) = \begin{cases} K_1^2 & \text{si } r > a \\ K_2^2 & \text{si } r \leq a \end{cases}$$

Nous cherchons donc ψ tel que

$$[\nabla^2 + K_1^2] \psi_1 = 0 \text{ si } r > a$$

et

$$[\nabla^2 + K_2^2] \psi_2 = 0 \text{ si } r \leq a$$

où $\psi_1 = \psi_i + \psi_{1d}$ est le champ total en dehors du cylindre et ψ_2 le champ total dans le cylindre.

Toute la partie sur la séparation des variables pour obtenir la décomposition du champ soit sous la forme d'une somme infinie de fonctions de Bessel et de fonctions de Neuman soit sous la forme d'une somme infinie de fonctions de Hankel de première espèce et de deuxième espèce est identique à la section 3.2.2.2. Nous nous contenterons de rappeler que tout champ dans un espace de dimension 2 peut être représenté par ces deux sommes et que le choix d'en utiliser l'une plus que l'autre se fait pour des raisons de simplification des expressions uniquement.

La décomposition de ψ_{1d} et ψ_i a déjà été abordée (équations (3.9) et (3.11)) d'où la formule suivante pour le champ total ψ_1

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[B_n J_n(K_1 r) + C_n H_n^{(1)}(K_1 r) \right] e^{-jn\theta} \text{ avec } B_n = \psi_{i0} e^{jn\theta_i} \quad (3.17)$$

Reste maintenant à choisir la décomposition du champ ψ_2 . Ce choix se porte sur une décomposition en une somme infinie de fonctions de Bessel $J_n(x)$ et de Neuman $Y_n(x)$. De plus, puisque que la fonction de Neuman est divergente en $r = 0$ et que le champ ψ_2 ne doit diverger en aucun point intérieur au cylindre, la décomposition du champ va s'écrire

$$\begin{aligned} \psi_{2d}(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [E_n J_n(K_2 r) + F_n Y_n(K_2 r)] e^{-jn\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n J_n(K_2 r) e^{-jn\theta} \text{ car } \lim_{z \rightarrow 0} Y_n(z) = \infty \Rightarrow F_n = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dans les deux équations ci-dessus, les deux inconnues sont C_n et F_n . Par conséquent, contrairement au cas du cylindre parfaitement conducteur, il est nécessaire d'utiliser les deux relations de continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique.

Dans le cas d'une polarisation TE ($\mathbf{E} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x$) et dans l'hypothèse où $\mu = \mu_1 = \mu_2$, les composantes tangentielles des champs s'écrivent ψ et $H_\theta = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \psi}{\partial r}$. Sur la surface du cylindre ($r = a$), les relations de continuité deviennent alors

$$\begin{cases} \psi_1(a, \theta) = \psi_2(a, \theta) & \forall \theta \in [0; 2\pi] \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} & \forall \theta \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

nous obtenons donc

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [B_n J_n(K_1 a) + C_n H_n^{(1)}(K_1 a)] e^{-jn\theta} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n J_n(K_2 a) e^{-jn\theta} \\ K_1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [B_n J_n(K_1 a) + C_n \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a)] e^{-jn\theta} = K_2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n J_n(K_2 a) e^{-jn\theta} \end{cases}$$

avec $\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$. Ce système doit être vérifié $\forall (\theta, n)$, d'où

$$\begin{cases} B_n J_n(K_1 a) + C_n H_n^{(1)}(K_1 a) = E_n J_n(K_2 a) \\ K_1 [B_n \dot{J}_n(K_1 a) + C_n \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a)] = K_2 E_n \dot{J}_n(K_2 a) \end{cases}$$

Les solutions du système s'écrivent avec $\rho_{12} = \frac{K_2}{K_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$$\begin{cases} E_n = B_n \frac{H_n^{(1)}(K_1 a) \dot{J}_n(K_1 a) - \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a) J_n(K_1 a)}{\rho_{12} H_n^{(1)}(K_1 a) \dot{J}_n(K_2 a) - \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a) J_n(K_2 a)} \\ C_n = B_n \frac{J_n(K_2 a) \dot{J}_n(K_1 a) - \rho_{12} J_n(K_1 a) \dot{J}_n(K_2 a)}{\rho_{12} H_n^{(1)}(K_1 a) \dot{J}_n(K_2 a) - \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a) J_n(K_2 a)} \end{cases}$$

En utilisant les relations de récurrence (3.13), (3.14) et (3.16), le temps de calcul pour calculer la somme sur n de (3.17) et (3.18) est considérablement réduit.

3.2.3 Propagation guidée

Les guides d'onde sont utilisés pour véhiculer l'information dont le support est une onde électromagnétique. De nombreuses techniques ont été développées selon l'application. En général le choix d'une structure est un compromis entre

- la bande passante désirée,
- la puissance à transporter,
- les pertes tolérées.

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la propagation d'une onde électromagnétique dans un guide d'onde dont la section droite est constante selon sa normale $\hat{\mathbf{z}}$ (figure 3.8). Puis les cas d'une section droite rectangulaire (guide d'onde de forme parallépipédique) et circulaire (guide d'onde de forme cylindrique) seront traités (figure 3.9).

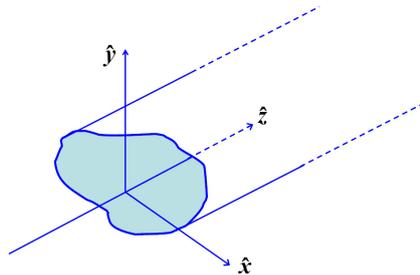


FIG. 3.8 – Guide d'onde de section droite invariante selon son axe de révolution $\hat{\mathbf{z}}$.

3.2.3.1 Ecriture des équations

Dans un guide d'onde dont la section de droite est constante selon sa normale (direction $\hat{\mathbf{z}}$), les champs électromagnétiques $\{\mathbf{E}(x, y, z, t), \mathbf{H}(x, y, z, t)\}$ peuvent s'écrire sous la convention

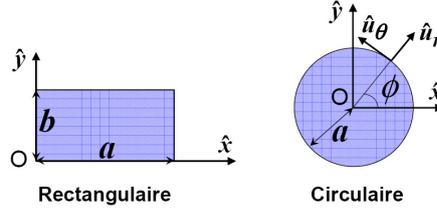


FIG. 3.9 – Guide d’onde de section droite rectangulaire (gauche) et circulaire (droite).

$e^{-j\omega t}$ comme

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_g(x, y)e^{-j\omega t + j\beta_g z} \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_g(x, y)e^{-j\omega t + j\beta_g z} \end{cases} \quad (3.19)$$

où β_g est une constante de propagation selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$ du guide. La longueur d’onde correspondante du guide est définie comme $\lambda_g = 2\pi/\beta_g$. La relation entre β_g et la pulsation ω dépend de la forme de la section de droite. Les inconnues sont donc les champs électromagnétiques $\{\mathbf{E}_g(x, y), \mathbf{H}_g(x, y)\}$ qui dépendent des variables spatiales x et y .

Compte tenu de la symétrie du problème, les champs électromagnétiques sont décomposés selon leur composante longitudinale (selon z) et transverse (selon x et y). Soit

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y) = \underbrace{E_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y)\hat{\mathbf{y}}}_{\text{Transverse}} + \underbrace{E_z(x, y)\hat{\mathbf{z}}}_{\text{Longitudinale}} = \mathbf{E}_T(x, y) + E_z(x, y)\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{H}(x, y) = \underbrace{H_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + H_y(x, y)\hat{\mathbf{y}}}_{\text{Transverse}} + \underbrace{H_z(x, y)\hat{\mathbf{z}}}_{\text{Longitudinale}} = \mathbf{H}_T(x, y) + H_z(x, y)\hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (3.20)$$

De plus, les quantités suivantes sont introduites

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} = \partial_x\hat{\mathbf{x}} + \partial_y\hat{\mathbf{y}} + \partial_z\hat{\mathbf{z}} \\ &= \nabla_T + \partial_z\hat{\mathbf{z}} = \nabla_T + j\beta_g\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

La dépendance en $e^{+j\beta_g z}$ des champ électromagnétiques entraîne que $\partial_z \rightarrow +j\beta_g z$.

En régime harmonique (convection $e^{-j\omega t} \Rightarrow \partial_t \rightarrow -j\omega$), dans un milieu LHI dépourvu de charges, les équations de Maxwell s’écrivent donc

$$\begin{cases} \nabla \wedge \mathbf{E} = +j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\nabla_T + j\beta\hat{\mathbf{z}}) \wedge (\mathbf{E}_T + E_z\hat{\mathbf{z}}) = +j\omega\mu(\mathbf{H}_T + H_z\hat{\mathbf{z}}) \\ (\nabla_T + j\beta\hat{\mathbf{z}}) \wedge (\mathbf{H}_T + H_z\hat{\mathbf{z}}) = -j\omega\epsilon(\mathbf{E}_T + E_z\hat{\mathbf{z}}) \\ (\nabla_T + j\beta\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\mathbf{E}_T + E_z\hat{\mathbf{z}}) = 0 \\ (\nabla_T + j\beta\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\mathbf{H}_T + H_z\hat{\mathbf{z}}) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

A noter que ces équations ne sont pas indépendantes. Nous allons maintenant exprimer $\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T$ et \mathbf{H}_T en fonction de E_z et H_z . Ainsi si les composantes E_z et H_z sont connues, il sera aisé de calculer les quantités $\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T$ et \mathbf{H}_T .

On peut remarquer que $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$, $\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}_T = 0$, $\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H}_T = 0$ et que

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T = \hat{\mathbf{z}} \wedge (E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}) = E_x\hat{\mathbf{y}} - E_y\hat{\mathbf{x}} \\ \nabla_T \wedge \mathbf{E}_T = (\partial_x\hat{\mathbf{x}} + \partial_y\hat{\mathbf{y}}) \wedge (E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}) = (\partial_x E_y - \partial_y E_x)\hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (3.23)$$

En égalisant alors les parties transverse et longitudinale de l'équation (3.22), nous avons

$$\begin{cases} \nabla_T E_z \wedge \hat{\mathbf{z}} + j\beta_g \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T = +j\omega\mu\mathbf{H}_T \\ \nabla_T H_z \wedge \hat{\mathbf{z}} + j\beta_g \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{H}_T = -j\omega\epsilon\mathbf{E}_T \\ \nabla_T \wedge \mathbf{E}_T - j\omega\mu H_z \hat{\mathbf{z}} = 0 \\ \nabla_T \wedge \mathbf{H}_T + j\omega\epsilon E_z \hat{\mathbf{z}} = 0 \\ \nabla_T \cdot \mathbf{E}_T + j\beta E_z = 0 \\ \nabla_T \cdot \mathbf{H}_T + j\beta H_z = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Selon la valeur du couple (E_z, H_z) , les différents modes de propagations suivants peuvent être définis

$$\begin{cases} E_z = 0 & H_z = 0 & \text{Modes TEM} \\ E_z = 0 & H_z \neq 0 & \text{Modes TE ou H} \\ E_z \neq 0 & H_z = 0 & \text{Modes TM ou E} \\ E_z \neq 0 & H_z \neq 0 & \text{Modes hybrides HE ou EH} \end{cases} \quad (3.25)$$

Par la suite, le mode TEM sera exclu. Dans les autres cas, pour lesquels E_z et/ou H_z sont différents de zéro, il est possible d'exprimer les champs transverses $\{\mathbf{E}_T, \mathbf{H}_T\}$ en fonction des composantes longitudinales $\{E_z, H_z\}$ des champs.

Ainsi, puisque $\hat{\mathbf{z}} \wedge (\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{H}_T) = \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H}_T) - \mathbf{H}_T(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) = -\mathbf{H}_T$ et de la même manière, $\hat{\mathbf{z}} \wedge (\nabla_T H_z \wedge \hat{\mathbf{z}}) = \nabla_T H_z$, nous obtenons à partir de la deuxième ligne de (3.24)

$$\nabla_T H_z - j\beta_g \mathbf{H}_T = -j\omega\epsilon \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T \quad (3.26)$$

Ainsi selon la première ligne de l'équation (3.24), le système à résoudre est

$$\begin{cases} -\beta_g \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T + \omega\mu\mathbf{H}_T = j\hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T E_z \\ -\omega\epsilon \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T + \beta_g \mathbf{H}_T = -j\nabla_T H_z \end{cases} \quad (3.27)$$

La solution est alors donnée par

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T = +\frac{j\beta_g}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T E_z + \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \nabla_T H_z \\ \mathbf{H}_T = +\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T E_z + \frac{j\beta_g}{k_c^2} \nabla_T H_z \end{cases} \quad (3.28)$$

où le nombre d'onde de coupure est défini par

$$k_c^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_g^2 = K^2 - \beta_g^2 \quad (3.29)$$

Le nombre d'onde K est le nombre d'onde d'une onde plane se propageant dans un milieu de permittivité ϵ et de perméabilité μ et se propageant à la vitesse $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. A noter que la valeur de k_c dépend de la forme du guide d'onde. Si l'intérieur du guide est assimilé au vide (milieu sans pertes), alors $K \in \mathbb{R}^{+*}$. De plus, dans la suite, on montrera que $k_c > 0$.

Si $\beta_g^2 = K^2 - k_c^2 > 0$, alors les modes dans le guide sont *propagatifs* car le terme $e^{+j\beta_g z}$ est un imaginaire pur pour $z > 0$. Dans le cas contraire si $\beta_g^2 < 0$, alors $\beta_g = \pm j|\beta_g|$ et $e^{+j\beta_g z} = e^{-|\beta_g|z}$ (solution physique avec le signe +) et les modes sont alors *évanescents*. La fréquence de coupure est alors donnée pour $\beta_g = 0$ soit $k = k_c$.

On peut également définir la longueur d'onde dans le guide $\lambda_g = 2\pi/\beta_g$ comme

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \Rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}} \quad (3.30)$$

Les modes sont alors propagatifs, $\lambda_g > 0$, si $\lambda < \lambda_c = 2\pi/k_c$.

Comme une onde plane ($Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$), il est intéressant d'introduire la notion d'impédance d'onde. Pour les modes TE et TM on a alors

$$\begin{cases} Z_{\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{\beta_g} = Z \frac{\omega}{\beta_g c} \\ Z_{\text{TM}} = \frac{\beta_g}{\omega\epsilon} = Z \frac{\beta_g c}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{\text{TE}} Z_{\text{TM}} = Z^2 \\ \frac{Z_{\text{TE}}}{Z_{\text{TM}}} = \frac{\omega^2}{\beta^2 c^2} \end{cases} \quad (3.31)$$

En conclusion, en remarquant que $\hat{\mathbf{z}} \wedge (\hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T) = -\mathbf{E}_T$ et d'après l'équation (3.28) les champs transversaux vérifient

$$\begin{cases} \mathbf{E}_T = +\frac{j\beta_g}{k_c^2} (\nabla_T E_z - Z_{\text{TE}} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T H_z) \\ \mathbf{H}_T = +\frac{j\beta_g}{k_c^2} \left(\nabla_T H_z + \frac{1}{Z_{\text{TM}}} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T E_z \right) \end{cases} \quad (3.32)$$

Les seules inconnues sont maintenant les composantes transversales (E_z, H_z) des champs. Pour les calculer nous allons appliquer l'équation d'Helmholtz, qui s'écrit pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} comme

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \mathbf{H} + K^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainsi en reportant cette équation dans (3.19), les composantes longitudinales des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} vérifient

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2) E_z(x, y) + k_c^2 E_z(x, y) = 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2) H_z(x, y) + k_c^2 H_z(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

En effet, si $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}} = E_z(x, y)e^{+j\beta_g z}$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= (\partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z - \beta_g^2 E_z + K^2 E_z) e^{+j\beta_g z} \\ &= [(\partial_x^2 + \partial_y^2) E_z + k_c^2 E_z] e^{+j\beta_g z} \end{aligned} \quad (3.35)$$

En conclusion, pour connaître les champs dans le guide, il faut résoudre l'équation (3.34) pour calculer les composantes E_z et H_z , puis à partir de l'équation (3.32), les champs transversaux \mathbf{E}_T et \mathbf{H}_T sont calculés.

Dans la suite, deux types de guide d'onde vont être discutés.

3.2.3.2 Conditions aux limites et vecteur de Poynting en TE et TM

Pour des parois parfaitement conductrices, les composantes tangentielles du champ électrique et magnétique à l'intérieur des parois du guide doivent être nulles.

Dans le cas TE, puisque $E_z = 0$, les équations (3.28), (3.32) et (3.34) conduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_T = +\frac{j\beta_g}{k_c^2} \nabla_T H_z \\ \mathbf{E}_T = -\frac{j\beta_g}{k_c^2} Z_{TE} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T H_z = Z_{TE} \mathbf{H}_T \wedge \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T = Z_{TE} \mathbf{H}_T \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2) H_z(x, y) + k_c^2 H_z(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad \text{Cas TE} \quad (3.36)$$

Sur les parois, la composante tangentielle de \mathbf{H} doit s'annuler, impliquant que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_T$ où $\hat{\mathbf{n}}$ est la normale à la paroi (soit $\hat{\mathbf{x}}$ ou $\hat{\mathbf{y}}$). Ainsi, sur les parois

$$\partial_x H_z = 0 \quad \partial_y H_z = 0 \quad \forall (x, y) \in S \quad (\text{Cas TE}) \quad (3.37)$$

Dans le cas TM, puisque $H_z = 0$, les équations (3.28), (3.32) et (3.34) conduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_T = +\frac{j\beta_g}{k_c^2} \nabla_T E_z \\ \mathbf{H}_T = +\frac{j\beta_g}{Z_{TM} k_c^2} \hat{\mathbf{z}} \wedge \nabla_T E_z = +\frac{1}{Z_{TM}} \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T \\ \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{H}_T = -\frac{\mathbf{E}_T}{Z_{TM}} \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2) E_z(x, y) + k_c^2 E_z(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad \text{Cas TM} \quad (3.38)$$

La composante tangentielle de \mathbf{E} doit s'annuler sur les parois, soit

$$E_z = 0 \quad \forall (x, y) \in S \quad (\text{Cas TM}) \quad (3.39)$$

Les équations (3.36) et (3.38) montrent que l'onde possède la même structure qu'une onde plane (le triplet $(\mathbf{E}_T, \mathbf{H}_T, \hat{\mathbf{z}})$ forme un trièdre direct) se propageant selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$ mais dont l'impédance est remplacée par Z_{TE} ou Z_{TM} . Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{Z_T} \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{E}_T \quad (3.40)$$

Le vecteur de Poynting selon la direction de propagation $\hat{\mathbf{z}}$, qui est une puissance par unité de surface (W/m^2), s'écrit alors

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_T \wedge \mathbf{H}_T^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2Z_T} \|\mathbf{E}_T\|^2 = \frac{1}{2} Z_T \|\mathbf{H}_T\|^2 \quad (3.41)$$

Pour des formes simples de section droite du guide, l'équation de propagation scalaire (3.34) est résolue en utilisant la méthode de la séparation des variables. Dans un système de coordonnées (x_1, x_2) choisi selon la symétrie du problème, ceci conduit à écrire en TE que $H_z(x_1, y_1) = f_{TE}(x_1) \times g_{TE}(x_2)$ et $E_z(x, y) = f_{TM}(x_1) \times g_{TM}(x_2)$ en TM. La substitution de cette décomposition dans l'équation de propagation scalaire (3.34), conduit alors à résoudre deux équations différentielles *indépendantes*, dont les inconnues sont les fonctions $f_{TE, TM}$ et $g_{TE, TM}$. La résolution de ces équations est alors relativement simple et fait apparaître des constantes arbitraires, qui sont déterminées en appliquant les conditions aux limites (3.37) et (3.39). Ceci implique alors que $f_{TE} \neq f_{TM}$ et $g_{TE} \neq g_{TM}$.

3.2.3.3 Guide d'onde de section droite rectangulaire

Soit un guide de section droite rectangulaire (figure 3.9) et d'aire ab (a longueur du guide selon la direction \hat{x} et b longueur selon la direction \hat{y}). La symétrie impose $x_1 = x$ et $x_2 = y$.

