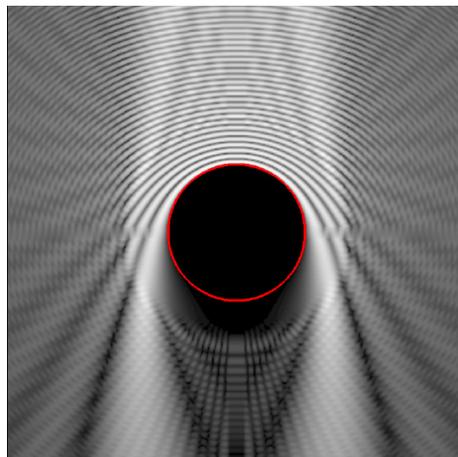
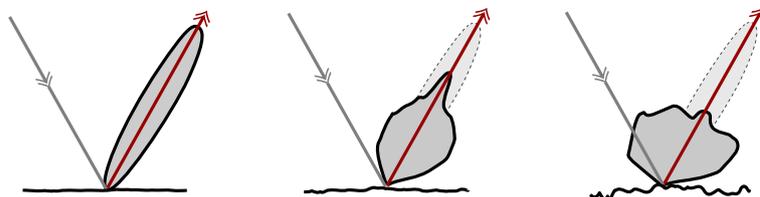


DIFFRACTION ELECTROMAGNETIQUE PAR DES OBSTACLES

Christophe BOURLIER
Chargé de Recherche CNRS à IREENA, Nantes



Cours du MASTER2 RECHERCHE
Systèmes Electroniques et Génie Electrique



18 février 2008

Table des matières

1	Propagation en espace libre	1
1.1	Equations de Maxwell	1
1.2	Equation de propagation	3
1.2.1	Absence de charge et de courant : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$	3
1.2.2	Absence de charge : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$	4
1.2.3	Cas général : $\rho \neq 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$	4
1.3	Régime harmonique	6
1.3.1	Définition	6
1.3.2	Equation d’Helmholtz	7
1.3.3	Potentiels retardés	7
1.4	Conditions aux limites	8
1.5	Onde plane	8
1.5.1	Concept de l’onde plane	8
1.5.2	Onde plane progressive monochromatique	9
1.5.3	Propagation dans un milieu conducteur	9
1.5.4	Epaisseur de peau	11
1.5.5	Réflexion et réfraction par une surface plane <i>infinie</i>	12
1.5.5.1	Relations de Snell-Descartes	12
1.5.5.2	Coefficients de Fresnel	13
1.5.6	Onde évanescente ou onde de surface	16
2	Equations intégrales	19
2.1	Cas d’un problème à deux dimensions : cas <i>scalaire</i>	19
2.1.1	Fonction de Green	19
2.1.2	Application sur l’équation d’Helmholtz	20
2.1.3	Polarisations TE et TM et conditions aux limites	21
2.1.4	Second théorème de Green	23

2.1.5	Principe d'Huygens et théorème d'extinction	23
2.1.6	Principe d'Huygens en champ lointain	26
2.2	Cas d'un problème à trois dimensions : cas <i>vectoriel</i>	27
2.2.1	Définition d'une dyade	27
2.2.2	Fonction de Green vectorielle : dyade de Green	29
2.2.3	Second théorème de Green	30
2.2.4	Principe d'Huygens et théorème d'extinction	31
2.2.5	Principe d'Huygens en champ lointain	33
2.3	Conclusion	34
3	Résolution des équations	35
3.1	Position du problème	35
3.1.1	Introduction	35
3.1.2	Unicité des solutions	36
3.1.3	Quelques solutions	36
3.2	Diffraction par des objets 2D de formes simples	37
3.2.1	Solution de l'équation de propagation scalaire	37
3.2.2	Cas du cylindre circulaire <i>infini</i> selon son axe de révolution	38
3.2.2.1	Calcul de la fonction scalaire ψ du champ <i>diffracté</i>	40
3.2.2.2	Cas parfaitement conducteur en polarisation TE	42
3.2.2.3	Cas parfaitement conducteur en polarisation TM	46
3.2.2.4	Cas diélectrique en polarisation TE	46
3.3	Approximations de l'optique physique	48
3.3.1	Problème 2D : cas scalaire	48
3.3.1.1	Introduction	48
3.3.1.2	Expression du champ rayonné en zone lointaine	49
3.3.1.3	Cas d'une plaque linéique parfaitement conductrice	50
3.3.1.4	Cas d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur	51
3.3.2	Problème 3D : cas vectoriel	53
3.3.2.1	Introduction	54
3.3.2.2	Description de la géométrie	54
3.3.2.3	Calcul dans le cas général en polarisation TE	56
3.3.2.4	Calcul dans le cas général en polarisation TM	57
3.3.2.5	Cas où la normale est dirigée selon $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$	57
3.4	Méthode des moments	60

3.4.1	Formulation mathématique	61
3.4.1.1	Trois étapes	61
3.4.1.2	Exemple	62
3.4.1.3	Choix des fonctions test et de base	64
3.4.2	Diffraction par une surface monodimensionnelle	65
3.4.2.1	Matrices impédances	66
3.4.2.2	Application sur un cylindre parfaitement conducteur	69
3.4.2.3	Application sur un cylindre elliptique parfaitement conducteur	73
3.4.2.4	Application sur une plaque linéique parfaitement conductrice	74
3.4.3	Résolution du système linéaire	76
4	Diffraction par des surfaces rugueuses	79
4.1	Introduction	79
4.2	Description statistique d'une surface rugueuse	79
4.2.1	Introduction	79
4.2.2	Rappels statistiques	80
4.2.3	Génération d'un profil rugueux	82
4.3	Paramètre de Rayleigh	86
4.3.1	Introduction	86
4.3.2	Paramètre de Rayleigh	87
4.3.3	Puissances cohérente et incohérente : approche qualitative	88
4.3.4	Moyennage statistique et méthode de Monte-Carlo	88
4.4	Diffraction par une surface monodimensionnelle	89
4.4.1	Approximation de l'optique physique	90
4.4.1.1	Expression du champ diffracté	90
4.4.1.2	Moments statistique d'ordre 1 : valeur moyenne du champ	91
4.4.1.3	Moments statistique d'ordre 2 : variance du module du champ	92
4.4.1.4	Coefficient de diffusion incohérent	94
4.4.1.5	Discussion sur l'approximation de l'optique physique	95
4.4.2	Méthode des Moments	96
A	Programme Maple sur la méthode des moments	I
B	Examen du M2R SEGE, 17 février 2005	V
B.1	Champ EM transmis par une interface plane d'aire infinie (8 pts)	V
B.2	Approximation de l'optique géométrique avec effet d'ombre	V

C Examen du M2R SEGE, 15 février 2006	VII
C.1 Traitement anti-reflets	VII
C.2 Surface rugueuse de statistique non gaussienne	VIII
D Exam of the M2R SEGE, 2 February 2007	IX
D.1 Poynting vector in dielectric media with lossy	IX
D.2 Kirchhoff approximation for a one-dimensional surface	IX
E Exam of the M2R SEGE, 13 June 2007	XIII
E.1 Reflection coefficient from two infinite interfaces separating homogeneous media .	XIII
E.2 Diffraction from an infinite perfectly conducting cylinder	XIV
F Examen du M2R SEGE, 14 février 2008	XVII
F.1 Approximation de l'optique physique	XVII
F.2 Calcul de la fonction d'illumination	XVIII
F.3 Etude de $S(\theta_i)$ au voisinage de $\pi/2$	XVIII
Bibliographie	XIX

1 Propagation en espace libre

1.1 Equations de Maxwell

James Clerk Maxwell publie en 1864 un traité où est relié l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques, tout comme l'avait fait auparavant Newton en mécanique classique. A l'origine, les équations formulées par Maxwell formaient un système de 20 équations à 20 inconnues. Réécrites sous forme vectorielle par Oliver Heaviside et Josiah W. Gibbs en 1884, les équations mettent alors en évidence la symétrie qui existe entre les différents champs. Elles sont données, sous forme locale, par :

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

Il est à noter que toutes les grandeurs figurant dans les quatre équations de Maxwell dépendent à la fois du temps, t , et de la position \mathbf{R} de coordonnées x , y et z .

La relation (1.1) est appelée équation de Maxwell-Ampère ; en effet, elle a été établie par Maxwell en généralisant au cas des régimes variables au cours du temps, les résultats qui avaient été établis par Ampère dans le cas des régimes indépendants du temps (électrostatique¹). En régimes variables, il se crée un "courant de déplacement électrique" supplémentaire, i. e. $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$, dû à un déplacement d'électrons entre les molécules. L'équation (1.2) représente la loi de Maxwell-Faraday². Les équations (1.3) et (1.4)³ sont appelées les équations de Maxwell-Gauss magnétique et électrique.

Pour plus de clarté, les grandeurs qui entrent en jeu dans ces équations sont rassemblées dans le tableau 1.1. Nous avons conservé pour \mathbf{H} l'appellation ancienne mais courante de *champ magnétique*. Ainsi le couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est appelé champ électromagnétique ; les champs \mathbf{D} et \mathbf{B}

¹En électrostatique, i. e. $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, le théorème d'Ampère indique que la circulation du champ magnétique \mathbf{H} sur un chemin fermé C est égale à la somme des courants I qui traverse toute surface S s'appuyant sur C , soit $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$. En notant \mathbf{J} la densité de courant électrique, nous pouvons écrire $I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$. De plus, d'après le théorème de Stokes, nous avons $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot}\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$. Donc, $\forall d\mathbf{S}$, $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$.

²D'après la loi de Lentz, la f.e.m induite, e , due à une variation de flux, Φ , s'écrit $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, où $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ et $e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ d'après le théorème de Stokes. Donc, $\forall d\mathbf{S}$, $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.

³L'énoncé du théorème de Gauss conduit à $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon$, où Q est la charge totale à l'intérieur de la surface fermée S . D'après le théorème d'Ostrogradski, nous avons $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{div}\mathbf{E}dV$, où le volume V est délimité par S . En écrivant que $Q = \iiint_V \rho dV$ où ρ est la densité volumique de charge électrique, on obtient donc $\forall dV$, que $\mathbf{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon$.

sont inclus pour rendre compte des relations entre le champ électromagnétique et la matière environnante.

Grandeur	Nom	Unité
E	champ électrique	V/m
H	champ magnétique	A/m
D	induction électrique	C/m ²
B	induction magnétique	Wb/m ²
J	densité de courant électrique	A/m ²
ρ	densité de charge électrique	A/m ³

TAB. 1.1 – Variables figurant dans les équations de Maxwell.

Dans ce manuscrit, les grandeurs en **gras** désignent des **vecteurs**
Les vecteurs notés avec des **chapeaux**, sont des vecteurs **unitaires**

Dans un problème de rayonnement par des sources, les grandeurs inconnues sont les champs vectoriels **E**, **H**, **B** et **D** et les grandeurs connues sont **J** et ρ . D'après les quatre équations de Maxwell, les 2 équations (1.3) et (1.4) sont scalaires, tandis que les 2 équations (1.1) et (1.2) sont vectorielles, soit au total 8 équations scalaires. En fait ces 8 équations ne sont pas indépendantes⁴, et le système est de rang 7. Pour que ces équations forment un système complet, il faut leur adjoindre des relations constitutives qui tiennent compte des caractéristiques du milieu (vide, matériau diélectrique ou magnétique, ...). En particulier, si le milieu est linéaire⁵, ces relations constitutives relient respectivement **D** et **E**, **B** et **H**, **J** et **E**. Elles sont données sous la forme

$$\mathbf{D} = [\epsilon(\mathbf{R})]\mathbf{E} \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{B} = [\mu(\mathbf{R})]\mathbf{H} \quad (1.5b)$$

$$\mathbf{J} = [\sigma(\mathbf{R})]\mathbf{E} \quad (1.5c)$$

où $[\epsilon]$, $[\mu]$, $[\sigma]$ sont, respectivement, les tenseurs de rang 2 (matrice carrée de dimension 3) de la permittivité électrique, de la perméabilité magnétique et de la conductivité électrique d'un milieu *anisotrope*⁶ et *stationnaire*⁷.

- Si le milieu est *isotrope*, alors les tenseurs deviennent des matrices diagonales et s'écrivent $[\epsilon] = \epsilon[I]$, $[\mu] = \mu[I]$ et $[\sigma] = \sigma[I]$, où $[I]$ est la matrice identité.
- Si le milieu est *homogène*, alors les caractéristiques électrique et magnétique du milieu sont indépendantes de la position **R**.

Dans la suite du cours, on supposera des milieux LHI (linéaires, homogènes et isotropes).

Le vide est un milieu LHI par définition, qui a une permittivité et une perméabilité notées respectivement ϵ_0 et μ_0 ; elles vérifient $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1/c$, où $c = 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la

⁴L'application de l'opérateur divergence sur (1.1), conduit à $\text{div}[\mathbf{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}] = \text{div}\mathbf{J}$. Sachant que $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\text{div}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial t}$ et div peuvent être permutés, l'équation précédente se transforme en $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\mathbf{D}) = -\text{div}\mathbf{J}$. Le remplacement de $\text{div}\mathbf{D}$ par ρ (voir (1.4)) permet d'obtenir l'équation de conservation de la charge électrique : $\text{div}\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, qui traduit le fait que, si il y a variation au cours du temps de la charge électrique ρ contenue dans un volume alors il existe un courant surfacique **J** entre l'intérieur et l'extérieur de ce volume.

⁵Un milieu est dit *linéaire* si la permittivité électrique ϵ et la perméabilité magnétique μ sont indépendants de la puissance des champs **E** et **H**.

⁶Un milieu est dit *anisotrope* si $[\epsilon]$, $[\mu]$ et $[\sigma]$ dépendent de la direction d'observation.

⁷Un milieu est dit *stationnaire* si $[\epsilon]$, $[\mu]$ et $[\sigma]$ sont indépendants du temps.

lumière dans le vide. Par la suite, nous aurons souvent recours aux permittivités et perméabilités relatives ϵ_r et μ_r définies par :

$$\epsilon = \epsilon_r \times \epsilon_0 \text{ et } \mu = \mu_r \times \mu_0 \quad (1.6)$$

où, $\epsilon_0 = 1/(36\pi \times 10^9)$ F/m et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

1.2 Equation de propagation

Nous nous limiterons au cas d'un milieu LHI stationnaire, de perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$ (milieu non magnétique) et de permittivité ϵ . Tout d'abord nous allons présenter le cas où le milieu de propagation est dépourvu de charges ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$). Par exemple, ceci correspond au cas de l'air. Puis le cas général sera traité.

1.2.1 Absence de charge et de courant : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

Dans ce paragraphe, nous supposons l'absence de charge ($\rho = 0$) et de courant ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

Dérivons l'équation de Maxwell-Ampère (1.1) par rapport au temps, en incluant les relations constitutives (1.5a) et (1.5b). On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

D'après la relation (1.2), $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, d'où

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) \quad (1.8)$$

En utilisant l'égalité $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{E})$, où ∇^2 est le laplacien vectoriel et le fait que $\text{div} \mathbf{E} = 0$ selon (1.4), nous avons $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$. Donc d'après (1.7) et (1.8), le champ électrique \mathbf{E} vérifie

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

De même le champ magnétique \mathbf{H} vérifie

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

Les équations (1.9) et (1.10) sont les *équations de propagation* des champs électrique et magnétique. Ces équations sont encore appelées équations d'onde.

Remarque : En coordonnées cartésiennes, si on représente le laplacien scalaire par $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, le laplacien vectoriel $\nabla^2 \mathbf{A}$, où $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, sera défini par

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta A_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta A_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.11)$$

De manière générale, la solution de l'équation de propagation pour un milieu dépourvu de charges et sans pertes, est une solution de type Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}/\|\mathbf{R}\|$ à la vitesse v . Elle s'écrit alors

$$f(\mathbf{R}, t) = \Psi_+ \left(t + \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{v} \right) + \Psi_- \left(t - \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{v} \right) \quad (1.12)$$

La solution est donc donnée par la somme de deux fonctions Ψ_{\pm} . Physiquement, le premier terme dans (1.12) correspond à l'onde réfléchie qui est associée à une propagation dans le sens des \mathbf{R} négatifs et le second à l'onde incidente donnant une propagation dans le sens des \mathbf{R} positifs. Pour un milieu de propagation *infini*, l'onde réfléchie n'existe pas. La solution $f(\mathbf{R}, t)$, est dite à onde *progressive* car ses variations dans le temps et dans l'espace dépendent de $t \pm \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{v}$.

1.2.2 Absence de charge : $\rho = 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$

Par rapport au cas précédent, le courant de conduction électrique $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ (selon l'équation (1.5c)) présent dans (1.1) est pris en compte. Physiquement ceci correspond à des matériaux bons conducteurs. En appliquant le même raisonnement que précédemment, l'équation de propagation vérifiée par le champ \mathbf{E} s'écrit

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

La résolution de cette équation est plus difficile par rapport au cas précédent. Elle sera résolue en régime harmonique.

1.2.3 Cas général : $\rho \neq 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$

Dans cette section nous traitons la cas général puisque $\rho \neq 0$ et $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$.

Afin d'obtenir une forme simple des équations de propagation pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} , deux nouvelles quantités sont introduites.

Puisque $\text{div}(\text{rot}\mathbf{A}) = 0 \forall \mathbf{A}$, nous pouvons poser d'après (1.3)

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (1.14)$$

où \mathbf{A} est un vecteur quelconque dépendant de la position \mathbf{R} et du temps t . Selon (1.2), nous avons

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

Puisque $\text{rot}(\text{grad}\phi) = 0 \forall \phi$, nous pouvons poser d'après l'équation ci-dessus

$$-\text{grad}\phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.15)$$

où ϕ est une fonction scalaire quelconque de \mathbf{R} et de t .

Les substitutions de (1.14) et (1.15) dans (1.1) et (1.4) avec l'aide des relations constitutives (1.5a) et (1.5b) conduisent à

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{A}) + \epsilon \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J} \\ -\text{div} \left(\mathbf{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

où $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{A})$ et $\nabla^2 \mathbf{A} = \text{div}(\mathbf{grad} \mathbf{A})$. Donc

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \mathbf{grad} \left(\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (1.16)$$

Puisque \mathbf{A} et ϕ sont quelconques, nous pouvons imposer la relation suivante

$$\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

et les équations (1.16) deviennent

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \phi - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (1.18)$$

Par conséquent si le potentiel vecteur \mathbf{A} et le potentiel scalaire ϕ sont connus, alors les champs vectoriels \mathbf{E} et \mathbf{H} peuvent être calculés selon les relations (1.14), (1.15) et (1.17). L'équation (1.17) est appelée la jauge⁸ de Lorentz.

Les solutions des équations (1.18), non homogènes, aux dérivées partielles, sont alors données par

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\mathbf{R}', t - R/v)}{R} dR' \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}', t - R/v)}{R} dR' \end{cases} \quad (1.19)$$

avec

$$R = \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\| \quad (1.20)$$

Comme le montre la figure ci-dessous, le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{R}, t)$ en un point \mathbf{R} de l'espace à l'instant t est proportionnel à la somme des densités de charges $\rho(\mathbf{R}', t - R/v)$ en un point \mathbf{R}' de l'espace retardé du temps R/v . La même remarque est à noter pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$.

⁸Puisque le rotationnel d'un gradient est nul, le potentiel vecteur \mathbf{A} défini par (1.14) est défini à un gradient près. En effet le nouveau potentiel vecteur $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad} \phi_1$ vérifie également (1.14) car $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \phi_1) = \mathbf{0} \nabla \phi_1$. Par conséquent la nouvelle fonction scalaire associée à (1.15) obéit à $\phi' = \phi + \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$. \mathbf{A}' et ϕ' constituent un changement de Jauge.

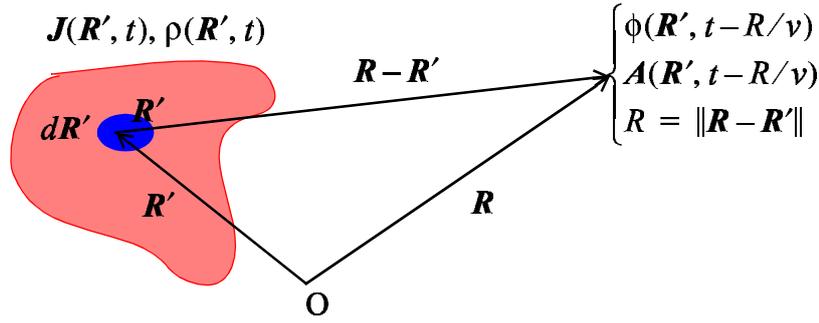


FIG. 1.1 – Illustration des potentiels retardés.

Les formules (1.19) sont par exemple utilisées pour calculer les champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{H} d'un doublet électrique. Un doublet électrique est un fil rectiligne dont la longueur l est très inférieure à la longueur d'onde et qui est parcouru par un courant constant. Il s'agit en fait d'une antenne élémentaire prise comme source de référence mais le plus souvent utilisée pour calculer le champ rayonné par des antennes filaires, considérées comme une succession d'éléments élémentaires dont chacun est un doublet.

1.3 Régime harmonique

1.3.1 Définition

Une OPPM (Onde Plane Progressive Monochromatique ou harmonique) est une fonction périodique spatio-temporelle d'expression *réelle*⁹

$$f(\mathbf{R}, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{v} \right) - \phi \right] = A \cos (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \phi) \quad (1.21)$$

où $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \hat{\mathbf{u}}$ est le vecteur d'onde, ω la pulsation en rad/s, et ϕ un terme de phase constant. En régime harmonique, une OPPM peut donc s'écrire $A \exp[\pm j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \phi)] = A \exp(\pm j\omega t) \exp(\mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \mp \phi)$. La fonction f est alors reconstruite en prenant la partie réelle. Par analogie, une grandeur vectorielle électromagnétique spatio-temporelle $\mathbf{G}(\mathbf{R}, t)$ prend la forme en régime harmonique $\mathbf{G}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{G}_0(\mathbf{R}) \exp(\pm j\omega t)$. Ainsi, pour les calculs, il est plus aisé de travailler avec la fonction exponentielle qu'avec la fonction cosinus. La grandeur physique est alors reconstruite en prenant la partie réelle. Dans ce cours, nous avons choisi la convention $\exp(-j\omega t)$ ¹⁰.

En régime harmonique, l'opérateur dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$ devient alors une multiplication par $-j\omega$. Ainsi les deux premières équations de Maxwell (1.1)-(1.2) s'écrivent

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} + j\omega \mathbf{D} = \mathbf{J} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} - j\omega \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

⁹La solution de l'équation généralement retenue pour l'OPPM étudiée est l'OPP+, car le plus souvent le repère choisi est tel quel l'OPPM incidente étudiée se propage en s'éloignant de l'origine O choisie.

¹⁰Le passage à l'autre convention de temps se fait en prenant le complexe conjugué des grandeurs obtenues.

Remarque : dans (1.22), pour une onde se propageant dans un milieu LHI stationnaire, il est aisé de calculer le rapport du courant de conduction $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (d'après (1.5c)) au courant de déplacement $\mathbf{J}_d = -j\omega \mathbf{D} = -j\omega \epsilon \mathbf{E}$ (d'après (1.5a)). En effet, $|J/J_d| = \sigma/(\omega\epsilon) = \sigma/(2\pi f\epsilon)$, où f est la fréquence de l'onde en Hz. Par exemple pour le cuivre, qui est un très bon conducteur, nous avons $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m et $\epsilon = \epsilon_0$, d'où $|J/J_d| \approx 10^{12}/f$ où f est en MHz. Ainsi dans le domaine des micro-ondes (100 MHz \rightarrow 300 GHz), le courant de conduction reste très largement prépondérant. Pour un très bon diélectrique comme le téflon, nous avons $\sigma = 5.8 \times 10^{-6}$ S/m et $\epsilon = 2\epsilon_0$, d'où $|J/J_d| \approx 10^{-3}/f$ où f est en MHz. Ainsi dans le domaine des micro-ondes, le courant de conduction est négligeable devant de courant de déplacement.

1.3.2 Equation d'Helmholtz

En régime harmonique, l'équation de propagation du champ électromagnétique $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = e^{-j\omega t} \mathbf{E}_0(\mathbf{R})$ dans un milieu dépourvu de charge et de courant devient selon (1.9)

$$(\nabla^2 + \epsilon\mu_0\omega^2)\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

En tenant compte des courants de conduction $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, l'équation ci-dessus devient selon (1.13)

$$(\nabla^2 + [\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega])\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

En posant le nombre d'onde $K = \sqrt{\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega}$, les deux équations ci-dessus peuvent s'écrire

$$(\nabla^2 + K^2)\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (1.26)$$

Cette équation est appelée équation d'Helmholtz dans laquelle l'inconnue $\mathbf{E}_0(\mathbf{R})$ dépend uniquement de la position \mathbf{R} .

En posant $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, le nombre d'onde K peut s'écrire

$$K = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

La solution de (1.26) est alors donnée par (1.12) dans laquelle $K = \omega/v$, conduisant à

$$E(\mathbf{R}, t) = e^{-j\omega t} [\Psi_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) + \Psi_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})] \quad (1.27)$$

où $\mathbf{k} = K\hat{\mathbf{u}}$ ($\|\mathbf{k}\| = K$).

1.3.3 Potentiels retardés

Dans le cas où $\rho \neq 0$, $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$, nous avons vu que le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$ et le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{R}, t)$ étaient donnés par les équations (1.19). En régime harmonique elles se simplifient comme

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} e^{-j\omega(t+\frac{R}{v})} \iiint \frac{\rho(\mathbf{R}')}{R} dR' \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-j\omega(t+\frac{R}{v})} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} dR' \end{cases}$$

1.4 Conditions aux limites

Nous avons présenté précédemment les équations de Maxwell qui sont des équations *locales* ; or il peut être intéressant, dans certaines configurations, de connaître le comportement des champs au passage d'une surface de discontinuité (comme la jonction entre deux matériaux différents). Les relations de continuité à une interface sont rappelées ici sans démonstration.

Soit une surface S séparant un milieu (1) d'un milieu (2) et $\hat{\mathbf{n}}$ la normale à la surface orientée arbitrairement de (1) vers (2). Les relations de continuité s'écrivent alors

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \quad (1.28a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad (1.28b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.28c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad (1.28d)$$

\mathbf{J}_S est la densité de courant surfacique électrique et ρ_S est la densité de charge surfacique électrique. nous avons donc

- *continuité* de la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} et de la composante normale de l'induction magnétique \mathbf{B} .
- *discontinuité* de la composante normale de l'induction électrique \mathbf{D} mesurée par la densité de charge de surface ρ_S et de la composante tangentielle du champ magnétique \mathbf{H} mesurée par la densité de courant superficielle \mathbf{J}_S .

Si les milieux 1 et 2 sont des diélectriques parfaits, alors $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$ et $\rho_S = 0$.

1.5 Onde plane

Dans cette section, nous rappelons les propriétés d'une onde plane.

1.5.1 Concept de l'onde plane

Physiquement une onde plane n'existe pas. Par contre l'onde peut être assimilée comme *localement* plane. La notion d'onde plane est étroitement liée à la notion de champ lointain. En effet, dans le cas général l'onde émanant d'une source peut être modélisée comme une onde sphérique, dont la densité de puissance est répartie sur une sphère de rayon r . En champ lointain ($r \rightarrow \infty$), un récepteur (antenne) va mesurer la puissance transportée par cette onde, qui pourra être considérée comme localement plane puisque en champ lointain, la courbure locale de la sphère peut être assimilée à un plan.

Remarque : En coordonnées cartésiennes, les opérateurs **rot** et **div** s'écrivent à partir de l'opérateur nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$ comme

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

1.5.2 Onde plane progressive monochromatique

Nous supposons un milieu LHI stationnaire assimilé au vide (perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$, permittivité diélectrique $\epsilon = \epsilon_0$, absence de charge $\rho = 0$ et de courant $\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

En régime harmonique une solution possible de l'équation d'Helmholtz donnée par (1.27) est l'onde *plane progressive monochromatique*. Elle est définie par $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R})}$, où \mathbf{E}_0 est un vecteur constant qui donne la polarisation de l'onde et \mathbf{k}_0 désigne le vecteur d'onde dans le vide.

L'opérateur ∇ est équivalent alors à $+j\mathbf{k}_0$. Par conséquent $\mathbf{rot} \mathbf{A} = j\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{A}$ et $\text{div} \mathbf{A} = j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{A}$. D'après (1.4) et (1.5a), et (1.3) nous avons donc

$$j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_0 \perp \mathbf{E}$$

$$j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_0 \perp \mathbf{B}$$

Ces deux relations montrent que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont transverses à la direction de propagation portée par \mathbf{k}_0 . Puisque $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R})}$ est solution de l'équation d'Helmholtz, selon (1.24) le nombre d'onde K_0 doit vérifier l'équation de dispersion suivante

$$-K_0^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \Rightarrow K_0 = \pm \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

La solution physique correspond à une onde incidente, d'où $K_0 = +\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

D'après (1.1) et (1.5a), nous avons

$$j\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{H} = -j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H} \wedge \mathbf{k}_0 = \omega \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.29)$$

qui montre que le triplet $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}_0)$ forme un trièdre direct (règle de la main droite). De plus, selon (1.29), nous avons

$$\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{k}_0\| = \omega \epsilon_0 \|\mathbf{E}\| \Rightarrow Z_0 = \frac{E}{H} = \frac{\|\mathbf{k}_0\|}{\omega \epsilon_0} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\omega \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

où Z_0 est l'impédance d'onde du vide en ohm et $Z_0 \approx 120\pi \Omega$. Elle est réelle et positive dans le vide; les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont donc en phase.

Par exemple si nous considérons une onde plane progressive monochromatique rectiligne polarisée selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ et se propageant selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$, alors $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-j(\omega t - K_0 z)}$ où $\mathbf{k}_0 = K_0 \hat{\mathbf{z}}$. Le champ magnétique s'écrit alors $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-j(\omega t - K_0 z)} / Z_0$. Dans un plan d'onde donné défini par $K_0 z = cste$, le module du champ est alors constant. L'onde est dite homogène car les plans iso-phase et iso-amplitude sont confondus. La vitesse de l'onde est définie par $v_0 = c = \omega / K_0 = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \times 10^8$ m/s.

1.5.3 Propagation dans un milieu conducteur

Nous supposons un milieu LHI stationnaire dans lequel la perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$ (milieu non magnétique), la permittivité électrique $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ avec ϵ_r réel, en absence de charge $\rho = 0$ mais $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$. Par rapport au cas précédent, nous allons montrer que le vecteur d'onde \mathbf{k} est complexe et nous donnerons la signification physique de sa partie imaginaire.