Tout d'abord intéressons-nous au cas TE, soit $E_z = 0$. La méthode de la séparation des variables permet d'écrire que $H_z(x, y) = H_0 f(x)g(y)$, où H_0 est une constante. La substitution de cette fonction dans l'équation (3.34) conduit alors à

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + k_c^2 = 0 \quad (3.42)$$

Le terme $\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}$ dépend uniquement de x , le terme $\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}$ dépend uniquement de y et k_c est une constante. Par conséquent l'équation est vérifiée si

$$\begin{cases} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \text{cste1} = -k_x^2 \\ \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = \text{cste2} = -k_y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0 \\ \frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Les solutions sont alors données par

$$\begin{cases} f = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x) \\ g = B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y) \end{cases} \quad (3.44)$$

où A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont des constantes arbitraires. Pour les déterminer, les conditions aux limites sont appliquées. En effet

$$\begin{cases} \partial_x H_z = 0 & \text{pour } x = \{0, a\} \\ \partial_y H_z = 0 & \text{pour } y = \{0, b\} \end{cases} \quad (3.45)$$

Par conséquent, la condition $\partial_x H_z = 0$ pour $x = \{0, a\}$ conduit pour $x = 0$ à $A_2 = 0$, soit $f(x) = A_1 \cos(k_x x)$. De plus, la condition en $x = a$ conduit à $k_x = \frac{n\pi}{a}$ avec $n = \{0, 1, 2, \dots\}$ un entier positif. En appliquant le même raisonnement sur g , nous avons

$$H_z(x, y) = A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (3.46)$$

avec $A_{nm} = H_0 A_1 B_1$. L'amplitude A_{nm} est liée à l'excitation. De plus, en reportant cette expression dans l'équation (3.34), nous avons

$$k_{c, nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} \beta_{g, nm}^2 = K^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \\ \frac{1}{\lambda_{g, nm}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{n}{2a}\right)^2 - \left(\frac{m}{2b}\right)^2 \\ \lambda_{c, nm} = \frac{2ab}{\sqrt{n^2 b^2 + m^2 a^2}} \end{cases} \quad (3.47)$$

En TM, l'application de la même démarche qu'en TE conduit à

$$E_z(x, y) = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (3.48)$$

Les composantes des champs longitudinaux forment un système discret $\{\xi_{nm}\}$, où ξ représente soit H_z (TE) ou E_z (TM). La solution s'écrit alors comme une superposition

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = \sum_{\substack{n=0 \\ n+m>0}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{nm} \quad \text{Cas TE} \\ \Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_{nm} \quad \text{Cas TM} \end{array} \right. \quad (3.49)$$

A noter que dans le cas TM les indices sur la somme débutent à 1, tandis que pour les modes TE, les indices $n = 0$ et $m = 0$ sont à exclure. Par conséquent les modes TM_{00} , TM_{01} , TM_{10} , TE_{00} n'existent pas.

Dans la pratique, peu de modes se propagent dans le guide. Prenons un exemple des modes TE_{n0} avec $n > 0$ et $m = 0$. L'équation (3.47) devient

$$k_{c,n0}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_{g,n0}^2 = K^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ \frac{1}{\lambda_{g,n0}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{n}{2a}\right)^2 \\ \lambda_{c,n0} = \frac{2a}{n} \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Les modes sont propagatifs si la longueur d'onde $\lambda < \lambda_{c,nm}$, soit $a > \frac{n\lambda}{2}$. Soit une fréquence $f = 10$ GHz $\Rightarrow \lambda = \lambda_0 = 3$ cm car il est supposé que le guide est rempli d'air. Par conséquent pour $n = 1$, $a > 1.5$ cm, soit $a = 2$ cm. Les modes d'ordres supérieurs ($n > 1$) deviennent alors évanescents car $\beta_{g,n0}^2 < 0$. En effet, $\beta_{g,10}^2 = 0.192 \times 10^5 > 0$ (rad/m)², $\beta_{g,20}^2 = -0.548 \times 10^5 < 0$ (rad/m)² et $\beta_{g,30}^2 = -1.782 \times 10^5 < 0$ (rad/m)². Le mode TE_{n0} s'exprime alors comme

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = A_{n0} \cos(k_x x) e^{j\beta_{g,n0} z} \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \\ \mathbf{H}_T = -\frac{j\beta_g A_{n0}}{k_x} \sin(k_x x) e^{j\beta_{g,n0} z} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}_T = \frac{jZ_{\text{TE}} \beta_g A_{n0}}{k_x} \sin(k_x x) e^{j\beta_{g,n0} z} \hat{\mathbf{y}} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Pour $z = 0$, la figure 3.10 représente les composantes $|H_z|$, $|H_x|$ du champ magnétique du mode TE_{n0} en fonction de $x \in [0; a]$ en cm et de l'indice n . $a = 2$ cm et $\lambda = 3$ cm. De plus, la figure du bas représente le terme $|e^{j\beta_{g,n0} z}|$ en dB en fonction de z en cm.

On observe que pour $x = \{0, a\}$, $|H_z|$ est maximum tandis que $|H_x|$ est nul. Ce sont les conditions aux limites qui imposent ce comportement. De plus, lorsque $|H_z|$ est maximum, $|H_x|$ est minimum et inversement. Lorsque n augmente, le nombre d'oscillations croît et la figure du bas montre clairement que le terme $|e^{j\beta_{g,n0} z}|$ décroît fortement avec z sauf pour $n = 1$, où il vaut 1. Ceci montre clairement que les modes d'ordres supérieurs à un ne se propagent pas et ainsi uniquement le mode TE_{10} est propagatif.

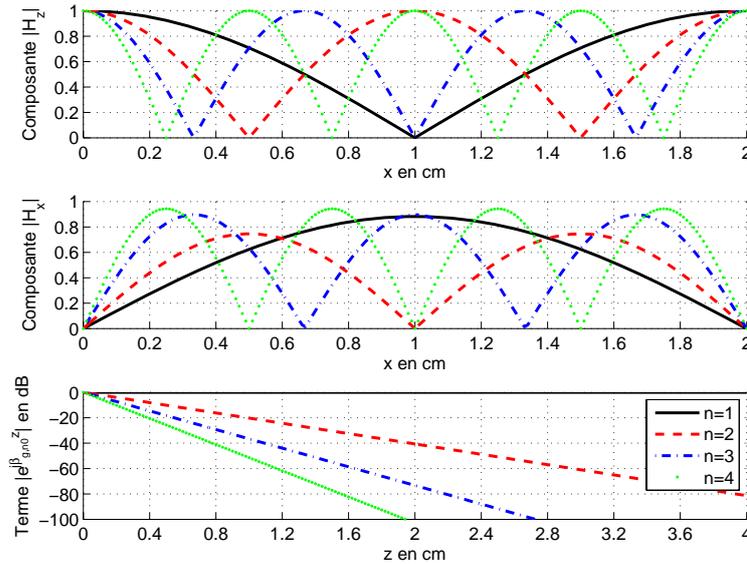


FIG. 3.10 – Composantes $|H_z|$, $|H_x|$ du champ magnétique du mode TE_{n0} en fonction de $x \in [0; a]$ en cm et de l'indice n . $a = 2$ cm et $\lambda = 3$ cm. De plus, la figure du bas représente le terme $|e^{j\beta_{g,n0}z}|$ en dB fonction de z en cm.

3.2.3.4 Guide d'onde de section droite circulaire

Soit un guide de section droite circulaire (figure 3.9) de rayon a . La symétrie impose que $x_1 = r$ et $x_2 = \phi$. Pour les modes TE ou TM, l'équation d'Helmoltz doit être donc résolue en coordonnées polaires, comme dans le cas de la diffraction par un cylindre, détaillée dans le paragraphe 3.2.2. Rappelons qu'elle s'écrit d'après les tableaux 3.1 et 3.2 (donnant l'opérateur $\|\nabla_T\| = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en coordonnées polaires avec $\{q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = 0\}$) en coordonnées polaires et d'après l'équation (3.34)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_c^2 \psi = 0 \quad (3.52)$$

avec la fonction $\psi = \psi(r, \theta)$ égale soit à $H_z(r, \theta)$ ou $E_z(r, \theta)$. La méthode de la séparation des variables conduit à la décomposition $\psi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$. Ainsi, en appliquant le même raisonnement que dans le paragraphe 3.2.2, nous avons

$$f(r) = AJ_n(k_c r) \quad g(\theta) = e^{jn\theta} \quad (3.53)$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n .

De plus, dans le cas TE, la condition à la limite donnée par l'équation (3.37) impose que

$$\partial_r (H_z(r, \theta)) = 0 \text{ pour } r = a \text{ et } \forall \theta \Rightarrow k_{c,nm} a = p'_{nm} \text{ Cas TE} \quad (3.54)$$

En TM, la condition à la limite donnée par l'équation (3.39) impose que

$$E_z(r, \theta) = 0 \text{ pour } r = a \text{ et } \forall \theta \Rightarrow k_{c,nm} a = p_{nm} \text{ Cas TM} \quad (3.55)$$

où p_{nm} sont les racines de J_n ($J_n(p_{nm}) = 0$) et p'_{nm} les racines de la dérivée de J_n . Les tableaux 3.3 et 3.4 donnent leurs valeurs pour $n = \{0, 1, 2\}$.

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

TAB. 3.3 – Valeurs de p'_{nm} pour les modes TE.

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

TAB. 3.4 – Valeurs de p_{nm} pour les modes TM.

En conclusion

$$\begin{cases} H_z = A_{nm} J_n \left(\frac{p'_{nm} r}{a} \right) e^{jn\theta} & \beta_{g,nm}^2 = K^2 - \left(\frac{p'_{nm} r}{a} \right)^2 & \text{Cas TE} \\ E_z = A_{nm} J_n \left(\frac{p_{nm} r}{a} \right) e^{jn\theta} & \beta_{g,nm}^2 = K^2 - \left(\frac{p_{nm} r}{a} \right)^2 & \text{Cas TM} \end{cases} \quad (3.56)$$

L'amplitude A_{nm} est liée à l'excitation. De plus, la longueur d'onde de coupure est donnée par

$$\lambda_{c,nm} = \frac{2\pi a}{p'_{nm}} \quad (\text{TE}) \quad \lambda_{c,nm} = \frac{2\pi a}{p_{nm}} \quad (\text{TM}) \quad (3.57)$$

En TM, pour le mode dominant TM_{01} , $\lambda_{c,01} = 2\pi a/p_{01} = 1.31D$, où D est le diamètre du guide. Puisque $p'_{0m} = p_{1m}$ car $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$, les modes TE_{0m} et TM_{1m} sont dégénérés. En TE, le premier mode de propagation est donc TE_{11} et $\lambda_{c,11} = 2\pi a/p'_{11} = 1.71D$.

A noter que l'opérateur nabla transverse ∇_T s'écrit en coordonnées cylindriques (r, θ)

$$\nabla_T = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (3.58)$$

Les composantes des champs électriques et magnétiques forment un système discret $\{\xi_{nm}\}$, où ξ représente une des composantes. La solution est alors similaire à l'équation (3.49).

3.3 Approximations de l'optique physique

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à l'approximation de l'optique physique dans les cas 2D et 3D. L'avantage de commencer par le cas 2D est pédagogiquement beaucoup plus aisé car les équations impliquées sont beaucoup plus simples que dans le cas 3D du à la nature scalaire du problème à résoudre.

3.3.1 Problème 2D : cas scalaire

3.3.1.1 Introduction

L'approximation de l'optique physique est généralement assimilée à l'approximation du plan tangent, pour laquelle la surface en chacun de ses points peut être assimilée à un plan infini, correspondant à la tangente de la surface au point considéré. La surface est alors qualifiée de localement plane. Sous cette hypothèse, le champ réfléchi par la surface peut s'exprimer très simplement à partir du champ incident sur la surface à l'aide des lois de Snell-Descartes et des coefficients de Fresnel. Le coefficient de réflexion de Fresnel permet de connaître son amplitude, et la loi de Snell-Descartes sa direction.

D'après le principe d'Huygens (chapitre 2), le champ total diffracté par la surface s'écrit

$$\psi_d(\mathbf{r}') = - \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad (3.59)$$

où $\psi(\mathbf{r})$ est le champ total sur la surface et $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ sa dérivée normale. Ce sont les inconnues du problème. Dans la suite, nous allons présenter uniquement le champ diffracté au-dessus de la surface (champ réfléchi). Pour le champ diffracté au-dessous de la surface (champ transmis), le raisonnement est très similaire.

L'approximation de l'optique physique spécifie que $\{\psi(\mathbf{r}), \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}\}$ en un point $M(y, z)$ quelconque de la surface, S , sont les mêmes que ceux qui existeraient sur une surface plane tangente infinie dont les propriétés électromagnétiques seraient celles caractéristiques de la surface limitée au point considéré (y, z) (figure 3.11). Cette approximation est valide si $\rho_c \cos^3 \theta_i \gg \lambda$, dans laquelle ρ_c est le rayon de courbure de la surface et θ_i est l'angle d'incidence.

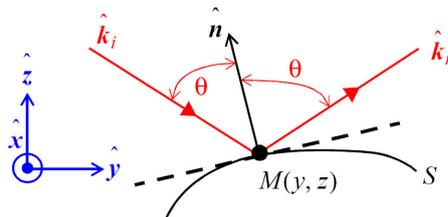


FIG. 3.11 – Illustration de l'approximation de l'optique physique. $\hat{\mathbf{n}}$ est la normale au plan tangent.

3.3.1.2 Expression du champ rayonné en zone lointaine

Par conséquent, le champ total sur la surface ψ_M au point M s'écrit en fonction du champ incident ψ_{iM} comme

$$\psi_M = [1 + \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM}, \quad (3.60)$$

où \mathcal{R} est le coefficient de réflexion de Fresnel soit en polarisation TE (\mathcal{R}_\perp) ou TM (\mathcal{R}_\parallel , voir section 1.5.5.2). θ est l'angle entre la normale au plan tangent et le nombre d'onde incident \mathbf{k}_i , soit $\cos \theta = -\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$. De plus, la dérivée normale du champ s'écrit ($\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{n}}$)

$$\frac{\partial \psi_M}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \{ [1 + \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM} \} = \frac{\partial \psi_{iM}}{\partial n} + \frac{\partial [\mathcal{R}(\theta) \psi_{iM}]}{\partial n} \approx j [\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{k}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM}$$

où \mathbf{k}_r le vecteur d'onde réfléchi dans la direction spéculaire car localement la surface est assimilée à un plan *infini* tangent, pour lequel les lois de Snell-Descartes peuvent être appliquées. Pour simplifier, $\frac{\partial \mathcal{R}(\theta)}{\partial n} \approx 0$. Par conséquent

$$\mathbf{k}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

En conclusion, l'approximation de l'optique physique conduit à

$$\begin{cases} \psi_M = [1 + \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM} \\ \frac{\partial \psi_M}{\partial n} = j\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} [1 - \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM} \end{cases} \quad (3.61)$$

Dans le chapitre 2 (voir section 2.1.6), nous avons montré que le champ rayonné en zone lointaine s'écrivait

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_S \left[j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} dS$$

Par conséquent sous l'approximation de l'optique physique avec $\psi_{iM} = \psi_{i0} e^{j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$, nous avons

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_S [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d)(1 + \mathcal{R}) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_i)(1 - \mathcal{R})] e^{-j(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}} dS \quad (3.62)$$

A noter que la normale à la surface $\hat{\mathbf{n}}$ peut s'écrire $\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\gamma \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ et l'élément de surface $dS = dy \sqrt{1+\gamma^2}$ avec $\gamma = dz/dy$.

3.3.1.3 Cas d'une plaque linéique parfaitement conductrice

Pour une surface parfaitement conductrice $\mathcal{R} = \pm 1$ et pour une plaque linéique de longueur L (figure 3.12), $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \forall \mathbf{r}$, $dS = dy$. Considérons le cas TM (polarisation verticale), d'où $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{//} = +1$. L'équation (3.62) s'écrit alors

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d) \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-j(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \hat{\mathbf{y}} dy}$$

D'après la figure 3.12, les vecteur d'onde incident et d'observation s'écrivent

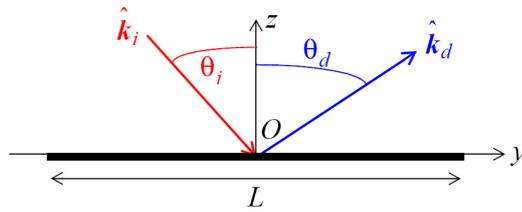
$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = K (\hat{\mathbf{y}} \sin \theta_i - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_i) \\ \mathbf{k}_d = K (\hat{\mathbf{y}} \sin \theta_d + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_d) \end{cases} \quad (3.63)$$

L'intégration sur y conduit alors à

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} K L \cos \theta_d \text{sinc} \left[\frac{K L (\sin \theta_i - \sin \theta_d)}{2} \right]$$

La Surface (linéique) Equivalente Radar (SER) d'une surface linéique est définie comme

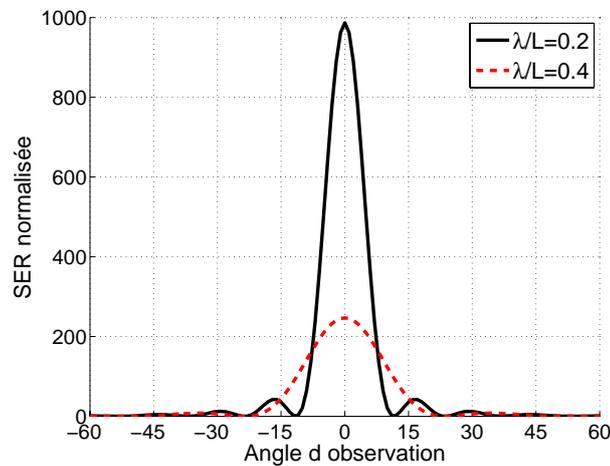
$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = 2\pi r' \lim_{r' \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi_d(\mathbf{r}')}{\psi_i} \right|^2 \quad (3.64)$$

FIG. 3.12 – Plaque linéique de longueur L centrée à l'origine.

En conclusion, la SER s'écrit pour une plaque linéique de longueur L parfaitement conductrice en polarisation TM comme

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = \frac{1}{K} \left\{ KL \cos \theta_d \operatorname{sinc} \left[\frac{KL(\sin \theta_i - \sin \theta_d)}{2} \right] \right\}^2 \quad (3.65)$$

La figure 3.13 présente la SER normalisée $\sigma_l(\theta_i, \theta_d)K$ en fonction de l'angle d'observation θ_d pour $\theta_i = 0$ et $\frac{\lambda}{L} = \{0.2, 0.4\}$. On observe que plus le ratio $\frac{\lambda}{L}$ diminue, c.a.d L grand devant λ , est plus la puissance diffractée par la plaque est concentrée autour de la direction spéculaire $\theta_d = 0$. Dans le cas limite, où $L \gg \lambda$, le phénomène de diffraction disparaît et alors toute l'énergie est réfléchiée dans la direction spéculaire. A noter, que le premier zéro de $\sigma_l(\theta_i, \theta_d)$ est obtenu lorsque $\frac{KL(\sin \theta_i - \sin \theta_d)}{2} = \pi$ soit $\sin \theta_d = \sin \theta_i - \frac{\lambda}{L} = \frac{\lambda}{L} = \{0.1, 0.2\} \Rightarrow \theta_i = \pm\{11.5, 23.6\}^\circ$.

FIG. 3.13 – SER normalisée d'un plaque linéique parfaitement conductrice en polarisation TM en fonction de l'angle d'observation avec $\theta_i = 0$.

3.3.1.4 Cas d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d'un demi cylindre elliptique (figure 3.14) parfaitement conducteur dans le but d'étudier l'effet de la courbure comparativement à une plaque (courbure nulle).

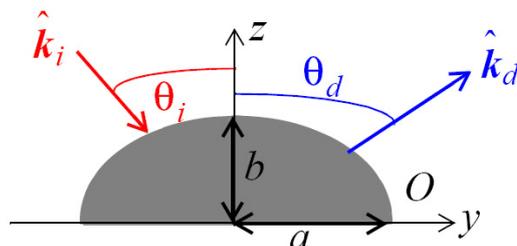


FIG. 3.14 – demi-cylindre elliptique de demi-grand axe a et de demi-petit axe b centré à l'origine.

En coordonnées polaires, l'équation du demi-cylindre elliptique centré à l'origine s'écrit

$$\begin{cases} y = a \cos \theta \\ z = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0; \pi] \quad (3.66)$$

avec a le demi-grand axe et b le demi-petit axe. De plus

$$dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d = dy \sqrt{1 + \gamma^2} \frac{-\gamma \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \cdot \mathbf{k}_d = -\gamma dy k_{dy} + dy k_{dz} \quad (3.67)$$

avec $\gamma = \frac{dy}{dz}$. Or $\gamma dy = dz = b \cos \theta d\theta$ et $dy = -a \sin \theta d\theta$. Par conséquent, l'équation (3.62) s'écrit en coordonnées polaires pour une surface parfaitement conductrice en polarisation TM comme

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_0^\pi e^{j[a(k_{iy} - k_{dy}) \cos \theta + b(k_{iz} - k_{dz}) \sin \theta]} (bk_{dy} \cos \theta + ak_{dz} \sin \theta) d\theta \quad (3.68)$$

En posant $\cos \chi = \frac{a}{\alpha}(k_{iy} - k_{dy})$ et $\sin \chi = \frac{b}{\alpha}(k_{iz} - k_{dz})$ avec

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{a^2(k_{iy} - k_{dy})^2 + b^2(k_{iz} - k_{dz})^2} \\ \tan \chi = \frac{b(k_{iz} - k_{dz})}{a(k_{iy} - k_{dy})} = -\frac{b}{a} \cot \left(\frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) \end{cases} \quad (3.69)$$

l'équation ci-dessus devient

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_0^\pi e^{j\alpha \cos(\theta - \chi)} (bk_{dy} \cos \theta + ak_{dz} \sin \theta) d\theta$$

Le terme en exponentiel est alors décomposé comme

$$e^{j\alpha \cos(\theta - \chi)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{jn(\theta - \chi)}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{j\alpha \cos(\theta - \chi)} \cos \theta d\theta &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{-jn\chi} \int_0^\pi e^{jn\theta} \cos \theta d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n j^n J_n(\alpha) \frac{[1 + (-1)^n] e^{-jn\chi}}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement sur $\sin \theta$, nous avons

$$\int_0^\pi e^{j\alpha \cos(\theta-\chi)} \sin \theta d\theta = - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) \frac{[1 + (-1)^n] e^{-jn\chi}}{n^2 - 1}$$

Par conséquent l'intégration sur θ de (3.68) conduit à

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) \frac{[1 + (-1)^n] e^{-jn\chi}}{n^2 - 1} (jnbk_{dy} - ak_{dz})$$

Au final d'après (3.64), la SER s'écrit pour un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur en polarisation TM comme

$$\begin{aligned} \sigma_l(\theta_i, \theta_d) &= K \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{-jn\chi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} (bjn \sin \theta_d - a \cos \theta_d) \right|^2 \\ &= K \left| 2aJ_0(\alpha) \cos \theta_d - \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{-jn\chi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} (bjn \sin \theta_d - a \cos \theta_d) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dans le cas où $b = 0$, $\sin \chi = 0 \Rightarrow \chi = \{0, \pm\pi\}$, $\alpha = a|k_{iy} - k_{dy}|$, $\cos \chi = \text{sign}(k_{iz} - k_{dz}) = \pm 1 \Rightarrow \chi = \pm\pi$, et $e^{-jn\chi} = \{1, e^{\mp jn\pi}\} = \{1, (-1)^n\}$. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma_l(\theta_i, \theta_d) &= \frac{1}{K} (KL \cos \theta_d)^2 \left| \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(Ka |\sin \theta_i - \sin \theta_d|) \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \right|^2 \\ &= \frac{1}{K} (KL \cos \theta_d)^2 \left| J_0(Ka |\sin \theta_i - \sin \theta_d|) - \sum_{n=1}^{n=+\infty} j^n J_n(Ka |\sin \theta_i - \sin \theta_d|) \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \right|^2 \end{aligned}$$

La figure 3.15 présente la SER normalisée d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur en polarisation TM en fonction de l'angle d'observation avec $\theta_i = 0$ et $a = 5\lambda$. On observe que lorsque b augmente, la puissance diffractée se concentre moins autour de la direction spéculaire.

La figure 3.16 présente le coefficient $C_n = \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1}$ de la somme en fonction de n .

3.3.2 Problème 3D : cas vectoriel

Cette partie ne sera pas enseignée. Dans cette section, l'approximation de l'optique physique est présentée dans le cas vectoriel, c.a.d lorsque la surface est une fonction à la fois des coordonnées x et y . La démarche pour le calcul du champ diffracté par une surface diélectrique finie en champ lointain illuminée par une onde plane est la même que dans le cas 2D, hormis que les équations sont plus compliquées.

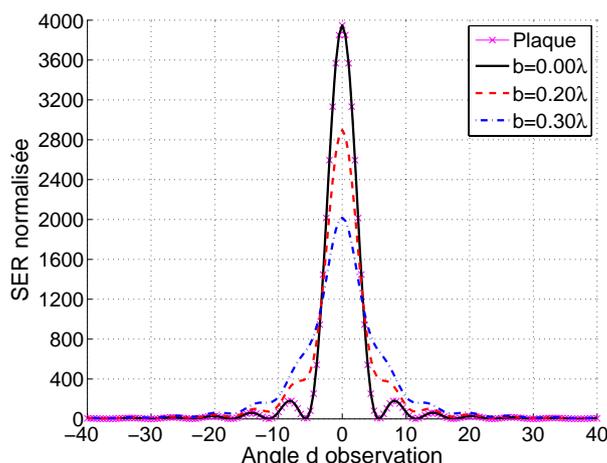


FIG. 3.15 – SER normalisée d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur en polarisation TM en fonction de l'angle d'observation avec $\theta_i = 0$ et $a = 5\lambda$.

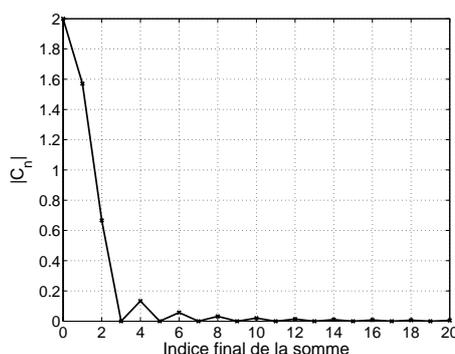


FIG. 3.16 – Module du coefficient $C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}$ de la somme en fonction de n pour le calcul de la SER de la figure 3.15.

3.3.2.1 Introduction

Nous avons montré dans le chapitre 2, que le champ diffracté par un objet en champ lointain s'écrivait (voir (2.51))

$$\mathbf{E}_d^\infty(\mathbf{R}') = \frac{-jK e^{jKR'}}{4\pi R'} \left(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d \right) \cdot \iint_{S_1} e^{-jK \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}} \left\{ Z \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \right\} dS \quad (3.71)$$

Tout le problème est de calculer la composante tangentielle des champs totaux $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})$ sur la surface. L'approximation de l'optique physique spécifie que les champs électromagnétiques ($\mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{R})$) en un point (x, y) quelconque de la surface, S , sont les mêmes que ceux qui existeraient sur une surface plane tangente infinie dont les propriétés électromagnétiques seraient celles caractéristiques de la surface limitée au point considéré (x, y) . Nous allons alors montrer que le champ diffracté est obtenu à partir des coefficients de Fresnel $\mathcal{R}_{//}$ et \mathcal{R}_\perp (voir section 1.5.5.2).

3.3.2.2 Description de la géométrie

Soit la configuration illustrée en figure 3.17. Soit $\hat{\mathbf{k}}_i$ et $\hat{\mathbf{k}}_d$ deux vecteurs unitaires qui indiquent respectivement les directions des ondes incidente et diffractée. Soit le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{h}}_i$ défini par $\hat{\mathbf{h}}_i = \hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}}_i / \|\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}}_i\|$ qui correspond à la polarisation *horizontale* (cas TE), et le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{v}}_i$ défini par $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{h}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i$ qui correspond à la polarisation *verticale* (cas TM). Les vecteurs $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i)$ forment alors une base orthogonale unitaire. On définit de même une base orthogonale unitaire $(\hat{\mathbf{k}}_d, \hat{\mathbf{v}}_d, \hat{\mathbf{h}}_d)$ en réception.

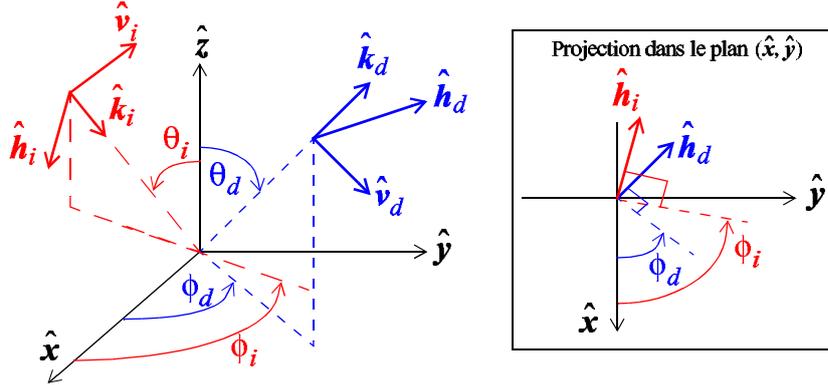


FIG. 3.17 – Illustration des bases de polarisations utilisées en émission et en réception.

Dans un système de coordonnées sphériques, l'ensemble des vecteurs s'écrit alors

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_i = \sin \theta_i \cos \phi_i \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_i \sin \phi_i \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{v}}_i = -\cos \theta_i \cos \phi_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \sin \phi_i \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{h}}_i = -\sin \phi_i \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi_i \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_d = \sin \theta_d \cos \phi_d \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_d \sin \phi_d \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta_d \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{v}}_d = \cos \theta_d \cos \phi_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_d \sin \phi_d \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_d \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{h}}_d = -\sin \phi_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi_d \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Le système de coordonnées $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i)$ est choisi de telle façon qu'il coïncide avec le système de coordonnées sphériques $(\hat{\mathbf{u}}_{r_i}, \hat{\mathbf{u}}_{\theta_i}, -\hat{\mathbf{u}}_{\phi_i})$, tandis que $(\hat{\mathbf{k}}_d, \hat{\mathbf{v}}_d, \hat{\mathbf{h}}_d) \equiv (\hat{\mathbf{u}}_{r_d}, \hat{\mathbf{u}}_{\theta_d}, \hat{\mathbf{u}}_{\phi_d})$. Dans la base de polarisation $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i)$, une onde plane incidente s'écrit alors $\mathbf{E}_i = (E_{iv} \hat{\mathbf{v}}_i + E_{ih} \hat{\mathbf{h}}_i) e^{jK \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}$. Nous pouvons alors montrer que la dyade $\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d$ s'écrit $\hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d + \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d$.

Comme le montre la figure 3.18, nous allons calculer le champ diffracté en zone lointaine par une onde plane incidente contenue dans le plan $(0yz)$ illuminant une surface d'aire finie.

Les deux sections suivantes sont des cas généraux pour lesquels aucune hypothèse n'est faite sur la normale à la surface, $\hat{\mathbf{n}}$. Dans la dernière section, les relations seront simplifiées en considérant que la normale est dirigée selon $\hat{\mathbf{z}}$ et que $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Dans la définition des coefficients de réflexion de Fresnel, l'angle θ est défini par $\cos \theta = -\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Lorsque la normale est quelconque, afin d'exprimer les champs tangentiels, nous allons définir une base orthogonale *locale* $(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{k}}_i)$ (figure 3.19) définie sur la surface par

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}\|} \quad \hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 0 \\ \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 0 \end{cases}$$

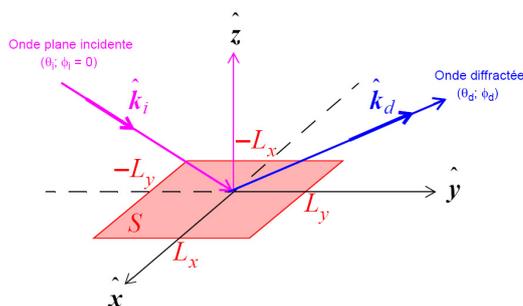


FIG. 3.18 – Champ diffracté par une surface finie calculé à l'aide de l'approximation de l'optique physique.

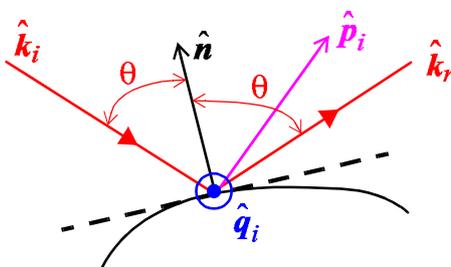


FIG. 3.19 – Illustration de la base de polarisation utilisée dans l'approximation de Kirchhoff.

Les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{q}}_i$ et $\hat{\mathbf{p}}_i$ correspondent aux polarisations orthogonale et parallèle. Dans ce système de coordonnées, une onde plane incidente s'écrit $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_i e^{jK\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}} = (E_{iv}\hat{\mathbf{p}}_i + E_{ih}\hat{\mathbf{q}}_i)e^{jK\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}$ où le vecteur \mathbf{a}_i donne la polarisation de l'onde.

3.3.2.3 Calcul dans le cas général en polarisation TE

Dans cette section nous allons nous intéresser au cas TE, c'est-à-dire à la composante orthogonale du champ électrique incident : polarisation TE, horizontale (H) ou \perp .

La composante orthogonale du champ électrique incident s'écrit

$$(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \quad (3.72)$$

La composante réfléchie du champ électrique est alors

$$(3.72) \times \mathcal{R}_\perp = (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp \quad (3.73)$$

Par conséquent, la composante tangentielle totale du champ électrique sur la surface d'une onde incidence plane polarisée horizontalement s'écrit

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{n}} \wedge [(3.72) + (3.73)] = (\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i)(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)(1 + \mathcal{R}_\perp) \quad (3.74)$$

De plus, sachant que $\mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3)\mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3$ nous avons

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)(1 + \mathcal{R}_\perp)\hat{\mathbf{k}}_d \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i) \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)(1 + \mathcal{R}_\perp) \left[(\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{q}}_i \right]\end{aligned}\quad (3.75)$$

Le champ magnétique incident associé au champ électrique incident s'écrit

$$\frac{1}{Z}\hat{\mathbf{k}}_i \wedge (3.72) = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{k}}_i \wedge (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{q}}_i \quad (3.76)$$

La composante réfléchie locale du champ magnétique s'écrit donc

$$(3.76) \times \mathcal{R}_\perp = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{k}}_r \wedge (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp \quad (3.77)$$

où la direction spéculaire locale à la surface portée par le vecteur $\hat{\mathbf{k}}_r$ s'écrit

$$\hat{\mathbf{k}}_r = \hat{\mathbf{k}}_i - 2\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)$$

Par conséquent, la composante tangentielle totale du champ magnétique sur la surface d'une onde incidence plane polarisée horizontalement s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) &= \hat{\mathbf{n}} \wedge [(3.76) + (3.77)] = \frac{1}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{q}}_i + \hat{\mathbf{k}}_r \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp) \\ &= \frac{1}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left\{ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)\hat{\mathbf{q}}_i + \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{k}}_r - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r)\hat{\mathbf{q}}_i \right] \mathcal{R}_\perp \right\} \\ &= \frac{1}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left[-(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)\hat{\mathbf{q}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r)\hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp \right] \quad \text{car } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 0 \\ &= -\frac{1 - \mathcal{R}_\perp}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)\hat{\mathbf{q}}_i \quad \text{car } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r\end{aligned}\quad (3.78)$$

Par conséquent nous avons selon (3.75) et (3.78)

$$\begin{aligned}Z\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_\perp) \left[(\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)\hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{q}}_i \right] \right. \\ &\quad \left. - (1 - \mathcal{R}_\perp)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)\hat{\mathbf{q}}_i \right\}\end{aligned}\quad (3.79)$$

3.3.2.4 Calcul dans le cas général en polarisation TM

Dans cette section, le cas TM (polarisation verticale (V) ou //) est examiné.

En appliquant le même raisonnement nous obtenons en polarisation TM

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)(1 - \mathcal{R}_{//})\hat{\mathbf{q}}_i \\ Z\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(1 + \mathcal{R}_{//})(\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i) \end{cases}$$

A noter que $\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{p}}_i) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)\hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)\hat{\mathbf{p}}_i$. Par conséquent

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)(1 - \mathcal{R}_{//})\hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \\ Z\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(1 + \mathcal{R}_{//}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)\hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)\hat{\mathbf{p}}_i \right] \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} Z\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_{//}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{p}}_i \right] \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mathcal{R}_{//}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

3.3.2.5 Cas où la normale est dirigée selon $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$

Puisque $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, nous avons $\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}\|} = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{z}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{z}}\|} = -\hat{\mathbf{h}}_i$ et $\hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{h}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{v}}_i$,
soit

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{q}}_i = -\hat{\mathbf{h}}_i \\ \hat{\mathbf{p}}_i = -\hat{\mathbf{v}}_i \end{cases}$$

De plus, $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow \phi_i = \pi/2 \Rightarrow \hat{\mathbf{h}}_i = -\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{x}}$. Soit

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_i = \sin \theta_i \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{p}}_i = \cos \theta_i \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

L'équation (3.79) devient alors

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_\perp) \left[(\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{q}}_i \right] - (1 - \mathcal{R}_\perp) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \right\} \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left[(1 + \mathcal{R}_\perp) (\hat{k}_{dx} \hat{\mathbf{z}} - \hat{k}_{dz} \hat{\mathbf{x}}) - (1 - \mathcal{R}_\perp) \hat{k}_{iz} \hat{\mathbf{x}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} -(1 + \mathcal{R}_\perp) \hat{k}_{dz} + (1 - \mathcal{R}_\perp) \cos \theta_i \\ 0 \\ (1 + \mathcal{R}_\perp) \hat{k}_{dx} \end{bmatrix} E_{ih} \end{aligned} \quad (3.81)$$

car $(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) = (E_{iv} \hat{\mathbf{p}}_i + E_{ih} \hat{\mathbf{q}}_i) \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = E_{ih}$. De même, l'équation (3.80) s'écrit

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_{//}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{p}}_i \right] + (1 - \mathcal{R}_{//}) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \right\} \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left[(1 + \mathcal{R}_{//}) (\sin \theta_i \hat{\mathbf{k}}_i + \cos \theta_i \hat{\mathbf{p}}_i) - (1 - \mathcal{R}_{//}) \cos \theta_i \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{x}} \right] \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left[(1 + \mathcal{R}_{//}) (\sin^2 \theta_i \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_i \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} + \cos^2 \theta_i \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta_i \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \mathcal{R}_{//}) \cos \theta_i \hat{k}_{dz} \hat{\mathbf{y}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \mathcal{R}_{//} - (1 - \mathcal{R}_{//}) \cos \theta_i \hat{k}_{dz} \\ 0 \end{bmatrix} E_{iv} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Sachant que $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_i e^{jK\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}$, en reportant ces deux équations dans (3.71), le champ diffracté en champ lointain s'écrit avec l'approximation de Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d^\infty(\mathbf{R}') &= \mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') \iint_S e^{jK(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_d) \cdot \mathbf{R}} dx dy \\ &= \mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') \iint_S e^{jK[(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx})x + (\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy})y]} dx dy \end{aligned} \quad (3.83)$$

avec

$$\mathbf{E}_{d0}^{\infty}(\mathbf{R}') = \frac{-jK e^{jKR'}}{4\pi R'} \left(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d \right) \cdot \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

où les composantes Q_x , Q_y et Q_z sont données selon la polarisation soit par (3.81) ou par (3.82). Le produit scalaire peut être alors calculé à partir

$$\hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta_d & -\cos \theta_d \sin \theta_d \\ 0 & -\cos \theta_d \sin \theta_d & \sin^2 \theta_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

où $\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d = \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d + \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d$.