En régime harmonique une solution possible de l'équation d'Helmholtz donnée par (1.27) est $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$, où \mathbf{E}_0 est un vecteur constant qui donne la polarisation de l'onde et \mathbf{k} désigne le vecteur d'onde. D'après (1.4) et (1.5a), et (1.3) nous avons

$$j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E}$$

$$j\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{B}$$

Ces deux relations montrent que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont transverses à la direction de propagation portée par \mathbf{k} . Puisque $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$ est solution de l'équation d'Helmholtz, selon (1.25) le nombre d'onde K doit vérifier l'équation de dispersion suivante

$$-K^2 + (\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega) = 0 \Rightarrow K = \pm \sqrt{\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega}$$

La solution physique correspond à la solution qui donne une partie imaginaire *positive*. En effet si on pose $\mathbf{k} = K\hat{\mathbf{u}} = (a + jb)\hat{\mathbf{u}}$, nous avons $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - a\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R})} \times e^{-b\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}$. Puisque le module du champ, donné par $|\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)| = \mathbf{E}_0 e^{-b\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R}}$, est une grandeur finie, nous devons avoir $b \geq 0$ avec $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R} \geq 0$. Il est alors aisé de montrer que la solution physique est :

$$K = +\sqrt{\epsilon\mu_0\omega^2 + j\mu_0\sigma\omega} = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = K_0 \times n$$

où $K_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ (nombre d'onde dans le vide) et

$$n = \sqrt{\epsilon_r}\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

La quantité n désigne l'*indice de réfraction* du milieu qui est complexe. En effet, par définition $n = c/v$, où c est la célérité de l'onde dans le vide. Donc $n = \frac{\omega}{K_0} \frac{K}{\omega} = \frac{K}{K_0}$. On remarque que l'indice de réfraction est fonction de la fréquence à travers sa partie imaginaire. Le milieu est dit *dispersif*. A noter que ϵ_r et σ peuvent également dépendre de la fréquence. Dans le cas du vide ($\sigma = 0$), $n = \sqrt{\epsilon_r} = 1$. Par analogie, nous pouvons définir une permittivité relative complexe par

$$\epsilon_{r1} = n^2 = \epsilon_r + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \epsilon_r + j\frac{18\sigma}{f} \text{ avec } \begin{cases} \sigma \text{ en S/m} \\ f \text{ en GHz} \end{cases} \quad (1.30)$$

D'après (1.1) et (1.5c), nous avons

$$j\mathbf{k} \wedge \mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H} \wedge \mathbf{k} = (\omega\epsilon + j\sigma)\mathbf{E} \quad (1.31)$$

qui montre que le triplet $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k})$ forme un trièdre direct. De plus, selon (1.31), nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{k}\| = \omega(\epsilon + j\sigma) \|\mathbf{E}\| \Rightarrow Z &= \frac{E}{H} = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\omega\epsilon + j\sigma} & (1.32) \\ &= \frac{K_0 n}{\omega\epsilon + j\sigma} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}n}{\omega\epsilon\left(1 + \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)} = \frac{\epsilon_r\sqrt{\epsilon_0\mu_0}n}{n^2\epsilon} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n} = \frac{Z_0}{n} \end{aligned}$$

où Z est l'impédance d'onde en ohm. Le module de Z donne le rapport du module de $|E/H|$ et l'argument de Z donne le déphasage entre E et H . Contrairement au vide, Z est complexe. Par exemple si nous considérons une onde plane progressive monochromatique rectiligne polarisée selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ et se propageant selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$, alors $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = E_0\hat{\mathbf{x}}e^{-j(\omega t - Kz)}$ où $\mathbf{k} = K\hat{\mathbf{z}}$. Le champ magnétique s'écrit alors $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = E_0\hat{\mathbf{y}}e^{-j(\omega t - Kz)}/Z$, soit $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = (E_0/|Z|)\hat{\mathbf{y}}e^{-j(\omega t - Kz - \phi)}$ où $\phi = \arg(Z)$.

1.5.4 Epaisseur de peau

Revenons sur la signification physique d'un nombre d'onde K complexe. Nous avons montré, que l'onde plane pouvait se mettre sous la forme suivante

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - K_0 n \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R})} = \mathbf{E}_0 e^{-j(\omega t - K_0 n_r \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R})} \times e^{-K_0 n_i \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}} \quad \text{avec } n = n_r + j n_i. \quad (1.33)$$

où $\hat{\mathbf{k}} = K_0 n \hat{\mathbf{u}}$. Les parties réelle, n_r , et imaginaire, n_i , de l'indice de réfraction, n , sont données par

$$\begin{cases} n_r = \sqrt{\epsilon_r} \Re e \left(\sqrt{1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \right) \\ n_i = \sqrt{\epsilon_r} \Im m \left(\sqrt{1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \right) \end{cases}$$

n_r et n_i sont calculées en résolvant l'équation $(n_r + j n_i)^2 = \epsilon_r (1 + j \beta)$ avec $\beta = \sigma / (\omega \epsilon)$. Cette équation est équivalente au système suivant $\{n_r^2 - n_i^2 = \epsilon_r \text{ et } 2n_r n_i = \epsilon_r \beta\}$. En résolvant une équation du second degré en n_r^2 , on obtient alors $2n_r^2 = \epsilon_r \pm \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}$. La solution physique correspond au signe + car $n_r \in \mathbb{R}^+$, d'où $2n_r^2 = \epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}$ et $\sqrt{2}n_r = +\sqrt{\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}$. En appliquant le même raisonnement pour $n_i \in \mathbb{R}^+$, on montre $\sqrt{2}n_i = \sqrt{-\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}$. En conclusion

$$\begin{cases} n_r = \frac{\sqrt{+\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+ \\ n_i = \frac{\sqrt{-\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_r^2 + \beta^2}}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Par exemple pour le cuivre, qui est un très bon conducteur, nous avons $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m et $\epsilon = \epsilon_0$, d'où $\beta \approx 10^{12}/f$ où f est en MHz. Ainsi dans le domaine des micro-ondes (100 MHz \rightarrow 300 GHz), $\beta \gg 1$, et $n_r \approx n_i \approx \sqrt{\beta/2} = 0.7 \times 10^6 / \sqrt{f}$. De plus, l'impédance d'onde devient $Z \approx Z_0 / \sqrt{+j\beta} \approx e^{-j\pi/4} Z_0 / \sqrt{\beta}$ qui implique que $H = \|\mathbf{H}\|$ et $E = \|\mathbf{E}\|$ sont déphasés de $-\pi/4$ et que $|E| \ll |H|$ puisque $Z \ll 1$ ($\beta \gg 1$).

Pour une onde polarisée selon $\hat{\mathbf{x}}$ se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$, le module de (1.33) s'écrit $E_0 \hat{\mathbf{x}} \exp(-K_0 n_i z)$. L'épaisseur de peau, δ , correspond à la distance au bout de laquelle le module du champ normalisé, $\hat{\mathbf{x}} \exp(-K_0 n_i z)$, est atténuée de $1/e \approx 0.37$, soit $K_0 n_i \delta = 1$. En conclusion

$$\delta = \frac{1}{K_0 n_i} = \frac{\lambda_0}{2\pi n_i}$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Pour un milieu très conducteur comme le cuivre, $n_i \approx \sqrt{\beta/2} \gg 1$ donc $\delta/\lambda_0 \ll 1$ pour des fréquences micro-ondes. Pour une mer peu salée, n_i est de l'ordre 10^{-9} pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$, d'où $\delta \approx 1.6 \times 10^8 \lambda_0 \approx 80$ mètres. Ceci explique qu'en deçà d'une centaine de mètres, les rayons du soleil ne pénètrent plus.

1.5.5 Réflexion et réfraction par une surface plane *infinie*

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au comportement d'une onde monochromatique plane illuminant une surface plane supposée *infinie* et d'indice de réfraction différent de celui où l'onde est émise.

1.5.5.1 Relations de Snell-Descartes

Considérons une onde monochromatique plane qui tombe sur une surface plane *infinie* séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 (voir figure 1.2). Cette onde, d'expression $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i}e^{-j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R})}$ se décompose en deux ondes de pulsations et de vecteurs d'onde différents : l'une est l'onde réfléchie $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r}e^{-j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{R})}$, l'autre est l'onde transmise $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t}e^{-j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R})}$.

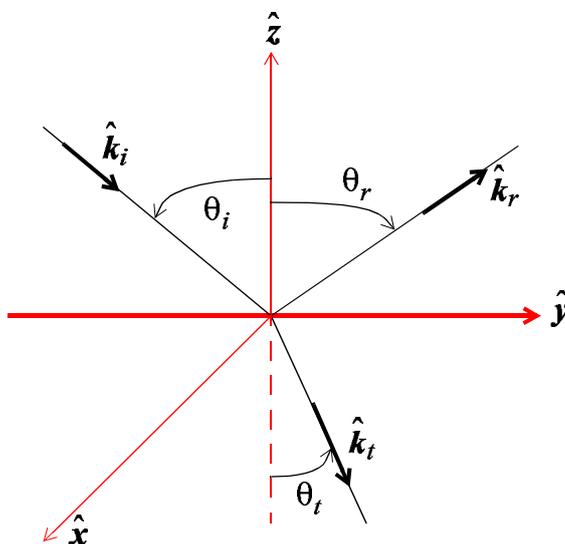


FIG. 1.2 – Lois de Snell-Descartes.

Pour qu'une relation entre les amplitudes de ces trois ondes puisse exister, en tout point \mathbf{R} de la surface de séparation et à tout instant t , il est nécessaire que les termes de phase soient égaux¹¹. Il en résulte que

$$\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R} = \omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{R} = \omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R} \quad \forall (\mathbf{R} \in S, t)$$

Soit

$$\omega_i t - k_{ix}x + k_{iy}y = \omega_r t - k_{rx}x + k_{ry}y = \omega_t t - k_{tx}x + k_{ty}y$$

avec $\mathbf{R} = (x, y, z)$ et $\mathbf{k}_{i,r,t} = (k_{ix,rx,tx}, k_{iy,ry,ty}, k_{iz,rz,tz})$ puisque pour $\mathbf{R} \in S$, $z = 0$. En notant que \mathbf{k}_i est dans le plan $(y0z)$ ($k_{ix} = 0$), $\forall (x, y, t)$, l'équation précédente devient

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \\ k_{ix} = 0 = k_{rx} = k_{tx} \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \end{cases}$$

¹¹Ceci traduit la continuité de la composante tangentielle du champ électrique $\forall (\mathbf{R} \in S, t)$, où S est la surface.

La première équation implique qu'il y a *invariance* de la pulsation. La seconde relation montre que les plans d'incidence, de réflexion et de transmission formés respectivement par les vecteurs $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{k}_i)$, $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{k}_r)$ et $(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{k}_t)$ sont *confondus*. D'après la figure 1.2, la troisième relation implique

$$K_i \sin \theta_i = K_r \sin \theta_r = K_t \sin \theta_t$$

De plus $K_i = K_r$ car le milieu de propagation est identique et $K_{i,t} = K_0 n_{1,2}$. Donc

$$\begin{cases} \theta_r = +\theta_i \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \end{cases}$$

1.5.5.2 Coefficients de Fresnel

a) Polarisation horizontale : \mathbf{E} transverse

Le cas où le champ électrique \mathbf{E} est transverse (orthogonal au plan d'incidence) à la direction de propagation \mathbf{k}_i est tout d'abord considéré. On parle alors de polarisation *horizontale* ou *TE*.

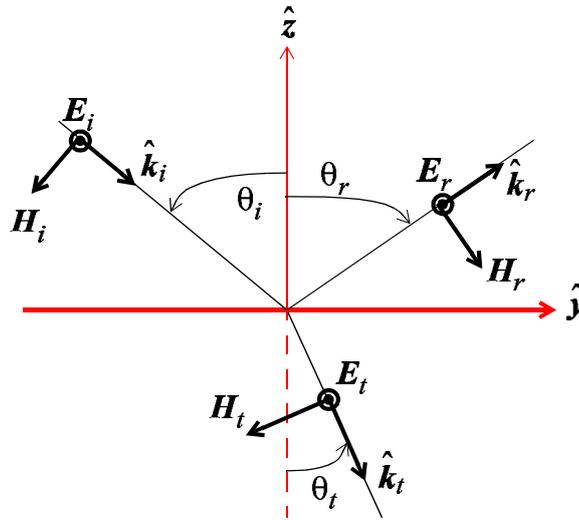


FIG. 1.3 – Coefficients de Fresnel en polarisation TE pour deux milieux de même perméabilité magnétique.

Il est à noter sur la figure 1.3, que les vecteurs $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ doivent former un trièdre direct. D'après les relations (1.28a) et (1.28c), il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique sur l'interface $\forall (t, y)$. Donc

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ -H_{0i} \cos \theta_i + H_{0r} \cos \theta_r = -H_{0t} \cos \theta_t \end{cases}$$

De plus, d'après (1.32), $H = E/Z = nE/Z_0$, d'où $H_{0i} = n_1 E_{0i}/Z_0$, $H_{0r} = n_1 E_{0r}/Z_0$ et

$H_{0t} = n_2 E_{0t} / Z_0$. Par conséquent avec $\theta_i = \theta_r$

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ E_{0i} - E_{0r} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} E_{0t} \end{cases}$$

En posant $\mathcal{R}_\perp = E_{0r}/E_{0i}$ et $\mathcal{T}_\perp = E_{0t}/E_{0i}$, on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\perp = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \\ \mathcal{T}_\perp = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \end{cases} \quad (1.34)$$

\mathcal{R}_\perp et \mathcal{T}_\perp désignent respectivement les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission en polarisation TE. En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, nous pouvons exprimer les coefficients de Fresnel en fonction de θ_i par

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\perp = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ \mathcal{T}_\perp = 1 + \mathcal{R}_\perp = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \end{cases}$$

b) Polarisation verticale : H transverse

Dans ce cas, c'est le champ magnétique qui est transverse à la direction de propagation. On parle alors de polarisation *verticale* ou *TM*.

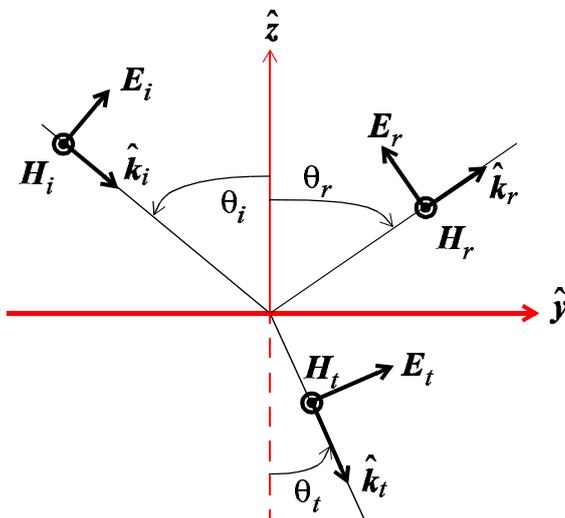


FIG. 1.4 – Coefficients de Fresnel en polarisation TM pour deux milieux de même perméabilité magnétique.

En appliquant le même raisonnement que dans le cas TE, nous avons

$$\begin{cases} H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \\ E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} E_{0t} \\ E_{0i} - E_{0r} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} E_{0t} \end{cases}$$

En posant $\mathcal{R}_{//} = E_{0r}/E_{0i}$ et $\mathcal{T}_{//} = E_{0t}/E_{0i}$, on obtient au final

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{//} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ \mathcal{T}_{//} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i) \sin(\theta_i - \theta_t)} \end{cases} \quad (1.35)$$

$\mathcal{R}_{//}$ et $\mathcal{T}_{//}$ désignent respectivement les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission en polarisation TM. En utilisant la loi de Snell-Descartes, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, nous pouvons exprimer les coefficients de Fresnel en fonction de θ_i par

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{//} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \\ \mathcal{T}_{//} = \frac{n_1}{n_2} (1 + \mathcal{R}_{//}) = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \end{cases}$$

c) Discussion sur les formules de Fresnel

Pour des incidences proches de la normale, (θ_i proche de zéro), nous avons $\sin \theta_i \approx \theta_i$ et $\sin \theta_t \approx n_1 \theta_i / n_2 \approx \theta_t$. Par conséquent les coefficients de Fresnel en réflexion deviennent selon (1.34) et (1.35)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\theta_t - \theta_i}{\theta_t + \theta_i} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ \mathcal{R}_{//} \approx -\mathcal{R}_{\perp} \end{cases}$$

Dans le cas air ($n_1 = 1$)-verre ($n_2 = 1.5$), $\mathcal{R}_{\perp} = -0.2$ et $\mathcal{R}_{//} = 0.2$. Ceci signifie qu'en polarisation TE, il y a retournement du champ puisque $\mathcal{R}_{\perp} < 0$.

Pour des incidences rasantes, $\theta_i = \pi/2$ nous avons selon (1.34) et (1.35)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \pi/2)}{\sin(\theta_t + \pi/2)} = -\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_t} = -1 \\ \mathcal{R}_{//} = \frac{\tan(\pi/2 - \theta_t)}{\tan(\pi/2 + \theta_t)} = -\frac{\cot \theta_t}{\cot \theta_t} = -1 \end{cases}$$

Les figures 1.5 et 1.6 représentent les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission selon les polarisations TM ($\mathcal{R}_{//}, \mathcal{T}_{//}$) et TE ($\mathcal{R}_{\perp}, \mathcal{T}_{\perp}$) pour une interface air-verre.

On observe, qu'en polarisation verticale (cas TM), $\mathcal{R}_{//}$ passe par zéro. D'après (1.35), l'angle correspondant vérifie $\theta_{iB} + \theta_{tB} = \pi/2$ (changement de signe du dénominateur) soit $\theta_{tB} = \pi/2 - \theta_{iB}$. Or $n_1 \sin \theta_{iB} = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_{iB}) = n_2 \cos \theta_{iB}$, soit

$$\tan \theta_{iB} = n_2/n_1$$

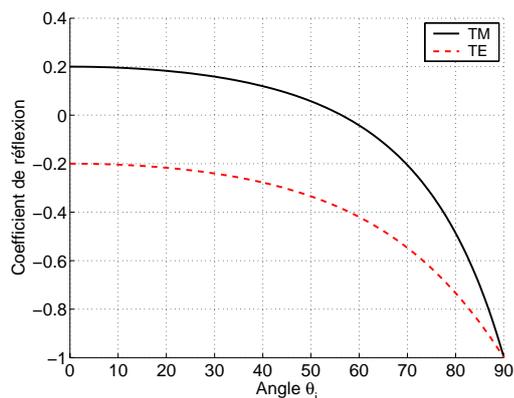


FIG. 1.5 – Coefficient de réflexion d’une surface plane en polarisations TE et TM dans le cas où $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$.

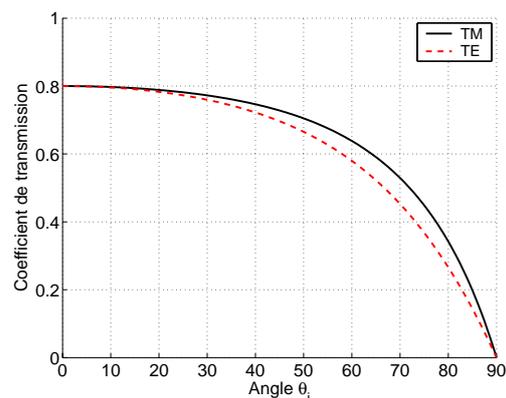


FIG. 1.6 – Coefficient de transmission d’une surface plane en polarisations TE et TM dans le cas où $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$.

θ_{iB} est appelé l’*angle de Brewster*. Dans le cas d’une interface air-verre, il vaut 56.3 degrés. Pour cet angle particulier, $\mathcal{T}_{//}(\theta_{iB}) \neq 0$, $\mathcal{T}_{\perp}(\theta_{iB}) \neq 0$ et $\mathcal{R}_{\perp}(\theta_{iB}) \neq 0$, tandis que $\mathcal{R}_{//}(\theta_{iB}) = 0$. Cette propriété est alors utilisée dans des dispositifs optiques pour générer des polarisations particulières. Il est à noter que lorsque n_1 ou/et n_2 sont complexes les coefficients de Fresnel sont également complexes.

Lorsque $n_1 > n_2$ (passage d’un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent), nous pouvons calculer un angle d’incidence limite, θ_{iL} , pour lequel l’angle de transmission vaut $\theta_t = \pi/2$. Soit $\sin \theta_{iL} = n_2/n_1 \leq 1$. Pour une interface verre-air, il vaut 42 degrés. Comme le montrent les figures 1.7-1.10, au delà de cet angle, les coefficients de Fresnel deviennent complexes. De plus, on note que les parties réelle et imaginaire des coefficients de transmission en polarisations TE et TM peuvent être supérieures à 1. En fait, il faut raisonner non pas sur les coefficients de Fresnel en champ mais en puissance. En effet, dans ce cas les coefficients de Fresnel en puissance (rapport de deux puissances), s’écrivent

$$\begin{cases} R_{\perp} = \mathcal{R}_{\perp}^2 \\ T_{\perp} = \mathcal{T}_{\perp}^2 \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t} \end{cases}$$

en polarisation TE et

$$\begin{cases} R_{//} = \mathcal{R}_{//}^2 \\ T_{//} = \mathcal{T}_{//}^2 \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t} \end{cases}$$

en polarisation TM. A partir des relations (1.34) et (1.35), nous pouvons alors montrer $R_{\perp, //} + T_{\perp, //} = 1$ traduisant la conservation de l’énergie.

1.5.6 Onde évanescente ou onde de surface

Lorsque $n_1 > n_2$ et $\theta_i > \theta_{iL}$, nous allons montrer qu’une onde de surface se propage le long de la surface en calculant la structure de l’onde transmise.

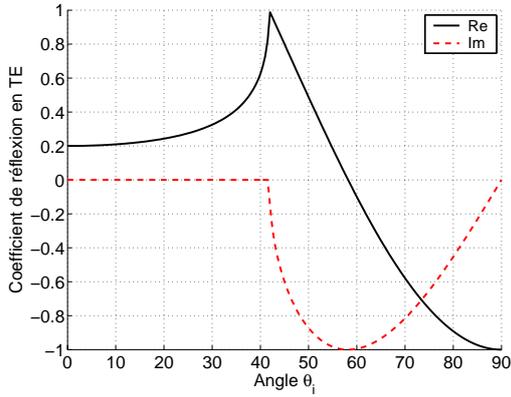


FIG. 1.7 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **réflexion** d'une surface plane en polarisations **TE** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

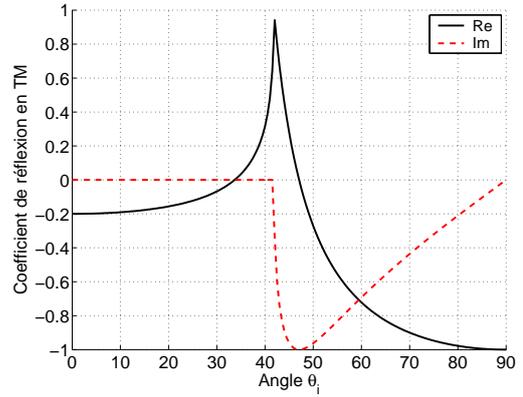


FIG. 1.8 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **réflexion** d'une surface plane en polarisations **TM** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

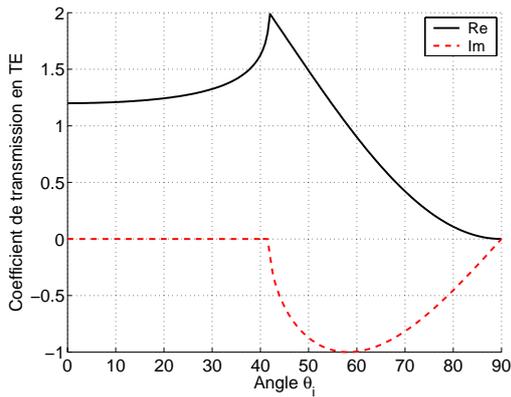


FIG. 1.9 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **transmission** d'une surface plane en polarisations **TE** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

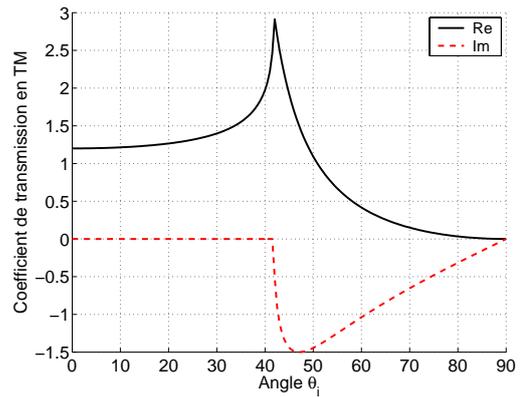


FIG. 1.10 – Parties réelle et imaginaire du coefficient de **transmission** d'une surface plane en polarisations **TM** dans le cas où $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

L'onde se propageant dans le milieu 2 s'écrit $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R})}$. Or d'après la figure 1.2, $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R} = K_t(y \sin \theta_t - z \cos \theta_t) = K_0 n_2 (y \sin \theta_t - z \cos \theta_t)$. Dans la suite on supposera que n_2 est réel. Or $\sin \theta_t = \sin \theta_i / n_{21} > 1$ pour $\theta_i > \theta_{iL}$, où $n_{21} = n_2 / n_1 < 1$ et $1/n_{21} > 1$. Par conséquent, $\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i / n_{21}^2} = \pm j \sqrt{\sin^2 \theta_i / n_{21}^2 - 1}$. En retenant la solution physique donnée par le signe $-$, le produit scalaire $+j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R}$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} +j \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{R} &= +j K_0 n_2 \left(y \frac{\sin \theta_i}{n_{21}} + j z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{21}^2} - 1} \right) \\ &= K_0 n_2 \left(+j y \frac{\sin \theta_i}{n_{21}} - z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{21}^2} - 1} \right) \end{aligned}$$

La structure de l'onde transmise s'écrit donc

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \exp\left(-\frac{z}{\delta'}\right) \exp[-j(\omega t - yK'_t)]$$

avec

$$\begin{cases} K'_t = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_i \in \mathbb{R}^+ \\ \delta' = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Il s'agit d'une onde qui se propage à la vitesse de $c/(n_1 \sin \theta_i)$ le long de l'interface entre les deux milieux, puisque la variation de phase n'a lieu que selon l'axe des y . De plus, l'amplitude de l'onde diminue exponentiellement lorsqu'on s'écarte de l'interface selon l'axe des z . Cette onde est appelée *onde évanescente* ou *onde de surface*.

Pour des incidences rasantes, la profondeur de pénétration, δ' , devient $\delta' = \lambda_0 / (2\pi \sqrt{n_1^2 - n_2^2}) = 0.14\lambda_0$ pour une interface verre-air. Pour de l'eau douce à $f = 0.675$ MHz, $\sigma = 3 \times 10^{-3}$ S/m, $\epsilon_r = 80$, qui implique selon (1.30) que $\epsilon_{r1} = 80 - 80j$ soit $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}} = 9.8 - 4.1j$. Ainsi, δ' est de l'ordre de $\lambda_0 / [2\pi \Re(n_1)] = 0.016\lambda_0 = 7.2$ mètres pour $\theta_i = \pi/2$. Les radars côtiers observent à très basse altitude (d'une dizaine de mètres) et sous des incidences très rasantes de l'ordre de 1 à 5 degrés par rapport à l'horizontale. Par conséquent une onde de surface rétro-diffusée (direction anti-spéculaire $\theta_s = -\theta_i$) par une surface de mer peut contribuer à la puissance reçue par le radar. D'ailleurs de nombreux travaux de recherche sont en cours sur cette problématique ardue du fait que la surface de mer est rugueuse et que la condition d'onde quasi-plane n'est pas valide.

Puisque les coefficients de réflexion sont complexes, le champ réfléchi a donc un déphasage par rapport au champ incident, qui dépend de la polarisation utilisée. Il en résulte qu'une onde incidente à polarisation rectiligne, non située dans le plan d'incidence, va se transformer après réflexion totale, en une onde réfléchie à polarisation elliptique puisque les composantes TE et TM de cette onde, sont déphasées l'une par rapport aux autres.

2 Equations intégrales

Les équations de Maxwell sont des équations locales, c'est-à-dire qu'elles expriment les champs électromagnétiques en fonction des sources en tout point de l'espace. Dans les deux paragraphes suivants, ces relations locales vont être transformées en intégrales de surface qui vont nous conduire aux équations intégrales. Tout d'abord, le problème plan est étudié (à 2 dimensions) où les champs peuvent être traités comme des scalaires, puis le formalisme est étendu au cas tridimensionnel où les champs électromagnétiques deviennent des grandeurs vectorielles.

Nous supposons dans ce chapitre des milieux LHI non-magnétiques, stationnaire de perméabilité magnétique μ et de permittivité diélectrique ϵ .

2.1 Cas d'un problème à deux dimensions : cas *scalaire*

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème plan (ou à deux dimensions) en se focalisant plus précisément sur la diffraction par une surface ouverte ou fermée. Dans ce cas, les champs électromagnétiques peuvent être traités comme des grandeurs *scalaires*.

Sur le plan pédagogique, les équations pour un problème 2D sont beaucoup plus simples que pour un problème 3D. En effet, les grandeurs impliquées sont scalaires et donc les opérations vectorielles sont simples à réaliser. Physiquement, cela signifie que l'onde incidente n'est pas dépolarisée ; c.a.d que si l'onde incidente est TE (respectivement TM), l'onde diffractée par la surface restera TE (respectivement TM). A contrario, pour un problème 3D, un champ incident TE ou TM peut donner naissance à un champ diffracté possédant deux composantes TE et TM. L'onde incidente a donc subi une dépolarisation.

2.1.1 Fonction de Green

Dans cette section nous allons nous intéresser à la fonction de Green qui joue un rôle essentiel dans la résolution de l'équation de propagation. Elle correspond physiquement au rayonnement d'une source ponctuelle.

Considérons un opérateur intégral-différentiel *linéaire* $\mathcal{L}[\bullet]$ et l'équation avec second membre suivante :

$$\mathcal{L}[f(\mathbf{R})] = h(\mathbf{R}) \quad (2.1)$$

où $f(\mathbf{R})$ et $h(\mathbf{R})$ sont deux fonctions de la variable spatiale \mathbf{R} . Nous montrerons que les équations intégrales peuvent se mettre sous cette forme, où la fonction $h(\mathbf{R})$ correspond aux sources (champ

incident) et $f(\mathbf{R})$ n'est autre que l'inconnue, c'est-à-dire le champ diffracté par l'objet. De plus, l'opérateur \mathcal{L} sera construit à partir de l'équation de propagation.

La fonction de Green scalaire, $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$, associée à cette équation est définie par :

$$\mathcal{L} [g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.2)$$

où δ est la fonction de Dirac. La fonction de Green est donc définie comme la réponse impulsionnelle de l'opérateur \mathcal{L} . Les fonctions de Green dépendent toujours de deux vecteurs position \mathbf{R} et \mathbf{R}' , appelés respectivement point source et point d'observation. Il est à noter que l'opérateur $\mathcal{L}[\bullet]$ opère uniquement sur \mathbf{R} .

La fonction de Green est connue pour un grand nombre d'opérateurs différentiels, et joue un grand rôle en mathématiques pour la théorie des équations différentielles puisque sa connaissance suffit à résoudre toute forme de solution particulière associée à l'équation différentielle de départ. En effet, à partir de l'équation (2.1) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}) &= \mathcal{L}^{-1} [h(\mathbf{R})] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\int \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') h(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \right] \\ &= \int \mathcal{L}^{-1} [\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] h(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \\ &= - \int g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') h(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \end{aligned} \quad (2.3)$$

En résumé, la solution recherchée $f(\mathbf{R})$ est formulée à l'aide de la fonction donnée $h(\mathbf{R})$ et de la fonction de Green adaptée au problème étudié.

2.1.2 Application sur l'équation d'Helmholtz

D'après les équations (1.1) et (1.2) et les relations constitutives (1.5a) et (1.5b), nous avons en régime harmonique avec la convention $e^{-j\omega t}$ ($\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$)

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} - j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$$

Par conséquent, $\mathbf{H} = +\mathbf{rot}\mathbf{E}/(j\omega\mu)$. En reportant cette équation dans (2.4) et en notant $\mathbf{rot}\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, nous obtenons

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - K^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.5)$$

où $K = \omega^2\mu\epsilon$ est le nombre d'onde dans le milieu considéré. Pour un milieu dépourvu de densité de charge volumique ($\rho = 0$), nous avons d'après (1.4), $\text{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon = 0$. D'où $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} + \mathbf{grad}\text{div}\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$ et l'équation ci-dessus devient

$$\nabla^2\mathbf{E} + K^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.6)$$

Nous retrouvons l'équation de Helmholtz où le terme de droite de l'égalité est différent de zéro. En projetant cette équation dans la base cartésienne $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, l'équation de propagation devient

$$(\nabla^2 + K^2)\psi = -j\omega\mu J \quad (2.7)$$

où $\psi = \{E_x, E_y, E_z\}$ et $J = \{J_x, J_y, J_z\}$ sont des scalaires.