Dans les cas monostatique, $\theta_d = -\theta_i$, et bistatique, $\theta_d = +\theta_i$, nous avons respectivement pour les deux polarisations ($\hat{k}_{dx} = 0$)

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2E_{ih} \mathcal{R}_{\perp} \cos \theta_i \\ E_{iv} [\sin^2 \theta_i + \mathcal{R}_{//} (1 + \cos^2 \theta_i)] \\ -E_{ih} (1 + \mathcal{R}_{//}) \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2E_{ih} \mathcal{R}_{\perp} \cos \theta_i \\ E_{iv} [\sin^2 \theta_i + \mathcal{R}_{//} (1 + \cos^2 \theta_i)] \\ E_{ih} (1 + \mathcal{R}_{//}) \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

De plus, d'après (3.85), dans le cas plan nous avons

$$\left(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d \right) = \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d + \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta_d & -\cos \theta_d \sin \theta_d \\ 0 & -\cos \theta_d \sin \theta_d & \sin^2 \theta_d \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

En conclusion l'équation (3.83), montre que le champ diffracté dépend d'un terme $\mathbf{E}_{d0}^{\infty}(\mathbf{R}')$ fonction des angles en émission et en réception et d'une intégrale, qui correspond physiquement à la diffraction par la surface. Dans le cas d'une surface rectangulaire de longueur $2L_x$ et de largeur $2L_y$, elle s'écrit

$$\begin{aligned} \iint_S e^{jK[(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx})x + (\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy})y]} dx dy &= \int_{-L_x}^{+L_x} \int_{-L_y}^{+L_y} e^{jK[(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx})x + (\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy})y]} dx dy \\ &= S \times \text{sinc}(KL_x[\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx}]) \times \text{sinc}(KL_y[\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy}]) \\ &= S \times \text{sinc}(KL_y[\sin \theta_i - \sin \theta_d]) \end{aligned}$$

où $S = 4L_x L_y$ est l'aire de la surface illuminée et $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Nous observons qu'il n'y a pas de diffraction selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ car nous observons dans le plan $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Lorsque $KL_y \gg 1$, soit $L_y \gg \lambda$, la fonction sinus cardinal tend vers 1, et la surface se comporte alors comme une surface *infinie*.

Dans le cas d'une surface circulaire de rayon a , nous avons

$$\begin{aligned}
& \iint_S e^{jK[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})x+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})y]} dx dy \\
&= \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} e^{jK[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})x+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})y]} dx dy \\
&= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{jKr[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})\cos\vartheta+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})\sin\vartheta]} d\vartheta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases} \\
&= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{jKr\alpha \cos(\vartheta-\varpi)} d\vartheta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})^2 + (\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})^2} \\ \varpi = \arctan\left(\frac{\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy}}{\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx}}\right) \end{cases} \\
&= 2\pi \int_0^a J_0(Kr\alpha) r dr = 2\pi \frac{aJ_1(aK\alpha)}{K\alpha} \\
&= S \frac{2J_1(Ka\alpha)}{Ka\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = |\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy}| = |\sin\theta_i - \sin\theta_d|
\end{aligned}$$

où $S = \pi a^2$ est l'aire de la surface illuminée.

Les figures 3.20 et 3.21 représentent les quantités $\text{sinc}(KL_y\alpha)$ et $\frac{2J_1(Ka\alpha)}{Ka\alpha}$ en fonction de l'angle d'observation θ_d pour $\lambda/L_y = \lambda/a = \{0.5, 1\}$ et $\theta_i = 0$. Nous observons, que plus le rapport λ sur la dimension de l'objet est grande, et plus le diagramme de diffraction est isotrope. Dans le cas limite, où $\lambda/L_y = \lambda/a \rightarrow \infty$, le champ diffracté vaut $1 \forall \theta_d$.

Dans le cas d'une plaque rectangulaire, le premier zéro de $\text{sinc}(KL_y\alpha)$ est donné par $KL_y\alpha_0 = \pi$ soit $\alpha_0 = 0.5 \frac{\lambda}{L_y}$, et pour $\theta_i = 0$, ceci correspond à un angle d'observation de $\theta_d = \arcsin(0.5 \frac{\lambda}{L_y}) = \{14.5, 90\}$ degrés pour $\lambda/L_y = \{0.5, 2\}$.

Dans le cas d'une plaque circulaire, le premier zéro de $\frac{2J_1(Ka\alpha)}{Ka\alpha}$ est donné par $KL_y\alpha_0 = 3.83$ soit $\alpha_0 = 0.61 \frac{\lambda}{a}$, et pour $\theta_i = 0$, ceci correspond à un angle d'observation de $\theta_d = \arcsin(0.61 \frac{\lambda}{L_y}) = \{17.8, -\}$ degrés pour $\lambda/a = \{0.5, 2\}$.

3.4 Méthode des moments

L'avantage des approches asymptotiques est leur facilité de mise en oeuvre. Leurs temps de calcul sont faibles et elles requièrent en général peu d'espace mémoire. En revanche, leur inconvénient principal est qu'elles possèdent des domaines de validité plus ou moins restrictifs selon les approches utilisées. Pour surmonter ces inconvénients, des méthodes numériques dites *exactes* (la seule approximation vient de la discrétisation des équations intégrales) sont nécessaires. Elles peuvent être appliquées sur une structure quelconque. Néanmoins, plus les dimensions de l'objet sont grandes devant la longueur d'onde, plus le nombre d'inconnues à déterminer est grand. C'est pour cela que la mise en oeuvre de modèles asymptotiques est encore étudiée de nos jours. De plus elles nécessitent des ressources informatiques importantes et les temps de calcul sont souvent prohibitifs. Ces méthodes servent donc de référence pour valider les approches asymptotiques.

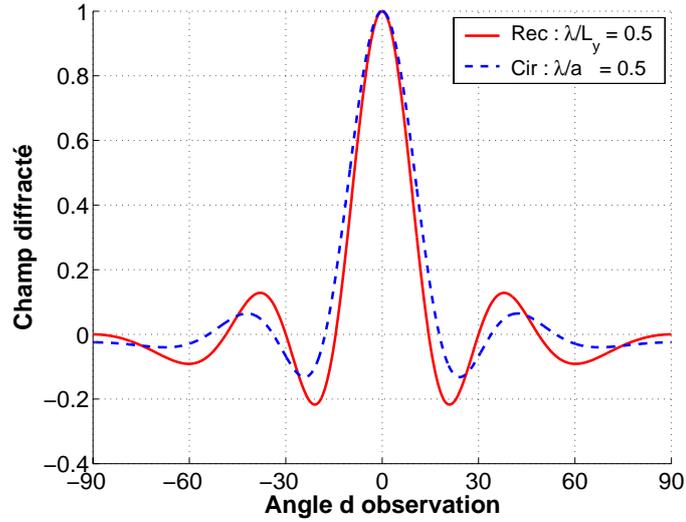


FIG. 3.20 – Champ diffracté par des surfaces rectangulaire et circulaire en fonction de l'angle d'observation θ_d pour $\lambda/L_y = \lambda/a = 0.5$ et $\theta_i = 0$.

3.4.1 Formulation mathématique

3.4.1.1 Trois étapes

La méthode des moments va permettre de calculer le champ électromagnétique dans le cas le plus général. Elle est applicable à la résolution de toute équation linéaire du type

$$\mathcal{L}(f) = g \quad (3.89)$$

où \mathcal{L} est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire, f l'inconnue et g , une fonction donnée.

Première étape Tout d'abord, la fonction recherchée f est projetée sur une base complète $\{f_n\}_{n=1..N}$; c'est-à-dire que nous approchons f par

$$f \simeq \hat{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n$$

et \hat{f} vérifie $\lim_{N \rightarrow +\infty} |f - \hat{f}| = 0$.

Le problème revient donc à déterminer les coefficients a_n . En remplaçant cette approximation dans (3.89), nous obtenons

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^N a_n f_n \right) + \epsilon = g$$

où ϵ est l'erreur d'approximation, encore appelée résidu, due à la troncature de la somme jusqu'à l'ordre N .

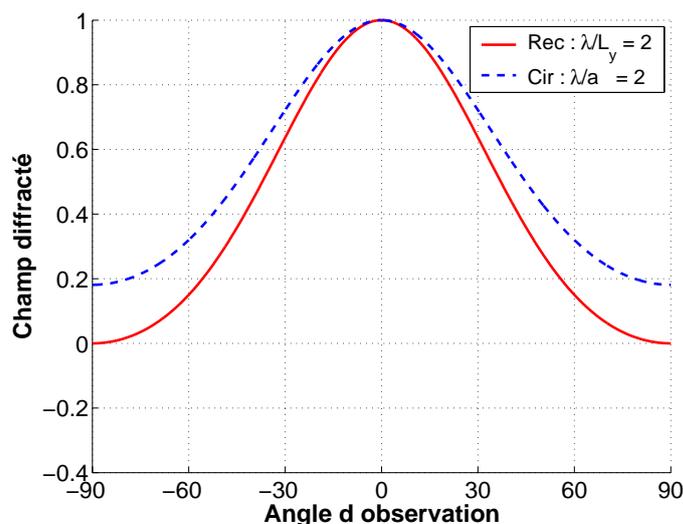


FIG. 3.21 – Figure similaire à la figure 3.20 avec $\lambda/L_y = \lambda/a = 2$.

Par linéarité, nous avons finalement

$$\mathcal{L}f = \sum_{n=1}^N a_n(\mathcal{L}f_n) + \epsilon = g$$

Deuxième étape L'égalité précédente est projetée sur une base de fonctions $\{w_m\}_{m=1..M}$, dites *fonctions test*, choisies de façon à minimiser l'erreur ϵ .

$$\begin{aligned} \left\langle w_m, \sum_{n=1}^N a_n(\mathcal{L}f_n) + \epsilon \right\rangle &= \sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle + \langle w_m, \epsilon \rangle \\ &= \langle w_m, g \rangle \quad \text{avec } m = 1..M \end{aligned} \quad (3.90)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente le produit scalaire. Sur un domaine d'étude \mathcal{D} à une seule variable x , il s'écrit

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{D}} f(x)g(x)dx$$

Par la suite nous supposons $\langle \epsilon, w_m \rangle = 0 \forall m$, mais nous reviendrons sur cette approximation.

Troisième étape Sous cette hypothèse le système (3.90) peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle

$$\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

dans laquelle les éléments de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ et du vecteur \mathbf{B} s'écrivent

$$\begin{cases} Z_{mn} = \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle \\ B_m = \langle w_m, g \rangle \end{cases}$$

et les éléments du vecteur \mathbf{X} sont à déterminer. La matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ est appelée matrice impédance. Pour un problème de diffraction, elle dépend de la forme et des propriétés physiques de l'objet.

3.4.1.2 Exemple

Nous allons appliquer la méthode des moments afin de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = 1 + 4x^2 \quad \text{avec} \quad f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = [0; 1]$$

Cette équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre a pour solution analytique

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}$$

L'opérateur \mathcal{L} et la fonction $g(x)$ s'écrivent

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + 4x^2$$

Compte tenu de la solution attendue, nous allons prendre comme fonction de base $f_n(x) = x - x^{n+1}$ et comme fonction test $w_m(x) = f_m(x) = x - x^{m+1}$. La matrice impédance $Z_{mn} = \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle$ et l'élément $B_m = \langle w_m, g \rangle$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle = \int_0^1 [x - x^{m+1}] \left[-\frac{d^2}{dx^2}(x - x^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_0^1 [x - x^{m+1}] \left\{ \frac{d}{dx} [(n+1)x^n - 1] \right\} dx = n(n+1) \int_0^1 [x - x^{m+1}] x^{n-1} dx \\ &= \frac{nm}{n+m+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_m &= \langle w_m, g \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})(1 + 4x^2) dx \\ &= \frac{m(8 + 3m)}{2(m+2)(m+4)} \end{aligned}$$

$N = 1$

$$m = n = 1 \Rightarrow \begin{cases} Z_{11} = \frac{1}{3} \\ B_1 = \frac{11}{30} \end{cases} \Rightarrow Z_{11}a_1 = B_1 \Rightarrow a_1 = \frac{11}{10} \Rightarrow \boxed{f^{(1)}(x) = \frac{11}{10}(x - x^2)}$$

$N = 2$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} n = 1..2 \\ m = 1..2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow f^{(2)}(x) = a_1(x - x^2) + a_2(x - x^3) = \boxed{\frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3}
 \end{aligned}$$

$N = 3$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} n = 1..3 \\ m = 1..3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow f^{(3)}(x) = a_1(x - x^2) + a_2(x - x^3) + a_3(x - x^4) = \boxed{\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4}
 \end{aligned}$$

La figure 3.22 compare la solution analytique $f(x)$ avec celle obtenue par la méthode des moments, $f^{(N)}(x)$ où $N = 1..3$, en fonction de la variable x . Nous pouvons observer que la méthode converge bien au bout de trois itérations. En fait, une connaissance de la solution permet de choisir des fonctions de base de telle façon que la méthode converge rapidement. Par exemple, si la fonction de base est $f_n(x) = x^{n+1}$ (au lieu de $f_n(x) = x - x^{n+1}$), la solution à l'ordre 3 est égale à $f^{(3)}(x) = -73x^2 + 205x^3 - \frac{1649}{12}x^4$, qui ne converge pas vers la solution analytique.

La résolution de cet exemple avec l'aide du logiciel Maple est donnée dans l'annexe A.

3.4.1.3 Choix des fonctions test et de base

Le système $\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a une solution si $\det(\bar{\mathbf{Z}}) \neq 0$ et si $N \leq M$.

- Si $N < M$, nous pouvons le résoudre par la méthode des moindres carrés.
- si $N = M$ nous pouvons le résoudre par différentes méthodes, itératives ou non.

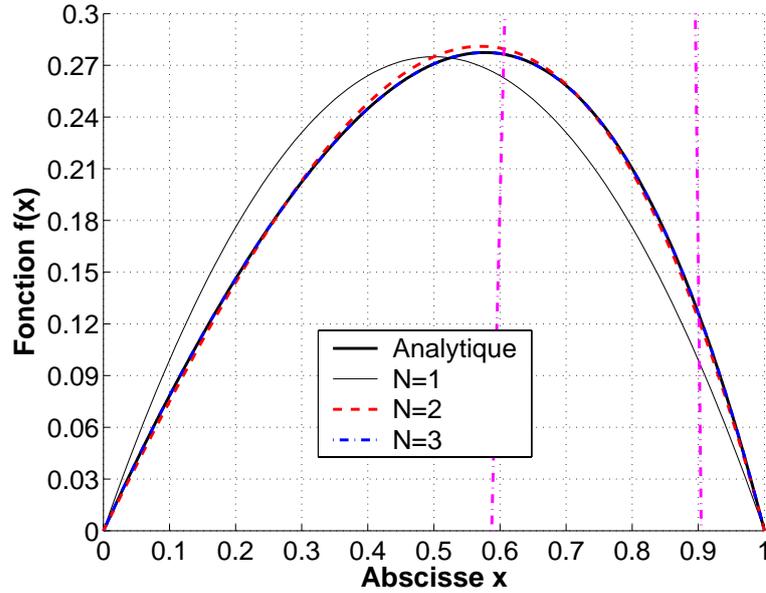


FIG. 3.22 – Comparaison de la solution analytique $f(x)$ avec celle obtenue par la méthode des moments $f^{(N)}(x)$ où $N = 1..3$.

Pour des problèmes avec un grand nombre d'inconnues, le choix de la méthode est important pour accélérer la résolution du système.

Pour les fonctions f_n et w_m , plusieurs choix existent et donnent lieu à des méthodes plus ou moins différentes :

- La méthode de *Galerkin*, consiste à choisir $f_n = w_n$.
- La méthode de *collocation* (*point matching* en anglais) consiste à prendre pour les w_m , des fonctions de Dirac δ . Les éléments de la matrice \mathbf{Z} et du vecteur \mathbf{B} s'écrivent alors

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m(x), \mathcal{L}[f_n(x)] \rangle = \langle \delta(x - x_m), \mathcal{L}[f_n(x)] \rangle = \int_{\mathcal{D}} \delta(x - x_m) \mathcal{L}[f_n(x)] dx \\ &= \mathcal{L}[f_n(x_m)] \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} B_m &= \langle w_m, g(x) \rangle = \langle \delta(x - x_m), g(x) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \delta(x - x_m) g(x) dx \\ &= g(x_m) \end{aligned} \quad (3.92)$$

En appliquant alors une méthode des moindres carrés, qui consiste à minimiser l'erreur quadratique suivante

$$\begin{aligned} (\langle w_m, \epsilon \rangle)^2 &= \epsilon_m^2 = \left(\langle w_m, g \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle \right) \left(\langle w_m, g \rangle - \sum_{p=1}^N a_p \langle w_m, \mathcal{L}f_p \rangle \right)^* \\ &= \left\{ g(x_m) - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}[f_n(x_m)] \right\} \left\{ g(x_m) - \sum_{p=1}^N a_p \mathcal{L}[f_p(x_m)] \right\}^* \\ &= \left(B_m - \sum_{n=1}^N a_n Z_{mn} \right) \left(B_m - \sum_{p=1}^N a_p Z_{mp} \right)^* \end{aligned}$$

Ainsi pour a_n réel, la condition $\partial(\epsilon_m^2)/\partial a_n = 0$ et $\partial(\epsilon_m^2)/\partial a_p = 0$ conduit alors à

$$\begin{cases} \left(B_m - \sum_{p=1}^N a_p Z_{mp} \right)^* = 0 \\ B_m - \sum_{n=1}^N a_n Z_{mn} = 0 \end{cases}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 Z_{11} & a_2 Z_{12} & \cdots & a_N Z_{1N} \\ a_1 Z_{21} & a_2 Z_{22} & \cdots & a_N Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 Z_{N1} & a_2 Z_{N2} & \cdots & a_N Z_{NN} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{Z}}$$

où le vecteur \mathbf{A} contient les termes a_n . Par conséquent \mathbf{A} est obtenu en inversant la matrice impédance $\bar{\mathbf{Z}}$.

- Il peut être aussi intéressant de choisir les fonctions f_n et w_m de façon à minimiser le nombre de coefficients a_n à déterminer et, par conséquent, à réduire la taille de la matrice impédance, qui est à inverser.
- Une autre façon de minimiser le nombre de coefficients est d'appliquer la méthode des moments dans le domaine spectral, ou de choisir l'espace de Fourier pour les fonctions de projection et le domaine spatial pour les fonctions test.

Finalement, le choix de f_n et de w_m résulte d'un compromis entre un gain de temps (nombre d'inconnues N minimum), une précision suffisante et une simplicité dans la mise en oeuvre.

Dans la suite, nous choisirons la méthode classique des moments par *collocation*, c'est-à-dire que les fonctions w_m seront égales à des fonctions de Dirac ; pour les fonctions f_n , les fonctions rectangles seront choisies, encore appelées en anglais fonctions *pulse basis*.

Le choix des fonctions test et de projections est un domaine de recherche à part entière.

3.4.2 Diffraction par une surface monodimensionnelle

Dans ce paragraphe, la méthode des moments (MmM) est appliquée au cas spécifique d'une surface monodimensionnelle (1D, problème 2D ou scalaire). Tout d'abord la matrice impédance doit être calculée. C'est l'objet de la première section, dans laquelle une surface parfaitement conductrice en polarisations TE (condition aux limites de Dirichlet) et TM (condition aux limites de Neumann) est tout d'abord considérée, puis le cas diélectrique sera alors obtenu aisément à partir de ces deux cas. Dans les sections 2, 3 et 4, la MmM sera appliquée sur divers objets parfaitement conducteurs et comparée avec la solution *exacte* analytique du cylindre et l'*approximation* de l'optique physique (OP).

3.4.2.1 Matrices impédances

Condition aux limites de Dirichlet Dans le cas TE, où la surface est parfaitement conductrice (condition aux limites de Dirichlet), le champ total est nul. Par conséquent (2.24) devient

$$\psi_i(\mathbf{r}') = \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} dS \quad (3.93)$$

où $\mathbf{r} = (y, z) = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ est un point sur la surface et $\mathbf{r}' = (y', z') = y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ est le point d'observation. Afin de calculer l'inconnue $\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ sur la surface, \mathbf{r}' va parcourir la surface. A noter que lorsque $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, l'intégration doit être conduite avec soin car la fonction de Green présente une singularité.

Pour une surface de longueur $2L$ centrée en 0, l'équation ci-dessus s'écrit

$$\int_{-L}^L dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_i(\mathbf{r}')$$

Cette équation est de la forme

$$\mathcal{L}f = g$$

avec

$$\mathcal{L}\bullet = \int_{-L}^L dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bullet, \quad f = \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \text{et} \quad g = \psi_i(\mathbf{r}') \quad (3.94)$$

L'inconnue est f . A l'aide de la méthode des moments, cette équation intégrale se transforme en un système matriciel défini par

$$\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

où $\bar{\mathbf{Z}}$ est la matrice impédance, \mathbf{B} le vecteur source et \mathbf{X} le vecteur inconnu à déterminer.

De plus, en utilisant la méthode de collocation, les éléments de $\bar{\mathbf{Z}}$ et de \mathbf{B} s'écrivent d'après (3.91) et (3.92)

$$Z_{mn} = \mathcal{L}[f_n(y_m)] \quad \text{et} \quad B_m = g(y_m) \quad (3.95)$$

$y_m = (m-1)\Delta y$ représente l'abscisse du point de la surface, où $m = \{1, 2, \dots, N\}$ et $\Delta y = 2L/(N-1)$ est le pas d'échantillonnage et N est le nombre d'échantillons de la surface.

La fonction de projection f_n est choisie égale à une porte de largeur Δy centrée en y_n et de hauteur unitaire, soit

$$f_n(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [y_n - \frac{\Delta y}{2}, y_n + \frac{\Delta y}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En reportant cette équation dans (3.94) et (3.95), nous obtenons

$$Z_{mn} = \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) dy \approx \sqrt{1 + \left(\frac{dz_n}{dy_n}\right)^2} g(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m) \Delta y \quad (3.96)$$

et

$$B_m = \psi_i(\mathbf{r}_m)$$

où $\mathbf{r}_{n,m} = y_{n,m}\hat{\mathbf{y}} + z_{n,m}\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{r}_{n,m} \in S$ et $z_{n,m} = z(y_{n,m})$. Cette équation suppose que le pas Δy est suffisamment petit pour que l'intégrande soit constante sur le domaine d'intégration.

Pour un problème 2D, la fonction de Green est donnée par (2.15)

$$g(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(K \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}[K \sqrt{(y_n - y_m)^2 + (z_n - z_m)^2}]$$

Cette fonction présente une singularité en $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_n$. Elle est résolue en écrivant

$$H_0^{(1)}(x) = 1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha x}{2}\right) + \mathcal{O}(x^2) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1.78107$$

et

$$z(y_n) = z(y_m) + \left. \frac{dz_n}{dy_n} \right|_{y=y_m} (y_n - y_m) + \mathcal{O}((y_n - y_m)^2)$$

En substituant ces trois équations ci-dessus dans (3.96), nous avons pour $n = m$ et $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} Z_{mm} &\approx \frac{j\sqrt{1+\gamma_m^2}}{4} \int_{y_m - \frac{\Delta y}{2}}^{y_m + \frac{\Delta y}{2}} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha K(y_n - y_m)\sqrt{1+\gamma_m^2}}{2}\right) \right] dy_n \\ &= \frac{j\sqrt{1+\gamma_m^2}}{4} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{+\frac{\Delta y}{2}} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha K y \sqrt{1+\gamma_m^2}}{2}\right) \right] dy \\ &= \frac{j\sqrt{1+\gamma_m^2}}{4} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha K \sqrt{1+\gamma_m^2} \Delta y}{4e}\right) \right] \end{aligned}$$

avec $\gamma_m = \frac{dz_m}{dy_m}$.

En conclusion, la matrice impédance s'écrit

$$Z_{mn} = \frac{j\Delta y \sqrt{1+\gamma_n^2}}{4} \begin{cases} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(0.164K\sqrt{1+\gamma_m^2}\Delta y\right) \right] & \text{pour } n = m \\ H_0^{(1)}(K\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } n \neq m \end{cases} \quad (3.97)$$

où $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (z_n - z_m)^2}$ et

$$\begin{cases} X_n = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \\ B_m = \psi_i(\mathbf{r}_m) \end{cases}$$

Condition aux limites de Neuman Dans le cas TM, où la surface est parfaitement conductrice (condition aux limites de Neumann), la dérivée du champ total est nulle. Par conséquent (2.24) devient

$$\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_S \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS$$

où l'inconnue est le champ total sur la surface $\psi(\mathbf{r})$. D'après le chapitre 2 (équation (2.16)), la dérivée normale de la fonction de Green s'écrit

$$\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = - \frac{jK}{4} \frac{H_1^{(1)}(K\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.98)$$

En appliquant alors le même raisonnement que dans le cas TE, nous avons

$$Z_{mn} = \begin{cases} -\frac{jK\Delta y}{4} \frac{H_1^{(1)}(K\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \\ +\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{4\pi} \frac{\gamma'(x_m)}{1 + (\gamma(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (3.99)$$

et

$$\begin{cases} X_n = \psi(\mathbf{r}_n) \\ B_m = \psi_i(\mathbf{r}_m) \end{cases}$$

Surface diélectrique Dans le cas diélectrique, nous sommes amenés à résoudre le système différentiel suivant (équations (2.24) et (2.26)) :

$$\begin{cases} \psi_i(\mathbf{r}') = \underbrace{-\int_{S_1} \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS}_{\text{Cas TM}} + \underbrace{\int_{S_1} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} dS}_{\text{Cas TE}} \\ 0 = \underbrace{-\int_{S_1} \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS}_{\text{Cas TM avec } K = K_1} - \rho_{01} \underbrace{\int_{S_1} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} dS}_{\text{Cas TE avec } K = K_1} \end{cases}$$

A noter que dans le cas TE, $\rho_{01} = 1$ et que dans le cas TM, $\rho_{01} = \epsilon_1/\epsilon = K_1/K$. Ce système est donc équivalent à deux combinaisons linéaires des cas TE et TM.

La discrétisation de ce système par la méthode des moments conduit alors à la matrice impédance suivante

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}^{TM} & \bar{\mathbf{Z}}^{TE} \\ -\bar{\mathbf{Z}}^{TM1} & -\rho_{01}\bar{\mathbf{Z}}^{TE1} \end{bmatrix}$$

et le vecteur source de longueur $2N$ s'écrit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \psi_i(\mathbf{r}_1) \\ \psi_i(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad N \text{ fois} \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \psi_d(\mathbf{r}_1) \\ \psi_d(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ \frac{\partial \psi_d(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \frac{\partial \psi_d(\mathbf{r}_2)}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_d(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{bmatrix}$$

La matrice carrée $\bar{\mathbf{Z}}$ est de dimension $2N \times 2N$. Les matrices carrées $\bar{\mathbf{Z}}^{TM}$ et $\bar{\mathbf{Z}}^{TE}$ de dimensions $N \times N$ sont données par (3.97) et (3.99), tandis que les matrices carrées $\bar{\mathbf{Z}}^{TM1}$ et $\bar{\mathbf{Z}}^{TE1}$ de dimensions $N \times N$ sont également données par les équations (3.97) et (3.99), dans lesquelles le nombre d'onde K du milieu supérieur est remplacé par le nombre d'onde $K_1 = K\sqrt{\epsilon_{r1}}$ du milieu inférieur.

3.4.2.2 Application sur un cylindre parfaitement conducteur

Afin de valider la MdM et de vérifier si le programme est correct, les champs sur la surface et la SER associée vont être comparés avec la solution *exacte* analytique du cylindre parfaitement conducteur exposée dans la section 3.2.

Champs sur la surface Dans le cas TE (conditions aux limites de Dirichlet), le champ total ψ sur la surface ($r = a$) est nul. Sa dérivée normale doit être alors calculée $\frac{\partial\psi}{\partial n}$. En coordonnées cylindriques, elle s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \cdot \left(\frac{-\gamma\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right)$$

or $\hat{\mathbf{u}}_r = \cos\theta\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{u}}_\theta = \sin\theta\hat{\mathbf{y}} - \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$, $\gamma = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = \frac{r \cos\theta d\theta}{-r \sin\theta d\theta} = -\cot\theta$. Par conséquent

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \left[\frac{\partial\psi}{\partial r} (-\gamma \cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} (-\gamma \sin\theta - \cos\theta) \right] \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \text{sign}(\sin\theta)$$

D'après (3.12), la dérivée normale du champ *total* sur la surface s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial n} &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial\psi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} + \frac{\partial\psi_d}{\partial r} \Big|_{r=a} \\ &= K\psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[j_n(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} \dot{H}_n^{(1)}(Ka) \right] e^{jn(\theta_i-\theta)} \end{aligned}$$

Dans le cas TM (conditions aux limites de Neuman), la dérivée normale du champ total $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sur la surface ($r = a$) est nulle. Le champ total sur la surface est alors directement donné à partir de (3.15)

$$\psi(a, \theta) = \psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[J_n(Ka) - \frac{j_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Ka) \right] e^{jn(\theta_i-\theta)} \quad (3.100)$$

Numériquement il est pertinent d'utiliser les relations (3.13), (3.14) et (3.16) afin d'exprimer la somme sur $n \in [0; \infty[$ et de calculer les dérivées analytiquement.

La méthode des moments impose que la surface soit échantillonnée. La question est comment choisir le pas d'échantillonnage. D'une manière physique, la question posée est similaire à : comment choisir x afin que la fonction périodique $\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ de période λ soit "correctement" échantillonnée. Classiquement on prend $\Delta x = \frac{\lambda}{10}$.

Dans le cas du cylindre, l'angle θ est échantillonné avec un pas d'échantillonnage $\Delta\theta \approx \frac{\alpha}{\lambda} 2\pi \times 10$ et $\theta_n = (n-1)\Delta\theta$. Ceci est illustré sur la la figure 3.23 pour un rayon $a = \lambda$, conduisant à un nombre d'échantillons sur le cylindre de $N = 63$.

Une fois la surface échantillonnée et selon la polarisation, les éléments Z_{mn} de la matrice impédance ((3.97) ou (3.99)) sont calculés de la manière suivante. Pour $m = 1$, $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_1 = a(\cos\theta_1\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta_1\hat{\mathbf{z}}) = a\hat{\mathbf{y}}$ puisque $\theta_1 = 0$. L'indice $n \in [1; N]$ balaye alors tout le cylindre, pour

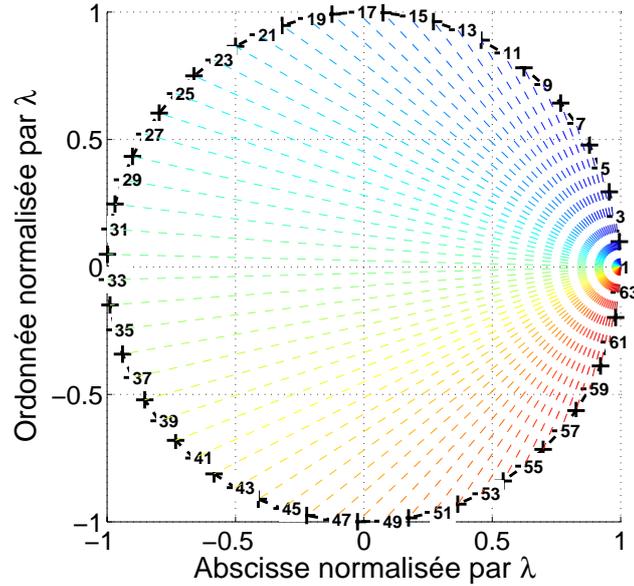


FIG. 3.23 – Cylindre échantillonné de rayon $a = \lambda$ pour le calcul des éléments de la matrice impédance.

lequel $\mathbf{r}_n = a(\cos \theta_n \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta_n \hat{\mathbf{z}})$. La Distance $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1\|$ est illustrée sur la figure 3.23. Connaissant alors \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_n , il est alors possible de calculer les éléments de la matrice impédance $\{Z_{1n}\}$. Le processus est itéré pour $m \in [2; N]$.

Ainsi, nous obtenons le système matriciel $\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, dans lequel $X_n = \left\{ \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n}, \psi(\mathbf{r}_n) \right\}$ dans les cas TE et TM respectivement, qui sont les inconnues du problème, $B_n = \psi_i(\mathbf{r}_n) = \psi_{i0} \exp[jKa \sin(\theta_i - \theta_n)]$.

Les figures 3.24 et 3.25 comparent la solution analytique avec celle obtenue par la méthode des moments (Mdm) en fonction de l'angle θ et en polarisations TE et TM, respectivement. $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$. Les figures 3.26 et 3.27 présentent les mêmes variations que sur les figures 3.24 et 3.25 mais avec $N = 123$. On observe que l'adéquation entre les deux solutions est bonne en polarisation TE, et qu'en TM il y a un léger désaccord. Cette différence diminue lorsque le nombre d'échantillons sur le cylindre augmente, c.a.d. lorsque le pas d'échantillonnage diminue. En conclusion, le pas d'échantillonnage (maillage) est un paramètre important et dépend de la polarisation. On observe que le maximum du champ est obtenu dans la direction θ_i indiquée par un trait vertical, correspondant à la direction spéculaire.

Calcul de la SER Par définition la SER est donnée par (3.64). En champ lointain ($z \rightarrow \infty$), la fonction de Hankel $H_n^{(1)}(z)$ est donnée par (3.8). Ainsi en reportant (3.8) dans (3.15) et (3.12), la SER d'un cylindre parfaitement conducteur s'écrit respectivement en polarisation TE et TM comme ($\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_d$)

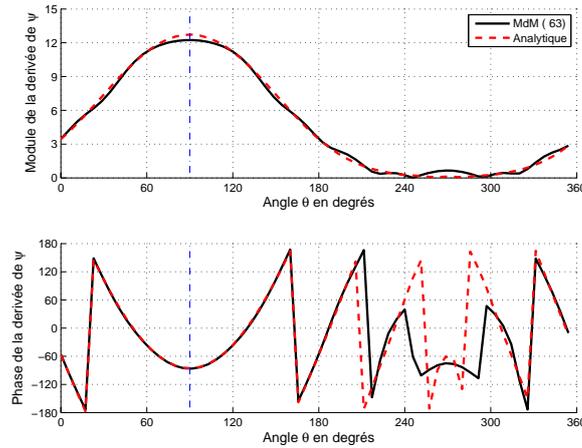


FIG. 3.24 – Comparaison de la solution analytique avec la solution donnée par la MmM en fonction de l'angle θ en polarisation TE. En haut, le module de la dérivée normale du champ total sur la surface, et en bas sa phase. Le nombre d'échantillons sur le cylindre est $N = 63$, $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$.

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = \frac{4}{K} \begin{cases} \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} e^{jn(\theta_i + \theta_d - \pi)} \right|^2 & \text{Cas TE} \\ \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)} e^{jn(\theta_i + \theta_d - \pi)} \right|^2 & \text{Cas TM} \end{cases}$$

Avec la méthode des moments, le champ rayonné en champ lointain est donné par l'équation (2.27). Par conséquent la SER s'écrit

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = \frac{4}{K} |\psi_{d0}^\infty|^2 = \frac{4}{K} \sum_{n=1}^{n=N} \left[j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}_n \underbrace{\psi(\mathbf{r}_n)}_{\text{TM}} + \underbrace{\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n_n}}_{\text{TE}} \right] \exp(-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}_n) \underbrace{\sqrt{1 + \gamma_n^2} \Delta x_n}_{a\Delta\theta}$$

La figure 3.28 compare la SER analytique avec celle calculée par la MmM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$ ($N = 63$). De plus la solution de l'Optique Physique (OP) est exhibée. En effet, D'après (3.70) avec $a = b$, $\alpha = 2a \left| \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) \right|$, $\tan \chi = -\cot \left(\frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi + \theta_i - \theta_d}{2} \right) \Rightarrow \chi = \frac{\pi + \theta_i - \theta_d}{2}$, nous avons avec l'OP

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = Ka^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n \left(2a \left| \cos \left[\frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right] \right| \right) e^{jn \left(\frac{\theta_d - \theta_i}{2} \right)} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} (jn \sin \theta_d - \cos \theta_d) \right|^2 \quad (3.101)$$

On observe que le maximum de rayonnement est obtenu derrière l'objet en $\theta_d = 180^\circ$, qui peut paraître surprenant puisque le champ total sur la surface est maximum dans la direction spéculaire $\theta_d = \theta_i$ ($\theta = \pi/2$ sur les figures 3.24-3.27). En fait la SER est liée au champ diffracté

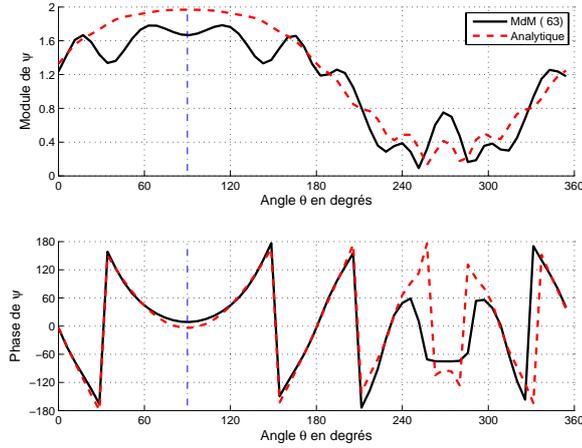


FIG. 3.25 – Comparaison de la solution analytique avec la solution donnée par la MdM en fonction de l'angle θ en polarisation TM. En haut, le module du champ total sur la surface, et en bas sa phase. Le nombre d'échantillons sur le cylindre est $N = 63$, $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$.

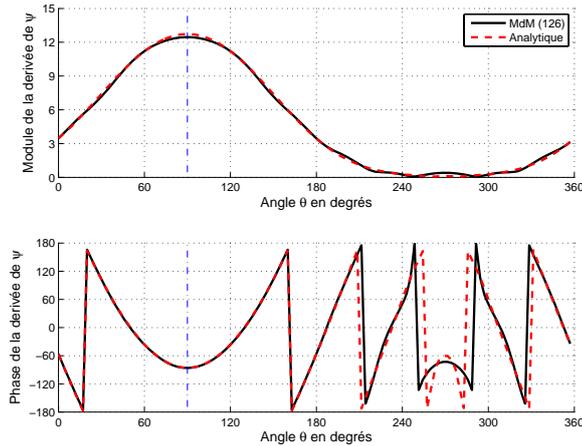


FIG. 3.26 – Même variation que sur la figure 3.24 mais $N = 126$.

par l'objet et non au champ total. En effet, loin derrière l'objet, il existe un champ incident, et par conséquent le champ diffracté par l'objet doit être fort afin que le champ total s'annule. Ceci explique le comportement de la SER. Avec l'approximation de l'OP, les résultats sont en désaccord avec ceux issus de la MdM, excepté au voisinage de la direction spéculaire. En effet, l'OP est valide si la condition $R_c \cos^3 \theta_i > \lambda$. Dans le cas, d'un cylindre il vaut $|R_c| = a = \lambda$ qui explique en partie ce désaccord.

3.4.2.3 Application sur un cylindre elliptique parfaitement conducteur

Puisque la solution n'est pas connue pour un cylindre elliptique, nous allons comparés la SER issue de l'approximation de l'optique physique (OP) avec celle obtenue par la MdM. C'est la solution de référence. A noter, que pour un cylindre elliptique, il est possible de calculer analytiquement les champs sur la surface en faisant appel aux fonctions de Mathieu. Mais contrairement

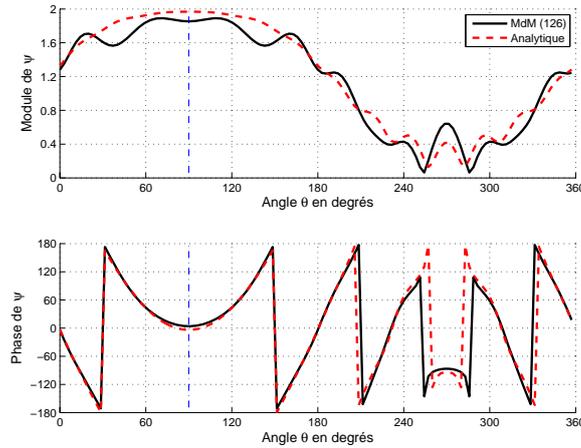


FIG. 3.27 – Même variation que sur la figure 3.25 mais $N = 126$.