Cette équation non homogène est résolue en utilisant la fonction de Green solution de (2.7) en remplaçant le terme de droite de l'égalité par la fonction de Dirac $-\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ et en posant $\mathcal{L} = \nabla^2 + K^2$. Selon la dimension du problème à traiter elle est donnée dans le tableau 2.1. D'après (2.3), la solution de (2.7) s'écrit

$$\psi(\mathbf{R}) = -j\omega\mu \int g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') J(\mathbf{R}') dR'$$

Opérateurs	Laplace ∇^2	Helmholtz $\nabla^2 + K^2$	Helmholtz modifié $\nabla^2 - K^2$
1 dimension ($\mathbf{R} \equiv z\hat{\mathbf{z}}$)	Pas de solution	$\frac{j}{2K} \exp(jK z - z')$	$\frac{1}{2K} \exp(-K z - z')$
2 dimensions ($\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$)	$-\frac{1}{2\pi} \ln \ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ $	$\frac{j}{4} H_0^{(1)}(K \ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\)$	$\frac{1}{2\pi} K_0(K \ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\)$
3 dimensions ($\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$)	$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\ }$	$\frac{\exp(jK\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\)}{4\pi\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\ }$	$\frac{\exp(-K\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\)}{4\pi\ \mathbf{R} - \mathbf{R}'\ }$

TAB. 2.1 – Fonctions de Green pour différents opérateurs \mathcal{L} . La fonction de Green satisfait la condition aux limites $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = 0$ lorsque $\|\mathbf{R}\| \rightarrow \infty$ pour les opérateurs de Laplace et de Helmholtz modifié. Pour l'opérateur de Helmholtz, $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ correspond à une onde réfléchie. $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel du premier type et d'ordre zéro et $K_0(x) = \frac{j\pi}{2} H_0^{(1)}(jx)$.

La fonction de Hankel du premier type et d'ordre zéro, $H_0^{(1)}(x)$, est représentée sur la figure 2.1 en fonction de $x > 0$. Pour $x \gg 1$, elle se comporte comme une fonction circulaire. En effet, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \exp\left[j\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.8)$$

De plus, on peut noter que l'équation de son enveloppe s'écrit $\sqrt{\frac{2}{x\pi}} \propto \sqrt{\frac{1}{x}}$, caractéristique d'une onde *cylindrique*.

2.1.3 Polarisation TE et TM et conditions aux limites

Soit $\hat{\mathbf{n}}$ la normale à la surface contenue dans le plan $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ (problème à deux dimensions) et séparant deux milieux de même perméabilité magnétique.

- En polarisation TE (Transverse électrique où le champ électrique est normal au plan d'incidence, voir figure 1.3 du chapitre 1), le champ électrique s'écrit dans le milieu supérieur $\mathbf{E} = \psi\hat{\mathbf{x}}$. Or $\text{rot}\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$, d'où

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla \psi$$

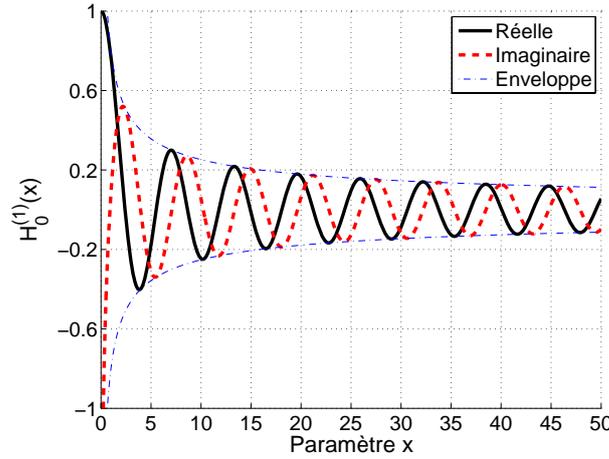


FIG. 2.1 – Parties réelle et imaginaire de la fonction de Hankel $H_0^{(1)}(x)$ en fonction de $x > 0$. Il est également représenté son enveloppe.

et sachant que $\mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3)\mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi) = -\frac{1}{j\omega\mu} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi)\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\nabla\psi] \\ &= -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{j\omega\mu} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi) \end{aligned}$$

Dans le milieu inférieur nous avons les mêmes relations pour \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 et ψ_1 où l'indice 1 correspond aux grandeurs définies dans le milieu inférieur. Les conditions aux limites sur l'interface nous indique qu'il y a continuité des champs électrique et magnétique tangentiels d'où

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi_1(\mathbf{r}) \text{ avec } \mu = \mu_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

• En polarisation TM (Transverse Magnétique où le champ magnétique est normal au plan d'incidence, voir figure 1.4 du chapitre 1), le champ magnétique s'écrit dans le milieu supérieur $\mathbf{H} = \psi\hat{\mathbf{x}}$. Or $\text{rot}\mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{E}$, d'où

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \wedge \mathbf{H} = +\frac{1}{j\omega\epsilon} \hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi$$

et sachant que $\mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3)\mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{n}} &= +\frac{1}{j\omega\epsilon} (\hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi) \wedge \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{x}} \wedge \nabla\psi) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi)\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\nabla\psi] \\ &= -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{j\omega\epsilon} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi) \end{aligned}$$

De plus, dans le milieu inférieur $\mathbf{H}_1 = \psi_1\hat{\mathbf{x}}$ d'où

$$\mathbf{E}_1 \wedge \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{j\omega\epsilon_1} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\psi_1)$$

Les conditions aux limites sur l'interface nous indique qu'il y a continuité des champs électrique et magnétique tangentiels d'où

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \text{ avec } \mu = \mu_1 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.10)$$

- D'une façon générale, nous pouvons donc écrire d'après les équations (2.9) et (2.10)

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = \rho_{01} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \text{où } \rho_{01} = \begin{cases} \rho_{01} = 1 \text{ dans le cas TE} \\ \rho_{01} = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \text{ dans le cas TM} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.1.4 Second théorème de Green

La démonstration du théorème de Green est basée sur le théorème d'Ostrogradski qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface. Il s'écrit

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

où le volume V est délimité par la surface fermée S . En posant $\mathbf{A} = f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1$, alors $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) = \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 + f_1 \nabla^2 f_2 - \nabla f_2 \cdot \nabla f_1 - f_2 \nabla^2 f_1 = f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1$. L'application du théorème d'Ostrogradski conduit alors à

$$\iiint_V (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1) dV = \oiint_S (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.12)$$

2.1.5 Principe d'Huygens et théorème d'extinction

Soit la figure 2.2, sur laquelle Ω_1 désigne le domaine délimité par la surface S_1 et le contour $C_{1\infty}$. Ω_0 désigne le domaine délimité par la surface S_1 et le contour C_∞ .

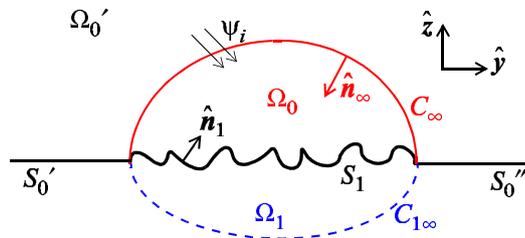


FIG. 2.2 – Equation intégrale pour un problème à trois dimensions. Sur les contours S'_0 et S''_0 , le champ incident est supposé nul. Le domaine Ω_0 est délimité par le contour C_∞ et la surface S_1 tandis que le domaine Ω_1 est délimité par le contour $C_{1\infty}$ et la surface S_1 . Le domaine ouvert Ω'_0 est délimité par le contour C_∞ et les surfaces S'_0 et S''_0 .

Les champs ψ et ψ_1 vérifient dans les domaines Ω_0 et Ω_1 dépourvus de sources ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = \mathbf{0}$) l'équation de Helmholtz scalaire donnée par (2.7)

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + K^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \text{ pour } \mathbf{r} \in \Omega_0 \quad (2.13a)$$

$$\nabla^2 \psi_1(\mathbf{r}) + K_1^2 \psi_1(\mathbf{r}) = 0 \text{ pour } \mathbf{r} \in \Omega_1 \quad (2.13b)$$

où $K = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ et $K_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu}$ sont les nombres d'onde dans les espaces Ω_0 et Ω_1 . De plus, les fonctions de Green, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, associées aux espaces Ω_0 et Ω_1 vérifient

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + K^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14a)$$

$$\nabla^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + K_1^2 g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14b)$$

Pour un problème à deux dimensions, la fonction de Green s'écrit d'après le tableau 2.1

$$g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(K_q \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}[K_q \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}] \quad (2.15)$$

avec $K_0 = K$. Ses dérivées selon y et z s'écrivent alors ($\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ et $D = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$)

$$\begin{cases} \frac{\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y} = \frac{\partial g_q(K_q D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial y} = -\frac{jK_q}{4} H_1^{(1)}(K_q D) \frac{y - y'}{D} \\ \frac{\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z} = \frac{\partial g_q(K_q D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z} = -\frac{jK_q}{4} H_1^{(1)}(K_q D) \frac{z - z'}{D} \end{cases}$$

La quantité $\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') / \partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ s'écrit donc

$$\frac{\partial g_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = -\frac{jK_q}{4} \frac{H_1^{(1)}(K_q \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.16)$$

Appliquons l'équation (2.12) en dimension 2 avec $f_1 = \psi$ et $f_2 = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\iint_{\Omega_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r})] dr = \int_{C_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \quad (2.17)$$

où le contour $C_0 = S_1 \cup C_\infty$ délimite l'espace Ω_0 . En substituant (2.13a) et (2.14a) dans (2.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r})] dr \\ &= \iint_{\Omega_0} \{ \psi(\mathbf{r}) [-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - K^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') K^2 \psi(\mathbf{r}) \} dr \\ &= - \iint_{\Omega_0} \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dr \\ &= \begin{cases} -\psi(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \\ &= \int_{C_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.18)$$

En écrivant $C_0 = S_1 \cup C_\infty$, le dernier terme de l'équation ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{C_0} [\psi(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \\ & \quad + \int_{C_\infty} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \end{aligned} \quad (2.19)$$

où $\partial f / \partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f$. Le signe $-$ devant l'intégrale sur S_1 provient du fait que la normale est dirigée vers l'intérieur du milieu Ω_0 , tandis que la normale à C_∞ est dirigée vers l'extérieur du milieu Ω_0 .

Dans l'espace Ω'_0 au dessus du contour C_∞ de même caractéristique physique que l'espace Ω_0 (donc même fonction de Green), le champ incident, $\psi_i(\mathbf{r})$, vérifie d'après (2.18)

$$\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_{C_\infty} \left[\psi_i(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{où } \mathbf{r}' \in \Omega'_0 \quad (2.20)$$

Cette relation suppose que le champ incident soit nul sur les surfaces S'_0 et S''_0 .

Pour deux milieux de même permittivité, les conditions aux limites énoncées par (2.11) impose qu'il ait continuité du champ, ψ , et de sa dérivée, $\partial \psi / \partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi$. Par conséquent d'après (2.20) et (2.18)-(2.19) avec $\mathbf{r}' \notin \Omega_0$ et dans lesquelles nous faisons tendre $\mathbf{r}' \rightarrow C_\infty$, l'application des conditions aux limites, valides $\forall \mathbf{r}' \in S_\infty$, nous conduit à

$$\psi_i(\mathbf{r}) = - \int_{C_\infty} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad (2.21)$$

En substituant (2.21) dans (2.19) puis dans (2.18), nous obtenons

$$\psi_i(\mathbf{r}') + \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS = \begin{cases} +\psi(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Lorsque $\mathbf{r}' \in \Omega_0$, l'équation ci-dessus correspond au principe d'Huygens et montre que le champ diffracté par la surface s'exprime à partir du champ ψ sur la surface S_1 et de sa dérivée normale $\frac{\partial \psi}{\partial n}$. Le champ diffracté sur la surface, $\psi_d(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}') - \psi_i(\mathbf{r}')$, s'écrit alors

$$\boxed{\psi_d(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0} \quad (2.23)$$

En d'autres termes, le principe d'Huygens permet d'exprimer le champ diffracté dans l'espace Ω_0 à partir des champs sur la surface S_1 .

Lorsque $\mathbf{r}' \notin \Omega_0$, (2.22) correspond au théorème d'extinction qui s'écrit

$$\boxed{\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0} \quad (2.24)$$

En appliquant le même raisonnement dans l'espace Ω_1 dépourvu de sources, le théorème d'extinction devient pour $\mathbf{r}' \in \Omega_1$

$$\boxed{0 = \int_{S_1} \left[\psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_1} \quad (2.25)$$

Les inconnues à déterminer dans (2.23) sont les champs $\psi(\mathbf{r})$ et $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$, nécessitant deux équations. Ces équations sont données par (2.24) et (2.25), exprimées respectivement dans les espaces Ω_0 et Ω_1 , dans lesquels $\psi_i(\mathbf{r}')$, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sont connues. Par conséquent elles comportent 4 inconnues, $\psi(\mathbf{r})$, $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$, $\psi_1(\mathbf{r})$ et $\partial\psi_1(\mathbf{r})/\partial n$ pour uniquement deux équations. Afin de réduire le nombre d'inconnues à 2, les conditions aux limites sont appliquées sur la surface S_1 valides $\forall dS$ en faisant tendre \mathbf{r}' vers S_1 pour les deux espaces Ω_0 et Ω_1 .

Ainsi en appliquant les conditions aux limites données par (2.11), l'équation (2.25) devient

$$0 = \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - \rho_{01} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_1 \quad (2.26)$$

Par conséquent les équations (2.24) et (2.26) forment un système de deux équations à deux inconnues, qui sont $\psi(\mathbf{r})$ et $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$.

Connaissant les champs $\psi(\mathbf{r})$ et $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$ sur la surface S_1 , le champ diffracté est calculé en tout point \mathbf{r}' de Ω_0 en appliquant le principe d'Huygens.

Pour une surface *parfaitement conductrice* deux cas peuvent se présenter selon la polarisation de l'onde :

- cas TE : $\psi(\mathbf{r})$ s'annule sur la surface. Nous parlons alors de la condition aux limites de *Dirichlet*.

- cas TM : $\partial\psi(\mathbf{r})/\partial n$ s'annule sur la surface. Nous parlons alors de la condition aux limites de *Neuman*.

Dans la cas général, la condition aux limites sur S_1 est une combinaison des conditions aux limites de Dirichlet et de Neuman.

2.1.6 Principe d'Huygens en champ lointain

La surface équivalente radar (SER) est une grandeur électromagnétique qui se définit en champ lointain et qui quantifie le pouvoir réflecteur de l'obstacle. Par conséquent, nous allons exprimer dans cette section le principe d'Huygens en champ lointain.

Comme le montre la figure 2.3, en champ lointain ($r' \gg r$ et $r' \gg \lambda$, où $\lambda = 2\pi/K$ est la longueur d'onde et $\|\mathbf{k}_d\| = K$), $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| \approx r' - \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{r}$. Selon (2.15) et (2.8), dans la direction $\hat{\mathbf{k}}_d$ d'observation, la fonction de Green scalaire devient en champ lointain

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(K \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \approx \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \exp[j(Kr' - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r})]$$

De plus

$$\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -j \mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

En substituant ces deux équations dans le principe d'Huygens (2.23), le champ diffracté par une surface en champ lointain s'écrit alors

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right) \psi_{d0}^\infty$$

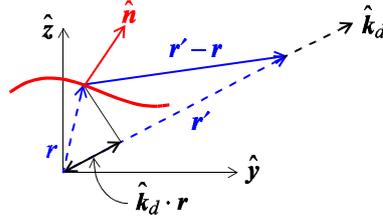


FIG. 2.3 – Principe d’Huygens en champ lointain d’un problème à deux dimensions.

avec

$$\psi_{d0}^{\infty} = - \int_{S_1} \underbrace{\left[j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}\psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right]}_{f(\mathbf{r})} \exp(-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}) dS \quad \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (2.27)$$

On retrouve ainsi la propriété générale qu’il existe une relation de type Fourier entre la fonction $f(\mathbf{r})$ définie sur la surface et le champ rayonné en zone lointaine.

2.2 Cas d’un problème à trois dimensions : cas *vectoriel*

Dans cette partie, le formalisme établi dans le cas scalaire est étendu au cas vectoriel. **Cette partie ne sera pas enseignée.**

2.2.1 Définition d’une dyade

Dans cette section nous allons définir une dyade qui est une extension du cas vectoriel.

Une fonction vectorielle ou un vecteur en coordonnées cartésiennes est définie par

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^{i=3} A_i \hat{\mathbf{u}}_i$$

où A_i ($i = \{1, 2, 3\}$) sont les coordonnées du vecteur \mathbf{A} dans la base cartésienne $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) = (\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$.

Considérons maintenant trois fonctions vectorielles distinctes définies par

$$\mathbf{A}_j = A_{1j} \hat{\mathbf{u}}_1 + A_{2j} \hat{\mathbf{u}}_2 + A_{3j} \hat{\mathbf{u}}_3 = \sum_{i=1}^{i=3} A_{ij} \hat{\mathbf{u}}_i \quad (2.28)$$

La fonction dyade, notée $\bar{\mathbf{A}}$, est alors définie par

$$\bar{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{j=3} \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{u}}_j = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où \mathbf{A}_j ($j = \{1, 2, 3\}$) sont les trois vecteurs, composantes de la dyade $\bar{\mathbf{A}}$. Le terme de droite entre crochets est une représentation matricielle de la dyade dans laquelle \mathbf{A}_j est un vecteur colonne. Par conséquent, à la dyade $\bar{\mathbf{A}}$, nous pouvons lui associer une matrice carrée de dimension 3 (ou tenseur de rang 2), notée $[A]$, dont les éléments sont A_{ij} .

La substitution de (2.28) dans (2.29) conduit alors à

$$\bar{\mathbf{A}} = \sum_i \sum_j A_{ij} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j \quad (2.30)$$

Dans l'équation ci-dessus l'ordre des indices est important puisque $\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j \neq \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_i$. En effet en calculant la transposée d'une dyade, notée $\bar{\mathbf{A}}^T$, nous avons

$$\bar{\mathbf{A}}^T = \sum_j \hat{\mathbf{u}}_j \mathbf{A}_j = \sum_i \sum_j A_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_j \sum_i A_{ji} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j$$

Par conséquent $\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j = \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{u}}_i$ si $A_{ij} = A_{ji}$. En d'autres termes, la matrice $[A]$ associée à la dyade $\bar{\mathbf{A}}$ doit être symétrique.

Une dyade particulière symétrique est définie par

$$F_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Cette dyade, notée $\bar{\mathbf{I}}$, est appelée dyade identité. Elle est définie explicitement par

$$\bar{\mathbf{I}} = \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i$$

La dyade identité est associée à la matrice identité suivante

$$\bar{\mathbf{I}} \equiv [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Une autre dyade très employée est $\nabla \nabla \equiv \bar{\Delta}$, où l'opérateur nabla ∇ est définie par

$$\nabla = \sum_i A_i \hat{\mathbf{u}}_i \text{ avec } A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$

D'après (2.30), nous obtenons

$$\nabla \nabla \equiv \bar{\Delta} = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_j \quad (2.32)$$

dont la matrice associée s'écrit

$$\bar{\Delta} \equiv [\Delta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Si l'ordre de dérivation n'importe pas ($\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$) (fonction de classe \mathcal{C}^2) alors la matrice $[\Delta]$ est symétrique.

Le produit scalaire à *gauche* d'un vecteur \mathbf{Q} par une dyade s'écrit

$$\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} = \sum_j (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_j) \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_i \sum_j Q_i F_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j$$

qui donne un vecteur.

Le produit scalaire à *droite* d'un vecteur \mathbf{Q} par une dyade s'écrit

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q} = \sum_j \mathbf{A}_j (\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{Q}) = \sum_i \sum_j Q_j F_{ij} \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_i \sum_j Q_i F_{ji} \hat{\mathbf{u}}_j$$

qui donne également un vecteur. Ceci est équivalent à multiplier une matrice par un vecteur.

En général les deux produits scalaires précédemment définis ne sont pas égaux, excepté lorsque la dyade $\bar{\mathbf{A}}$ est symétrique ($F_{ij} = F_{ji}$).

Par exemple nous avons

$$\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{Q} = \sum_i \sum_j Q_i I_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_i Q_i I_{ii} \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_i Q_i \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{Q}$$

2.2.2 Fonction de Green vectorielle : dyade de Green

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas scalaire qui peut s'appliquer à un problème à 2 dimensions. Pour un problème à 3 dimensions, les champs électromagnétiques doivent être traités comme des grandeurs vectorielles si nous souhaitons traiter la polarisation de façon rigoureuse. Ceci entraîne que la fonction de Green devient également une grandeur vectorielle et plus précisément une dyade solution de l'équation vectorielle suivante

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}} - K^2 \bar{\mathbf{G}} = +\bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.34)$$

L'équation (2.34) a été obtenue en substituant dans (2.5), \mathbf{E} par $\bar{\mathbf{G}}$ et $+j\omega\mu\mathbf{J}$ par $+\bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$. Puisque $\nabla \wedge \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}} = -\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{grad}(\text{div} \bar{\mathbf{G}}) = -\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}})$, l'équation (2.34) devient

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + K^2 \bar{\mathbf{G}} = -\bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{G}}) \quad (2.35)$$

En prenant la divergence de (2.34) et en notant que $\text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \forall \mathbf{A}$, nous avons

$$-K^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{G}} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \nabla \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{G}} = -\frac{\nabla \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{K^2} \quad (2.36)$$

En substituant (2.36) dans (2.35), nous obtenons

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{G}} + K^2 \bar{\mathbf{G}} = -\left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{K^2} \right) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$$

L'équation ci-dessus peut s'exprimer en fonction de la fonction de Green scalaire g qui vérifie l'équation d'Helmoltz scalaire (équation (2.2) avec $\mathcal{L} = \nabla^2 + K^2$), où

$$\bar{\mathbf{G}} = \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{K^2} \right) g \quad (2.37)$$

où

$$\nabla^2 g + K^2 g = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$$

Selon le tableau 2.1, g s'écrit pour un problème de dimension 3

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{\exp(jK \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|)}{4\pi \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|} \quad (2.38)$$

D'après (2.31) et (2.33), la dyade de Green s'écrit

$$K^2 \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_2} & K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Les éléments de la matrice de Green associée à la dyade $\bar{\mathbf{G}}$, s'écrivent sous forme condensée, $G_{ij} = K^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = G_{ji}$.

2.2.3 Second théorème de Green

Comme dans le cas 2D, l'obtention des équations intégrales est basée sur le second théorème de Green *vectoriel*. Ce théorème est basé sur le théorème d'Ostrogradski qui transforme une intégrale de volume en une intégrale de surface. Il s'écrit

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

où le volume V est délimité par la surface *fermée* S . En posant $\mathbf{A} = \mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}$, alors

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) dV = \oiint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S}$$

Sachant que $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}), \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$, nous obtenons avec $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ et $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) dV &= \iiint_V [(\nabla \wedge \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dV \\ &= \oiint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Puisque \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont quelconques, l'équation ci-dessus peut s'écrire également en permutant \mathbf{Q} avec \mathbf{P}

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) dV &= \iiint_V [(\nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P})] dV \\ &= \oiint_S (\mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Le second théorème de Green est alors obtenu en effectuant la différence des deux équations ci-dessus, conduisant à

$$\iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dV = \oiint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S}$$

Il est à noter que le produit scalaire est commutatif mais que le double produit vectoriel n'est pas commutatif.

2.2.4 Principe d'Huygens et théorème d'extinction

Soit \mathbf{J} une source électromagnétique dans la région V_0 de permittivité diélectrique ϵ et de perméabilité magnétique μ , tandis que la région V_1 possède une permittivité diélectrique et une perméabilité magnétique notées respectivement ϵ_1 et μ . Soit S_1 une surface fermée qui délimite un volume V_1 correspondant à la région 1, et S_∞ une surface fermée, dont la normale est notée $\hat{\mathbf{n}}_\infty$, qui délimite un volume V_0 . La région 2 est délimitée par les surfaces S_1 et S_∞ (voir figure 2.4).

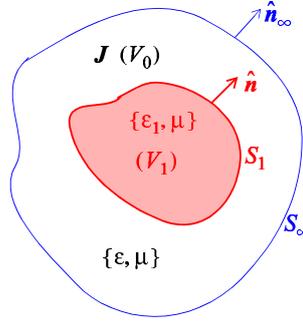


FIG. 2.4 – Equation intégrale en présence d'une source \mathbf{J} dans le volume V_0 d'un problème à trois dimensions. Nous supposons que dans le volume V_1 , $\mu_1 = \mu$.

D'après (2.5), dans les volumes V_1 et V_0 , le champ électrique vérifie respectivement

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R}) - K_1^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) - K^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) = j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.41)$$

D'après la section 2.2.2, pour $\mathbf{R} \in V_0$, la dyade de Green obéit à

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}} - K^2 \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.42)$$

où le vecteur d'observation \mathbf{R}' peut appartenir soit au volume V_1 ou V_0 .

En notant $\hat{\mathbf{n}}$, la normale à la surface S_1 dirigée vers l'extérieur du volume V_1 , le second théorème de Green vectoriel s'écrit

$$\iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dV = \iint_S (\mathbf{P} \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

En posant dans l'équation ci-dessus $\mathbf{Q} = \mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ et $V = V_0$, où \mathbf{A} est un vecteur quelconque, alors

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_0} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E})] dV = \\ & - \iint_{S_1} [\mathbf{G} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ & + \iint_{S_\infty} [\mathbf{G} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (2.43)$$

nous pouvons noter sur la figure 2.4 que la normale $\hat{\mathbf{n}}$ est dirigée vers l'intérieur du volume V_0 tandis que la normale $\hat{\mathbf{n}}_\infty$ est dirigée vers l'extérieur du volume V_0 . Ceci explique le signe moins devant l'intégrale de surface S_1 .

La condition de rayonnement à l'infini impose que l'intégrale de surface sur S_∞ s'annule. De plus, la substitution de (2.41) et (2.42) dans (2.43) conduit à

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_0} \{ \mathbf{E} \cdot [\mathbf{A}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + K^2\mathbf{G}] - \mathbf{G} \cdot (j\omega\mu\mathbf{J} + K^2\mathbf{E}) \} dV = \\ & - \iint_{S_1} [\mathbf{G} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dans l'équation ci-dessus, la fonction de Dirac contribue si le champ \mathbf{E} est dans le volume V_0 . De plus, $\nabla \wedge \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H}$ selon (1.2). Par conséquent l'équation (2.44) devient

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') \cdot \mathbf{A} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = j\omega\mu \iiint_{V_0} \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) dV \\ & + \iint_{S_1} [j\omega\mu\mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \mathbf{E}(\mathbf{R}) \wedge \nabla \wedge \mathbf{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned}$$

De plus $\forall (\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}), \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{A})$. En supprimant le vecteur \mathbf{A} , l'équation ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = j\omega\mu \iiint_{V_0} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) dV \\ & + \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \} dS \end{aligned}$$

Comme dans le cas 2D, à partir des conditions aux limites, nous pouvons montrer que le premier terme de l'égalité est égal au champ incident, noté \mathbf{E}_i , conduisant à

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') + \iint_{S_1} \left\{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] \right. \\ & \left. + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \right\} dS \end{aligned} \quad (2.45)$$

Lorsque $\mathbf{R}' \in V_0$, l'équation ci-dessus correspond au principe d'Huygens et montre que le champ diffracté par la surface s'exprime à partir des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sur la surface. Le champ diffracté sur la surface, $\mathbf{E}_d(\mathbf{R}') = \mathbf{E}(\mathbf{R}') - \mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$, s'écrit alors

$$\boxed{\mathbf{E}_d(\mathbf{R}') = \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \} dS} \quad (2.46)$$

En d'autres termes, le principe d'Huygens permet d'exprimer le champ diffracté dans le volume V_0 à partir des champs sur la surface S_1 .

Lorsque $\mathbf{R}' \in V_1$, (2.45) correspond au théorème d'extinction qui s'écrit

$$\boxed{\mathbf{E}_i(\mathbf{R}') = - \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \} dS} \quad (2.47)$$

En appliquant le même raisonnement dans le volume V_1 dépourvu de sources, le théorème d'extinction devient pour $\mathbf{R}' \in V_1$

$$\mathbf{0} = \oint_{S_1} \{j\omega\mu\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}_1(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R})]\} dS \quad (2.48)$$

où $\bar{\mathbf{G}}_1$ est la fonction de Green du volume V_1 .

Les inconnues à déterminer dans (2.46) sont les champs électromagnétiques tangentiels $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})$, nécessitant deux équations. Ces équations sont données par (2.47) et (2.48), exprimées respectivement dans les volumes V_0 et V_1 , dans lesquelles $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$, $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ et $\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ sont connues. Par conséquent elles comportent 4 inconnues pour uniquement deux équations. Afin de réduire le nombre d'inconnues à 2, les conditions aux limites sont appliquées sur la surface S_1 en faisant tendre \mathbf{R}' vers S_1 pour les deux volumes V_0 et V_1 . A noter qu'elles sont plus compliquées à écrire par rapport à un problème à deux dimensions.

Connaissant les champs tangentiels sur la surface S_1 , le champ diffracté est calculé en tout point \mathbf{R}' de V_0 en appliquant le principe d'Huygens. Les trois équations ci-dessous plus les conditions aux limites sont à la base du calcul du champ diffracté par un obstacle.

Pour une surface parfaitement conductrice, il y a continuité du champ *électrique* tangential sur S_1 , qui implique que dans (2.46), $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$. Dans le cas où il y a continuité du champ *magnétique* tangential sur S_1 , qui implique que dans (2.46), $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$.

2.2.5 Principe d'Huygens en champ lointain

La surface équivalente radar (SER) est une grandeur électromagnétique qui se définit en champ lointain et qui quantifie le pouvoir réflecteur de l'obstacle. Par conséquent, nous allons exprimer dans cette section le principe d'Huygens en champ lointain.

D'après la figure (2.5), en champ lointain nous avons $\|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\| = \|\mathbf{R}' - \mathbf{R}\| \approx R' - \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}$, où $\hat{\mathbf{k}}_d$ est la direction d'observation. Par conséquent selon (2.38), la fonction de Green scalaire devient

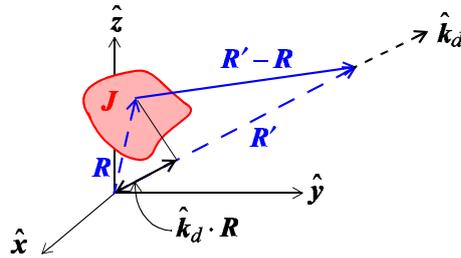


FIG. 2.5 – Fonction de Green en champ lointain pour un problème 3D.

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{\exp(jKR')}{4\pi R'} \exp(-jK\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}) \quad (2.49)$$

De plus, l'opérateur nabla qui agit sur R devient $\nabla = -jK\hat{\mathbf{k}}_d$. La dyade de Green donnée par (2.37) s'écrit alors

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \approx (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d) \frac{\exp(jKR')}{4\pi R'} \exp(-jK\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}) \quad (2.50)$$

Le principe d'Huygens s'écrit donc en champ lointain avec $\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -jK \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$

$$\mathbf{E}_d^\infty(\mathbf{R}') = \mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') \cdot \iint_{S_1} e^{-jK \hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}} \left\{ \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \right\} dS \quad (2.51)$$

avec

$$\mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') = -j\omega\mu \frac{e^{jKR'}}{4\pi R'} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d)$$

$Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance d'onde du volume V_0 .

2.3 Conclusion

En comparant les équations du cas 2D, (2.23), (2.24) et (2.25) avec celles du cas 3D, (2.46), (2.47) et (2.48), nous avons l'analogie suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}) \leftrightarrow \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \leftrightarrow j\omega\mu \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) \\ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \leftrightarrow \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \\ \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \leftrightarrow \nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Dans chacun des cas, les champs électromagnétiques sur les surfaces sont déterminés à partir du théorème d'extinction appliqué dans chacun des milieux et des conditions aux limites. Le champ diffracté par la surface est alors calculé en utilisant le principe d'Huygens.

Comme le montre la figure 2.6, le principe d'Huygens conduit au principe d'équivalence suivant

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{R}') = - \iint_{S_1} \{ j\omega\mu \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{J}_S + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot \mathbf{M}_S \} dS \quad (2.53)$$

avec $\mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}$ et $\mathbf{M}_S = -\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}$, où \mathbf{J}_S et \mathbf{M}_S sont les courants électrique et magnétique de *surface* calculés sur l'objet.

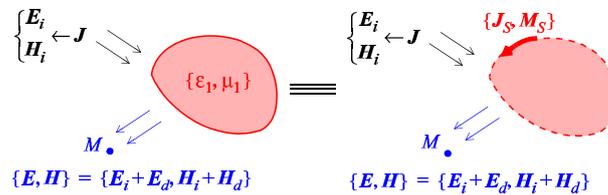


FIG. 2.6 – Principe d'équivalence à l'aide des courants électrique et magnétique de *surface* ($\mu_1 = \mu$).