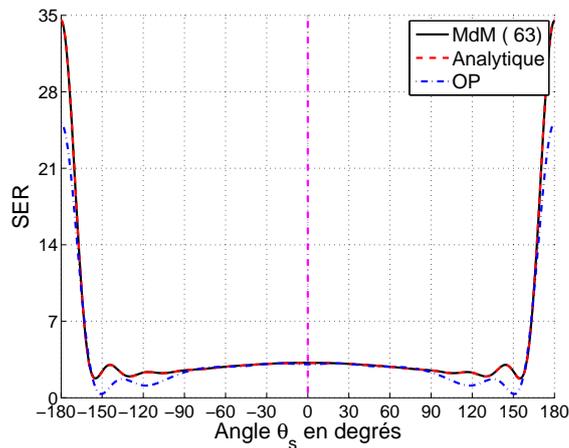


FIG. 3.28 – Comparaison de SER analytique avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$ ($N = 63$). De plus la solution de l'optique physique est exhibée.

aux fonctions de Bessel, ces fonctions spéciales sont difficiles à calculer numériquement.

La figure 3.29 compare la SER en dB ($10 \log_{10}[\sigma_l(\theta_i, \theta_d)]$) sous l'OP avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$, $a = 2\lambda$ et $b = 0.5\lambda$ ($N = 172$). Sur les figures 3.30 et 3.31, les mêmes variations sont représentées mais avec $\{a = 2, b = 0.1\}$ ($N = 161$) et $\{a = 4, b = 0.5\}$ ($N = 327$).

On observe que lorsque b diminue, l'accord est meilleur entre les résultats. Encore une fois, cela vient du fait que le rayon de courbure augmente lorsque b diminue ($b = 0$ correspondant à une plaque linéique). Si a augmente, une meilleure adéquation est également observée.

Afin de montrer les limites de l'OP, les graphes 3.32 et 3.33 présentent les mêmes variations que sur la figure 3.31 en polarisations TE et TM, respectivement, mais avec $\theta_i = 45^\circ$.

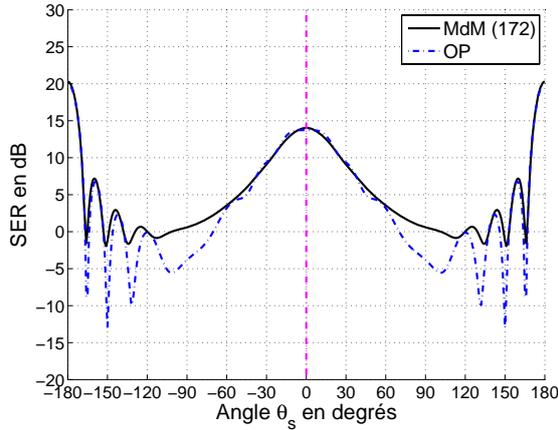


FIG. 3.29 – Comparaison de la SER en dB sous l'OP avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$, $a = 2\lambda$ et $b = 0.5\lambda$ ($N = 172$).

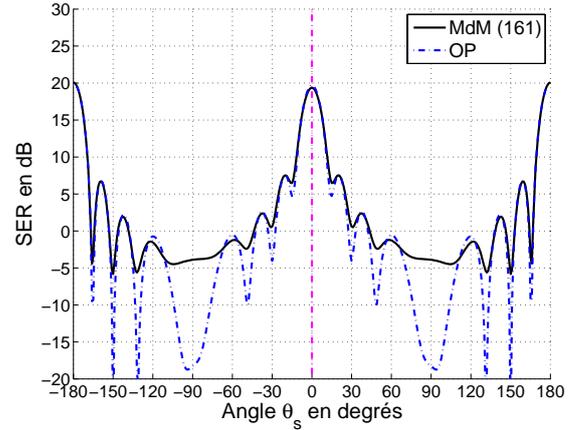


FIG. 3.30 – Même variation que sur la figure 3.30 mais $b = 0.1\lambda$ ($N = 161$).

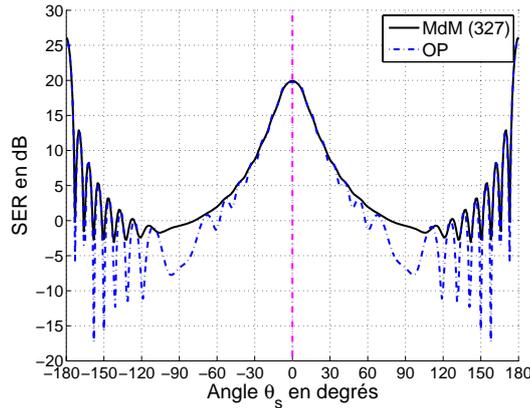


FIG. 3.31 – Même variation que sur la figure 3.29 mais $a = 4\lambda$ ($N = 327$).

3.4.2.4 Application sur une plaque linéique parfaitement conductrice

Dans cette section, la solution de l'OP est comparée avec celle de la MdM. La SER sous l'OP est donnée par (3.65).

La figure 3.34 présente le module de la dérivée normale du champ total sur la surface $\left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|$ en fonction de l'indice des échantillons ($n \in [1; N = 400]$) calculé avec la MdM et l'OP d'une plaque linéique de longueur 10λ , en polarisation TE avec $\theta_i = 0$. La figure 3.35 présente la SER associée en fonction de l'angle d'observation. Les figures 3.36 et 3.37 présentent les mêmes variations que sur les figures 3.34 et 3.35 mais en polarisation TM. Les figures 3.38, 3.39, 3.40 et 3.41 présentent les mêmes variations que sur les figures 3.34, 3.35, 3.36 et 3.37 mais avec $\theta_i = 45^\circ$.

Les simulations montrent un bon accord entre les champs sur la surface. A noter que dans le cas TE, le module du champ est constant au centre de la plaque, tandis que sur les bords, il

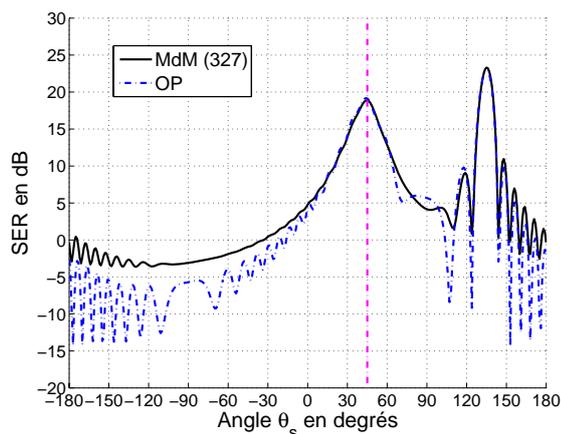


FIG. 3.32 – Mêmes variations que la figure 3.31 mais $\theta_i = 45^\circ$ en polarisation TE.

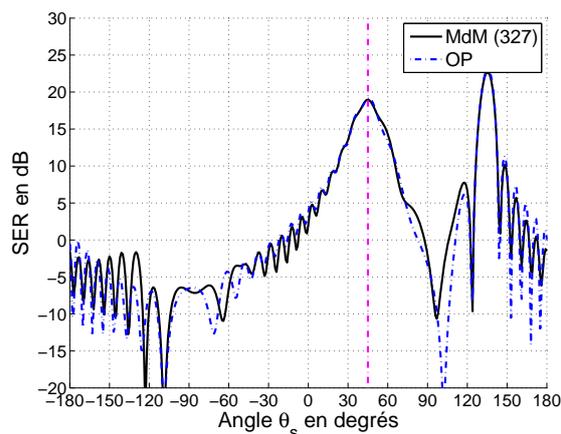


FIG. 3.33 – Mêmes variations que la figure 3.31 mais $\theta_i = 45^\circ$ en polarisation TM.

augmente brusquement du a un changement de courbure (transition entre le dessus et le dessous de la plaque). En TM, cette discontinuité est plus douce, et au centre de la plaque, le module du champ oscille légèrement. La différence sur le module du champ entre les résultats de l'OP et de la MdM, explique le désaccord observé sur la SER au voisinage $\theta_d = \pm 90^\circ$, pour lequel la diffraction par les arrêtes de la plaque contribue, qui n'est pas incluse dans l'approximation de l'OP. Un point important également à noter, est que la MdM prédit un champ différent de zéro derrière la plaque ($n \in [201; 400]$), tandis qu'avec l'OP, il est nul car elle correspond à une zone d'ombre pour le champ incident. Enfin, si l'angle d'incidence θ_i augmente, globalement le désaccord s'accroît car la diffraction par les arrêtes est plus forte.

3.4.3 Résolution du système linéaire

La MdM impose d'inverser la matrice impédance $\bar{\mathbf{Z}}$. Dans cette section, nous donnerons uniquement de façon qualitative les méthodes les plus connues. Le choix d'une méthode pour l'inversion de la matrice impédance est étroitement lié au problème étudié.

a) Les méthodes *directes* d'inversion fournissent une solution en un nombre fini d'opérations. Elles sont "exactes" aux erreurs d'arrondis près. Les plus connues sont :

- Inversion de Gauss Jordan :
 - Espace mémoire : $N^2 + 2N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(N^3)$ opérations.
- Inversion par méthode du pivot de Gauss :
 - Espace mémoire : $N^2 + 2N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(N^3/3)$ opérations.
- Inversion par décomposition LU :
 - Espace mémoire : $N^2 + 2N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(N^3/3)$ opérations.

Les temps de calcul peuvent être réduits au moyen d'algorithmes qui exploitent les propriétés particulières de la matrice impédance comme par exemple :

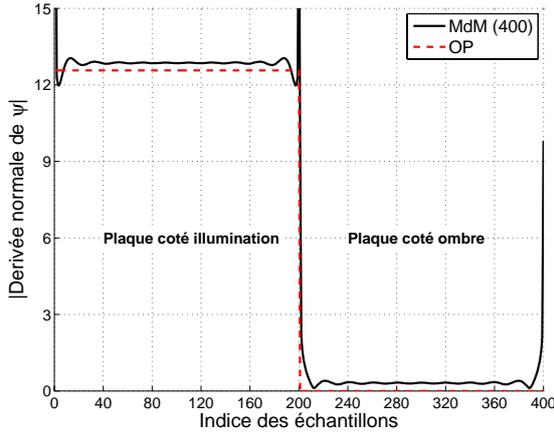


FIG. 3.34 – Comparaison du module de la dérivée normale du champ total sur la surface $\left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|$ en polarisation TE d’une plaque linéique de longueur 10λ en fonction de l’indice des échantillons ($n \in [1; N = 400]$) avec $\theta_i = 0$.

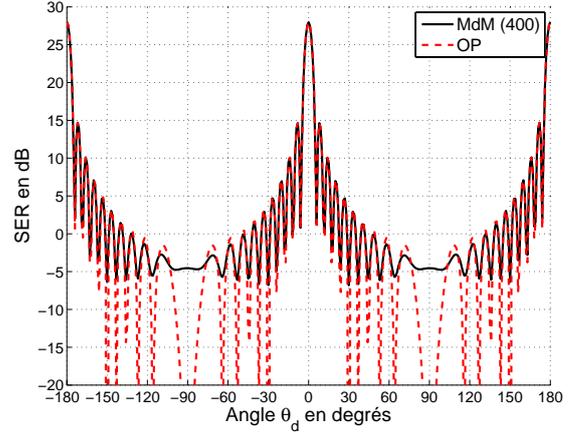


FIG. 3.35 – SER en polarisation TE d’une plaque linéique de longueur 10λ en fonction de l’angle d’observation θ_d avec $\theta_i = 0$.

- Matrice de Toeplitz, pour laquelle $Z_{mn} = Z_{m+k, n+k}$ avec k entier, $1 \leq m+k \leq N$ et $1 \leq n+k \leq N$
- Dans certains problèmes, Z_{mn} peut devenir négligeable pour $|m-n|$ “grand” ; la matrice est alors creuse permettant de résoudre plus rapidement le problème.

b) Les méthodes *itératives* construisent une suite $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ convergeant vers \mathbf{X} . Pour un ordre donné, k , il y a alors une erreur de troncature selon que la méthode converge plus ou moins vite. La méthode est basée sur la démarche suivante

$$\text{Valeur initiale } \mathbf{X}^{(0)} \text{ et } \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \beta \mathbf{P}^{(k)}$$

où $\mathbf{P}^{(k)}$ est un vecteur déplacement de dimension N dans l’espace des $\mathbf{X}^{(k)}$, et β est l’amplitude du déplacement. Plusieurs méthodes peuvent être citées selon le choix de $\mathbf{P}^{(k)}$:

- $\mathbf{P}^{(k)}$ ne fait pas intervenir de dérivées. C’est le cas de la méthode de Gauss-Seidel.
- $\mathbf{P}^{(k)}$ fait intervenir des dérivées premières. C’est le cas des méthodes du gradient simple et du gradient conjugué dans lesquelles :
 - Espace mémoire : $N^2 + 4N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(2N^2)$ opérations.
- $\mathbf{P}^{(k)}$ fait intervenir des dérivées secondes. C’est le cas de la méthode de Newton.

c) La qualité d’une inversion matricielle est étroitement liée au *nombre de conditionnement*. Le système $\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ est mal conditionné si une faible erreur sur $\delta \mathbf{B}$ ou $\delta \bar{\mathbf{Z}}$ conduit à une forte erreur $\delta \mathbf{X}$ sur \mathbf{X} . Dans le cas d’une erreur $\delta \mathbf{B}$ sur \mathbf{B} , nous avons

$$\frac{\delta \mathbf{X}}{\mathbf{X}} \leq \text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) \frac{\delta \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$$

où

$$\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) = \|\bar{\mathbf{Z}}\| \times \|\bar{\mathbf{Z}}^{-1}\| \text{ est le nombre de conditionnement}$$

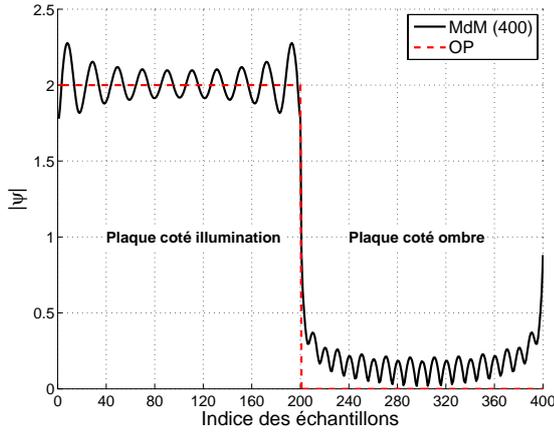


FIG. 3.36 – Même variation ($|\psi|$) que sur la figure 3.34 mais en polarisation TM.

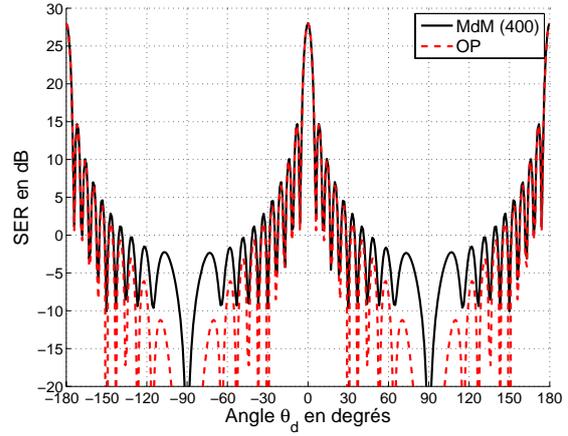


FIG. 3.37 – Même variation que sur la figure 3.35 mais en polarisation TM.

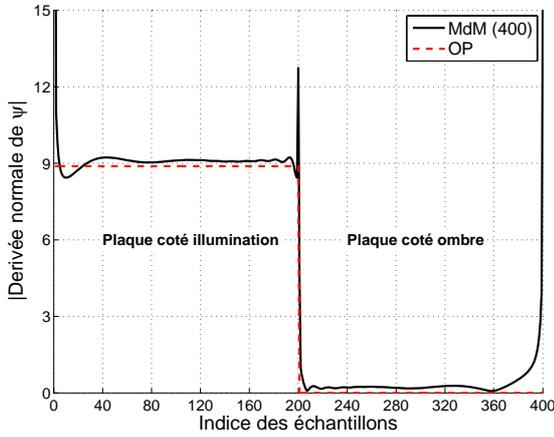


FIG. 3.38 – Même variation que sur la figure 3.34 mais $\theta_i = 45^\circ$.

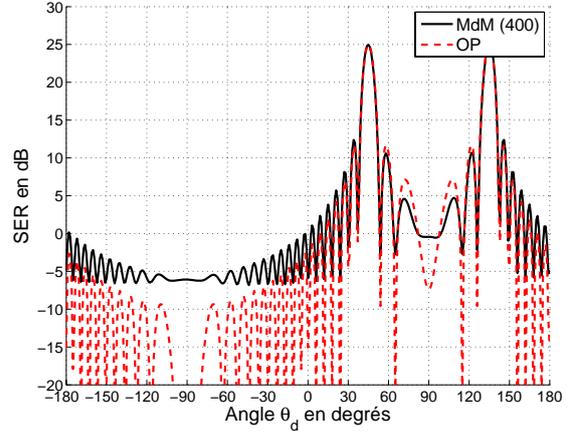


FIG. 3.39 – Même variation que sur la figure 3.35 mais $\theta_i = 45^\circ$.

Le résultat dépend du choix de la norme. Le système est d'autant plus stable que $\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}})$ est faible. De plus $\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) \geq 1$ et $\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}^{-1}) = \text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}})$. Pour la norme euclidienne définie par

$$\|\bar{\mathbf{Z}}\| = \max_{n=1..N} \sqrt{\sum_{m=1}^{m=N} |Z_{mn}|^2}$$

le nombre de conditionnement s'écrit

$$\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

où λ_{max} et λ_{min} sont la plus grande et la plus petite valeur propre de $\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{Z}}^a$, où $\bar{\mathbf{Z}}^a$ est l'adjoint de $\bar{\mathbf{Z}}$.

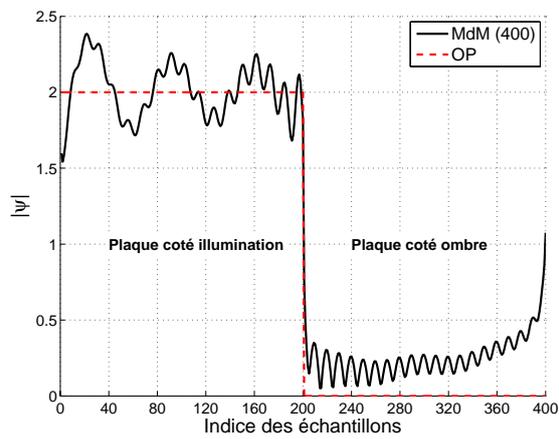


FIG. 3.40 – Même variation que sur la figure 3.36 mais $\theta_i = 45^\circ$.

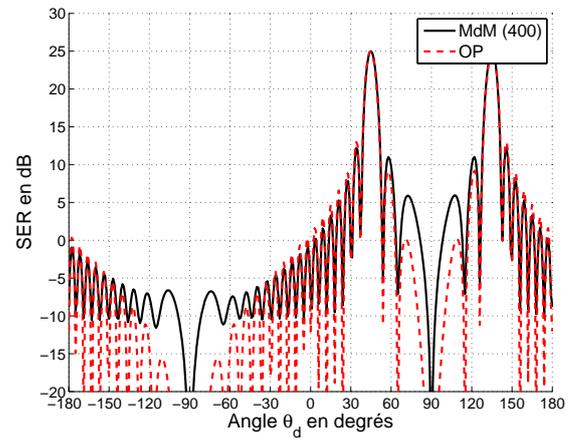


FIG. 3.41 – Même variation que sur la figure 3.37 mais $\theta_i = 45^\circ$.