3 Résolution des équations

3.1 Position du problème

3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons essayer de préciser les difficultés de résolution d'un problème de diffraction et les différentes solutions qui se présentent pour les surmonter.

Pour un problème 3D, les équations à notre disposition sont (voir chapitre 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') = - \iint_{S_1} \{j\omega\mu\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})]\} dS \\ \mathbf{0} = \iint_{S_1} \{j\omega\mu\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot [\mathbf{H}_1(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}}] + [\nabla \wedge \bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R})]\} dS \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{E}_d(\mathbf{R})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{H}_d(\mathbf{R})$ les champs électromagnétiques sur la surface. L'équation de propagation peut être également utilisée. La résolution de ces équations s'accompagne des conditions aux limites appliquées sur la surface.

Pour un problème 2D, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \text{ si } \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \\ \mathbf{0} = \int_{S_1} \left[\psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_1 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0$$

Dans ces équations les éléments connus sont :

- les champs incidents $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$ et $\mathbf{H}_i(\mathbf{R}')$ ($\psi_i(\mathbf{r}')$) en tout point de l'espace donc en particulier sur l'objet.
- les dyades de Green $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ ($g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) et $\bar{\mathbf{G}}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ ($g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) reliées aux fonctions de Green scalaires $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ et $g_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$.
- Les grandeurs physiques des milieux tels que ϵ , ϵ_1 , μ , ω et K .

L'élément inconnu est :

- le champ diffracté $\mathbf{E}_d(\mathbf{R}')$ ($\psi_d(\mathbf{r}')$) où le champ total $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{E}_d(\mathbf{R})$ ($\psi(\mathbf{r}')$) au point de mesure.

3.1.2 Unicité des solutions

Pour assurer l'unicité de la solution, les conditions suivantes doivent être vérifiées

- Condition de rayonnement à l'infini appelée "Condition de Silver-Müller"

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}) \end{array} \right\} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^p}\right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) - Z\mathbf{H}(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^p}\right) \quad (3.3)$$

où $R = \|\mathbf{R}\|$, $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ et Z est l'impédance d'onde.

Ces relations traduisent le fait que, à grande distance, le champ est transverse à $\hat{\mathbf{n}}$ et décroît en $\frac{1}{R^p}$. $p = 1$ (onde *sphérique*) pour un problème 3D et $p = \frac{1}{2}$ (onde *cylindrique*) pour un problème 2D.

- Condition d'énergie finie également appelée "Condition de Meixner"

$$\iiint_V \left| \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}) \end{array} \right\} \right|^2 dV < +\infty$$

Cette équation traduit le fait que, dans tout domaine borné V extérieur aux sources, la densité de puissance emmagasinée est bornée.

3.1.3 Quelques solutions

Toute la difficulté réside dans le fait que le champ diffracté ou total se trouve être relié à lui-même ; il se retrouve à gauche du signe égal mais également à droite sous le signe somme. Pour résoudre un tel problème plusieurs solutions sont possibles :

- Soit un calcul analytique est possible auquel cas le développement exact des calculs est possible. C'est le cas par exemple d'objets de formes simples (cylindre infini, la sphère, ...) et le problème est alors résolu en partant de l'équation de propagation vectorielle. Le second paragraphe présente le cas général d'un objet *canonique* invariant selon une direction, correspondant alors à un problème plan ou 2D. Afin d'illustrer la démarche, le cas du cylindre infini parfaitement conducteur et diélectrique est traité.

- Soit l'équation à résoudre peut être simplifiée à l'aide d'approximations adaptées au problème à étudier. L'approximation de l'optique physique est présentée dans le troisième paragraphe pour les cas 2D (scalaire) et 3D (vectoriel).

- Soit seule la résolution numérique est possible. Une méthode (méthode des moments sur un problème 2D) est présentée dans le dernier paragraphe. De plus, elle est comparée à la solution du cylindre infini et parfaitement conducteur et à l'approximation de l'optique physique.

3.2 Diffraction par des objets 2D de formes simples

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la diffraction par des objets 2D ou invariants selon une direction, choisie selon $\hat{\mathbf{x}}$. Physiquement, ceci impose que selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ l'objet est infini. En d'autres termes, il ne subit pas de diffraction selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$. De plus, afin de résoudre l'équation de propagation analytiquement, la forme de l'objet est simple (circulaire, elliptique, hyperbolique, ...). Enfin, l'exemple du cylindre circulaire est exposé.

A noter que dans le cas d'une sphère, le problème est 3D et donc le point de départ est l'équation de propagation *vectorielle*. Pour cette forme particulière, il est possible de calculer les champs diffractés par un tel objet en introduisant des fonctions dites spéciales, comme les polynômes de Legendre et les fonctions de Bessel sphériques. Ce problème fut résolu par Mie au début du 20^{ème} siècle. Dans ce cours, ce problème n'est pas abordé compte tenu de sa complexité.

3.2.1 Solution de l'équation de propagation scalaire

D'après le tableau 3.1, dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, l'équation de propagation scalaire, $\nabla^2\psi + K^2\psi = 0$, peut s'écrire

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right] + K^2 \psi = 0 \quad (3.4)$$

où ψ et les coefficients métriques $\{h_i\}$ dépendent des coordonnées $\{q_1, q_2\}$. Il est important de noter que pour un problème 2D, $\hat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{0}$ et $h_3 = 0$ dans le tableau 3.1. Le tableau 3.2 rappelle le système orthogonal des coordonnées cylindriques.

Cette équation aux dérivées partielles est alors résolue en utilisant la méthode des séparations des variables, qui consiste à écrire que $\psi = \psi_1(q_1)\psi_2(q_2)$. En reportant cette équation dans l'équation ci-dessus nous aboutissons alors

$$\mathcal{L}_1 [\psi_1(q_1)] - \mathcal{L}_2 [\psi_2(q_2)] = 0$$

où $\mathcal{L}_i [\psi_i(q_i)]$ est une application qui dépend des dérivées de $\psi_i(q_i)$ selon la variable q_i . Pour des systèmes de coordonnées assez simples (cylindrique par exemple), l'équation ci-dessus s'obtient aisément, mais il n'est pas toujours possible d'obtenir ce type de décomposition.

Nous avons donc $\mathcal{L}_1 [\psi_1(q_1)] = \mathcal{L}_2 [\psi_2(q_2)]$. Le premier membre de l'équation, fonction de q_1 seulement, et le second membre, fonction de q_2 , ne peuvent être égaux que s'ils sont constants, soit $\mathcal{L}_1 [\psi_1(q_1)] = \lambda_1$ et $\mathcal{L}_2 [\psi_2(q_2)] = \lambda_1$. Par conséquent l'équation différentielle ci-dessus revient à résoudre deux équations différentielles *indépendantes* dont les solutions sont les fonctions $\{\psi_i(q_i)\}$

$$\mathcal{L}_1 [\psi_1(q_1)] = \lambda_1 \quad \mathcal{L}_2 [\psi_2(q_2)] = \lambda_1$$

La constante λ_1 est fonction des propriétés de symétrie de l'objet. Nous montrerons par exemple dans le cas d'un cylindre circulaire infini selon son axe de révolution que λ_1 est un entier.

Opérateurs	Expression
$\mathbf{grad}f = \nabla f$	$\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \hat{\mathbf{u}}_3$
$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
$\mathbf{rot}\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$	$\frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] \hat{\mathbf{u}}_1 +$ $\frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right] \hat{\mathbf{u}}_2 +$ $\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] \hat{\mathbf{u}}_3$
$\text{div}(\mathbf{grad}f) = \nabla^2 f$	$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]$

TAB. 3.1 – Expression des opérateurs vectoriels dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales $\{q_1, q_2, q_3\}$ dont les vecteurs de bases sont $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$. $\{q_1, q_2, q_3\}$ sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par des relations univoques $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$ et $z = z(q_1, q_2, q_3)$. $\{h_1, h_2, h_3\}$ sont les coefficients métriques définis par $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$. Pour un problème 2D, $\hat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{0}$ et $h_3 = 1$.

3.2.2 Cas du cylindre circulaire *infini* selon son axe de révolution

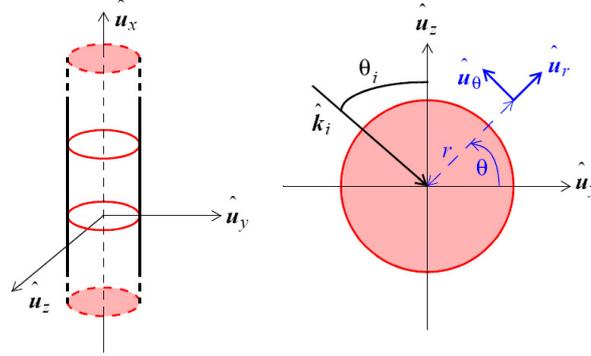
Dans cette section nous allons traiter le cas particulier de la diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire 2D (voir figure 3.1). Par cylindre 2D on entend un cylindre de section circulaire dont la longueur selon la génératrice est *infinie*. Cette propriété implique que le problème devient invariant selon l'axe des x et il peut alors être traité scalairement en considérant les deux polarisations TE et TM.

Dans un système de coordonnées cylindriques, d'après le tableau 3.2, nous avons $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = x$, $h_1 = h_3 = 1$ et $h_2 = r$. Le cylindre est supposé homogène placé dans un milieu supposé LHI et stationnaire.

• Dans le cas TM, le champ magnétique $\mathbf{H} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x$, et les composantes transverses du champ électrique E_y et E_z sont *non nulles*. La connaissance de ψ suffit à déterminer les composantes E_y et E_z . En effet d'après (1.1), en coordonnées cartésiennes, avec la convention $e^{-j\omega t}$, nous avons $\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{rot}\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{u}}_x) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z - \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y \right)$, tandis qu'en coordonnées cylindriques

Définition	Base	Coefficients métriques
$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ x = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = x \end{cases}$	$(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_x)$	$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_2 = h_\theta = r \\ h_3 = h_x = 1 \end{cases}$

TAB. 3.2 – Systèmes de coordonnées cylindriques.

FIG. 3.1 – Configuration du problème 2D de la diffraction d'une onde plane par un cylindre infini selon l'axe des z .

nous avons d'après les tableaux 3.1 et 3.2, $\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r \right)$. En conclusion

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z - \frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y \right) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r \right) \quad \text{dans le cas TM} \quad (3.5)$$

De plus, la condition de rayonnement à l'infini (3.3) ($r \rightarrow \infty$) devient avec $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{u}}_r$ et $\mathbf{H} \wedge \hat{\mathbf{n}} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = \psi \hat{\mathbf{u}}_\theta$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - Z\mathbf{H} \wedge \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta &= \left(\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial r} - Z\psi \right) = Z \left(\frac{1}{j\omega\epsilon Z} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi \right) \\ &= Z \left(\frac{1}{jK} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi \right) = \frac{Z}{jK} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

• Dans le cas TE, le champ électrique $\mathbf{E} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x$, et les composantes transverses du champ magnétique H_y et H_z sont *non nulles*. La connaissance de ψ suffit à déterminer les composantes H_y et H_z . En effet d'après (1.2), en coordonnées cartésiennes, nous avons $\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{u}}_x) = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z \right)$, tandis qu'en coordonnées cylindriques nous avons d'après les tableaux 3.1 et 3.2, $\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right)$. En conclusion

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z \right) = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \quad \text{dans le cas TE} \quad (3.6)$$

De plus la condition de rayonnement à l'infini (3.3) devient avec $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{u}}_r$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E} - Z\mathbf{H} \wedge \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x &= \psi + \frac{Z}{j\omega\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} (\hat{\mathbf{u}}_\theta \wedge \hat{\mathbf{u}}_r) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x = \psi - \frac{Z}{j\omega\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
&= \psi - \frac{Z}{jKv\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \psi - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{jK\mu} \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
&= \psi - \frac{1}{jK} \frac{\partial\psi}{\partial r} \\
\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, quelque soit la polarisation, la condition de rayonnement à l'infini s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - jK\psi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

3.2.2.1 Calcul de la fonction scalaire ψ du champ *diffracté*

En utilisant la méthode des séparations des variables, $\psi_d(r, \theta) = \psi_1(r)\psi_2(\theta)$, nous avons d'après (3.4) et le tableau 3.2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial [\psi_1(r)\psi_2(\theta)]}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 [\psi_1(r)\psi_2(\theta)]}{\partial \theta^2} + K^2 \psi_1(r)\psi_2(\theta) &= 0 \\
\frac{\psi_2(\theta)}{r} \left\{ \frac{d[\psi_1(r)]}{dr} + r \frac{d^2[\psi_1(r)]}{dr^2} \right\} + \frac{\psi_1(r)}{r^2} \frac{d^2\psi_2(\theta)}{d\theta^2} + K^2 \psi_1(r)\psi_2(\theta) &= 0 \\
\frac{r^2}{\psi_1(r)} \psi_1''(r) + \frac{r}{\psi_1(r)} \psi_1'(r) + K^2 r^2 &= -\frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)}
\end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation, fonction de r seulement, et le second membre, fonction de θ seulement, ne peuvent être égaux que s'ils sont constants. En posant la constante égale à α^2 , nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\psi_2''(\theta)}{\psi_2(\theta)} = -\alpha^2 \\ \frac{r^2}{\psi_1(r)} \psi_1''(r) + \frac{r}{\psi_1(r)} \psi_1'(r) + K^2 r^2 = +\alpha^2 \end{cases}$$

La solution de la première équation différentielle est bien connue, c'est $\psi_2(\theta) = e^{j\alpha\theta}$. Le fait que la fonction $\psi_2(\theta)$ doit être égale à $\psi_2(\theta + 2\pi)$ implique que $\alpha = n$, où n est un entier. La seconde équation différentielle s'écrit alors

$$r^2 \psi_1''(r) + r \psi_1'(r) + (K^2 r^2 - n^2) \psi_1(r) = 0$$

C'est une équation de type Bessel dont les solutions sont bien connues

$$\begin{cases} J_n(Kr) \text{ fonction de Bessel de première espèce et d'ordre } n \\ Y_n(Kr) \text{ ou } N_n(Kr) \text{ fonction de Neuman de première espèce et d'ordre } n \end{cases}$$

avec $Y_n(x) = [J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)] / \sin(n\pi)$.

De plus toutes combinaisons linéaires de ces deux solutions comme, par exemple, les fonctions de Hankel définies par

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(Kr) = J_n(Kr) + jY_n(Kr) \text{ fonction de Hankel de première espèce et d'ordre } n \\ H_n^{(2)}(Kr) = J_n(Kr) - jY_n(Kr) \text{ fonction de Hankel de seconde espèce et d'ordre } n \end{cases}$$

sont également solution de l'équation différentielle.

En conclusion la solution de l'équation de propagation scalaire en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\begin{aligned} \psi_d(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [A_n J_n(Kr) + B_n Y_n(Kr)] e^{jn\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [C_n H_n^{(1)}(Kr) + D_n H_n^{(2)}(Kr)] e^{jn\theta} \end{aligned}$$

avec $A_n = C_n + D_n$ et $B_n = i(C_n - D_n)$.

Les développements à l'infini des fonctions $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont donnés par

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{j(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)} \\ H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)} \end{cases} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Le calcul du membre de gauche de la condition de rayonnement à l'infini (3.7) conduit alors avec $z = Kr$ à

$$\begin{cases} \frac{\partial H_n^{(2)}(z)}{\partial r} - jKH_n^{(2)}(z) = -\frac{K}{\sqrt{2z\pi z}} e^{j\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cong \frac{1}{z\sqrt{z}} \\ \frac{\partial H_n^{(1)}(z)}{\partial r} - jKH_n^{(1)}(z) = -\frac{K}{\sqrt{2z\pi z}} e^{-j\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} (4jz + 1) \cong \frac{1}{\sqrt{z}} \end{cases} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty$$

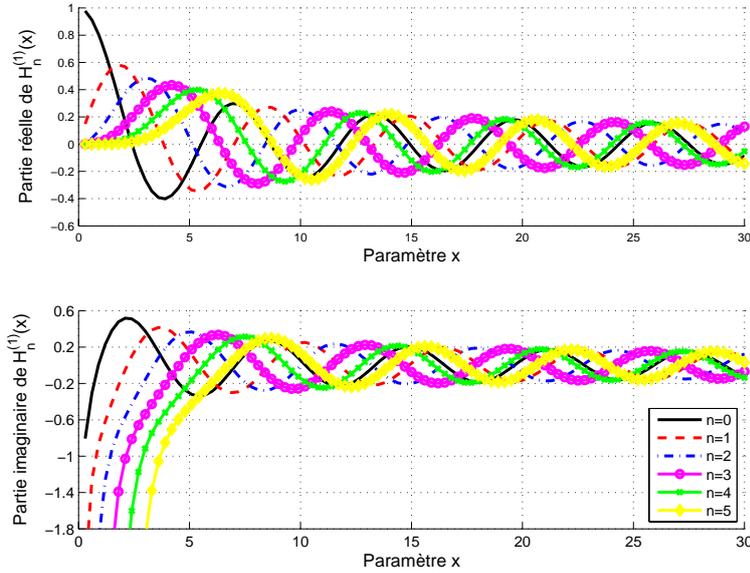
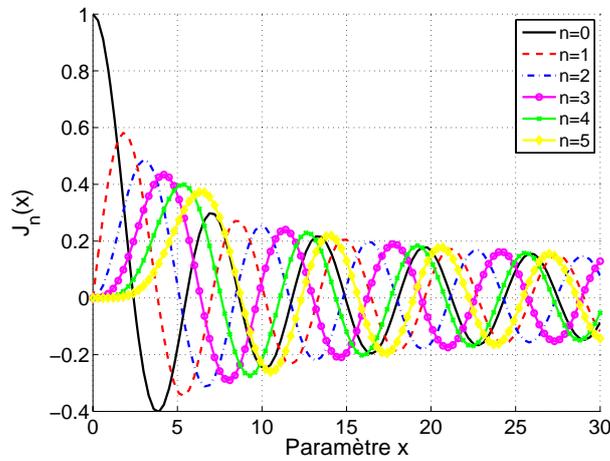
Par conséquent $H_n^{(2)}(Kr)$ ne vérifie pas (3.7) et ne peut donc pas faire partie de la solution ($D_n = 0$). La solution se simplifie donc en :

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(Kr) e^{jn\theta} \quad (3.9)$$

La constante C_n sera déterminée à partir des conditions aux limites. Tout d'abord nous allons traiter le cas parfaitement conducteur puis le cas diélectrique.

La figure 3.2 présente les parties réelle et imaginaire de $H_n^{(1)}(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n . La figure 3.3 présente $J_n(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n .

H]

FIG. 3.2 – Parties réelle et imaginaire de $H_n^{(1)}(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n .FIG. 3.3 – $J_n(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs de n .

3.2.2.2 Cas parfaitement conducteur en polarisation TE

Pour un objet parfaitement conducteur, il y a continuité du champ électrique tangentiel total, ce qui implique que pour $r = a$, $\psi(r, \theta) = 0 \forall \theta$, où a est le rayon du cylindre. Soit $\psi_d(a, \theta) + \psi_i(a, \theta) = 0 \forall \theta$.

En prenant la convention $e^{-j(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, et en prenant $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \geq 0$, une onde plane incidente s'écrit $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jK(y \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jKr \sin(\theta_i - \theta)}$ ($\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{y}} \sin \theta_i - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_i$) avec $\tan \theta = z/y$ et

$r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Nous pouvons donc écrire pour $r = a$

$$\psi_{i0} e^{jKa \sin(\theta_i - \theta)} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(Ka) e^{-jn\theta} = 0 \quad \forall \theta \quad (3.10)$$

Afin de regrouper les termes sous le signe somme, nous allons décomposer l'onde plane sur une base de fonctions de Bessel à l'aide de la relation suivante

$$e^{\frac{1}{2}z \left(t - \frac{1}{t} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t^n J_n(z)$$

où le terme à gauche de l'égalité correspond à la fonction génératrice. Ainsi en posant $z = Kr$ et $t = e^{j(\theta_i - \theta)}$, il est aisé de montrer que

$$e^{jKr \sin(\theta - \theta_i)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{jn(\theta_i - \theta)} J_n(Kr) \quad (3.11)$$

L'équation (3.10) devient alors

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\psi_{i0} e^{jn\theta_i} J_n(Ka) + C_n H_n^{(1)}(Ka) \right] e^{-jn\theta} = 0 \quad \forall \theta$$

Cette égalité doit être vérifiée $\forall (\theta, n)$, d'où

$$C_n = - \frac{\psi_{i0} e^{jn\theta_i} J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)}$$

En conclusion, le champ diffracté par un cylindre parfaitement conducteur en polarisation TE s'écrit

$$\psi_d(r, \theta) = -\psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Kr) e^{jn(\theta_i - \theta)} \quad \text{pour } r \geq a \quad (3.12)$$

Il est à remarquer que le champ est fonction d'un nombre sans dimension Ka , ce qui implique que dans le cas d'une multiplication par p de la fréquence et une division par p du rayon du cylindre a , le champ diffracté n'est pas modifié.

Afin de réduire les calculs numériques, nous pouvons utiliser la relation de récurrence suivante où $f_n(z) = \{J_n(z), H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)\}$

$$f_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} f_n(z) - f_{n-1}(z) \quad (3.13)$$

De plus pour n entier, les fonctions de Bessel vérifient

$$f_{-n}(z) = (-1)^n f_n(z) \quad (3.14)$$

En conclusion, les connaissances de $f_0(z)$ et $f_1(z)$ permettent de calculer la somme pour $n > 1$, et

$$\begin{aligned} - \frac{\psi_d(r, \theta)}{\psi_{i0}} &= \frac{J_0(Ka)}{H_0^{(1)}(Ka)} H_0^{(1)}(Kr) + \\ &\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Kr) \left[e^{jn(\theta_i - \theta)} + (-1)^n e^{-jn(\theta_i - \theta)} \right] \quad \text{pour } r \geq a \end{aligned}$$

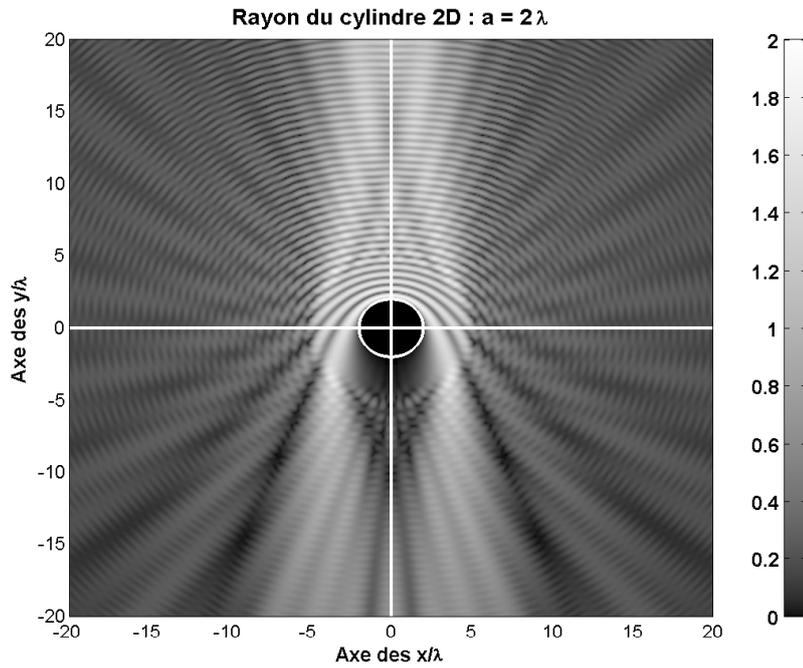


FIG. 3.4 – Module du champ total rayonné par un cylindre 2D parfaitement conducteur en polarisation TE de rayon $a = 2\lambda$. L'onde incidente est supposée plane se propageant dans le vide ($\epsilon_r = 1$) selon l'axe des z ($\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x e^{-j\omega t + Kz}$, soit $\theta_i = 0$) et les axes sont normalisés par λ .

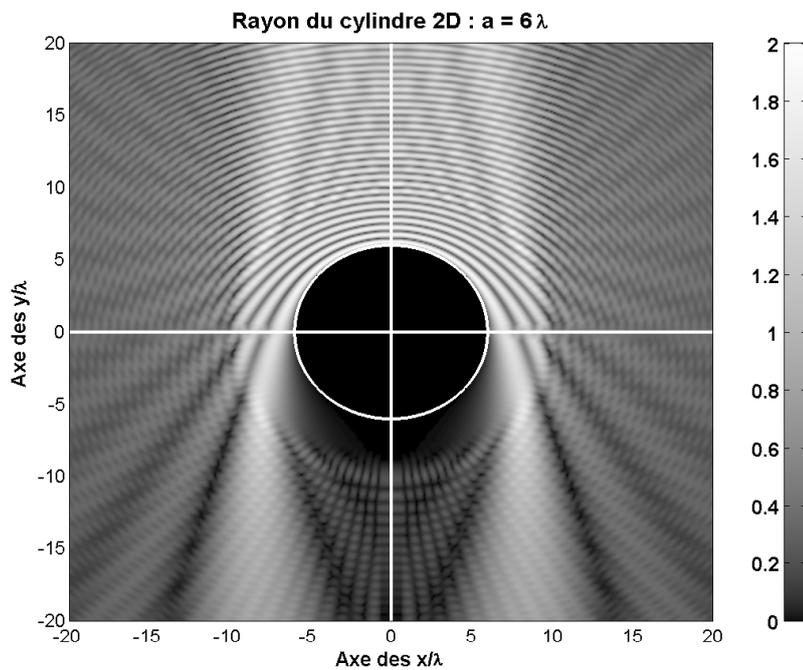


FIG. 3.5 – Figure similaire à la figure 3.4 avec $a = 6\lambda$.

Les figures 3.4 et 3.5 représentent le module du champ rayonné total diffracté par un cylindre

2D parfaitement conducteur en polarisation TE pour des rayons respectifs $a = 2\lambda$ et $a = 6\lambda$. L'onde incidente est supposée plane se propageant dans le vide ($\epsilon_r = 1$) selon l'axe des z ($\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_x e^{-j\omega t + Kz}$, soit $\theta_i = 0$) et les axes sont normalisés par la longueur d'onde λ .

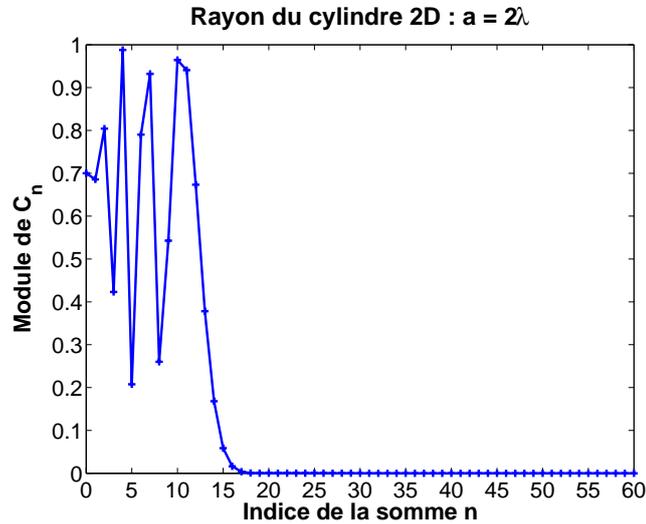


FIG. 3.6 – Module du coefficient de la somme, $|C_n| = \left| \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} \right|$, en fonction de l'indice de la somme n , pour un cylindre 2D parfaitement conducteur en polarisation TE de rayon $a = 2\lambda$.

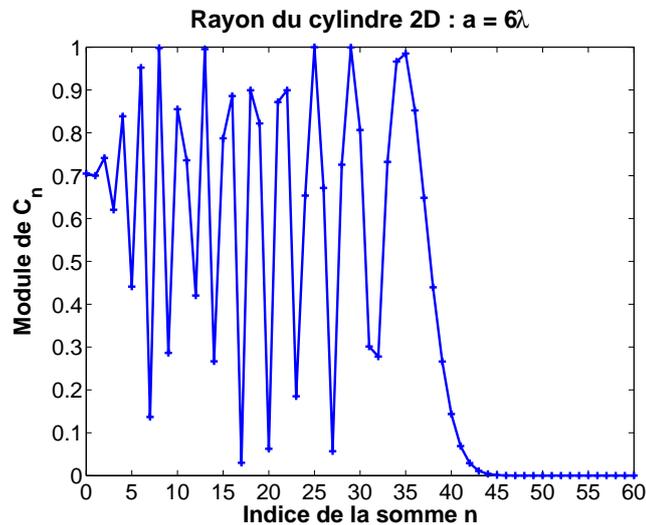


FIG. 3.7 – Figure similaire à la figure 3.6 avec $a = 6\lambda$.

Les figures 3.6 et 3.7 représentent le module du coefficient de la somme, $|C_n| = \left| \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} \right|$, en fonction de l'indice de la somme n pour des rayons respectifs $a = 2\lambda$ et $a = 6\lambda$.

3.2.2.3 Cas parfaitement conducteur en polarisation TM

D'après (3.5), la continuité de la composante tangentielle du champ électrique s'écrit

$$\mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

Par conséquent d'après (3.9), en utilisant le même raisonnement que dans le cas TE, nous obtenons avec $\mathbf{H} = \psi \hat{\mathbf{u}}_\theta = \psi_{i0} \hat{\mathbf{u}}_\theta e^{-j[\omega t - Kr \sin(\theta_i - \theta)]}$

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n H_n^{(1)}(Kr) e^{-jn\theta}$$

où C_n vérifie la condition aux limites suivante

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\psi_{i0} e^{-jn\theta_i} J_n(Kr) + C_n H_n^{(1)}(Kr) \right] e^{-jn\theta} \right\} \right|_{r=a} = 0 \quad \forall \theta$$

soit

$$C_n = -\frac{\psi_{i0} e^{jn\theta_i} \dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)}$$

avec $\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Le champ diffracté s'écrit donc

$$\psi_d(r, \theta) = -\psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Kr) e^{jn(\theta_i - \theta)} \quad \text{pour } r \geq a \quad (3.15)$$

Afin d'éviter de calculer numériquement les dérivées des fonctions de Bessel, nous pouvons utiliser les relations de récurrences suivantes où $f_n(x) = \{J_n(z), H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)\}$

$$\begin{aligned} \dot{f}_n(z) &= f_{n-1}(z) - \frac{n}{z} f_n(z) \\ &= -f_{n+1}(z) + \frac{n}{z} f_n(z) \\ &= \frac{f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z)}{2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Connnaissant $f_0(z)$ et $f_1(z)$, il alors possible selon (3.14) de construire $\dot{f}_n(z)$ pour $|n| > 1$.

3.2.2.4 Cas diélectrique en polarisation TE

Dans ce cas, l'équation de propagation s'écrit

$$[\nabla^2 + K^2(r)] \psi = 0$$

avec

$$K^2(r) = \begin{cases} K_1^2 & \text{si } r > a \\ K_2^2 & \text{si } r \leq a \end{cases}$$

Nous cherchons donc ψ tel que

$$[\nabla^2 + K_1^2] \psi_1 = 0 \text{ si } r > a$$

et

$$[\nabla^2 + K_2^2] \psi_2 = 0 \text{ si } r \leq a$$

où $\psi_1 = \psi_i + \psi_{1d}$ est le champ total en dehors du cylindre et ψ_2 le champ total dans le cylindre.

Toute la partie sur la séparation des variables pour obtenir la décomposition du champ soit sous la forme d'une somme infinie de fonctions de Bessel et de fonctions de Neuman soit sous la forme d'une somme infinie de fonctions de Hankel de première espèce et de deuxième espèce est identique à la section 3.2.2.2. Nous nous contenterons de rappeler que tout champ dans un espace de dimension 2 peut être représenté par ces deux sommes et que le choix d'en utiliser l'une plus que l'autre se fait pour des raisons de simplification des expressions uniquement.

La décomposition de ψ_{1d} et ψ_i a déjà été abordée (équations (3.9) et (3.11)) d'où la formule suivante pour le champ total ψ_1

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[B_n J_n(K_1 r) + C_n H_n^{(1)}(K_1 r) \right] e^{-jn\theta} \text{ avec } B_n = \psi_{i0} e^{jn\theta_i} \quad (3.17)$$

Reste maintenant à choisir la décomposition du champ ψ_2 . Ce choix se porte sur une décomposition en une somme infinie de fonctions de Bessel $J_n(x)$ et de Neuman $Y_n(x)$. De plus, puisque que la fonction de Neuman est divergente en $r = 0$ et que le champ ψ_2 ne doit diverger en aucun point intérieur au cylindre, la décomposition du champ va s'écrire

$$\begin{aligned} \psi_{d2}(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [E_n J_n(K_2 r) + F_n Y_n(K_2 r)] e^{-jn\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n J_n(K_2 r) e^{-jn\theta} \text{ car } \lim_{z \rightarrow 0} Y_n(z) = \infty \Rightarrow F_n = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dans les deux équations ci-dessus, les deux inconnues sont C_n et F_n . Par conséquent, contrairement au cas du cylindre parfaitement conducteur, il est nécessaire d'utiliser les deux relations de continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique.

Dans le cas d'une polarisation TE ($\mathbf{E} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x$) et dans l'hypothèse où $\mu = \mu_1 = \mu_2$, les composantes tangentielles des champs s'écrivent ψ et $H_\theta = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \psi}{\partial r}$. Sur la surface du cylindre ($r = a$), les relations de continuité deviennent alors

$$\begin{cases} \psi_1(a, \theta) = \psi_2(a, \theta) & \forall \theta \in [0; 2\pi] \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} & \forall \theta \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

nous obtenons donc

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [B_n J_n(K_1 a) + C_n H_n^{(1)}(K_1 a)] e^{-jn\theta} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n J_n(K_2 a) e^{-jn\theta} \\ K_1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [B_n J_n(K_1 a) + C_n \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a)] e^{-jn\theta} = K_2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_n J_n(K_2 a) e^{-jn\theta} \end{cases}$$

avec $\dot{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$. Ce système doit être vérifié $\forall (\theta, n)$, d'où

$$\begin{cases} B_n J_n(K_1 a) + C_n H_n^{(1)}(K_1 a) = E_n J_n(K_2 a) \\ K_1 [B_n \dot{J}_n(K_1 a) + C_n \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a)] = K_2 E_n \dot{J}_n(K_2 a) \end{cases}$$

Les solutions du système s'écrivent avec $\rho_{12} = \frac{K_2}{K_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$$\begin{cases} E_n = B_n \frac{H_n^{(1)}(K_1 a) \dot{J}_n(K_1 a) - \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a) J_n(K_1 a)}{\rho_{12} H_n^{(1)}(K_1 a) \dot{J}_n(K_2 a) - \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a) J_n(K_2 a)} \\ C_n = B_n \frac{J_n(K_2 a) \dot{J}_n(K_1 a) - \rho_{12} J_n(K_1 a) \dot{J}_n(K_2 a)}{\rho_{12} H_n^{(1)}(K_1 a) \dot{J}_n(K_2 a) - \dot{H}_n^{(1)}(K_1 a) J_n(K_2 a)} \end{cases}$$

En utilisant les relations de récurrence (3.13), (3.14) et (3.16), le temps de calcul pour calculer la somme sur n de (3.17) et (3.18) est considérablement réduit.

3.3 Approximations de l'optique physique

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à l'approximation de l'optique physique dans les cas 2D et 3D. L'avantage de commencer par le cas 2D est pédagogiquement beaucoup plus aisé car les équations impliquées sont beaucoup plus simples que dans le cas 3D du à la nature scalaire du problème à résoudre.

3.3.1 Problème 2D : cas scalaire

3.3.1.1 Introduction

L'approximation de l'optique physique est généralement assimilée à l'approximation du plan tangent, pour laquelle la surface en chacun de ses points peut être assimilée à un plan infini, correspondant à la tangente de la surface au point considéré. La surface est alors qualifiée de localement plane. Sous cette hypothèse, le champ réfléchi par la surface peut s'exprimer très simplement à partir du champ incident sur la surface à l'aide des lois de Snell-Descartes et des coefficients de Fresnel. Le coefficient de réflexion de Fresnel permet de connaître son amplitude, et la loi de Snell-Descartes sa direction.

D'après le principe d'Huygens (chapitre 2), le champ total diffracté par la surface s'écrit

$$\psi_d(\mathbf{r}') = - \int_{S_1} \left[\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS \quad (3.19)$$

où $\psi(\mathbf{r})$ est le champ total sur la surface et $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ sa dérivée normale. Ce sont les inconnues du problème. Dans la suite, nous allons présenter uniquement le champ diffracté au-dessus de la surface (champ réfléchi). Pour le champ diffracté au-dessous de la surface (champ transmis), le raisonnement est très similaire.

L'approximation de l'optique physique spécifie que $\{\psi(\mathbf{r}), \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}\}$ en un point $M(y, z)$ quelconque de la surface, S , sont les mêmes que ceux qui existeraient sur une surface plane tangente infinie dont les propriétés électromagnétiques seraient celles caractéristiques de la surface limitée au point considéré (y, z) (figure 3.8). Cette approximation est valide si $\rho_c \cos^3 \theta_i \gg \lambda$, dans laquelle ρ_c est le rayon de courbure de la surface et θ_i est l'angle d'incidence.

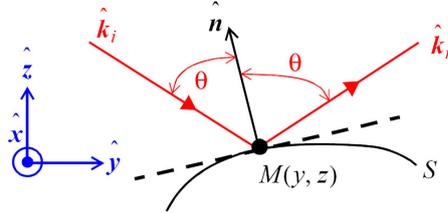


FIG. 3.8 – Illustration de l'approximation de l'optique physique. $\hat{\mathbf{n}}$ est la normale au plan tangent.

3.3.1.2 Expression du champ rayonné en zone lointaine

Par conséquent, le champ total sur la surface ψ_M au point M s'écrit en fonction du champ incident ψ_{iM} comme

$$\psi_M = [1 + \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM}, \quad (3.20)$$

où \mathcal{R} est le coefficient de réflexion de Fresnel soit en polarisation TE (\mathcal{R}_\perp) ou TM (\mathcal{R}_\parallel , voir section 1.5.5.2). θ est l'angle entre la normale au plan tangent et le nombre d'onde incident \mathbf{k}_i , soit $\cos \theta = -\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$. De plus, la dérivée normale du champ s'écrit ($\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{n}}$)

$$\frac{\partial \psi_M}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \{[1 + \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM}\} = \frac{\partial \psi_{iM}}{\partial n} + \frac{\partial [\mathcal{R}(\theta) \psi_{iM}]}{\partial n} \approx j [\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{k}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM}$$

où \mathbf{k}_r le vecteur d'onde réfléchi dans la direction spéculaire car localement la surface est assimilée à un plan *infini* tangent, pour lequel les lois de Snell-Descartes peuvent être appliquées. Pour simplifier, $\frac{\partial \mathcal{R}(\theta)}{\partial n} \approx 0$. Par conséquent

$$\mathbf{k}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

En conclusion, l'approximation de l'optique physique conduit à

$$\begin{cases} \psi_M = [1 + \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM} \\ \frac{\partial \psi_M}{\partial n} = j \mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} [1 - \mathcal{R}(\theta)] \psi_{iM} \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans le chapitre 2 (voir section 2.1.6), nous avons montré que le champ rayonné en zone lointaine s'écrivait

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_S \left[j \mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-j \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} dS$$

Par conséquent sous l'approximation de l'optique physique avec $\psi_{iM} = \psi_{i0} e^{j \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$, nous avons

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_S [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d)(1 + \mathcal{R}) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_i)(1 - \mathcal{R})] e^{-j(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}} dS \quad (3.22)$$

A noter que la normale à la surface $\hat{\mathbf{n}}$ peut s'écrire $\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\gamma\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ et l'élément de surface $dS = dy\sqrt{1+\gamma^2}$ avec $\gamma = dz/dy$.

3.3.1.3 Cas d'une plaque linéique parfaitement conductrice

Pour une surface parfaitement conductrice $\mathcal{R} = \pm 1$ et pour une plaque linéique de longueur L (figure 3.9), $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \forall \mathbf{r}$, $dS = dy$. Considérons le cas TM (polarisation verticale), d'où $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{//} = +1$. L'équation (3.22) s'écrit alors

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d)} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-j(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \hat{\mathbf{y}} dy}$$

D'après la figure 3.9, les vecteur d'onde incident et d'observation s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = K(\hat{\mathbf{y}} \sin \theta_i - \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_i) \\ \mathbf{k}_d = K(\hat{\mathbf{y}} \sin \theta_d + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_d) \end{cases} \quad (3.23)$$

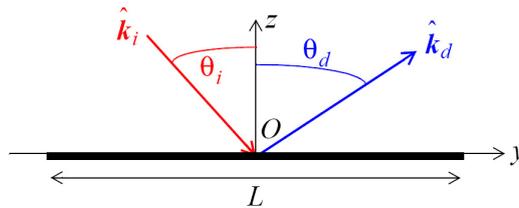


FIG. 3.9 – Plaque linéique de longueur L centrée à l'origine.

L'intégration sur y conduit alors à

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} K L \cos \theta_d \text{sinc} \left[\frac{K L (\sin \theta_i - \sin \theta_d)}{2} \right]$$

La Surface (linéique) Equivalente Radar (SER) d'une surface linéique est définie comme

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = 2\pi r' \lim_{r' \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi_d(\mathbf{r}')}{\psi_i} \right|^2 \quad (3.24)$$

En conclusion, la SER s'écrit pour une plaque linéique de longueur L parfaitement conductrice en polarisation TM comme

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = \frac{1}{K} \left\{ K L \cos \theta_d \text{sinc} \left[\frac{K L (\sin \theta_i - \sin \theta_d)}{2} \right] \right\}^2 \quad (3.25)$$

La figure 3.10 présente la SER normalisée $\sigma_l(\theta_i, \theta_d)K$ en fonction de l'angle d'observation θ_d pour $\theta_i = 0$ et $\frac{\lambda}{L} = \{0.2, 0.4\}$. On observe que plus le ratio $\frac{\lambda}{L}$ diminue, c.a.d L grand devant λ , est plus la puissance diffractée par la plaque est concentrée autour de la direction spéculaire $\theta_d = 0$. Dans le cas limite, où $L \gg \lambda$, le phénomène de diffraction disparaît et alors toute l'énergie est réfléchiée dans la direction spéculaire. A noter, que le premier zéro de $\sigma_l(\theta_i, \theta_d)$ est obtenu lorsque $\frac{K L (\sin \theta_i - \sin \theta_d)}{2} = \pi$ soit $\sin \theta_d = \sin \theta_i - \frac{\lambda}{L} = \frac{\lambda}{L} = \{0.1, 0.2\} \Rightarrow \theta_i = \pm \{11.5, 23.6\}^\circ$.

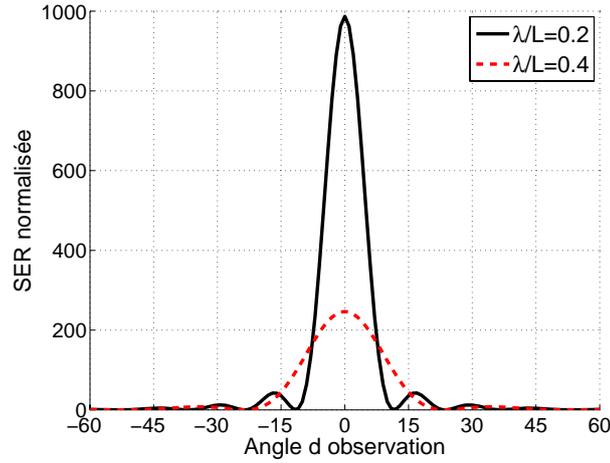


FIG. 3.10 – SER normalisée d’une plaque linéique parfaitement conductrice en polarisation TM en fonction de l’angle d’observation avec $\theta_i = 0$.

3.3.1.4 Cas d’un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d’un demi cylindre elliptique (figure 3.11) parfaitement conducteur dans le but d’étudier l’effet de la courbure comparativement à une plaque (courbure nulle).

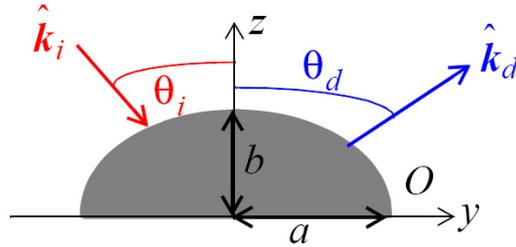


FIG. 3.11 – demi cylindre elliptique de demi-grand axe a et de demi-petit axe b centré à l’origine.

En coordonnées polaires, l’équation du demi cylindre elliptique centré à l’origine s’écrit

$$\begin{cases} y = a \cos \theta \\ z = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0; \pi] \quad (3.26)$$

avec a le demi-grand axe et b le demi-petit axe. De plus

$$dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d = dy \sqrt{1 + \gamma^2} \frac{-\gamma \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \cdot \mathbf{k}_d = -\gamma dy k_{dy} + dy k_{dz} \quad (3.27)$$

avec $\gamma = \frac{dy}{dz}$. Or $\gamma dy = dz = b \cos \theta d\theta$ et $dy = -a \sin \theta d\theta$. Par conséquent, l’équation (3.22) s’écrit en coordonnées polaires pour une surface parfaitement conductrice en polarisation TM comme

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_0^\pi e^{j[a(k_{iy} - k_{dy}) \cos \theta + b(k_{iz} - k_{dz}) \sin \theta]} (b k_{dy} \cos \theta + a k_{dz} \sin \theta) d\theta \quad (3.28)$$

En posant $\cos \chi = \frac{a}{\alpha}(k_{iy} - k_{dy})$ et $\sin \chi = \frac{b}{\alpha}(k_{iz} - k_{dz})$ avec

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{a^2(k_{iy} - k_{dy})^2 + b^2(k_{iz} - k_{dz})^2} \\ \tan \chi = \frac{b(k_{iz} - k_{dz})}{a(k_{iy} - k_{dy})} = -\frac{b}{a} \cot \left(\frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) \end{cases} \quad (3.29)$$

l'équation ci-dessus devient

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_0^\pi e^{j\alpha \cos(\theta-\chi)} (bk_{dy} \cos \theta + ak_{dz} \sin \theta) d\theta$$

Le terme en exponentiel est alors décomposé comme

$$e^{j\alpha \cos(\theta-\chi)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{jn(\theta-\chi)}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{j\alpha \cos(\theta-\chi)} \cos \theta d\theta &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{-jn\chi} \int_0^\pi e^{jn\theta} \cos \theta d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n j^n J_n(\alpha) \frac{[1 + (-1)^n] e^{-jn\chi}}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement sur $\sin \theta$, nous avons

$$\int_0^\pi e^{j\alpha \cos(\theta-\chi)} \sin \theta d\theta = - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) \frac{[1 + (-1)^n] e^{-jn\chi}}{n^2 - 1}$$

Par conséquent l'intégration sur θ de (3.28) conduit à

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) \frac{[1 + (-1)^n] e^{-jn\chi}}{n^2 - 1} (jnbk_{dy} - ak_{dz})$$

Au final d'après (3.24), la SER s'écrit pour un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur en polarisation TM comme

$$\begin{aligned} \sigma_l(\theta_i, \theta_d) &= K \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{-jn\chi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} (bjn \sin \theta_d - a \cos \theta_d) \right|^2 \\ &= K \left| 2aJ_0(\alpha) \cos \theta_d - \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{n=+\infty} j^n J_n(\alpha) e^{-jn\chi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} (bjn \sin \theta_d - a \cos \theta_d) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dans la cas où $b = 0$, $\sin \chi = 0 \Rightarrow \chi = \{0, \pm\pi\}$, $\alpha = a|k_{iy} - k_{dy}|$, $\cos \chi = \text{sign}(k_{iz} - k_{dz}) = \pm 1 \Rightarrow \chi = \pm\pi$, et $e^{-jn\chi} = \{1, e^{\mp jn\pi}\} = \{1, (-1)^n\}$. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma_l(\theta_i, \theta_d) &= \frac{1}{K} (KL \cos \theta_d)^2 \left| \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^n J_n(Ka |\sin \theta_i - \sin \theta_d|) \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \right|^2 \\ &= \frac{1}{K} (KL \cos \theta_d)^2 \left| J_0(Ka |\sin \theta_i - \sin \theta_d|) - \sum_{n=1}^{n=+\infty} j^n J_n(Ka |\sin \theta_i - \sin \theta_d|) \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \right|^2 \end{aligned}$$

La figure 3.12 présente la SER normalisée d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur en polarisation TM en fonction de l'angle d'observation avec $\theta_i = 0$ et $a = 5\lambda$. On observe que lorsque b augmente, la puissance diffractée se concentre moins autour de la direction spéculaire.

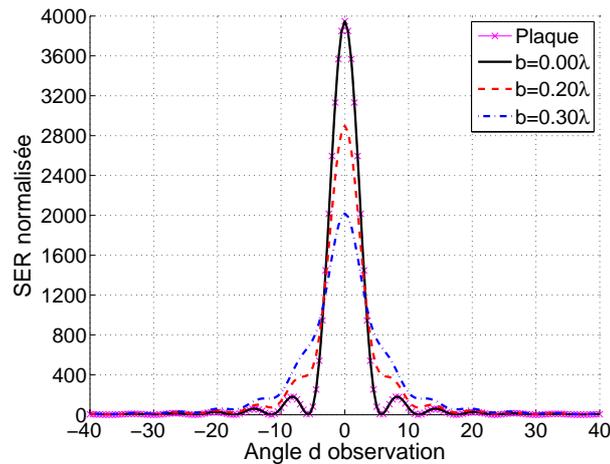


FIG. 3.12 – SER normalisée d'un demi cylindre elliptique parfaitement conducteur en polarisation TM en fonction de l'angle d'observation avec $\theta_i = 0$ et $a = 5\lambda$.

La figure 3.13 présente le coefficient $C_n = \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1}$ de la somme en fonction de n .

3.3.2 Problème 3D : cas vectoriel

Cette partie ne sera pas enseignée. Dans cette section, l'approximation de l'optique physique est présentée dans le cas vectoriel, c.a.d lorsque la surface est une fonction à la fois des coordonnées x et y . La démarche pour le calcul du champ diffracté par une surface diélectrique finie en champ lointain illuminée par une onde plane est la même que dans le cas 2D, hormis que les équations sont plus compliquées.

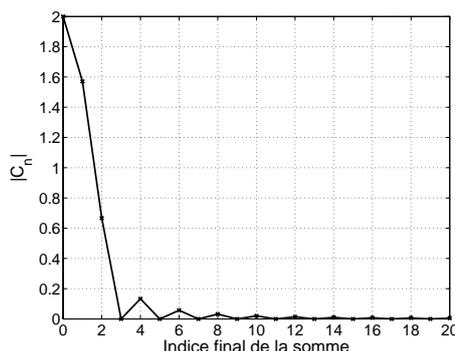


FIG. 3.13 – Module du coefficient $C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}$ de la somme en fonction de n pour le calcul de la SER de la figure 3.12.

3.3.2.1 Introduction

Nous avons montré dans le chapitre 2, que le champ diffracté par un objet en champ lointain s'écrivait (voir (2.51))

$$\mathbf{E}_d^\infty(\mathbf{R}') = \frac{-jKe^{jKR'}}{4\pi R'} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d) \cdot \iint_{S_1} e^{-jK\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \mathbf{R}} \left\{ Z\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] \right\} dS \quad (3.31)$$

Tout le problème est de calculer la composante tangentielle des champs totaux $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})$ sur la surface. L'approximation de l'optique physique spécifie que les champs électromagnétiques ($\mathbf{E}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{R})$) en un point (x, y) quelconque de la surface, S , sont les mêmes que ceux qui existeraient sur une surface plane tangente infinie dont les propriétés électromagnétiques seraient celles caractéristiques de la surface limitée au point considéré (x, y) . Nous allons alors montrer que le champ diffracté est obtenu à partir des coefficients de Fresnel $\mathcal{R}_{//}$ et \mathcal{R}_\perp (voir section 1.5.5.2).

3.3.2.2 Description de la géométrie

Soit la configuration illustrée en figure 3.14. Soit $\hat{\mathbf{k}}_i$ et $\hat{\mathbf{k}}_d$ deux vecteurs unitaires qui indiquent respectivement les directions des ondes incidente et diffractée. Soit le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{h}}_i$ défini par $\hat{\mathbf{h}}_i = \hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}}_i / |\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}}_i|$ qui correspond à la polarisation *horizontale* (cas TE), et le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{v}}_i$ défini par $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{h}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i$ qui correspond à la polarisation *verticale* (cas TM). Les vecteurs $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i)$ forment alors une base orthogonale unitaire. On définit de même une base orthogonale unitaire $(\hat{\mathbf{k}}_d, \hat{\mathbf{v}}_d, \hat{\mathbf{h}}_d)$ en réception.

Dans un système de coordonnées sphériques, l'ensemble des vecteurs s'écrit alors

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_i = \sin \theta_i \cos \phi_i \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_i \sin \phi_i \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{v}}_i = -\cos \theta_i \cos \phi_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \sin \phi_i \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{h}}_i = -\sin \phi_i \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi_i \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_d = \sin \theta_d \cos \phi_d \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_d \sin \phi_d \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta_d \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{v}}_d = \cos \theta_d \cos \phi_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_d \sin \phi_d \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_d \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{h}}_d = -\sin \phi_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi_d \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

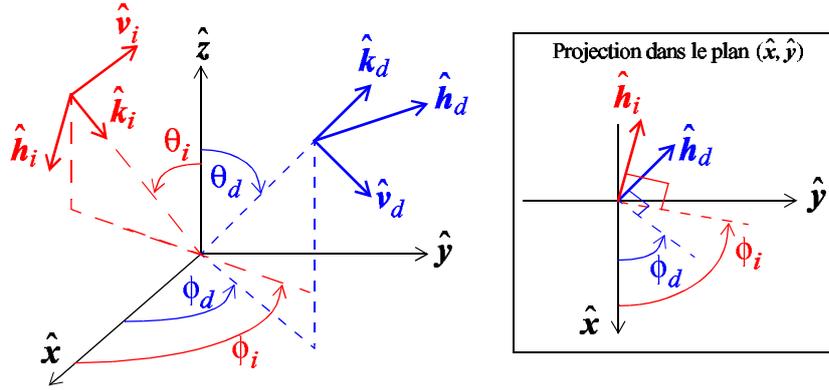


FIG. 3.14 – Illustration des bases de polarisations utilisées en émission et en réception.

Le système de coordonnées $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i)$ est choisi de telle façon qu'il coïncide avec le système de coordonnées sphériques $(\hat{\mathbf{u}}_{r_i}, \hat{\mathbf{u}}_{\theta_i}, -\hat{\mathbf{u}}_{\phi_i})$, tandis que $(\hat{\mathbf{k}}_d, \hat{\mathbf{v}}_d, \hat{\mathbf{h}}_d) \equiv (\hat{\mathbf{u}}_{r_d}, \hat{\mathbf{u}}_{\theta_d}, \hat{\mathbf{u}}_{\phi_d})$. Dans la base de polarisation $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i)$, une onde plane incidente s'écrit alors $\mathbf{E}_i = (E_{iv}\hat{\mathbf{v}}_i + E_{ih}\hat{\mathbf{h}}_i)e^{jK\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}$. Nous pouvons alors montrer que la dyade $\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d\hat{\mathbf{k}}_d$ s'écrit $\hat{\mathbf{v}}_d\hat{\mathbf{v}}_d + \hat{\mathbf{h}}_d\hat{\mathbf{h}}_d$.

Comme le montre la figure 3.15, nous allons calculer le champ diffracté en zone lointaine par une onde plane incidente contenue dans le plan $(0yz)$ illuminant une surface d'aire finie.

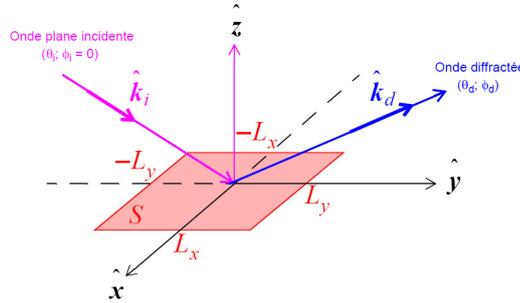


FIG. 3.15 – Champ diffracté par une surface finie calculé à l'aide de l'approximation de l'optique physique.

Les deux sections suivantes sont des cas généraux pour lesquels aucune hypothèse n'est faite sur la normale à la surface, $\hat{\mathbf{n}}$. Dans la dernière section, les relations seront simplifiées en considérant que la normale est dirigée selon $\hat{\mathbf{z}}$ et que $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Dans la définition des coefficients de réflexion de Fresnel, l'angle θ est défini par $\cos \theta = -\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Lorsque la normale est quelconque, afin d'exprimer les champs tangentiels, nous allons définir une base orthogonale locale $(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{k}}_i)$ (figure 3.16) définie sur la surface par

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}\|} \quad \hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 0 \\ \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{q}}_i$ et $\hat{\mathbf{p}}_i$ correspondent aux polarisations orthogonale et parallèle. Dans ce système de coordonnées, une onde plane incidente s'écrit $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_i e^{jK\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}} = (E_{iv}\hat{\mathbf{p}}_i + E_{ih}\hat{\mathbf{q}}_i)e^{jK\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}$ où le vecteur \mathbf{a}_i donne la polarisation de l'onde.

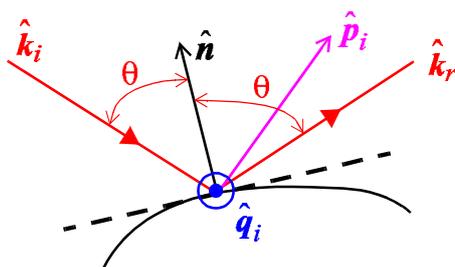


FIG. 3.16 – Illustration de la base de polarisation utilisée dans l’approximation de Kirchhoff.

3.3.2.3 Calcul dans le cas général en polarisation TE

Dans cette section nous allons nous intéresser au cas TE, c’est-à-dire à la composante orthogonale du champ électrique incident : polarisation TE, horizontale (H) ou \perp .

La composante orthogonale du champ électrique incident s’écrit

$$(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \quad (3.32)$$

La composante réfléchie du champ électrique est alors

$$(3.32) \times \mathcal{R}_\perp = (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp \quad (3.33)$$

Par conséquent, la composante tangentielle totale du champ électrique sur la surface d’une onde incidence plane polarisée horizontalement s’écrit

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{n}} \wedge [(3.32) + (3.33)] = (\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i) (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) (1 + \mathcal{R}_\perp) \quad (3.34)$$

De plus, sachant que $\mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3$ nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) (1 + \mathcal{R}_\perp) \hat{\mathbf{k}}_d \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i) \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) (1 + \mathcal{R}_\perp) \left[(\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{q}}_i \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Le champ magnétique incident associé au champ électrique incident s’écrit

$$\frac{1}{Z} \hat{\mathbf{k}}_i \wedge (3.32) = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{k}}_i \wedge (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \quad (3.36)$$

La composante réfléchie locale du champ magnétique s’écrit donc

$$(3.36) \times \mathcal{R}_\perp = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{k}}_r \wedge (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp \quad (3.37)$$

où la direction spéculaire locale à la surface portée par le vecteur $\hat{\mathbf{k}}_r$ s’écrit

$$\hat{\mathbf{k}}_r = \hat{\mathbf{k}}_i - 2\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)$$

Par conséquent, la composante tangentielle totale du champ magnétique sur la surface d'une onde incidence plane polarisée horizontalement s'écrit

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) &= \hat{\mathbf{n}} \wedge [(3.36) + (3.37)] = \frac{1}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{q}}_i + \hat{\mathbf{k}}_r \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp) \\
&= \frac{1}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left\{ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i + [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{k}}_r - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r) \hat{\mathbf{q}}_i] \mathcal{R}_\perp \right\} \\
&= \frac{1}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left[-(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r) \hat{\mathbf{q}}_i \mathcal{R}_\perp \right] \quad \text{car } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 0 \\
&= -\frac{1 - \mathcal{R}_\perp}{Z}(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \quad \text{car } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_r
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Par conséquent nous avons selon (3.35) et (3.38)

$$\begin{aligned}
Z \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_\perp) \left[(\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{q}}_i \right] \right. \\
&\quad \left. - (1 - \mathcal{R}_\perp)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \right\}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.3.2.4 Calcul dans le cas général en polarisation TM

Dans cette section, le cas TM (polarisation verticale (V) ou //) est examiné.

En appliquant le même raisonnement nous obtenons en polarisation TM

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}) &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)(1 - \mathcal{R}_{//}) \hat{\mathbf{q}}_i \\ Z \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(1 + \mathcal{R}_{//})(\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i) \end{cases}$$

A noter que $\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{p}}_i) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{p}}_i$. Par conséquent

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i)(1 - \mathcal{R}_{//}) \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \\ Z \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i)(1 + \mathcal{R}_{//}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{p}}_i \right] \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Z \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \hat{\mathbf{k}}_d \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})] &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_{//}) \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{p}}_i \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \mathcal{R}_{//})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \right\}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.3.2.5 Cas où la normale est dirigée selon $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$

Puisque $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, nous avons $\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{n}}\|} = \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{z}}}{\|\hat{\mathbf{k}}_i \wedge \hat{\mathbf{z}}\|} = -\hat{\mathbf{h}}_i$ et $\hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{h}}_i \wedge \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{v}}_i$, soit

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{q}}_i = -\hat{\mathbf{h}}_i \\ \hat{\mathbf{p}}_i = -\hat{\mathbf{v}}_i \end{cases}$$

De plus, $\hat{\mathbf{k}}_i \in (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow \phi_i = \pi/2 \Rightarrow \hat{\mathbf{h}}_i = -\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{x}}$. Soit

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_i = \sin \theta_i \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{p}}_i = \cos \theta_i \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

L'équation (3.39) devient alors

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_\perp) \left[(\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{k}}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{q}}_i \right] - (1 - \mathcal{R}_\perp) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{q}}_i \right\} \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) \left[(1 + \mathcal{R}_\perp) (\hat{k}_{dx} \hat{\mathbf{z}} - \hat{k}_{dz} \hat{\mathbf{x}}) - (1 - \mathcal{R}_\perp) \hat{k}_{iz} \hat{\mathbf{x}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} -(1 + \mathcal{R}_\perp) \hat{k}_{dz} + (1 - \mathcal{R}_\perp) \cos \theta_i \\ 0 \\ (1 + \mathcal{R}_\perp) \hat{k}_{dx} \end{bmatrix} E_{ih} \end{aligned} \quad (3.41)$$

car $(\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) = (E_{iv} \hat{\mathbf{p}}_i + E_{ih} \hat{\mathbf{q}}_i) \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = E_{ih}$. De même, l'équation (3.40) s'écrit

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left\{ (1 + \mathcal{R}_\parallel) \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \hat{\mathbf{k}}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{p}}_i \right] + (1 - \mathcal{R}_\parallel) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{q}}_i \right\} \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left[(1 + \mathcal{R}_\parallel) (\sin \theta_i \hat{\mathbf{k}}_i + \cos \theta_i \hat{\mathbf{p}}_i) - (1 - \mathcal{R}_\parallel) \cos \theta_i \hat{\mathbf{k}}_d \wedge \hat{\mathbf{x}} \right] \\ &= (\mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i) \left[(1 + \mathcal{R}_\parallel) (\sin^2 \theta_i \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_i \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}} + \cos^2 \theta_i \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta_i \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \mathcal{R}_\parallel) \cos \theta_i \hat{k}_{dz} \hat{\mathbf{y}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \mathcal{R}_\parallel - (1 - \mathcal{R}_\parallel) \cos \theta_i \hat{k}_{dz} \\ 0 \end{bmatrix} E_{iv} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sachant que $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_i e^{jK \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}$, en reportant ces deux equations dans (3.31), le champ diffracté en champ lointain s'écrit avec l'approximation de Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d^\infty(\mathbf{R}') &= \mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') \iint_S e^{jK(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_d) \cdot \mathbf{R}} dx dy \\ &= \mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') \iint_S e^{jK[(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx})x + (\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy})y]} dx dy \end{aligned} \quad (3.43)$$

avec

$$\mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}') = \frac{-jK e^{jKR'}}{4\pi R'} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d) \cdot \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

où les composantes Q_x , Q_y et Q_z sont données selon la polarisation soit par (3.41) ou par (3.42). Le produit scalaire peut être alors calculé à partir

$$\hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta_d & -\cos \theta_d \sin \theta_d \\ 0 & -\cos \theta_d \sin \theta_d & \sin^2 \theta_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

où $\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d = \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d + \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d$.