A Programme Maple sur la méthode des moments

```
> restart: with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Dans cette annexe, le listing du programme Maple de la correction de l'exercice concernant la méthode des moments (section 3.4.1.2) est présenté.

Solution analytique de l'équation différentielle

```
> Eq:={-diff(f(x),x,x)=1+4*x^2,f(0)=0,f(1)=0};
```

$$Eq := \{f(0) = 0, f(1) = 0, -(\frac{d^2}{dx^2} f(x)) = 1 + 4x^2\}$$

```
> dsolve(Eq,f(x));
```

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x$$

Méthode des moments

```
> w:=(x,m)->x-x^(m+1) ;
```

$$w := (x, m) \rightarrow x - x^{(m+1)}$$

```
> f:=(x,n)->w(x,n) ; g:=x->1+4*x^2;
```

$$f := (x, n) \rightarrow w(x, n)$$

$$g := x \rightarrow 1 + 4x^2$$

```
> x0:=0 ; x1:=1 ;
```

$$x0 := 0$$

$$x1 := 1$$

```
> fw:=-factor(simplify(w(x,m)*diff(f(x,n),x,x))) ;
```

$$fw := n(x^n - x^{(m+n)})(n+1)$$

```
> assume(m>1,n>1);
```

```
> Z_mn:=int(fw,x=x0..x1);
```

$$Z_{mn} := \frac{m^{\sim} n^{\sim}}{m^{\sim} + n^{\sim} + 1}$$

```
> g_m:=factor(int(g(x)*w(x,m),x=x0..x1));
```

$$g_m := \frac{m^{\sim} (8 + 3m^{\sim})}{2(2 + m^{\sim})(4 + m^{\sim})}$$

N=1

```
> N:=1 ; Z:=matrix(N,N) ; G:=matrix(N,1) ; A:=matrix(N,1) ;
      N := 1
      Z := array(1..1, 1..1, [])
      G := array(1..1, 1..1, [])
      A := array(1..1, 1..1, [])
> for n0 from 1 to N do for m0 from 1 to N do
> Z[n0,m0]:=subs(n=n0,m=m0,Z_mn);od;od;
> for m0 from 1 to N do G[m0,1]:=subs(m=m0,g_m);od;
      G1,1 :=  $\frac{11}{30}$ 
> A:=multiply(inverse(Z),G):
> evalm(Z) ; evalm(G) ; evalm(A) ;
      [  $\frac{1}{3}$  ]
      [  $\frac{11}{30}$  ]
      [  $\frac{11}{10}$  ]
> f_a:=sum(f(x,p)*A[p,1],p=1..N);
      f_a :=  $\frac{11}{10}x - \frac{11}{10}x^2$ 
```

N=2

```
> N:=2 ; Z:=matrix(N,N) ; G:=matrix(N,1) ; A:=matrix(N,1) ;
      N := 2
      Z := array(1..2, 1..2, [])
      G := array(1..2, 1..1, [])
      A := array(1..2, 1..1, [])
> for n0 from 1 to N do for m0 from 1 to N do
> Z[n0,m0]:=subs(n=n0,m=m0,Z_mn);od;od;
> for m0 from 1 to N do G[m0,1]:=subs(m=m0,g_m);od;
      G1,1 :=  $\frac{11}{30}$ 
      G2,1 :=  $\frac{7}{12}$ 
> A:=multiply(inverse(Z),G):
> evalm(Z) ; evalm(G) ; evalm(A) ;
      [  $\frac{1}{3}$    $\frac{1}{2}$  ]
      [  $\frac{1}{2}$    $\frac{4}{5}$  ]
      [  $\frac{11}{30}$  ]
      [  $\frac{7}{12}$  ]
      [  $\frac{1}{10}$  ]
      [  $\frac{2}{3}$  ]
> f_a:=sum(f(x,p)*A[p,1],p=1..N);
      f_a :=  $\frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$ 
```

N=3