Dans les cas monostatique, $\theta_d = -\theta_i$, et bistatique, $\theta_d = +\theta_i$, nous avons respectivement pour les deux polarisations ($\hat{k}_{dx} = 0$)

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2E_{ih}\mathcal{R}_\perp \cos \theta_i \\ E_{iv} [\sin^2 \theta_i + \mathcal{R}_{//} (1 + \cos^2 \theta_i)] \\ -E_{ih} (1 + \mathcal{R}_{//}) \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2E_{ih}\mathcal{R}_\perp \cos \theta_i \\ E_{iv} [\sin^2 \theta_i + \mathcal{R}_{//} (1 + \cos^2 \theta_i)] \\ E_{ih} (1 + \mathcal{R}_{//}) \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

De plus, d'après (3.45), dans le cas plan nous avons

$$(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}_d \hat{\mathbf{k}}_d) = \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d + \hat{\mathbf{h}}_d \hat{\mathbf{h}}_d \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta_d & -\cos \theta_d \sin \theta_d \\ 0 & -\cos \theta_d \sin \theta_d & \sin^2 \theta_d \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

En conclusion l'équation (3.43), montre que le champ diffracté dépend d'un terme $\mathbf{E}_{d0}^\infty(\mathbf{R}')$ fonction des angles en émission et en réception et d'une intégrale, qui correspond physiquement à la diffraction par la surface. Dans le cas d'une surface rectangulaire de longueur $2L_x$ et de largeur $2L_y$, elle s'écrit

$$\begin{aligned} \iint_S e^{jK[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})x+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})y]} dx dy &= \int_{-L_x}^{+L_x} \int_{-L_y}^{+L_y} e^{jK[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})x+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})y]} dx dy \\ &= S \times \text{sinc}(KL_x[\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx}]) \times \text{sinc}(KL_y[\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy}]) \\ &= S \times \text{sinc}(KL_y[\sin \theta_i - \sin \theta_d]) \end{aligned}$$

où $S = 4L_x L_y$ est l'aire de la surface illuminée et $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Nous observons qu'il n'y a pas de diffraction selon la direction $\hat{\mathbf{x}}$ car nous observons dans le plan $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Lorsque $KL_y \gg 1$, soit $L_y \gg \lambda$, la fonction sinus cardinal tend vers 1, et la surface se comporte alors comme une surface *infinie*.

Dans le cas d'une surface circulaire de rayon a , nous avons

$$\begin{aligned} &\iint_S e^{jK[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})x+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})y]} dx dy \\ &= \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} e^{jK[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx})x+(\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy})y]} dx dy \\ &= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{jKr[(\hat{k}_{ix}-\hat{k}_{dx}) \cos \vartheta + (\hat{k}_{iy}-\hat{k}_{dy}) \sin \vartheta]} d\vartheta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases} \\ &= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{jKr\alpha \cos(\vartheta - \varpi)} d\vartheta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx})^2 + (\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy})^2} \\ \varpi = \arctan\left(\frac{\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy}}{\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{dx}}\right) \end{cases} \\ &= 2\pi \int_0^a J_0(Kr\alpha) r dr = 2\pi \frac{aJ_1(aK\alpha)}{K\alpha} \\ &= S \frac{2J_1(Ka\alpha)}{Ka\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = |\hat{k}_{iy} - \hat{k}_{dy}| = |\sin \theta_i - \sin \theta_d| \end{aligned}$$

où $S = \pi a^2$ est l'aire de la surface illuminée.

Les figures 3.17 et 3.18 représentent les quantités $\text{sinc}(KL_y\alpha)$ et $\frac{2J_1(Ka\alpha)}{Ka\alpha}$ en fonction de l'angle d'observation θ_d pour $\lambda/L_y = \lambda/a = \{0.5, 1\}$ et $\theta_i = 0$. Nous observons, que plus le rapport λ sur la dimension de l'objet est grande, et plus le diagramme de diffraction est isotrope. Dans le cas limite, où $\lambda/L_y = \lambda/a \rightarrow \infty$, le champ diffracté vaut $1 \forall \theta_d$.

Dans le cas d'une plaque rectangulaire, le premier zéro de $\text{sinc}(KL_y\alpha)$ est donné par $KL_y\alpha_0 = \pi$ soit $\alpha_0 = 0.5\frac{\lambda}{L_y}$, et pour $\theta_i = 0$, ceci correspond à un angle d'observation de $\theta_d = \arcsin(0.5\frac{\lambda}{L_y}) = \{14.5, 90\}$ degrés pour $\lambda/L_y = \{0.5, 2\}$.

Dans le cas d'une plaque circulaire, le premier zéro de $\frac{2J_1(Ka\alpha)}{Ka\alpha}$ est donné par $KL_y\alpha_0 = 3.83$ soit $\alpha_0 = 0.61\frac{\lambda}{a}$, et pour $\theta_i = 0$, ceci correspond à un angle d'observation de $\theta_d = \arcsin(0.61\frac{\lambda}{L_y}) = \{17.8, -\}$ degrés pour $\lambda/a = \{0.5, 2\}$.

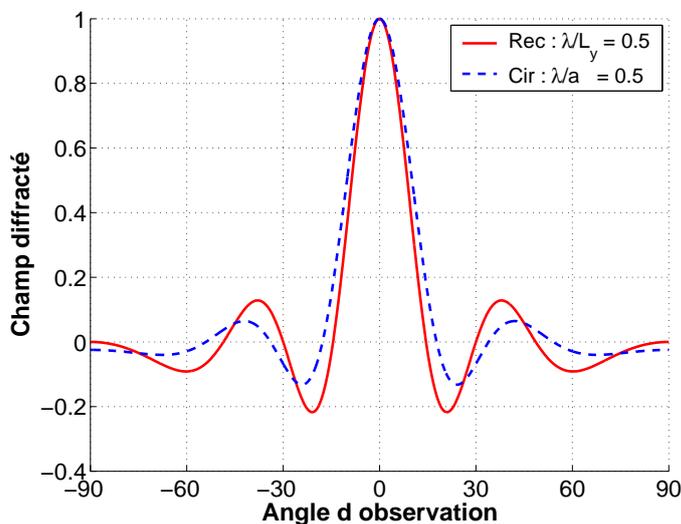
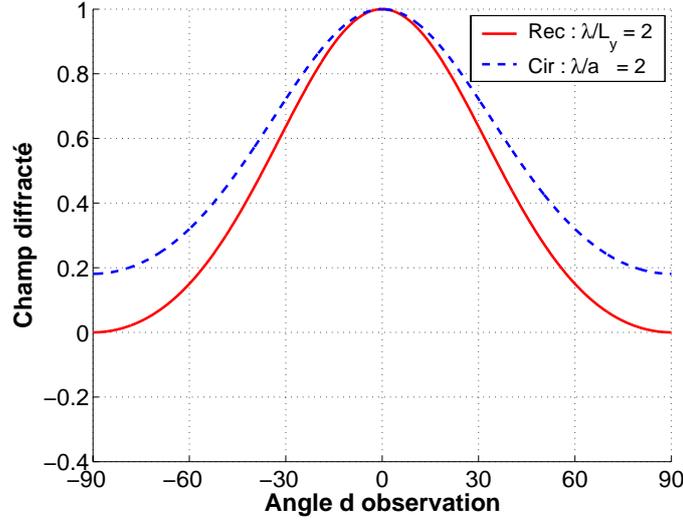


FIG. 3.17 – Champ diffracté par des surfaces rectangulaire et circulaire en fonction de l'angle d'observation θ_d pour $\lambda/L_y = \lambda/a = 0.5$ et $\theta_i = 0$.

3.4 Méthode des moments

L'avantage des approches asymptotiques est leur facilité de mise en oeuvre. Leurs temps de calcul sont faibles et elles requièrent en général peu d'espace mémoire. En revanche, leur inconvénient principal est qu'elles possèdent des domaines de validité plus ou moins restrictifs selon les approches utilisées. Pour surmonter ces inconvénients, des méthodes numériques dites *exactes* (la seule approximation vient de la discrétisation des équations intégrales) sont nécessaires. Elles peuvent être appliquées sur une structure quelconque. Néanmoins, plus les dimensions de l'objet sont grandes devant la longueur d'onde, plus le nombre d'inconnues à déterminer est grand. C'est pour cela que la mise en oeuvre de modèles asymptotiques est encore étudiée de nos jours. De plus elles nécessitent des ressources informatiques importantes et les temps de calcul sont souvent prohibitifs. Ces méthodes servent donc de référence pour valider les approches asymptotiques.

FIG. 3.18 – Figure similaire à la figure 3.17 avec $\lambda/L_y = \lambda/a = 2$.

3.4.1 Formulation mathématique

3.4.1.1 Trois étapes

La méthode des moments va permettre de calculer le champ électromagnétique dans le cas le plus général. Elle est applicable à la résolution de toute équation linéaire du type

$$\mathcal{L}(f) = g \quad (3.49)$$

où \mathcal{L} est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire, f l'inconnue et g , une fonction donnée.

Première étape Tout d'abord, la fonction recherchée f est projetée sur une base complète $\{f_n\}_{n=1..N}$; c'est-à-dire que nous approchons f par

$$f \simeq \hat{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n$$

et \hat{f} vérifie $\lim_{N \rightarrow +\infty} |f - \hat{f}| = 0$.

Le problème revient donc à déterminer les coefficients a_n . En remplaçant cette approximation dans (3.49), nous obtenons

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^N a_n f_n \right) + \epsilon = g$$

où ϵ est l'erreur d'approximation, encore appelée résidu, due à la troncature de la somme jusqu'à l'ordre N .

Par linéarité, nous avons finalement

$$\mathcal{L}f = \sum_{n=1}^N a_n (\mathcal{L}f_n) + \epsilon = g$$

Deuxième étape L'égalité précédente est projetée sur une base de fonctions $\{w_m\}_{m=1..M}$, dites *fonctions test*, choisies de façon à minimiser l'erreur ϵ .

$$\begin{aligned} \left\langle w_m, \sum_{n=1}^N a_n (\mathcal{L}f_n) + \epsilon \right\rangle &= \sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle + \langle w_m, \epsilon \rangle \\ &= \langle w_m, g \rangle \quad \text{avec } m = 1..M \end{aligned} \quad (3.50)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente le produit scalaire. Sur un domaine d'étude \mathcal{D} à une seule variable x , il s'écrit

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{D}} f(x)g(x)dx$$

Par la suite nous supposons $\langle \epsilon, w_m \rangle = 0 \forall m$, mais nous reviendrons sur cette approximation.

Troisième étape Sous cette hypothèse le système (3.50) peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle

$$\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

dans laquelle les éléments de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ et du vecteur \mathbf{B} s'écrivent

$$\begin{cases} Z_{mn} = \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle \\ B_m = \langle w_m, g \rangle \end{cases}$$

et les éléments du vecteur \mathbf{X} sont à déterminer. La matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ est appelée matrice impédance. Pour un problème de diffraction, elle dépend de la forme et des propriétés physiques de l'objet.

3.4.1.2 Exemple

Nous allons appliquer la méthode des moments afin de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = 1 + 4x^2 \quad \text{avec } f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et } \mathcal{D} = [0; 1]$$

Cette équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre a pour solution analytique

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

L'opérateur \mathcal{L} et la fonction $g(x)$ s'écrivent

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{et } g(x) = 1 + 4x^2$$

Compte tenu de la solution attendue, nous allons prendre comme fonction de base $f_n(x) = x - x^{n+1}$ et comme fonction test $w_m(x) = f_m(x) = x - x^{m+1}$. La matrice impédance $Z_{mn} = \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle$ et l'élément $B_m = \langle w_m, g \rangle$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle = \int_0^1 [x - x^{m+1}] \left[-\frac{d^2}{dx^2} (x - x^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_0^1 [x - x^{m+1}] \left\{ \frac{d}{dx} [(n+1)x^n - 1] \right\} dx = n(n+1) \int_0^1 [x - x^{m+1}] x^{n-1} dx \\ &= \frac{nm}{n+m+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_m &= \langle w_m, g \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})(1 + 4x^2) dx \\ &= \frac{m(8 + 3m)}{2(m+2)(m+4)} \end{aligned}$$

$N = 1$

$$m = n = 1 \Rightarrow \begin{cases} Z_{11} = \frac{1}{3} \\ B_1 = \frac{11}{30} \end{cases} \Rightarrow Z_{11}a_1 = B_1 \Rightarrow a_1 = \frac{11}{10} \Rightarrow \boxed{f^{(1)}(x) = \frac{11}{10}(x - x^2)}$$

$N = 2$

$$\begin{aligned} \begin{cases} n = 1..2 \\ m = 1..2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow f^{(2)}(x) = a_1(x - x^2) + a_2(x - x^3) = \boxed{\frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3} \end{aligned}$$

$N = 3$

$$\begin{aligned} \begin{cases} n = 1..3 \\ m = 1..3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow f^{(3)}(x) = a_1(x - x^2) + a_2(x - x^3) + a_3(x - x^4) = \boxed{\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4} \end{aligned}$$

La figure 3.19 compare la solution analytique $f(x)$ avec celle obtenue par la méthode des moments, $f^{(N)}(x)$ où $N = 1..3$, en fonction de la variable x . Nous pouvons observer que la

méthode converge bien au bout de trois itérations. En fait, une connaissance de la solution permet de choisir des fonctions de base de telle façon que la méthode converge rapidement. Par exemple, si la fonction de base est $f_n(x) = x^{n+1}$ (au lieu de $f_n(x) = x - x^{n+1}$), la solution à l'ordre 3 est égale à $f^{(3)}(x) = -73x^2 + 205x^3 - \frac{1649}{12}x^4$, qui ne converge pas vers la solution analytique.

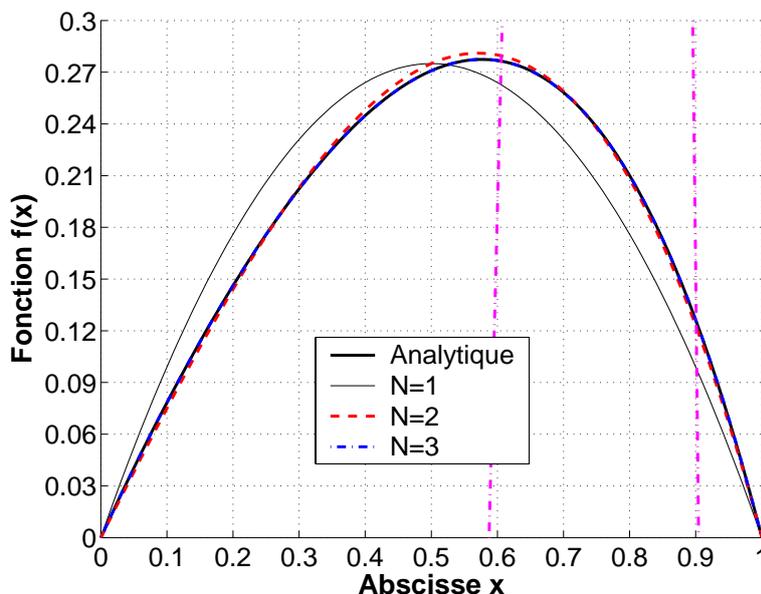


FIG. 3.19 – Comparaison de la solution analytique $f(x)$ avec celle obtenue par la méthode des moments $f^{(N)}(x)$ où $N = 1..3$.

La résolution de cet exemple avec l'aide du logiciel Maple est donnée dans l'annexe A.

3.4.1.3 Choix des fonctions test et de base

Le système $\bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a une solution si $\det(\bar{\mathbf{Z}}) \neq 0$ et si $N \leq M$.

- Si $N < M$, nous pouvons le résoudre par la méthode des moindres carrés.
- si $N = M$ nous pouvons le résoudre par différentes méthodes, itératives ou non.

Pour des problèmes avec un grand nombre d'inconnues, le choix de la méthode est important pour accélérer la résolution du système.

Pour les fonctions f_n et w_m , plusieurs choix existent et donnent lieu à des méthodes plus ou moins différentes :

- La méthode de *Galerkin*, consiste à choisir $f_n = w_n$.
- La méthode de *collocation* (*point matching* en anglais) consiste à prendre pour les w_m , des fonctions de Dirac δ . Les éléments de la matrice $\bar{\mathbf{Z}}$ et du vecteur \mathbf{B} s'écrivent alors

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \langle w_m(x), \mathcal{L}[f_n(x)] \rangle = \langle \delta(x - x_m), \mathcal{L}[f_n(x)] \rangle = \int_{\mathcal{D}} \delta(x - x_m) \mathcal{L}[f_n(x)] dx \\ &= \mathcal{L}[f_n(x_m)] \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
B_m &= \langle w_m, g(x) \rangle = \langle \delta(x - x_m), g(x) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \delta(x - x_m) g(x) dx \\
&= g(x_m)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

En appliquant alors une méthode des moindres carrés, qui consiste à minimiser l'erreur quadratique suivante

$$\begin{aligned}
(\langle w_m, \epsilon \rangle)^2 &= \epsilon_m^2 = \left(\langle w_m, g \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, \mathcal{L}f_n \rangle \right) \left(\langle w_m, g \rangle - \sum_{p=1}^N a_p \langle w_m, \mathcal{L}f_p \rangle \right)^* \\
&= \left\{ g(x_m) - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}[f_n(x_m)] \right\} \left\{ g(x_m) - \sum_{p=1}^N a_p \mathcal{L}[f_p(x_m)] \right\}^* \\
&= \left(B_m - \sum_{n=1}^N a_n Z_{mn} \right) \left(B_m - \sum_{p=1}^N a_p Z_{mp} \right)^*
\end{aligned}$$

Ainsi pour a_n réel, la condition $\partial(\epsilon_m^2)/\partial a_n = 0$ et $\partial(\epsilon_m^2)/\partial a_p = 0$ conduit alors à

$$\begin{cases} \left(B_m - \sum_{p=1}^N a_p Z_{mp} \right)^* = 0 \\ B_m - \sum_{n=1}^N a_n Z_{mn} = 0 \end{cases}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 Z_{11} & a_2 Z_{12} & \cdots & a_N Z_{1N} \\ a_1 Z_{21} & a_2 Z_{22} & \cdots & a_N Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 Z_{N1} & a_2 Z_{N2} & \cdots & a_N Z_{NN} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{Z}}$$

où le vecteur \mathbf{A} contient les termes a_n . Par conséquent \mathbf{A} est obtenu en inversant la matrice impédance $\bar{\mathbf{Z}}$.

- Il peut être aussi intéressant de choisir les fonctions f_n et w_m de façon à minimiser le nombre de coefficients a_n à déterminer et, par conséquent, à réduire la taille de la matrice impédance, qui est à inverser.
- Une autre façon de minimiser le nombre de coefficients est d'appliquer la méthode des moments dans le domaine spectral, ou de choisir l'espace de Fourier pour les fonctions de projection et le domaine spatial pour les fonctions test.

Finalement, le choix de f_n et de w_m résulte d'un compromis entre un gain de temps (nombre d'inconnues N minimum), une précision suffisante et une simplicité dans la mise en oeuvre.

Dans la suite, nous choisirons la méthode classique des moments par *collocation*, c'est-à-dire que les fonctions w_m seront égales à des fonctions de Dirac ; pour les fonctions f_n , les fonctions rectangles seront choisies, encore appelées en anglais fonctions *pulse basis*.

Le choix des fonctions test et de projections est un domaine de recherche à part entière.

3.4.2 Diffraction par une surface monodimensionnelle

Dans ce paragraphe, la méthode des moments (MmM) est appliquée au cas spécifique d'une surface monodimensionnelle (1D, problème 2D ou scalaire). Tout d'abord la matrice impédance

doit être calculée. C'est l'objet de la première section, dans laquelle une surface parfaitement conductrice en polarisations TE (condition aux limites de Dirichlet) et TM (condition aux limites de Neumann) est tout d'abord considérée, puis le cas diélectrique sera alors obtenu aisément à partir de ces deux cas. Dans les sections 2, 3 et 4, la MdM sera appliquée sur divers objets parfaitement conducteurs et comparée avec la solution *exacte* analytique du cylindre et l'*approximation* de l'optique physique (OP).

3.4.2.1 Matrices impédances

Condition aux limites de Dirichlet Dans le cas TE, où la surface est parfaitement conductrice (condition aux limites de Dirichlet), le champ total est nul. Par conséquent (2.24) devient

$$\psi_i(\mathbf{r}') = \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} dS \quad (3.53)$$

où $\mathbf{r} = (y, z) = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ est un point sur la surface et $\mathbf{r}' = (y', z') = y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ est le point d'observation. Afin de calculer l'inconnue $\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}$ sur la surface, \mathbf{r}' va parcourir la surface. A noter que lorsque $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, l'intégration doit être conduite avec soin car la fonction de Green présente une singularité.

Pour une surface de longueur $2L$ centrée en 0, l'équation ci-dessus s'écrit

$$\int_{-L}^L dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} = \psi_i(\mathbf{r}')$$

Cette équation est de la forme

$$\mathcal{L}f = g$$

avec

$$\mathcal{L}\bullet = \int_{-L}^L dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bullet, \quad f = \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad \text{et} \quad g = \psi_i(\mathbf{r}') \quad (3.54)$$

L'inconnue est f . A l'aide de la méthode des moments, cette équation intégrale se transforme en un système matriciel défini par

$$\bar{\mathbf{Z}}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

où $\bar{\mathbf{Z}}$ est la matrice impédance, \mathbf{B} le vecteur source et \mathbf{X} le vecteur inconnu à déterminer.

De plus, en utilisant la méthode de collocation, les éléments de $\bar{\mathbf{Z}}$ et de \mathbf{B} s'écrivent d'après (3.51) et (3.52)

$$Z_{mn} = \mathcal{L}[f_n(y_m)] \quad \text{et} \quad B_m = g(y_m) \quad (3.55)$$

$y_m = (m - 1)\Delta y$ représente l'abscisse du point de la surface, où $m = \{1, 2, \dots, N\}$ et $\Delta y = 2L/(N - 1)$ est le pas d'échantillonnage et N est le nombre d'échantillons de la surface.

La fonction de projection f_n est choisie égale à une porte de largeur Δy centrée en y_n et de hauteur unitaire, soit

$$f_n(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [y_n - \frac{\Delta y}{2}, y_n + \frac{\Delta y}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En reportant cette équation dans (3.54) et (3.55), nous obtenons

$$Z_{mn} = \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) dy \approx \sqrt{1 + \left(\frac{dz_n}{dy_n}\right)^2} g(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m) \Delta y \quad (3.56)$$

et

$$B_m = \psi_i(\mathbf{r}_m)$$

où $\mathbf{r}_{n,m} = y_{n,m}\hat{\mathbf{y}} + z_{n,m}\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{r}_{n,m} \in S$ et $z_{n,m} = z(y_{n,m})$. Cette équation suppose que le pas Δy est suffisamment petit pour que l'intégrande soit constante sur le domaine d'intégration.

Pour un problème 2D, la fonction de Green est donnée par (2.15)

$$g(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_m) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(K \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}[K \sqrt{(y_n - y_m)^2 + (z_n - z_m)^2}]$$

Cette fonction présente une singularité en $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_n$. Elle est résolue en écrivant

$$H_0^{(1)}(x) = 1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha x}{2}\right) + \mathcal{O}(x^2) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1.78107$$

et

$$z(y_n) = z(y_m) + \left. \frac{dz_n}{dy_n} \right|_{y=y_m} (y_n - y_m) + \mathcal{O}((y_n - y_m)^2)$$

En substituant ces trois équations ci-dessus dans (3.56), nous avons pour $n = m$ et $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} Z_{mm} &\approx \frac{j\sqrt{1 + \gamma_m^2}}{4} \int_{y_m - \frac{\Delta y}{2}}^{y_m + \frac{\Delta y}{2}} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha K (y_n - y_m) \sqrt{1 + \gamma_m^2}}{2}\right) \right] dy_n \\ &= \frac{j\sqrt{1 + \gamma_m^2}}{4} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{+\frac{\Delta y}{2}} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha K y \sqrt{1 + \gamma_m^2}}{2}\right) \right] dy \\ &= \frac{j\sqrt{1 + \gamma_m^2}}{4} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha K \sqrt{1 + \gamma_m^2} \Delta y}{4e}\right) \right] \end{aligned}$$

avec $\gamma_m = \frac{dz_m}{dy_m}$.

En conclusion, la matrice impédance s'écrit

$$Z_{mn} = \frac{j\Delta y \sqrt{1 + \gamma_n^2}}{4} \begin{cases} \left[1 + \frac{2j}{\pi} \ln\left(0.164K \sqrt{1 + \gamma_m^2} \Delta y\right) \right] & \text{pour } n = m \\ H_0^{(1)}(K \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|) & \text{pour } n \neq m \end{cases} \quad (3.57)$$

où $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (z_n - z_m)^2}$ et

$$\begin{cases} X_n = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n} \\ B_m = \psi_i(\mathbf{r}_m) \end{cases}$$

Condition aux limites de Neuman Dans le cas TM, où la surface est parfaitement conductrice (condition aux limites de Neumann), la dérivée du champ total est nulle. Par conséquent (2.24) devient

$$\psi_i(\mathbf{r}') = - \int_S \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS$$

où l'inconnue est le champ total sur la surface $\psi(\mathbf{r})$. D'après le chapitre 2 (équation (2.16)), la dérivée normale de la fonction de Green s'écrit

$$\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = - \frac{jK H_1^{(1)}(K \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.58)$$

En appliquant alors le même raisonnement que dans le cas TE, nous avons

$$Z_{mn} = \begin{cases} - \frac{jK \Delta y H_1^{(1)}(K \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|)}{4 \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m\|} \\ \quad \times [\gamma_n(x_n - x_m) - (z_n - z_m)] & \text{pour } m \neq n \\ + \frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{4\pi} \frac{\gamma'(x_m)}{1 + (\gamma(x_m))^2} & \text{pour } m = n \end{cases} \quad (3.59)$$

et

$$\begin{cases} X_n = \psi(\mathbf{r}_n) \\ B_m = \psi_i(\mathbf{r}_m) \end{cases}$$

Surface diélectrique Dans le cas diélectrique, nous sommes amenés à résoudre le système différentiel suivant (équations (2.24) et (2.26)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i(\mathbf{r}') = \underbrace{- \int_{S_1} \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS}_{\text{Cas TM}} + \underbrace{\int_{S_1} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} dS}_{\text{Cas TE}} \\ 0 = \underbrace{- \int_{S_1} \psi(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS}_{\text{Cas TM avec } K = K_1} - \rho_{01} \underbrace{\int_{S_1} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} dS}_{\text{Cas TE avec } K = K_1} \end{array} \right.$$

A noter que dans le cas TE, $\rho_{01} = 1$ et que dans le cas TM, $\rho_{01} = \epsilon_1/\epsilon = K_1/K$. Ce système est donc équivalent à deux combinaisons linéaires des cas TE et TM.

La discrétisation de ce système par la méthode des moments conduit alors à la matrice impédance suivante

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}^{TM} & \bar{\mathbf{Z}}^{TE} \\ -\bar{\mathbf{Z}}^{TM1} & -\rho_{01} \bar{\mathbf{Z}}^{TE1} \end{bmatrix}$$

et le vecteur source de longueur $2N$ s'écrit

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \psi_i(\mathbf{r}_1) \\ \psi_i(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \left[\begin{array}{c} \psi_d(\mathbf{r}_1) \\ \psi_d(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \psi_i(\mathbf{r}_N) \\ \frac{\partial \psi_d(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \\ \frac{\partial \psi_d(\mathbf{r}_2)}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_d(\mathbf{r}_N)}{\partial n} \end{array} \right]$$

} N fois

La matrice carrée $\bar{\mathbf{Z}}$ est de dimension $2N \times 2N$. Les matrices carrées $\bar{\mathbf{Z}}^{TM}$ et $\bar{\mathbf{Z}}^{TE}$ de dimensions $N \times N$ sont données par (3.57) et (3.59), tandis que les matrices carrées $\bar{\mathbf{Z}}^{TM1}$ et $\bar{\mathbf{Z}}^{TE1}$ de dimensions $N \times N$ sont également données par les équations (3.57) et (3.59), dans lesquelles le nombre d'onde K du milieu supérieur est remplacé par le nombre d'onde $K_1 = K\sqrt{\epsilon_{r1}}$ du milieu inférieur.

3.4.2.2 Application sur un cylindre parfaitement conducteur

Afin de valider la MmM et de vérifier si le programme est correct, les champs sur la surface et la SER associée vont être comparés avec la solution *exacte* analytique du cylindre parfaitement conducteur exposée dans la section 3.2.

Champs sur la surface Dans le cas TE (conditions aux limites de Dirichlet), le champ total ψ sur la surface ($r = a$) est nul. Sa dérivée normale doit être alors calculée $\frac{\partial \psi}{\partial n}$. En coordonnées cylindriques, elle s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \cdot \left(\frac{-\gamma \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right)$$

or $\hat{\mathbf{u}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{u}}_\theta = \sin \theta \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$, $\gamma = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = \frac{r \cos \theta d\theta}{-r \sin \theta d\theta} = -\cot \theta$. Par conséquent

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} (-\gamma \cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} (-\gamma \sin \theta - \cos \theta) \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \text{sign}(\sin \theta)$$

D'après (3.12), la dérivée normale du champ *total* sur la surface s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} + \frac{\partial \psi_d}{\partial r} \Big|_{r=a} \\ &= K \psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[J_n(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} \dot{H}_n^{(1)}(Ka) \right] e^{jn(\theta_i - \theta)} \end{aligned}$$

Dans le cas TM (conditions aux limites de Neuman), la dérivée normale du champ total $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ sur la surface ($r = a$) est nulle. Le champ total sur la surface est alors directement donné à

partir de (3.15)

$$\psi(a, \theta) = \psi_{i0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[J_n(Ka) - \frac{\dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)} H_n^{(1)}(Ka) \right] e^{jn(\theta_i - \theta)} \quad (3.60)$$

Numériquement il est pertinent d'utiliser les relations (3.13), (3.14) et (3.16) afin d'exprimer la somme sur $n \in [0; \infty[$ et de calculer les dérivées analytiquement.

La méthode des moments impose que la surface soit échantillonnée. La question est comment choisir le pas d'échantillonnage. D'une manière physique, la question posée est similaire à : comment choisir x afin que la fonction périodique $\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ de période λ soit "correctement" échantillonnée. Classiquement on prend $\Delta x = \frac{\lambda}{10}$.

Dans le cas du cylindre, l'angle θ est échantillonné avec un pas d'échantillonnage $\Delta\theta \approx \frac{\alpha}{\lambda} 2\pi \times 10$ et $\theta_n = (n-1)\Delta\theta$. Ceci est illustré sur la la figure 3.20 pour un rayon $a = \lambda$, conduisant à un nombre d'échantillons sur le cylindre de $N = 63$.

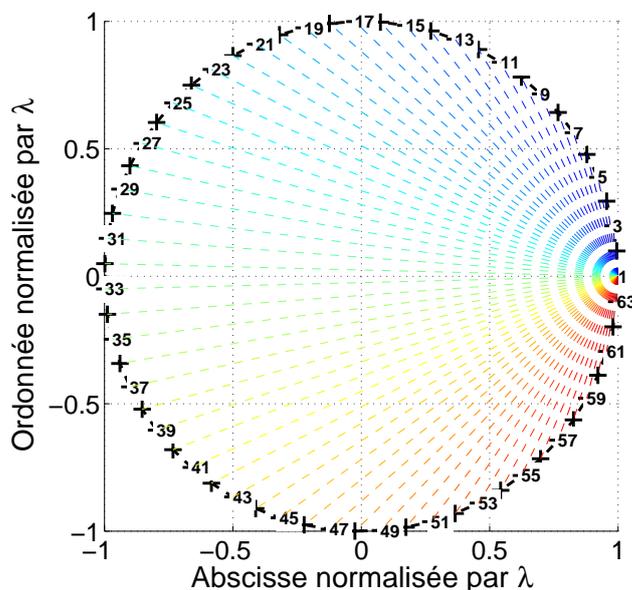


FIG. 3.20 – Cylindre échantillonné de rayon $a = \lambda$ pour le calcul des éléments de la matrice impédance.

Une fois la surface échantillonnée et selon la polarisation, les éléments Z_{mn} de la matrice impédance ((3.57) ou (3.59)) sont calculés de la manière suivante. Pour $m = 1$, $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_1 = a(\cos\theta_1\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta_1\hat{\mathbf{z}}) = a\hat{\mathbf{y}}$ puisque $\theta_1 = 0$. L'indice $n \in [1; N]$ balaye alors tout le cylindre, pour lequel $\mathbf{r}_n = a(\cos\theta_n\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta_n\hat{\mathbf{z}})$. La Distance $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1\|$ est illustrée sur la figure 3.20. Connaissant alors \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_n , il est alors possible de calculer les éléments de la matrice impédance $\{Z_{1n}\}$. Le processus est itéré pour $m \in [2; N]$.

Ainsi, nous obtenons le système matriciel $\bar{\mathbf{Z}}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$, dans lequel $X_n = \left\{ \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n}, \psi(\mathbf{r}_n) \right\}$ dans les cas TE et TM respectivement, qui sont les inconnues du problème, $B_n = \psi_i(\mathbf{r}_n) = \psi_{i0} \exp[jKa \sin(\theta_i - \theta_n)]$.

Les figures 3.21 et 3.22 comparent la solution analytique avec celle obtenue par la méthode des moments (Mdm) en fonction de l'angle θ et en polarisations TE et TM, respectivement.

$\theta_i = 0$ et $a = \lambda$. Les figures 3.23 et 3.24 présentent les mêmes variations que sur les figures 3.21 et 3.22 mais avec $N = 123$. On observe que l'adéquation entre les deux solutions est bonne en polarisation TE, et qu'en TM il y a un léger désaccord. Cette différence diminue lorsque le nombre d'échantillons sur le cylindre augmente, c.a.d. lorsque le pas d'échantillonnage diminue. En conclusion, le pas d'échantillonnage (maillage) est un paramètre important et dépend de la polarisation. On observe que le maximum du champ est obtenu dans la direction θ_i indiquée par un trait vertical, correspondant à la direction spéculaire.

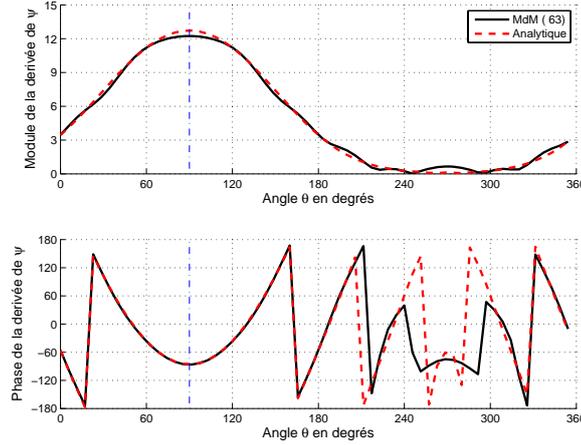


FIG. 3.21 – Comparaison de la solution analytique avec la solution donnée par la MdM en fonction de l'angle θ en polarisation TE. En haut, le module de la dérivée normale du champ total sur la surface, et en bas sa phase. Le nombre d'échantillons sur le cylindre est $N = 63$, $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$.

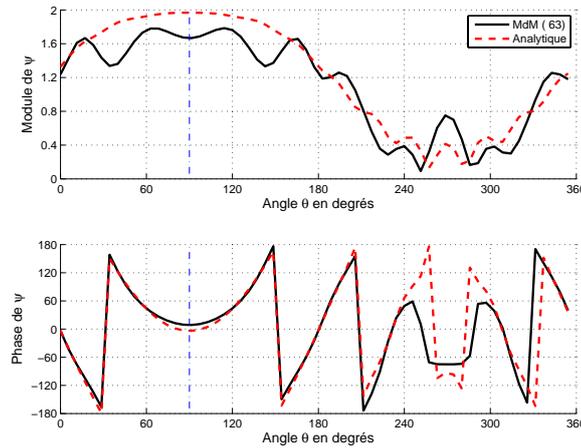
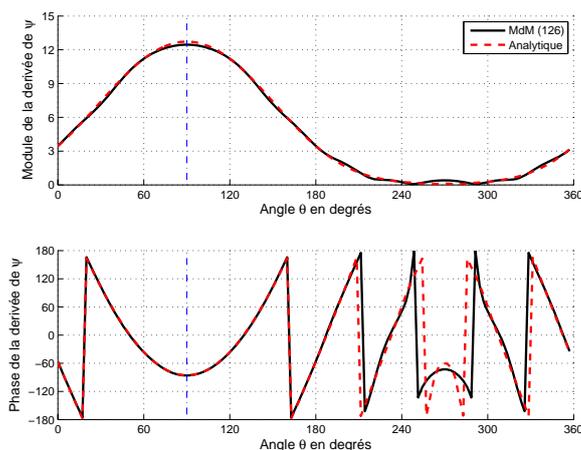
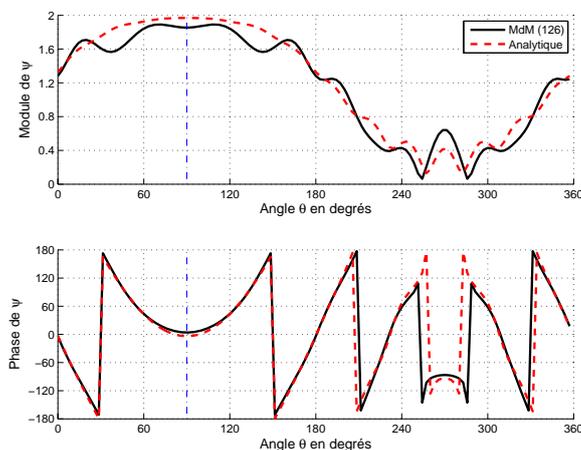


FIG. 3.22 – Comparaison de la solution analytique avec la solution donnée par la MdM en fonction de l'angle θ en polarisation TM. En haut, le module du champ total sur la surface, et en bas sa phase. Le nombre d'échantillons sur le cylindre est $N = 63$, $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$.

Calcul de la SER Par définition la SER est donnée par (3.24). En champ lointain ($z \rightarrow \infty$), la fonction de Hankel $H_n^{(1)}(z)$ est donnée par (3.8). Ainsi en reportant (3.8) dans (3.15) et (3.12),

FIG. 3.23 – Même variation que sur la figure 3.21 mais $N = 126$.FIG. 3.24 – Même variation que sur la figure 3.22 mais $N = 126$.

la SER d'un cylindre parfaitement conducteur s'écrit respectivement en polarisation TE et TM comme ($\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_d$)

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = \frac{4}{K} \begin{cases} \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)} e^{jn(\theta_i + \theta_d - \pi)} \right|^2 & \text{Cas TE} \\ \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\dot{J}_n(Ka)}{\dot{H}_n^{(1)}(Ka)} e^{jn(\theta_i + \theta_d - \pi)} \right|^2 & \text{Cas TM} \end{cases}$$

Avec la méthode des moments, le champ rayonné en champ lointain est donné par l'équation (2.27). Par conséquent la SER s'écrit

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = \frac{4}{K} |\psi_{d0}^\infty|^2 = \frac{4}{K} \sum_{n=1}^{n=N} \left[j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}_n \underbrace{\psi(\mathbf{r}_n)}_{\text{TM}} + \underbrace{\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n_n}}_{\text{TE}} \right] \exp(-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}_n) \underbrace{\sqrt{1 + \gamma_n^2 \Delta x_n}}_{a\Delta\theta}$$

La figure 3.25 compare la SER analytique avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$ ($N = 63$). De plus la solution de l'Optique Physique (OP) est exhibée. En effet, D'après (3.30) avec $a = b$, $\alpha = 2a \left| \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) \right|$, $\tan \chi = -\cot \left(\frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi + \theta_i - \theta_d}{2} \right) \Rightarrow \chi = \frac{\pi + \theta_i - \theta_d}{2}$, nous avons avec l'OP

$$\sigma_l(\theta_i, \theta_d) = K a^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n \left(2a \left| \cos \left[\frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right] \right| \right) e^{jn \left(\frac{\theta_d - \theta_i}{2} \right)} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} (jn \sin \theta_d - \cos \theta_d) \right|^2 \quad (3.61)$$

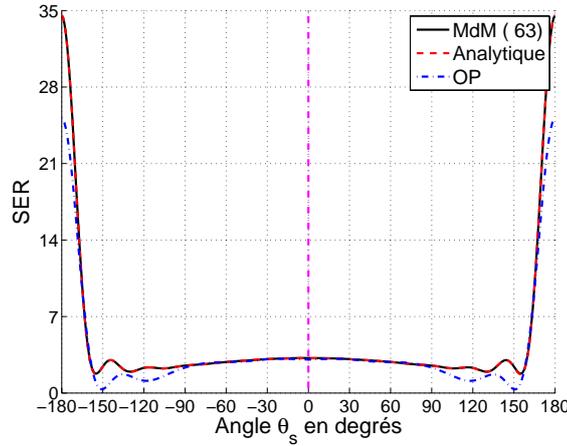


FIG. 3.25 – Comparaison de SER analytique avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$ et $a = \lambda$ ($N = 63$). De plus la solution de l'optique physique est exhibée.

On observe que le maximum de rayonnement est obtenu derrière l'objet en $\theta_d = 180^\circ$, qui peut paraître surprenant puisque le champ total sur la surface est maximum dans la direction spéculaire $\theta_d = \theta_i$ ($\theta = \pi/2$ sur les figures 3.21-3.24). En fait la SER est reliée au champ diffracté par l'objet et non au champ total. En effet, loin derrière l'objet, il existe un champ incident, et par conséquent le champ diffracté par l'objet doit être fort afin que le champ total s'annule. Ceci explique le comportement de la SER. Avec l'approximation de l'OP, les résultats sont en désaccord avec ceux issus de la MdM, excepté au voisinage de la direction spéculaire. En effet, l'OP est valide si la condition $R_c \cos^3 \theta_i > \lambda$. Dans le cas, d'un cylindre il vaut $|R_c| = a = \lambda$ qui explique en partie ce désaccord.

3.4.2.3 Application sur un cylindre elliptique parfaitement conducteur

Puisque la solution n'est pas connue pour un cylindre elliptique, nous allons comparés la SER issue de l'approximation de l'optique physique (OP) avec celle obtenue par la MdM. C'est la solution de référence. A noter, que pour un cylindre elliptique, il est possible de calculer analytiquement les champs sur la surface en faisant appel aux fonctions de Mathieu. Mais contrairement aux fonctions de Bessel, ces fonctions spéciales sont difficiles à calculer numériquement.

La figure 3.26 compare la SER en dB ($10 \log_{10}[\sigma_l(\theta_i, \theta_d)]$) sous l'OP avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$, $a = 2\lambda$ et

$b = 0.5\lambda$ ($N = 172$). Sur les figures 3.27 et 3.28, les mêmes variations sont représentées mais avec $\{a = 2, b = 0.1\}$ ($N = 161$) et $\{a = 4, b = 0.5\}$ ($N = 327$).

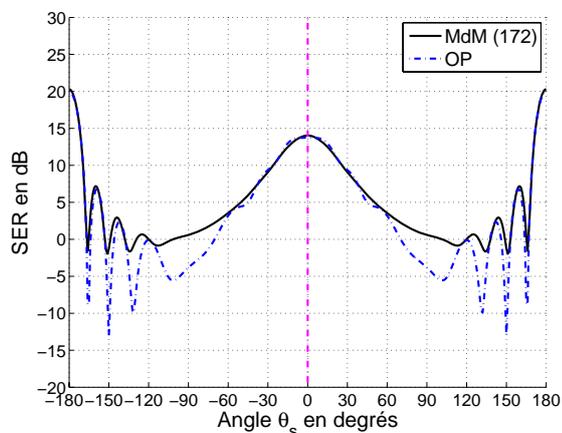


FIG. 3.26 – Comparaison de la SER en dB sous l'OP avec celle calculée par la MdM en fonction de l'angle d'observation θ_d en polarisation TE avec $\theta_i = 0$, $a = 2\lambda$ et $b = 0.5\lambda$ ($N = 172$).

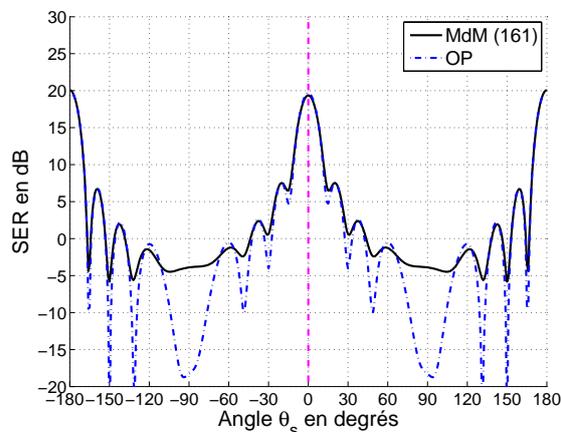


FIG. 3.27 – Même variation que sur la figure 3.26 mais $b = 0.1\lambda$ ($N = 161$).

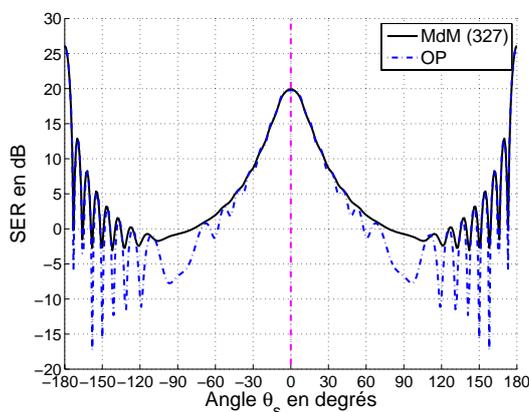


FIG. 3.28 – Même variation que sur la figure 3.26 mais $a = 4\lambda$ ($N = 327$).

On observe que lorsque b diminue, l'accord est meilleur entre les résultats. Encore une fois, cela vient du fait que le rayon de courbure augmente lorsque b diminue ($b = 0$ correspondant à une plaque linéique). Si a augmente, une meilleure adéquation est également observée.

Afin de montrer les limites de l'OP, les graphes 3.29 et 3.30 présentent les mêmes variations que sur la figure 3.28 en polarisations TE et TM, respectivement, mais avec $\theta_i = 45^\circ$.

3.4.2.4 Application sur une plaque linéique parfaitement conductrice

Dans cette section, la solution de l'OP est comparée avec celle de la MdM. La SER sous l'OP est donnée par (3.25).

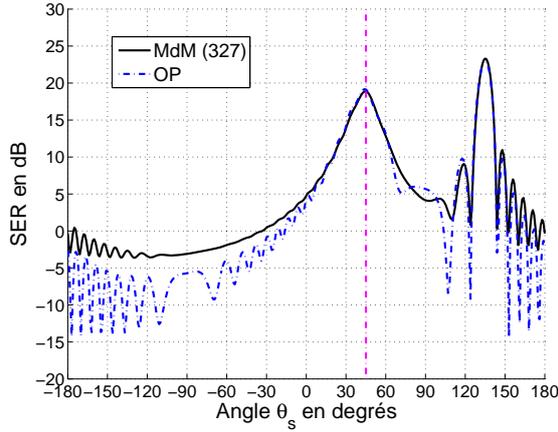


FIG. 3.29 – Mêmes variations que la figure 3.28 mais $\theta_i = 45^\circ$ en polarisation TE.

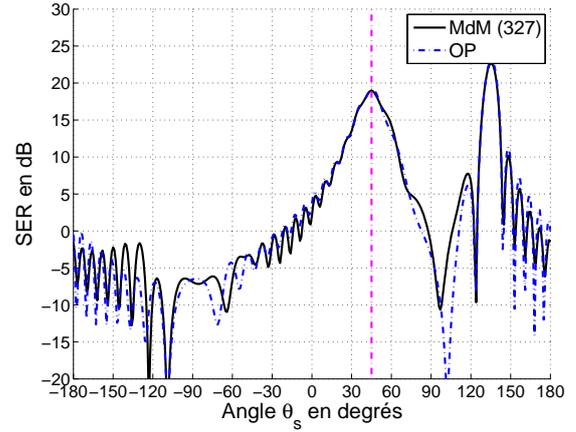


FIG. 3.30 – Mêmes variations que la figure 3.28 mais $\theta_i = 45^\circ$ en polarisation TM.

La figure 3.31 présente le module de la dérivée normale du champ total sur la surface $\left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|$ en fonction de l'indice des échantillons ($n \in [1; N = 400]$) calculé avec la MdM et l'OP d'une plaque linéique de longueur 10λ , en polarisation TE avec $\theta_i = 0$. La figure 3.32 présente la SER associée en fonction de l'angle d'observation. Les figures 3.33 et 3.34 présentent les mêmes variations que sur les figures 3.31 et 3.32 mais en polarisation TM. Les figures 3.35, 3.36, 3.37 et 3.38 présentent les mêmes variations que sur les figures 3.31, 3.32, 3.33 et 3.34 mais avec $\theta_i = 45^\circ$.

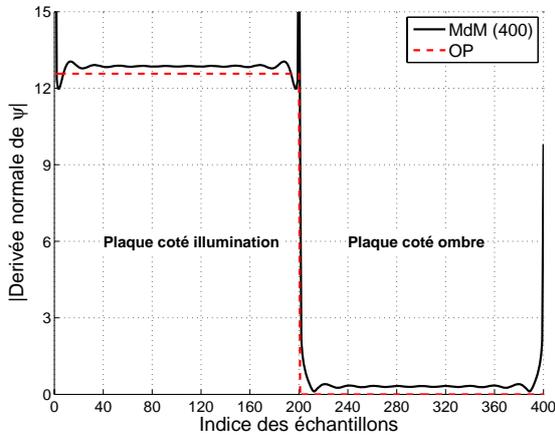


FIG. 3.31 – Comparaison du module de la dérivée normale du champ total sur la surface $\left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|$ en polarisation TE d'une plaque linéique de longueur 10λ en fonction de l'indice des échantillons ($n \in [1; N = 400]$) avec $\theta_i = 0$.

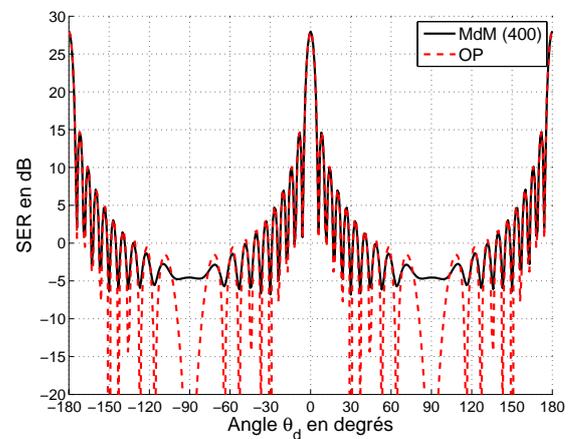


FIG. 3.32 – SER en polarisation TE d'une plaque linéique de longueur 10λ en fonction de l'angle d'observation θ_d avec $\theta_i = 0$.

Les simulations montrent un bon accord entre les champs sur la surface. A noter que dans le cas TE, le module du champ est constant au centre de la plaque, tandis que sur les bords, il augmente brusquement du a un changement de courbure (transition entre le dessus et le dessous de la plaque). En TM, cette discontinuité est plus douce, et au centre de la plaque, le module du champ oscille légèrement. La différence sur le module du champ entre les résultats de l'OP

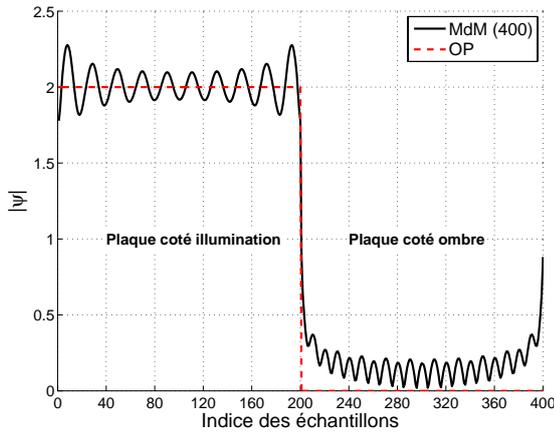


FIG. 3.33 – Même variation ($|\psi|$) que sur la figure 3.31 mais en polarisation TM.

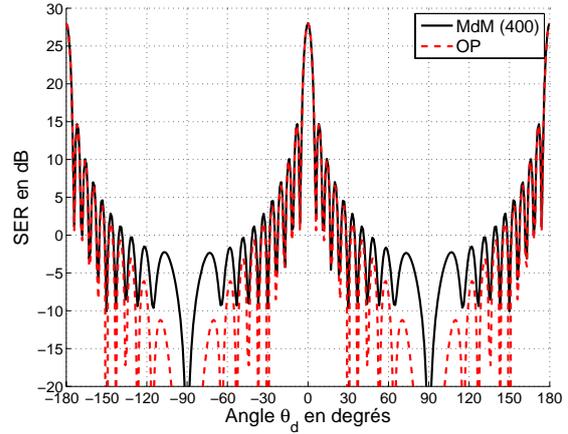


FIG. 3.34 – Même variation que sur la figure 3.32 mais en polarisation TM.

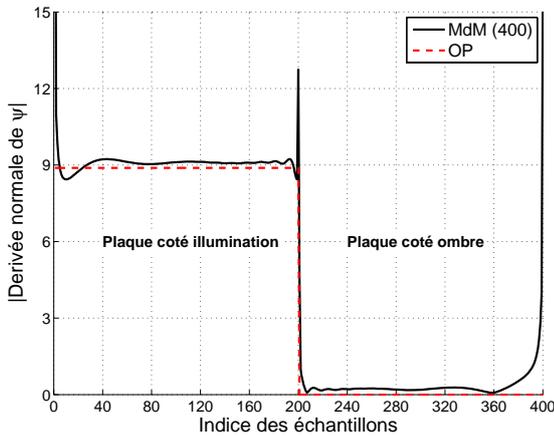


FIG. 3.35 – Même variation que sur la figure 3.31 mais $\theta_i = 45^\circ$.

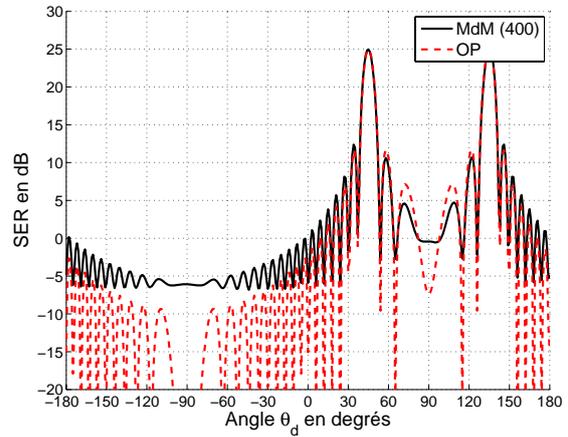


FIG. 3.36 – Même variation que sur la figure 3.32 mais $\theta_i = 45^\circ$.

et de la MdM, explique le désaccord observé sur la SER au voisinage $\theta_d = \pm 90^\circ$, pour lequel la diffraction par les arrêtes de la plaque contribue, qui n'est pas incluse dans l'approximation de l'OP. Un point important également à noter, est que la MdM prédit un champ différent de zéro derrière la plaque ($n \in [201; 400]$), tandis qu'avec l'OP, il est nul car elle correspond à une zone d'ombre pour le champ incident. Enfin, si l'angle d'incidence θ_i augmente, globalement le désaccord s'accroît car la diffraction par les arrêtes est plus forte.

3.4.3 Résolution du système linéaire

La MdM impose d'inverser la matrice impédance $\bar{\mathbf{Z}}$. Dans cette section, nous donnerons uniquement de façon qualitative les méthodes les plus connues. Le choix d'une méthode pour l'inversion de la matrice impédance est étroitement lié au problème étudié.

a) Les méthodes *directes* d'inversion fournissent une solution en un nombre fini d'opérations. Elles sont "exactes" aux erreurs d'arrondis près. Les plus connues sont :

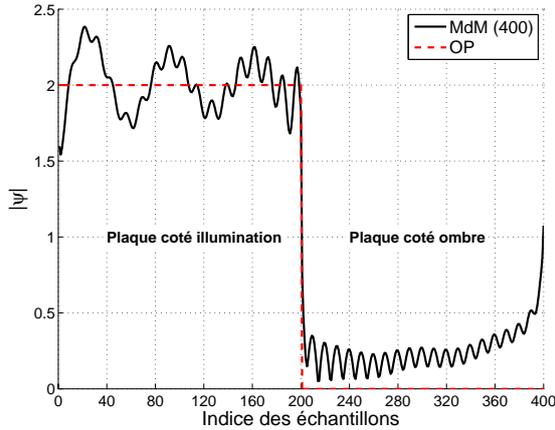


FIG. 3.37 – Même variation que sur la figure 3.33 mais $\theta_i = 45^\circ$.

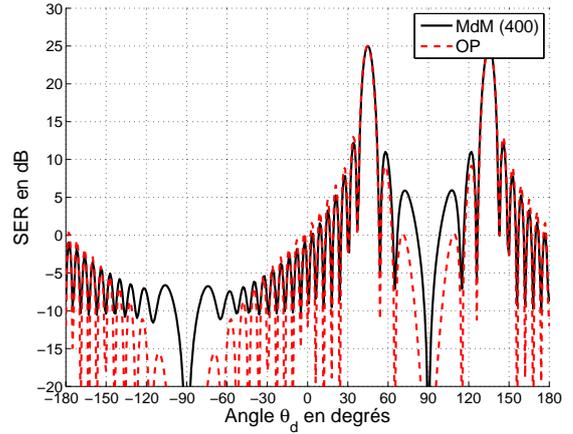


FIG. 3.38 – Même variation que sur la figure 3.34 mais $\theta_i = 45^\circ$.

- Inversion de Gauss Jordan :
 - Espace mémoire : $N^2 + 2N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(N^3)$ opérations.
- Inversion par méthode du pivot de Gauss :
 - Espace mémoire : $N^2 + 2N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(N^3/3)$ opérations.
- Inversion par décomposition LU :
 - Espace mémoire : $N^2 + 2N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(N^3/3)$ opérations.

Les temps de calcul peuvent être réduits au moyen d’algorithmes qui exploitent les propriétés particulières de la matrice impédance comme par exemple :

- Matrice de Toeplitz, pour laquelle $Z_{mn} = Z_{m+k, n+k}$ avec k entier, $1 \leq m + k \leq N$ et $1 \leq n + k \leq N$
- Dans certains problèmes, Z_{mn} peut devenir négligeable pour $|m - n|$ “grand” ; la matrice est alors creuse permettant de résoudre plus rapidement le problème.

b) Les méthodes *itératives* construisent une suite $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ convergeant vers \mathbf{X} . Pour un ordre donné, k , il y a alors une erreur de troncature selon que la méthode converge plus ou moins vite. La méthode est basée sur la démarche suivante

$$\text{Valeur initiale } \mathbf{X}^{(0)} \text{ et } \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \beta \mathbf{P}^{(k)}$$

où $\mathbf{P}^{(k)}$ est un vecteur déplacement de dimension N dans l’espace des $\mathbf{X}^{(k)}$, et β est l’amplitude du déplacement. Plusieurs méthodes peuvent être citées selon le choix de $\mathbf{P}^{(k)}$:

- $\mathbf{P}^{(k)}$ ne fait pas intervenir de dérivées. C’est le cas de la méthode de Gauss-Seidel.
- $\mathbf{P}^{(k)}$ fait intervenir des dérivées premières. C’est le cas des méthodes du gradient simple et du gradient conjugué dans lesquelles :
 - Espace mémoire : $N^2 + 4N$.
 - Calcul de $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$: $\mathcal{O}(2N^2)$ opérations.
- $\mathbf{P}^{(k)}$ fait intervenir des dérivées secondes. C’est le cas de la méthode de Newton.

c) La qualité d'une inversion matricielle est étroitement liée au *nombre de conditionnement*. Le système $\bar{\mathbf{Z}}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$ est mal conditionné si une faible erreur sur $\delta\mathbf{B}$ ou $\delta\bar{\mathbf{Z}}$ conduit à une forte erreur $\delta\mathbf{X}$ sur \mathbf{X} . Dans le cas d'une erreur $\delta\mathbf{B}$ sur \mathbf{B} , nous avons

$$\frac{\delta\mathbf{X}}{\mathbf{X}} \leq \text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) \frac{\delta\mathbf{B}}{\mathbf{B}}$$

où

$$\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) = \|\bar{\mathbf{Z}}\| \times \|\bar{\mathbf{Z}}^{-1}\| \text{ est le nombre de conditionnement}$$

Le résultat dépend du choix de la norme. Le système est d'autant plus stable que $\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}})$ est *faible*. De plus $\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) \geq 1$ et $\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}^{-1}) = \text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}})$. Pour la norme euclidienne définie par

$$\|\bar{\mathbf{Z}}\| = \max_{n=1..N} \sqrt{\sum_{m=1}^{m=N} |Z_{mn}|^2}$$

le nombre de conditionnement s'écrit

$$\text{Cond}(\bar{\mathbf{Z}}) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

où λ_{max} et λ_{min} sont la plus grande et la plus petite valeur propre de $\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{Z}}^a$, où $\bar{\mathbf{Z}}^a$ est l'adjoint de $\bar{\mathbf{Z}}$.

4 Diffraction par des surfaces rugueuses

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Nous nous focaliserons sur le problème 2D signifiant que la surface $z(x, y, t)$ est invariante selon une direction. En prenant la direction x comme invariant, $z(x, y, t) \equiv z(y, t)$.

Une surface rugueuse est une surface dont le comportement temporel ou/et spatial n'est pas connu pour tout t ou/et y . Le signal associé est alors non déterministe, contrairement au mouvement oscillant du pendule qui est connu à tout instant t . En revanche, à l'aide d'une description statistique, nous montrerons dans le deuxième paragraphe, qu'il peut être décrit à l'aide de grandeurs statistiques déterministes, comme la distribution et la corrélation des hauteurs de la surface. En pratique, de nombreux comportements sont modélisés par une surface rugueuse comme :

- Le comportement spatial et temporel de la surface de la mer.
- Le comportement spatial des champs labourés.
- Le comportement spatial des surfaces artificielles rencontrées en optique.

Dans le troisième paragraphe, une définition de la rugosité d'une surface rugueuse sera présentée à l'aide du paramètre de Rayleigh.

Le dernier paragraphe présente quelques résultats numériques du champ diffracté par une surface rugueuse à l'aide de la méthode des moments (MdM) et de l'approximation de l'optique physique (OP).

4.2 Description statistique d'une surface rugueuse

4.2.1 Introduction

Dans le but de générer numériquement un profil *ressemblant*¹ à un profil donné, nous souhaitons décrire de façon pertinente -donc avec le moins de paramètres possibles-, un profil rugueux. Il faut aussi noter que si nous y parvenons, nous pourrions effectuer une étude paramétrée de la diffusion d'une onde électromagnétique par ces profils. Nous pourrions aussi imaginer remonter,

¹C'est-à-dire ayant les mêmes propriétés statistiques.

à partir de la connaissance du champ diffracté, aux valeurs des paramètres de la surface.

Il existe une grande quantité de surfaces rugueuses que nous pouvons chercher à modéliser ; surfaces de mer, surfaces rocheuses, surfaces recouvertes par de la végétation ou de la neige... mais aussi des surfaces “artificielles” telles que des surfaces optiques, ou des revêtements de navires ou d’avions...