```
> N:=3 ; Z:=matrix(N,N) ; G:=matrix(N,1) ; A:=matrix(N,1) ;
```

```
      N := 3
```

```
      Z := array(1..3, 1..3, [])
```

```
      G := array(1..3, 1..1, [])
```

```
      A := array(1..3, 1..1, [])
```

```
> for n0 from 1 to N do for m0 from 1 to N do
```

```
> Z[n0,m0]:=subs(n=n0,m=m0,Z_mn);od;od;
```

```
> for m0 from 1 to N do G[m0,1]:=subs(m=m0,g_m);od;
```

```
      G1,1 :=  $\frac{11}{30}$ 
```

```
      G2,1 :=  $\frac{7}{12}$ 
```

```
      G3,1 :=  $\frac{51}{70}$ 
```

```
> A:=multiply(inverse(Z),G):
```

```
> evalm(Z) ; evalm(G) ; evalm(A) ;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> f_a:=sum(f(x,p)*A[p,1],p=1..N);
```

$$f_a := \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

B Examen du M2R SEGE - 17 février 2005 - Durée 1H00 avec document

Les deux problèmes sont **indépendants**. Le premier problème est très proche du cours tandis que le second demande plus de réflexion. Dans chacun des problèmes, les questions sont en général **indépendantes**. Le barème est donné à titre indicatif entre parenthèses et en gras. La notation se fera sur 20.

B.1 Champ EM transmis par une interface plane d'aire infinie (8 pts)

Soit une interface **plane** contenue dans le plan (\hat{y}, \hat{z}) d'aire **infinie** séparant deux milieux LHI, stationnaires et non-magnétiques. Le milieu supérieur est assimilé au **vide** et le milieu inférieur est caractérisé par son indice de réfraction $n = n_r + jn_i$ ($(n_r, n_i) \in \mathbb{R}^+$) **complexe**. L'interface est illuminée par une onde **plane** \mathbf{E}_i polarisée selon \hat{x} et se propageant selon \hat{z} et vers les z négatifs.

1. Faire un schéma du problème.
2. Justifier que l'onde incidente peut s'écrire $\mathbf{E}_i(z, t) = E_{0i}e^{-j(\omega_i t - K_i z)}\hat{x}$ avec $z > 0$ en nommant $\{E_{0i}, \omega_i, K_i\}$ et en donnant leur unité.
 - (a) Exprimer K_i en fonction de la longueur d'onde incidente dans le vide λ_0 .
 - (b) Quelle est la polarisation de l'onde incidente ?
3. Justifier que le champ transmis en tout point de l'espace du milieu inférieur peut s'écrire $\mathbf{E}_t(z, t) = E_{0t}(z) \times e^{-j(\omega_t t - K_t z)}\hat{x}$ avec $K_t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Quelle est la relation entre ω_t et ω_i en justifiant votre réponse ?
 - (b) Quelle est la relation entre K_t et K_i en justifiant votre réponse ?
 - (c) Quelle est la relation entre $E_{0t}(z)$ et $\{E_{0i}, \delta, \mathcal{T}\}$? δ est l'épaisseur de peau et \mathcal{T} est le coefficient de Fresnel en transmission dont la polarisation est à préciser par le candidat. \mathcal{T} devra être remplacé par son expression simplifiée.
 - (d) Calculer la profondeur h maximale en fonction de $\{n, \lambda_0\}$ correspondant à $|E_t(h, t)/E_i(z, t)| \leq 1\%$, où E_t est la norme du vecteur \mathbf{E}_t et E_i est la norme du vecteur \mathbf{E}_i .

B.2 Approximation de l'optique géométrique avec effet d'ombre

Le but du problème est de calculer la fonction d'ombre **moyennée** S , égale au rapport de la surface illuminée sur la surface totale, d'une surface rugueuse de densité de probabilité **gaussienne** et de quantifier son influence

sous incidences très rasantes.

1. Approximation de l'optique géométrique sans ombre (5 pts)

- (a) Rappeler le domaine de validité de l'approximation de l'optique géométrique et en donner une interprétation géométrique.
- (b) A partir du cours, donner l'expression du coefficient de diffusion **incohérent**, $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_d)$, par une surface rugueuse sous l'hypothèse de l'optique géométrique.
- (c) Simplifier son expression dans la **direction spéculaire** ($1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$).
- (d) Calculer sa limite lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$ et conclure.

2. Calcul de la fonction d'ombre (9 pts)

Lorsque θ_i est proche de $\pi/2$ (incidence rasante), le phénomène d'ombrage n'est plus négligeable. On montre alors que le coefficient de diffusion incohérent dans la **direction spéculaire**, $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_i)$, doit être multiplié par la fonction d'ombre **moyennée** $S(\theta_i)$ définie par :

$$S(\theta_i) = \frac{\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle}{1 + 2 \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\mu \leq \gamma \leq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ D(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma - \mu}{\mu} & \text{si } \gamma \geq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $\mu = \cot(\theta_i) \geq 0$ désigne la pente du faisceau incident et γ la pente d'un point arbitraire de la surface. De plus, $\langle f(\gamma) \rangle$ (moyenne statistique ou espérance mathématique de la fonction f) est définie par :

$$\langle f(\gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) \times p(\gamma) d\gamma$$

où $p(\gamma)$ est la densité de probabilité des pentes de la surface. Par la suite, elle sera supposée **gaussienne** :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right)$$

- (a) Qualitativement, que vaut $S(\theta_i)$ lorsque $\theta_i = 0$ et $\theta_i = \pi/2$?
- (b) Représenter graphiquement les fonctions $N(\theta_i, \gamma)$ et $D(\theta_i, \gamma)$ en fonction de γ .
- (c) Montrer que $\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle$ et $\langle D(\theta_i, \gamma) \rangle$ sont données en fonction de $v = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ par :

$$\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle = \text{erf}(v) \quad \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle = \frac{1}{2} \left[\text{erf}(v) - 1 + \frac{e^{-v^2}}{v\sqrt{\pi}} \right] \quad (\text{B.2})$$

où la fonction $\text{erf}(x)$ est définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{erf}(0) = 0 \\ \text{erf}(\infty) = 1 \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma}$ et la relation $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^{x_0} f(x) dx$.

3. Etude de $S(\theta_i)$ au voisinage de $\pi/2$ (7 pts)

- (a) En déduire $S(\theta_i)$ en fonction de v selon les équations (B.1) et (B.2).
- (b) Calculer la limite de v lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$. Montrer alors que $S(\theta_i) \approx 2v^2$ lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. On pourra utiliser $\text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v + \mathcal{O}(v^3)$.
- (c) A l'aide de 1.(d) en déduire l'expression de $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_i)$ **avec ombre** lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. Calculer sa limite lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$ et conclure.
- (d) Application numérique : $\sigma = 0.3$ et $\theta_i = \{87, 89, 90\}$ degrés et la surface est considérée parfaitement conductrice. Calculer $S(\theta_i)$ et $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_i)$ **avec ombre en dB**.

C Examen du M2R SEGE - juin 2005 - Durée 1H00 avec document

Le problème posé consiste à calculer le champ diffusé par une surface **monodimensionnelle rugueuse** de longueur **finie** L est sous certaines hypothèses. Dans la première partie, la surface est considérée **lisse** et dans la seconde partie la surface est **rugueuse**. **Vous pouvez utiliser directement les formules issues du cours sans les redémontrer.**

C.1 Cas où la surface est lisse

Soit une onde **plane** illuminant une surface lisse **parfaitement conductrice** monodimensionnelle (selon l'axe (Oy)) de longueur L sous une incidence θ_i (voire figure ci-dessous). L'amplitude du champ (magnétique ou électrique) est notée ψ_{i0} et la dépendance sur le temps ($e^{-j\omega t}$) sera omise. Le repère choisi est cartésien caractérisé par les vecteurs unitaires $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ formant une base directe.

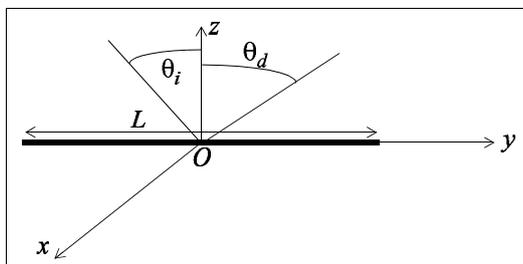


FIG. C.1 – Cas où la surface est lisse.

1. Dans le cas TE, donner l'expression des champs vectoriels électrique et magnétique incidents.
2. Dans le cas TM, donner l'expression des champs vectoriels électrique et magnétique incidents.
3. La référence des phases est choisie au centre de la surface. Montrer que la norme du champ diffracté par la surface, ψ_d , dans le direction d'observation θ_d s'écrit

$$\psi_d = \psi_{i0} \int_{-L/2}^{L/2} e^{j\phi(y)} dy \text{ avec } \phi(y) = K(\sin \theta_d - \sin \theta_i)y. \quad (\text{C.1})$$

4. Calculer analytiquement ψ_d .
5. Représenter graphiquement $|\psi_d/(L\psi_{i0})|$ en fonction de $x = \sin \theta_d - \sin \theta_i$ en précisant les points où s'annule $|\psi_d/(L\psi_{i0})|$.
6. Que vaut $|\psi_d/(L\psi_{i0})|$ dans la direction spéculaire et anti-spéculaire.
7. Pour une surface infinie, donner l'expression de ψ_d . Conclure sur le phénomène de diffraction.
8. Que vaut la permittivité relative, ϵ_r , pour une surface parfaitement conductrice. Dans le cas où la surface est diélectrique, comment s'écrit le champ diffracté, ψ_{d1} , en fonction de ψ_d .

C.2 Cas où la surface est rugueuse

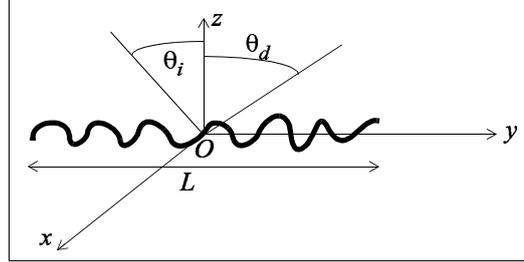


FIG. C.2 – Cas où la surface est rugueuse de valeur moyenne nulle.

1. Dans le cas où la surface est rugueuse, $z(y)$, et sous certaines hypothèses (non demandées), en vous inspirant de la première partie, montrer que la norme du champ diffracté par la surface, ψ_d , dans le direction θ_d s'écrit

$$\psi_d = \psi_{i0} \int_{-L/2}^{L/2} e^{j\phi(y)} dy \text{ avec } \phi(y) = K [(\sin \theta_d - \sin \theta_i)y + (\cos \theta_d + \cos \theta_i)z]. \quad (\text{C.2})$$

2. Quelle est la variable aléatoire dans ψ_d . Donner l'expression de la moyenne statistique de ψ_d , notée $\langle \psi_d \rangle$. La densité de probabilité des hauteurs z de la surface est notée $p(z)$.
3. Calculer analytiquement $\langle \psi_d \rangle$ lorsque $p(z)$ est gaussien :

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \text{ où } \sigma \text{ est l'écart type des hauteurs de la surface.} \quad (\text{C.3})$$

On pourra utiliser la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \exp(j\alpha z) dz = \exp\left(-\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right). \quad (\text{C.4})$$

4. Pour une surface **peu** rugueuse, simplifier $|\langle \psi_d \rangle / (L\psi_{i0})|^2$ et comparer l'expression avec celle de la question 4. de la première partie.
5. Pour une surface **très** rugueuse, que vaut $|\langle \psi_d \rangle / (L\psi_{i0})|^2$.

D Examen du M2R SEGE - 15 février 2006 - Durée 1H00 avec document

Les deux problèmes sont **indépendants**. Dans chacun des problèmes, les questions sont en général **indépendantes**.

D.1 Traitement anti-reflets

But : Déposer une couche mince sur un substrat afin d'annuler pour une longueur d'onde donnée le champ réfléchi par une telle structure.

1. Cas d'une interface plane infinie

Soit une onde **plane** illuminant sous une incidence **normale** $\theta_i = 0$ une interface **plane** contenue dans le plan (\hat{x}, \hat{y}) d'aire **infinie** séparant deux milieux LHI, stationnaires et non-magnétiques. Le milieu supérieur est assimilé au **vide** et le milieu inférieur est caractérisé par son indice de réfraction N **supposé réel**.

On note respectivement ψ_0^r et ψ_0^t les amplitudes¹ des champs réfléchi et transmis.

- Faire un schéma du problème.
- Donner les expressions de ψ_0^r et ψ_0^t en **polarisation TE**. L'amplitude du champ incident est notée ψ_0^i .

2. Cas de deux interfaces planes infinies

Un moyen d'annuler le champ réfléchi est de déposer une couche mince, d'épaisseur e et d'indice de réfraction n **supposé réel**, sur le milieu d'indice N .

- Faire un schéma du nouveau dispositif.
- Expliquer **qualitativement** à l'aide d'un schéma que l'amplitude du champ total réfléchi ψ^r par une telle structure peut s'écrire :

$$\psi^r = \sum_{p=1}^{p=\infty} \psi_p^r, \quad (\text{D.1})$$

où ψ_1^r est l'amplitude du champ réfléchi par l'interface supérieure (première réflexion).

- Montrer que :

$$\frac{\psi_1^r}{\psi^i} = \frac{1-n}{1+n} = A. \quad (\text{D.2})$$

¹A noter que pour une onde plane, $\psi = \psi_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$ où ψ_0 est l'amplitude.

(d) Montrer que :

$$\frac{\psi_2^r}{\psi^i} = \frac{4n}{(1+n)^2} \left(\frac{n-N}{n+N} \right) e^{2jK_0ne} = Be^{2jK_0ne}, \quad (\text{D.3})$$

où K_0 est le nombre d'onde dans le vide. Dans la suite du problème on supposera que pour $p > 2$, $\psi_p^r \approx 0$. Par conséquent $\psi^r = \psi_1^r + \psi_2^r$.

(e) Montrer alors que :

$$\left| \frac{\psi^r}{\psi^i} \right|^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(2K_0ne). \quad (\text{D.4})$$

(f) Trouver alors la relation entre ne et la longueur d'onde λ_0 de l'onde incidente pour que les deux rayons interfèrent de manière **destructive**.

(g) Sous la condition énoncée ci-dessus, montrer alors que :

$$\left| \frac{\psi^r}{\psi^i} \right|^2 = (A - B)^2. \quad (\text{D.5})$$

(h) En déduire la condition sur n pour avoir $\left| \frac{\psi^r}{\psi^i} \right| = 0$. On supposera que le rapport $\frac{4n}{(1+n)^2} \approx 1$.

(i) Dans le cas du verre $N = 1.5$. D'après (h), calculer n , le rapport $\frac{4n}{(1+n)^2}$ et conclure.

D.2 Surface rugueuse de statistique non gaussienne

Dans ce problème, on se propose d'étudier le cas où la densité de probabilité des pentes d'une surface rugueuse est non Gaussienne. Dans ce cas, la densité de probabilité des pentes peut s'écrire :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 - \gamma \frac{a}{2\sigma} + \gamma^3 \frac{a}{6\sigma^3}\right). \quad (\text{D.6})$$

1. Dans quel cas $p(\gamma)$ est gaussien.

2. Calculer $\langle \gamma^3 \rangle$ avec $\langle f(\gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma)p(\gamma)d\gamma$. On pourra utiliser les relations suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-bx^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{3/2}} \quad b > 0, \quad (\text{D.7})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp(-bx^2)dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4b^{5/2}} \quad b > 0, \quad (\text{D.8})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 \exp(-bx^2)dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{8b^{7/2}} \quad b > 0, \quad (\text{D.9})$$

et introduire l'opérateur $\langle f(\gamma) \rangle_G = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma)p_G(\gamma)d\gamma$ avec $p_G(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right)$.

3. Comparer le résultat à celui obtenu dans le cas d'une densité de probabilité gaussienne. Conclure.

E Exam of the M2R SEGE - Option Propagation, Diffraction & EMC - 2 February 2007 - Duration 2H00 with course

In the equations, the bold font denotes a vector ($\mathbf{k} = \vec{k}$) and \mathbf{k} denotes a unitary vector ($|\mathbf{k}| = 1$). The problems are independent.

The responses of the questions must be clear and the main results must be bordered.

E.1 Poynting vector in dielectric media with lossy

The power carried by a electric wave propagating in a *non-magnetic* dielectric medium with *lossy* (means that the refractive index $n \in \mathbb{C}$), for which the electric field is defined as $\mathbf{E} = \psi_0 e^{jn\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{x}}$ (TE polarisation), is defined from the Poynting vector \mathbf{P} as

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*, \quad (\text{E.1})$$

where \mathbf{H} is the magnetic field and the symbol $*$ is the conjugate. The refractive index $n = n_r + jn_i$ with $(n_i, n_r) \in \mathbb{R}^+$. \mathbf{k}_0 is the wave vector in the vaccum ($K_0 = \|\mathbf{k}_0\| \in \mathbb{R}^+$).

1. From a Maxwell equation, calculate \mathbf{H} versus $(\mathbf{E}, \mathbf{k}_0, n, \omega, \mu_0)$.
2. Show that $\mathbf{P} = \frac{n^*}{2Z_0} |E|^2 \hat{\mathbf{k}}_0$ with $E = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/K_0$. Z_0 is the wave impedance in the vaccum. For any vectors $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ we have

$$\mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3) \mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \mathbf{V}_3. \quad (\text{E.2})$$

3. We set $\mathbf{k}_0 = K_0 \hat{\mathbf{z}}$ and $\mathbf{R} = z \hat{\mathbf{z}}$. Express $\mathbf{P}(z)$ versus z .
4. We set $P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{k}}_0$. Plot $P(z)/P(0)$ versus z by introducing the skin depth δ .
5. In $P(z)/P(0)$, what is the physical signification of the exponential term?

E.2 Kirchhoff approximation for a one-dimensional surface

Purpose : under the Kirchhoff approximation in far zone, the diffracted field is calculated by a

- A. one-dimensional *plane* surface,
- B. one-dimensional *rough* surface.

Let us consider an incident plane wave of direction \mathbf{k}_i . \mathbf{k}_d is the direction of observation (see figure E.1). From the Kirchhoff approximation, the diffracted field in the far zone has the following form

$$\psi_d = A \int_{-L}^L [\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \mathcal{R}(\theta) + \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_i)] \exp [jg(\mathbf{r})] dy, \quad (\text{E.3})$$

with

$$g(\mathbf{r}) = K_0 (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d) \cdot \mathbf{r}. \quad (\text{E.4})$$

and A can be considered as a constant.

We have (see figure E.1)

- K_0 the wavenumber in the vacuum,
- $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\gamma \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ the normal to the surface, in which γ ($\gamma(y) = dz/dy$) is the slope of the surface,
- $\mathbf{r} = y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ a point of the surface,
- $\mathcal{R}(\theta)$ the Fresnel reflection coefficient which depends of the choice of the polarisation.
- θ the local incidence angle expressed by $\cos \theta = -\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{k}_i / \sqrt{1 + \gamma^2}$,
- $2L$ the length of the surface.

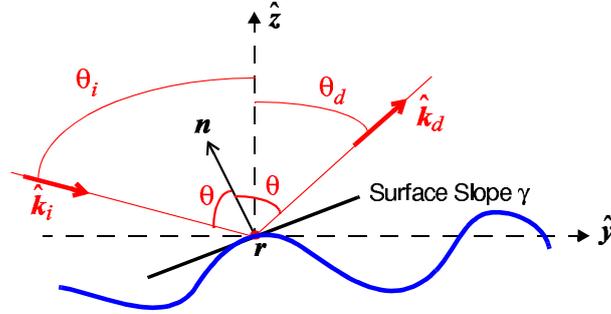


FIG. E.1 – Geometry used for the Kirchhoff approximation.

1. Give the validity domain of the Kirchhoff approximation.
2. Calculate the unitary vectors \mathbf{k}_i and \mathbf{k}_d .
3. Calculate the scalar product $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d)$ versus $(\theta_i, \theta_d, \gamma)$.
4. Calculate the scalar product $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_i)$ versus $(\theta_i, \theta_d, \gamma)$.
5. From equation (E.4), calculate $g(\mathbf{r})$ versus $(\theta_i, \theta_d, x, y, K_0)$.
6. Calculate $\cos \theta$ versus (θ_i, γ) .

A. Case of a plane surface

- A1. What is the value of the slope γ ?
- A2. Simplify equation (E.3) and $\cos \theta$.
- A3. Calculate the integration over y . Give a physical interpretation of the final result.
- A4. For a *perfectly conducting* surface, give the value of \mathcal{R} for the TE and TM polarisations. Simplify then the scattered field ψ_d for these two polarisations.

B. Case of a rough surface

In what follows, we assume that the surface is **perfectly conducting** and we consider the **TM polarisation**. Moreover, the probability density functions of the heights and of the slopes are assumed to be Gaussian with zero mean values. They are expressed as

$$p_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad \text{PDF of the heights,} \quad (\text{E.5})$$

$$p_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_\gamma^2}\right) \quad \text{PDF of the slopes.} \quad (\text{E.6})$$

If the function f depends only on z , then the mean value of f is defined as

$$\langle f(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \times p_z(z) dz. \quad (\text{E.7})$$

If now the function f depends on $\{z, \gamma\}$, then the mean value of f is defined as

$$\langle f(z, \gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, \gamma) \times p_z(z) p_\gamma(\gamma) dz d\gamma. \quad (\text{E.8})$$

- B1. In equations (E.5) and (E.6), give the signification of σ_z and σ_γ
- B2. Simplify equation (E.3).
- B3. Calculate the mean value of ψ_d , $\langle \psi_d \rangle$.
- B4. Give a physical interpretation of the different products in $\langle \psi_d \rangle$.

F Exam of the M2R SEGE - Option Propagation, Diffraction & EMC - 13 June 2007 - Duration 2H00 with course

In the equations, the bold font denotes a vector ($\mathbf{k} = \vec{k}$) and \mathbf{k} denotes a unitary vector ($|\mathbf{k}| = 1$). The problems are independent.

The responses to the questions must be clear and the main results must be bordered.

F.1 Reflection coefficient from two infinite interfaces separating homogeneous media

We consider an incident plane wave which illuminates two infinite *plane* interfaces Σ_A and Σ_B separating homogeneous media $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ of refractive indexes n_1 (assumed to be the air), n_2 and n_3 . The polarisation of the incident plane wave is *TE* with an incidence angle $\theta_i = 0$ ($\mathbf{E} = \psi^i \hat{\mathbf{x}}$). The Fresnel coefficients in reflection and transmission from the medium $i = \{1, 2, 3\}$ to the medium $j \neq i = \{1, 2, 3\}$ are denoted as r_{ij} and t_{ij} , respectively (figure F.1).

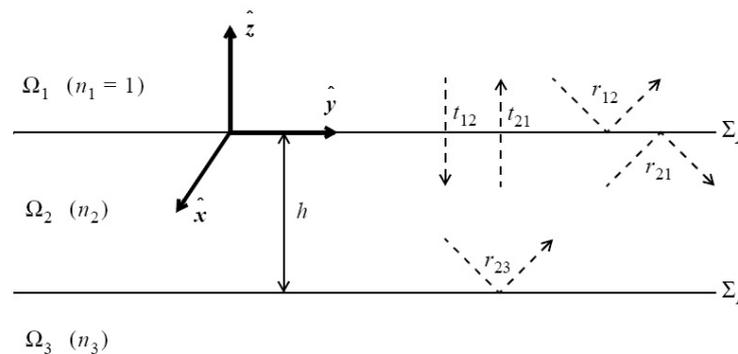


FIG. F.1 – Description of the geometry.

1.A. From a figure, explain qualitatively that the magnitude of the reflected field ψ^r can be written as follows :

$$\psi^r = \sum_{p=0}^{p=\infty} \psi_p^r. \quad (\text{F.1})$$

1.B. Give the expressions of r_{12} , r_{21} , t_{12} and t_{21} and show that $t_{12}t_{21} = 1 - r_{12}^2$.

- 1.C.** Give the expression of the field ψ_0^r reflected by *only* the upper interface Σ_A .
- 1.D.** Give the expression of the field ψ_1^r for $p = 1$. It results from the transmission through the upper interface Σ_A , the reflection from the lower interface Σ_B , and then the transmission through Σ_A back into the incident medium Ω_1 .
- 1.E.** Show that the reflected field at the order $p = 2$ is

$$\psi_2^r = \left(r_{21} r_{23} e^{j\phi} \right) \psi_1^r, \quad (\text{F.2})$$

where $\phi = 2K_0 n_2 h$, in which K_0 is the wavenumber in the air (vaccum) and h the thickness of the intermediate medium Ω_2 .

- 1.F.** Show that the reflected field at the order $p \geq 1$, is then

$$\psi_p^r = \left(r_{21} r_{23} e^{j\phi} \right)^{p-1} \psi_1^r. \quad (\text{F.3})$$

- 1.G.** From equation (F.1), and the relations $t_{12} t_{21} = 1 - r_{12}^2$ and $r_{21} = -r_{12}$, show that the total reflected field is expressed as

$$\psi^r = \psi^i \frac{r_{12} + r_{23} e^{j\phi}}{1 + r_{12} r_{23} e^{j\phi}}. \quad (\text{F.4})$$

We recall for $|x| < 1$ that $\sum_{p=1}^{p=\infty} x^{p-1} = \frac{1}{1-x}$.

- 1.H.** We assume now that the medium Ω_3 is *perfectly conducting*. Give the value of r_{23} and simplify equation (F.4).
- 1.I.** Moreover, we assume that the modulus of the refractive index n_2 is of the order of n_1 ($|n_2| \approx |n_1|$). Give the consequence on $|r_{12}|$ and show that

$$\psi^r \approx \left[r_{12} \left(1 - e^{j2\phi} \right) - e^{j\phi} \right] \psi^i. \quad (\text{F.5})$$

We recall for $x \rightarrow 0$ that $1/(1+x) = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)$. In the following, equation (F.5) will be used.

- 1.J.** Now, the upper surface is assumed to be *rough*. A simple way to take into account this effect in the calculation of the reflected field ψ^r is to replace $\phi = 2K_0 n_2 h$ by $\phi = 2K_0 n_2 (h + z)$, in which z is the height of the upper surface Σ_A . We assume that z is a *Gaussian* random variable with zero mean value of probability density function defined as

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right).$$

Calculate the mean value of ψ^r denoted as $\langle \psi^r \rangle$. One could use the following relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \exp(j\alpha z) dz = \exp\left(-\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right). \quad (\text{F.6})$$

F.2 Diffraction from an infinite perfectly conducting cylinder for TE polarisation

We consider an infinite *perfectly conducting* cylinder with respect to the direction $\hat{\mathbf{x}}$ of radius a . The cross section of the cylinder lies in the $(\hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$ plane (figure F.2).

We can show from the propagation equation in polar coordinates (r, θ) that the diffracted field is given for $r \geq a$ by

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(Kr) + B_n H_n^{(2)}(Kr) \right] e^{jn\theta}, \quad (\text{F.7})$$

where $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ are the Hankel functions of first and second kind, respectively.

- 2.A.** Give the reason why equation (F.7) becomes

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n^{(1)}(Kr) e^{jn\theta}. \quad (\text{F.8})$$

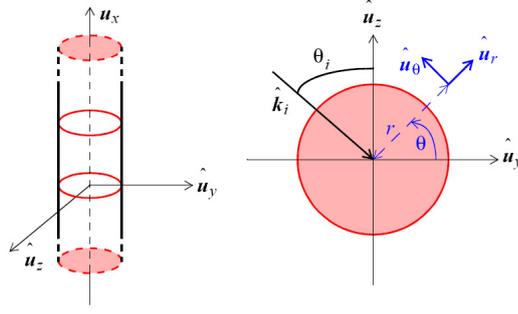


FIG. F.2 – Description of the cylinder.

2.B. We consider an incident plane wave and the *TE polarisation*. The electric field is then

$$\mathbf{E} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jK(y \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jKr \sin(\theta_i - \theta)}, \quad (\text{F.9})$$

with $\tan \theta = z/y$ and $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. In addition, we can show that

$$e^{jKr \sin(\theta_i - \theta)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{jn(\theta_i - \theta)} J_n(Kr). \quad (\text{F.10})$$

Show that

$$\psi_d(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n^{(1)}(Kr) e^{jn(\theta_i - \theta)} & \text{pour } r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases}. \quad (\text{F.11})$$

with $A_n = -\psi_{i0} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)}$.

2.C. Show from the Maxwell equations and for the TE polarisation that

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z \right) = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \quad (\text{F.12})$$

In polar coordinates (r, θ, x) , $\mathbf{rot} \mathbf{V}$ is defined as $(\mathbf{V} = V_r \hat{\mathbf{u}}_r + V_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + V_x \hat{\mathbf{u}}_x)$

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{u}}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right) \hat{\mathbf{u}}_x. \quad (\text{F.13})$$

2.D. From equations (F.11) and (F.12), calculate the components $(H_{d,\theta}, H_{d,r})$ of \mathbf{H}_d . We recall with $f_n(z) = H_n^{(1)}(z)$ that

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z)}{2}. \quad (\text{F.14})$$

G Examen du M2R SEGE - 14 février 2008 - Durée 1H15 avec document

Le but du problème est de calculer la fonction d'illumination S , égale au rapport de la surface illuminée sur la surface totale, d'une surface **rugueuse** de densité de probabilité **gaussienne** et de quantifier son influence sous incidences très rasantes.

Les trois parties sont **indépendantes**.

G.1 Approximation de l'optique physique

- 2.A.** Rappeler le domaine de validité de l'approximation de l'optique physique et en donner une interprétation géométrique.
- 2.B.** Nous avons montré dans le cours que le champ diffracté en zone lointaine par une surface 1D **rugueuse** sous l'hypothèse de l'optique physique est donné par

$$\begin{aligned}\psi_d^\infty &= -\frac{K\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \mathcal{R}\left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2}\right) \frac{1 + \cos(\theta_i + \theta_d)}{\cos \theta_i + \cos \theta_d} \\ &\times \int_{-L}^{+L} e^{jK[y(\sin \theta_i - \sin \theta_d) - z(\cos \theta_d + \cos \theta_i)]} dy,\end{aligned}\tag{G.1}$$

où

- K est le nombre d'onde dans le milieu de propagation,
- ψ_{i0} l'amplitude de l'onde incidente supposée plane,
- r' la distance entre le récepteur et l'origine de la surface,
- θ_i l'angle d'incidence,
- θ_s l'angle d'observation,
- \mathcal{R} le coefficient de réflexion de Fresnel,
- z la hauteur de la surface d'abscisse y ,
- $2L$ la longueur de la surface.

- 2.C.** Faire un schéma en mentionnant clairement r' , θ_i , θ_s et L .
- 2.D.** On se place dans la **direction spéculaire**. Simplifier alors l'équation (G.1). On rappelle que $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$.
- 2.E.** Calculer l'intégration sur y en faisant apparaître l'aire de la surface S .
- 2.F.** Calculer la moyenne statistique $m = |\langle \psi_d^\infty \rangle|^2$ en faisant apparaître le paramètre de Rayleigh $R_a = K\sigma_z \cos \theta_i$. A quoi correspond physiquement cette moyenne ?
- 2.G.** En déduire la quantité suivante :

$$\sigma_m = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{2\pi r' |\langle \psi_d^\infty \rangle|^2}{S |\psi_{i0}|^2}\tag{G.2}$$

2.H. Donner un nom à cete quantité et son unité.

2.I. Simplifier son expression pour $\theta_i = \pi/2$. Ce résultat est-il physique ?

G.2 Calcul de la fonction d'illumination

Lorsque θ_i est proche de $\pi/2$ (incidence rasante), le phénomène d'ombrage n'est plus négligeable. On montre alors que la quantité précédente σ_m doit être multipliée par la fonction d'**illumination** $S(\theta_i)$ définie par :

$$S(\theta_i) = \frac{\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle}{1 + 2 \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\mu \leq \gamma \leq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ D(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma - \mu}{\mu} & \text{si } \gamma \geq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad (\text{G.3})$$

où $\mu = \cot(\theta_i) \geq 0$ désigne la pente du faisceau incident et γ la pente d'un point arbitraire de la surface. De plus, $\langle f(\gamma) \rangle$ (moyenne statistique ou espérance mathématique de la fonction f) est définie par :

$$\langle f(\gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) \times p(\gamma) d\gamma,$$

où $p(\gamma)$ est la densité de probabilité des **pentés** de la surface. Par la suite, elle sera supposée **gaussienne** :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_p^2}\right).$$

2.A. Qualitativement (sans calculs), que vaut $S(\theta_i)$ lorsque $\theta_i = 0$ et $\theta_i = \pi/2$?

2.B. Représenter graphiquement les fonctions $N(\theta_i, \gamma)$ et $D(\theta_i, \gamma)$ en fonction de γ en faisant apparaître clairement μ .

2.C. Montrer que les fonctions $\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle$ et $\langle D(\theta_i, \gamma) \rangle$ sont données en fonction de $v = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma_p}$ par :

$$\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle = \text{erf}(v) \quad \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle = \frac{1}{2} \left[\text{erf}(v) - 1 + \frac{e^{-v^2}}{v\sqrt{\pi}} \right], \quad (\text{G.4})$$

où la fonction $\text{erf}(x)$ est définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{erf}(0) = 0 \\ \text{erf}(\infty) = 1 \end{cases}.$$

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_p}$ et la relation $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^{x_0} f(x) dx$.

G.3 Etude de $S(\theta_i)$ au voisinage de $\pi/2$

2.A. En déduire $S(\theta_i)$ en fonction de v selon les équations (G.3) et (G.4).

2.B. Calculer la limite de v lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$. Montrer alors que $S(\theta_i) \approx 2v^2$ lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. On pourra utiliser $\text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v + \mathcal{O}(v^3)$.

2.C. A l'aide de 1.1.9 en déduire l'expression de σ_m **avec ombre** lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. Calculer sa limite lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$ et conclure.

2.D. Application numérique : $KS = 1$, $\{\sigma_p = 0.3, K\sigma_z = 2\pi\}$ et $\theta_i = \{87, 89, 90\}$ degrés et la surface est considérée parfaitement conductrice. Calculer $S(\theta_i)$ et σ_m **avec ombre en dB**.

Bibliographie

- [1] J. A. Stratton traduit par J. Hebenstreit *Théorie de l'électromagnétisme* (Dunod, Paris, 1961).
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1972).
- [3] G. Arfken *Mathematical methods for Physicists, Third Edition* (Academic Press, New York, 1985).
- [4] J. J. Bowman, T. B. A. Senior and P. L. E. Uslenghi *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes* (Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1987).
- [5] J. W. Dettman *Mathematical Methods in Physics and Engineering* (Dover Publications, New York, 1988).
- [6] M. Born and E. Wolf *Principle of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light, Sixth Edition* (Pergamon Press, New York, 1989).
- [7] J. A. Olgilvy *Theory of wave scattering from random rough surfaces* (Institute of Physics, Bristol, 1991)
- [8] J.-P. Pérez *Optique : Fondements et applications, 7ème édition* (Dunod, Paris, 2004)
- [9] D. G. Dudley *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory* (IEEE Press, New York, 1994)
- [10] M. Nieto-Vesperinas *Scattering and Diffraction in Physical Optics* (John Wiley and Son, New York, 1994)
- [11] Chen-To Tai *Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory, Second Edition* (IEEE Press, New York, 1994)
- [12] P. F. Combes *Micro-ondes 1. Lignes, guides et cavités* (Dunod, Paris, 1996)
- [13] L. Tsang, J. A. Kong and K.-H. Ding *Scattering of Electromagnetic Waves : Theories and Applications* (John Wiley and Sons, New York, 2001)
- [14] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding and Chin On Ao *Scattering of Electromagnetic Waves : Numerical Simulations* (John Wiley and Sons, New York, 2001)
- [15] L. Tsang and J. A. Kong *Scattering of Electromagnetic Waves : Advances Topics* (John Wiley and Sons, New York, 2001)
- [16] W. Tabbara *Section efficace radar* (Polycopié pour le D.E.A. d'Electronique, Option S.E.I. -Filière Telecom Radar-, 1999/2000)
- [17] M. Lambert *Obstacles et cibles* (Notes de cours pour le D.E.A. de Méthodes Physiques en Télédétection, 2001)
- [18] F. Daout, "Etude de la dépolarisation des ondes centimétriques par une surface rugueuse- Application au domaine maritime-", Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1996.

- [19] C. Bourlier, “Rayonnement infrarouge d’une surface stochastique-Application au domaine océanique-”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1999.
- [20] N. Déchamps, “Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [21] N. Pinel, “Etude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles - Application à une mer recouverte de pétrole”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2006.