Dans ce chapitre, nous supposons que les surfaces rugueuses peuvent être modélisées par un processus *aléatoire, stationnaire et ergodique* :

- La stationnarité implique que les grandeurs statistiques sont *invariantes* dans le temps.
- Un processus ergodique signifie que les moyennes effectuées dans le domaine *temporel* sont égales à celles obtenues dans le domaine *spatial*. En d’autres termes, si nous effectuons une photo de la mer à un instant t_0 , où le profil des hauteurs $z(y, t) \equiv z(y, t_0) = z_0(y)$ est mesuré, et si nous suivons un point de la surface à l’abscisse y_0 et à différents instants t , où le profil des hauteurs $z(y, t) \equiv z(y_0, t) = \xi_0(t)$ est mesuré, alors les moyennes de $z_0(y)$ selon y et $\xi_0(t)$ selon t sont égales.

Sous ces conditions, une surface rugueuse est alors caractérisée par la densité de probabilité de ses hauteurs, notée p_z , et par la corrélation de ses hauteurs, notée C_z .

4.2.2 Rappels statistiques

Nous supposons que le profil est défini de façon univoque, c’est-à-dire que nous pourrions le décrire à l’aide d’une fonction $(x, y) \mapsto z(x, y)$; pour être précis, nous supposons que le profil est une réalisation, à un instant t_0 , d’un processus aléatoire et stationnaire à valeurs réelles.

Notons $p_z(z)$ la densité de probabilité des hauteurs de ce profil ; $p_z(z)dz$ représente la probabilité, pour un point de la surface, d’être compris entre les hauteurs z et $z + dz$. La densité de probabilité des profils considérés sera choisie *gaussienne*, centrée (valeur moyenne nulle) et d’écart type σ_z ; $p_z(z)$ est alors donnée par :

$$p_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)$$

et vérifie

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z) dz = 1 \quad \langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z p_z(z) dz = 0$$

Ce moyennage des hauteurs est le *moment statistique d’ordre un* (valeur moyenne). Le *moment centré statistique d’ordre deux*, $\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$, encore appelé variance, correspond ici au moyennage sur le carré des hauteurs. Il s’écrit

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_z(z) dz = \sigma_z^2$$

$\sigma_z = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$ désigne l’écart-type des hauteurs du profil.

La fonction d’*autocorrélation des hauteurs* (moment statistique d’ordre deux), est définie comme la moyenne statistique du produit des hauteurs, $z(\mathbf{r}_1)$ et $z(\mathbf{r}_2) = z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})$, de deux points de la surface. Elle s’écrit donc

$$\langle z(\mathbf{r}_1) z^*(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = \langle z(\mathbf{r}_1) z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = C_z(\mathbf{r}) \quad \text{car } z \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Expression dans laquelle $\mathbf{r} = (x, y)$. Puisque le processus est supposé stationnaire, l'autocorrélation des hauteurs ne dépend que de la distance \mathbf{r} séparant les deux points de la surface.

Finalement, les données de la densité de probabilité des hauteurs et de la fonction d'autocorrélation des hauteurs définissent complètement le profil; en effet, les profils de distribution gaussienne des hauteurs possèdent la propriété intéressante d'avoir tous leurs moments statistiques reliés aux deux seuls premiers. On peut noter que $C_z(\mathbf{0}) = \langle z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_1) \rangle = \sigma_z^2$.

Il est intéressant, par ailleurs, d'introduire la *densité spectrale de puissance* de la surface (aussi appelée spectre des hauteurs de la surface), qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$S_z(\mathbf{k}) = \text{TF}[C_z(\mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_z(\mathbf{r}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

où \mathbf{k} représente le vecteur fréquence spatiale par cycle et est homogène à des rad.m^{-1} . A noter que la transformée de Fourier inverse s'écrit

$$C_z(\mathbf{r}) = \text{TF}^{-1}[S_z(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (4.3)$$

De même, nous pouvons définir la *fonction caractéristique* des hauteurs, $\chi_z(\varsigma)$, qui est égale à la transformée de Fourier de la densité de probabilité des hauteurs. Soit

$$\chi_z(\varsigma) = \text{TF}[p_z(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p_z(z) e^{-j\varsigma z} dz = \exp\left(-\frac{\varsigma^2 \sigma_z^2}{2}\right) \quad (4.4)$$

pour un processus Gaussien.

Dans le cas d'un problème 2D, les quantités $\mathbf{k} \equiv k$ et $\mathbf{r} \equiv y$ deviennent des *scalaires*. La figure 4.1 donne une interprétation géométrique de la densité de probabilité des hauteurs. Nous pouvons montrer que 99.73% des hauteurs de la surface sont comprises entre $-3\sigma_z$ et $+3\sigma_z$.

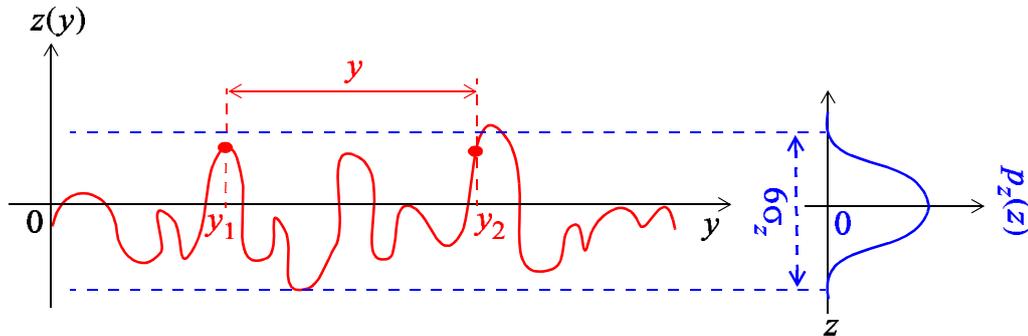


FIG. 4.1 – Surface 1D rugueuse et sur la droite illustration de la densité probabilité des hauteurs.

La corrélation statistique, caractérise la “ressemblance” entre deux points de la surface séparés par la distance $y = y_2 - y_1$. Lorsque les deux points sont *proches*, alors y est petit et les deux points sont *fortement corrélés* (pour $y_2 - y_1 = 0$, $C_z(0)/\sigma_z^2 = 1$). Lorsque les deux points sont *éloignés*, alors y est grand et les deux points sont *fortement décorrélés* ($y_2 - y_1 \rightarrow \infty \Rightarrow C_z(y_2 - y_1) \rightarrow 0$). En fait, le passage de l’un à l’autre se fait en introduisant la longueur de corrélation L_c . Pour une autocorrélation des hauteurs supposée Gaussienne, $C_z(y) = \sigma_z^2 \exp(-y^2/L_c^2)$, lorsque $y = L_c$, la corrélation vaut $e^{-1} = 0.37$. Géométriquement, par analogie avec une surface périodique déterministe, L_c représente la “périodicité” spatiale de $z(y)$.

4.2.3 Génération d'un profil rugueux

Dans cette section, nous allons montrer que la connaissance de $p_z(z)$ et $C_z(z)$ suffit pour générer un profil rugueux.

Soit $e(i)$, un signal d'entrée échantillonné *connu*, et $s(i)$ la réponse du signal d'entrée d'un système linéaire de réponse impulsionnelle $g(i)$. Le but est de calculer $g(i)$ connaissant le signal de sortie $s(i)$.

Si $e(i)$ est un processus aléatoire stationnaire (du second ordre), de densité spectrale de puissance $S_e(k)$, alors $s(i)$ est un processus aléatoire stationnaire (du second ordre), dont la densité spectrale de puissance $S_s(k)$ vérifie :

$$S_s(k) = |S_g(k)|^2 S_e(k)$$

où $S_g(k)$ est la densité spectrale de puissance de $g(i)$. Si $S_g(k)$ est réelle, alors l'équation ci-dessus conduit à

$$S_g(k) = \sqrt{\frac{S_s(k)}{S_e(k)}}$$

Puisque le système est supposé *linéaire*, nous pouvons écrire que

$$s(i) = g(i) * e(i) \quad \text{avec} \quad g(i) = \text{TF}^{-1} \left[\sqrt{\frac{S_s(k)}{S_e(k)}} \right]$$

Le symbole $*$ désigne le produit de convolution. En appliquant en entrée du filtre un bruit blanc (contient toutes les fréquences) gaussien $b(i) = e(i)$ de densité de spectrale de puissance $S_b(k) = 1$, nous obtenons

$$g(i) = \text{TF}^{-1}[\sqrt{S_s(k)}] = \text{TF}^{-1}\{\sqrt{\text{TF}[C_s(i)]}\}$$

Ainsi connaissant les coefficients du filtre $g(i)$, le signal de sortie est déterminé en appliquant la convolution. Cette méthode repose donc sur la détermination de la transformée Fourier inverse de la racine carrée de la densité spectrale de puissance $S_s(k)$. Ce résultat est appliqué sur la génération d'un profil rugueux z ($s(i) = z(i)$). En effet connaissant la fonction d'autocorrélation $C_z(i)$ des hauteurs des échantillons en sortie du filtre, la densité spectrale de puissance associée $S_z(k)$ peut être calculée et donc les coefficients du filtre sont déterminés.

Pour des fonctions d'autocorrélation Gaussienne et Lorentzienne des hauteurs z de la surface définies respectivement par

$$\begin{cases} C_z(y) = \sigma_z^2 \exp\left(-\frac{y^2}{L_c^2}\right) \\ C_z(y) = \frac{\sigma_z^2}{1 + \frac{y^2}{L_c^2}} \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{cases} \sqrt{S_z(k)} = \sigma_z \sqrt{L_c \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 L_c^2}{8}\right) \\ \sqrt{S_z(k)} = \sigma_z \sqrt{L_c \pi} \exp(-\pi k L_c) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g(i) = \sigma_z \sqrt{\frac{2}{L_c \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{2i^2}{L_c^2}\right) \\ g(i) = \sigma_z \sqrt{\frac{1}{L_c \pi}} \frac{1}{1 + \frac{2i^2}{L_c^2}} \end{cases}$$

A noter que le calcul analytique des coefficients du filtre n'est pas toujours possible. Ils sont alors calculés numériquement à l'aide d'une FFT (Fast Fourier Transform). De plus, le produit de convolution est calculé numériquement dans le domaine de Fourier. Ainsi, nous avons

$$z(i) = \text{TF}^{-1}\{\text{TF}[b(i)]\sqrt{\text{TF}[C_z(i)]}\}$$

où $b(i)$ est un bruit blanc Gaussien centré de variance unitaire. Il est important de noter que z est réel impliquant que les quantités réelles $b(i)$ et $C_z(i)$ doivent être *paires*.

Sur la figure 4.2, les fonctions d'autocorrélation normalisées ($C_z(y)/\sigma_z^2$) des hauteurs de profils gaussien, lorentzien et exponentiel ($C_z(y)/\sigma_z^2 = \exp(-|y|/L_c)$) sont tracées en fonction de la distance y , pour une longueur de corrélation $L_c = 1$ mètre. Sur la figure 4.3 les spectres des hauteurs correspondant sont représentés en fonction de la fréquence spatiale k . Il est observé qu'en basse fréquence, les spectres obtenus à partir des fonctions d'autocorrélation lorentzienne et exponentielle sont plus importantes que celui calculé dans le cas gaussien. Pour des fréquences intermédiaires, c'est le phénomène inverse, et pour les hautes fréquences, c'est le cas exponentiel qui est le plus énergétique. A noter que pour une autocorrélation exponentielle, $S_z(k) = 2\sigma_z^2 L_c / [1 + (2\pi k L_c)^2]$.

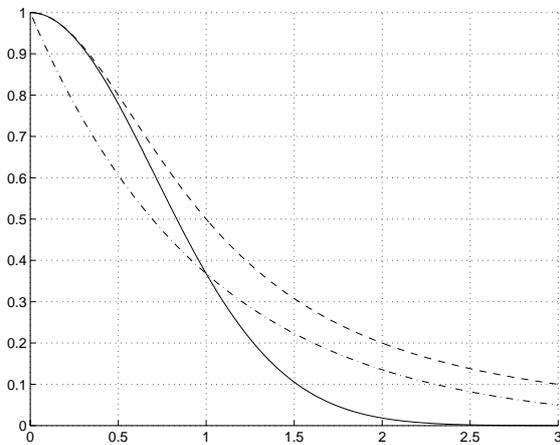


FIG. 4.2 – Fonction d'autocorrélation normalisée ($C_z(y)/\sigma_z^2$) des hauteurs de profil gaussien (trait plein), lorentzien (---) et exponentiel (-.-) en fonction de la distance y en mètre, pour une longueur de corrélation $L_c = 1$ mètre.

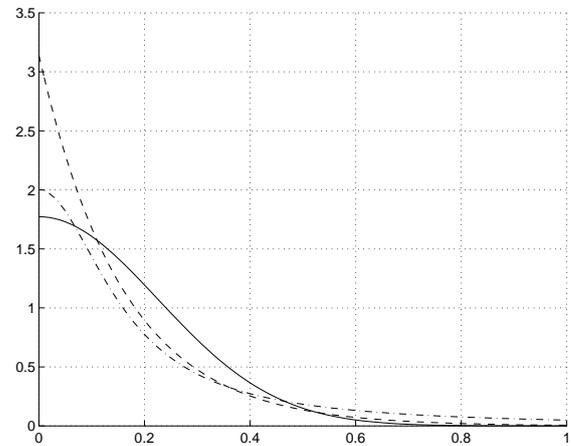


FIG. 4.3 – Spectres des hauteurs obtenus à partir de la figure 4.2 en fonction de k en rad/m.

Sur la figure 4.4, sont représentées les caractéristiques d'entrée et de sortie d'un filtre répondant à une fonction d'autocorrélation gaussienne de variance σ_z unitaire. Dans cet exemple, la longueur de corrélation est égale à 100 unités. Un bruit blanc de variance unitaire, de moyenne nulle, composé de 50000 échantillons est généré à l'entrée du filtre.

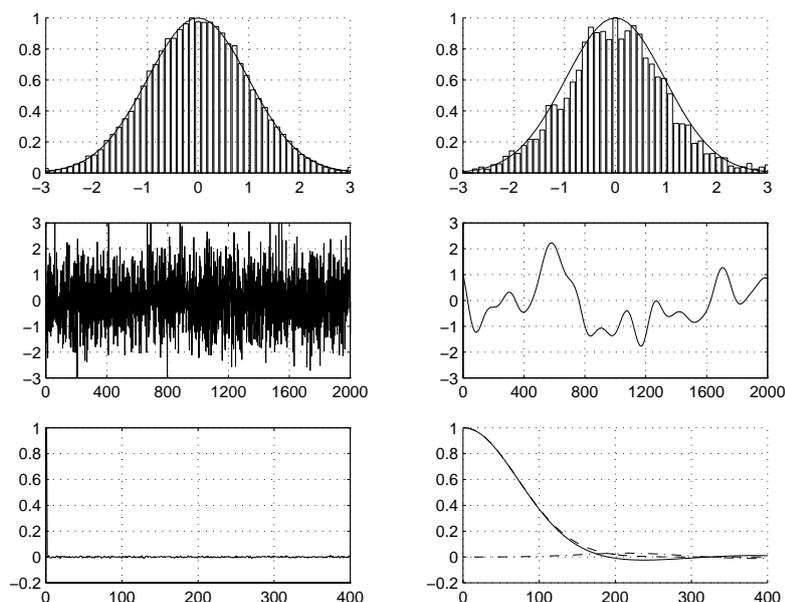


FIG. 4.4 – Caractéristiques statistiques des signaux en entrée et à la sortie du filtre d'un processus gaussien de fonction d'autocorrélation gaussienne.

Sur la figure du haut à gauche, l'histogramme normalisé des échantillons d'entrée est comparé à sa distribution théorique. Nous observons un comportement gaussien des deux courbes dont l'écart est très faible. Nous notons également que la moyenne est nulle (centrée en zéro) et que la totalité de l'énergie est comprise entre -3 et 3.

Sur la figure du haut à droite, l'histogramme normalisé des échantillons de sortie, et leur distribution théorique sont tracés. Nous notons également un comportement gaussien dû à la linéarité du filtre, dont la moyenne est nulle.

Sur les figures du centre, sont représentés respectivement les comportements des surfaces à l'entrée et à la sortie du filtre, sur vingt longueurs de corrélation. En entrée le signal est très bruité tandis qu'en sortie il devient plus lisse, dû à la corrélation.

Sur les figures du bas, les variations des fonctions d'autocorrélation normalisées des échantillons d'entrée et de sortie sont tracées. En entrée, nous observons un pic centré en zéro, qui théoriquement est la fonction de Dirac, tandis qu'en sortie nous obtenons la fonction d'autocorrélation souhaitée. En effet, l'écart observé entre la courbe théorique, et celle calculée à partir de la surface est faible. Elle est définie par :

$$C_{zn}(i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} z(n)z(i+n)$$

où N est le nombre d'échantillons.

Sur la figure 4.5, la surface z est représentée pour différentes longueurs de corrélation $L_c = \{25, 50, 100\}$ m et $\sigma_z = 1$ m. Il est observé que plus la longueur de corrélation augmente, est moins la surface est irrégulière. En fait, l'écart type des pentes s'écrit $\sigma_\gamma = \frac{\sqrt{2}\sigma_z}{L_c}$, qui montre que σ_γ est inversement proportionnel à L_c .

Sur la figure 4.6, la surface est tracée pour des fonctions d'autocorrélation gaussienne, lorentzienne et exponentielle avec $L_c = 50$ m et $\sigma_z = 1$ m. Nous observons que la surface obtenue

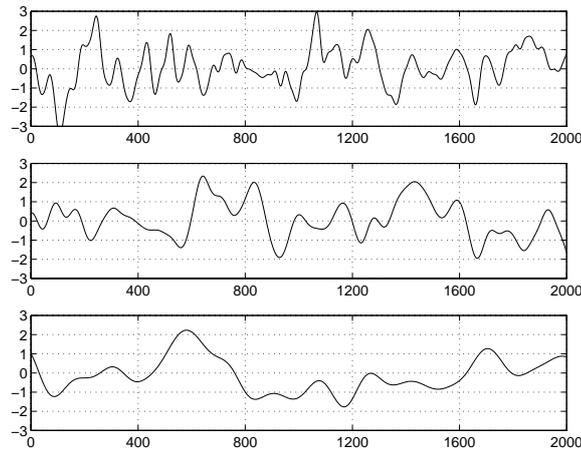


FIG. 4.5 – Comportement de la surface selon la longueur de corrélation en fonction de y en m, pour un processus gaussien dont la fonction d'autocorrélation est gaussienne avec $\sigma_z = 1$ m. De haut en bas, nous avons respectivement $L_c = \{25, 50, 100\}$ m.

avec le profil exponentiel apparaît plus rugueuse que celle déterminée avec les autres profils, car son spectre favorise les hautes fréquences (figure 4.3). Entre le profil gaussien et lorentzien le comportement des surfaces est semblable, avec néanmoins des largeurs de vagues plus importantes dans le cas lorentzien, car son spectre associé est plus énergétique en basse fréquence que celui obtenu dans le cas d'une gaussienne (figure 4.3).

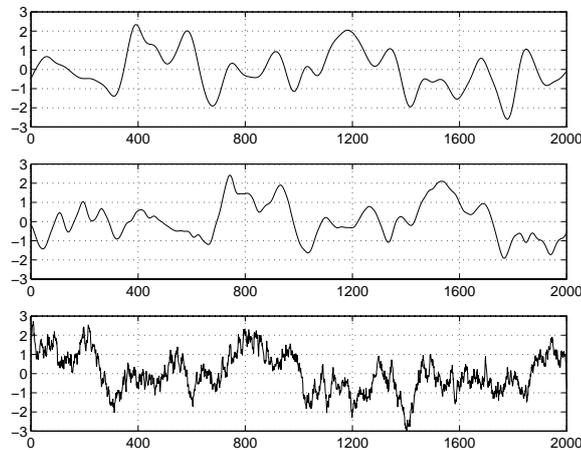


FIG. 4.6 – Comportement de la surface selon le choix de la fonction d'autocorrélation (de haut en bas, nous avons respectivement des autocorrélations Gaussienne, lorentzienne et exponentielle) en fonction de y en m, pour une longueur de corrélation de $L_c = 50$ m d'un processus gaussien avec $\sigma_z = 1$ m.

Le formalisme établi dans le cas 1D, est également valable pour une surface 2D, en remplaçant y par le couple $\{x, y\}$, k par le couple $\{k_x, k_y\}$ et l'indice i par le couple $\{i_x, i_y\}$.

Sur les figures 4.7 et 4.8, sont représentées le comportement d'une surface gaussienne en entrée du filtre, et les caractéristiques de la matrice de dimension 600×600 du bruit blanc gaussien de variance unitaire. Nous observons que la matrice d'autocorrélation est diagonale,

caractéristique d'un bruit blanc.

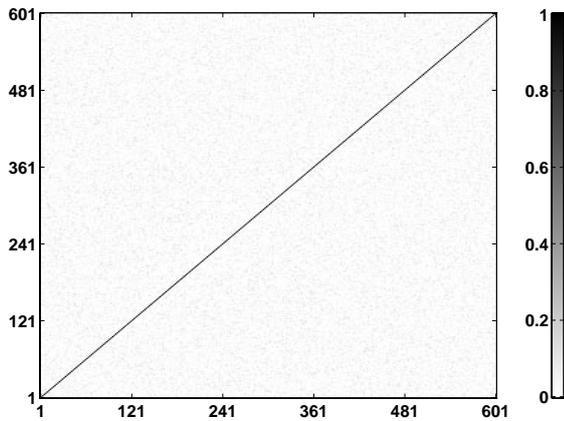


FIG. 4.7 – Autocorrélation de la surface en entrée du filtre en fonction de x et y en m.



FIG. 4.8 – Surface en entrée du filtre en fonction de x et y en m.

Sur la figure 4.9, à la sortie du filtre, la surface correspondante de fonction d'autocorrélation gaussienne ($C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$) avec $L_{cx} = 10$ m et $L_{cy} = 30$ m est tracée.

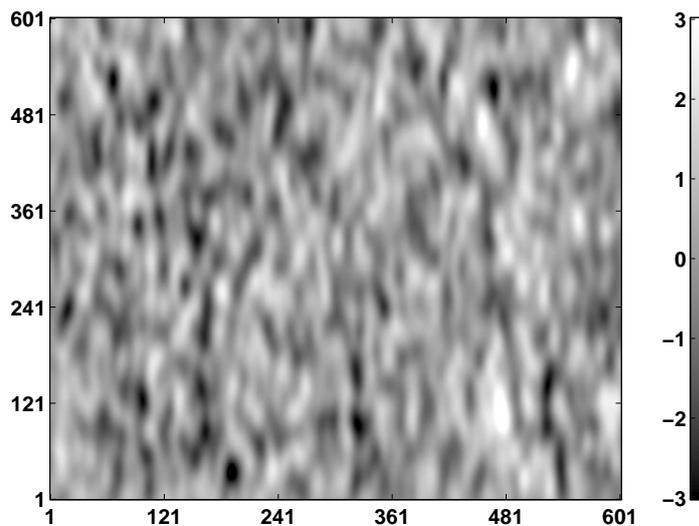


FIG. 4.9 – Comportement d'une surface bidimensionnelle de fonction d'autocorrélation gaussienne anisotrope en fonction de x et y en m d'un processus gaussien avec $L_{cx} = 10$ m et $L_{cy} = 30$ m.

4.3 Paramètre de Rayleigh

4.3.1 Introduction

En plus de la rugosité *géométrique* d'une surface rugueuse qui est liée à l'écart type des pentes-plus celui-ci est grand et plus la surface est irrégulière donc plus rugueuse-, nous allons

définir la rugosité *électromagnétique* d'une surface rugueuse. A noter que dans la littérature, lorsque la rugosité d'une surface est évoquée, il s'agit de la rugosité électromagnétique et non de la rugosité géométrique. Dans la suite de ce cours, la même terminologie sera conservée.

La rugosité d'une surface n'est pas une propriété intrinsèque de celle-ci. Elle est aussi définie par rapport aux caractéristiques de l'onde qui vient illuminer cette surface (telle que la longueur d'onde, l'angle d'incidence). Intuitivement, une surface est dite très peu rugueuse ou encore lisse si l'ordre de grandeur des irrégularités est très petit par rapport à la longueur d'onde incidente. Elle est qualifiée de rugueuse dans le cas contraire. Toutefois, l'angle d'incidence de l'onde est aussi un paramètre déterminant. Pour mieux comprendre comment il intervient dans cette discrimination, il convient d'introduire le paramètre de Rayleigh.

4.3.2 Paramètre de Rayleigh

Pour une surface plane de longueur *infinie* et *parfaitement conductrice*, la diffraction a lieu uniquement dans la direction spéculaire $\theta_d = \theta_i$ et le champ diffracté en module est égal au champ incident. Comment est alors modifié l'amplitude du champ diffracté lorsque la surface devient rugueuse? Le paramètre de Rayleigh permet de répondre à cette question *qualitativement*.

Considérons une surface monodimensionnelle définie par $y \mapsto z(y)$ illuminée par une onde plane incidente de direction $\hat{\mathbf{k}}_i = \sin \theta_i \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}$. Choisissons un point arbitraire de cette surface, $M(y, z)$, et calculons la différence de phase, $\Delta\phi$, entre ce point illuminé et le plan moyen de la surface (figure 4.10).

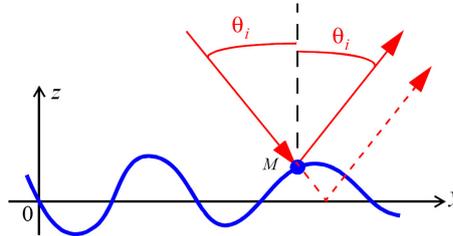


FIG. 4.10 – Calcul du déphasage entre un point arbitraire de la surface M illuminé sous une incidence θ_i et son plan moyen.

D'après la figure 4.10, elle s'écrit

$$\Delta\phi = 2Kz \cos \theta_i \quad (4.5)$$

avec $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde incident. Si la surface est plane, alors $z = 0 \forall y$ et $\Delta\phi = 0$. Contrairement à une surface plane, la phase peut prendre des valeurs plus ou moins grandes selon le rapport $\frac{4\pi}{\lambda} \cos \theta_i$, qui est une grandeur *déterministe*, et selon la hauteur z , qui est une grandeur *aléatoire*, puisque z est une variable *aléatoire*. Par conséquent $\Delta\phi$ devient une variable aléatoire. Si la surface est diélectrique on peut écrire sous certaines hypothèses que le champ diffracté $\psi_d = \psi_i \mathcal{R}(\theta_i) \exp(j\Delta\phi)$, où ψ_i est la champ incident. Par conséquent, ψ_d est une variable aléatoire. En considérant que z obéit à une distribution gaussienne, alors d'après (4.4)

$$\begin{aligned} \langle \psi_d \rangle &= \psi_i \mathcal{R}(\theta_i) \langle \exp(j\Delta\phi) \rangle \\ &= \psi_i \mathcal{R}(\theta_i) \langle \exp(2jK \cos \theta_i z) \rangle \\ &= \psi_i \mathcal{R}(\theta_i) \exp(-2R_a^2) \quad \text{avec} \quad R_a = K \sigma_z \cos \theta_i \end{aligned} \quad (4.6)$$

où R_a est la *paramètre de Rayleigh*.

Si la surface est lisse ($\sigma_z = 0 \Rightarrow R_a = 0$) alors la moyenne de ψ_d , $\langle \psi_d \rangle$, est égale $\psi_i \mathcal{R}(\theta_i)$. Si maintenant la surface est rugueuse, alors le champ diffracté moyen est égal au champ diffracté d'une surface lisse multiplié par le terme $\exp(-2R_a^2) \leq 1$. Par conséquent $|\langle \psi_d \rangle| \leq |\psi_d^{\text{lisse}}|$, et l'atténuation est d'autant plus forte que R_a est grand.

Il est important de noter qu'on utilise le terme *diffusion* et non plus le terme *diffraction*, pour dénommer le champ diffusé par la surface car il émane d'un comportement aléatoire de la surface. En résumé si $R_a \ll 1 \Rightarrow \sigma_z \ll \lambda$ pour θ_i faible, alors la surface sera dite *peu* rugueuse ; dans le cas contraire elle est dite très rugueuse est la champ moyen diffusé est nul.

Si la différence de phase est très faible, ($|\Delta\phi| \ll \pi$), les rayons émanant des points $\{M\}$ interféreront constructivement. Si, au contraire, $|\Delta\phi| \simeq \pi$, les rayons seront pratiquement en opposition de phase, et interféreront destructivement et, ainsi, très peu d'énergie sera réfléchiée dans la direction spéculaire. Le paramètre de Rayleigh est une représentation mathématique de ceci.

4.3.3 Puissances cohérente et incohérente : approche qualitative

D'après le paragraphe suivant, pour une surface parfaitement conductrice et très rugueuse, la moyenne du champ diffracté est nulle. Alors la question qu'on peut se poser est : Où se trouve le champ diffusé par la surface puisque la surface est parfaitement réfléchissante ?

En fait le champ diffracté par une surface rugueuse est une variable aléatoire qui peut se caractériser à partir de ses moments statistiques. Nous avons calculé sa valeur moyenne, mais rien nous empêche de calculer son moment statistique d'ordre 2 centré sur la valeur moyenne, correspondant à la dispersion du champ diffusé autour de sa valeur moyenne. Qualitativement, on s'attend donc que pour une surface très rugueuse, ce moment statistique contribue fortement et, que pour une surface peu rugueuse, il contribue peu, puisque le champ diffusé moyen est important. C'est donc encore une fois le paramètre de Rayleigh qui va nous permettre de trancher.

La figure 4.11 présente qualitativement l'influence du paramètre de Rayleigh sur la puissance diffusée par une surface rugueuse. Elle montre que plus la surface est rugueuse et plus la contribution de la composante spéculaire, reliée à la valeur moyenne du champ diffracté, diminue alors que la puissance diffusée dans les autres directions augmentent (moment statistique d'ordre 2 centré). La composante spéculaire est alors appelée composante *cohérente* du champ diffusé, tandis que l'autre composante est appelée composante *incohérente* du champ diffusé.

Pour illustrer ceci quantitativement, nous allons appliquer l'approximation de l'optique physique (OP) en zone lointaine sur une surface rugueuse monodimensionnelle.

4.3.4 Moyennage statistique et méthode de Monte-Carlo

La résolution des équations intégrales repose sur la détermination du champ électrique sur la surface. Comme nous le verrons dans le paragraphe 4.4, cette quantité sera calculée soit à l'aide de l'approximation de l'optique physique de la méthode des moments. Dans tous les cas, le champ sur la surface dépend de la position de l'émetteur, des caractéristiques physiques

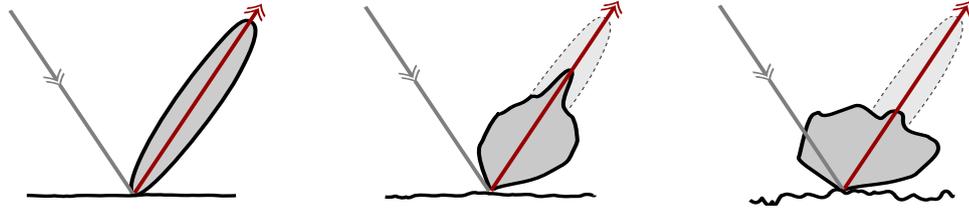


FIG. 4.11 – Comportement qualitatif de la puissance diffusée par des surfaces avec des valeurs de R_a croissantes. A gauche, surface peu rugueuse (R_a petit devant 1); à droite surface très rugueuse (R_a grand devant 1). L'intégrale du lobe, représentant la puissance diffusée totale est la même pour toutes les configurations.

de la surface et de sa forme, et plus particulièrement de sa hauteur z et de sa pente γ . Par conséquent, le champ sur la surface est une variable *aléatoire* car z et γ sont des variables aléatoires. Un capteur va mesurer la contribution *moyenne* des champs diffractés émanant des points de la surface. En d'autres termes, le capteur mesure la valeur moyenne du champ diffracté par la surface. Ce calcul peut s'effectuer de deux manières :

- La valeur moyenne du champ diffracté par la surface est calculée *analytiquement* en utilisant les propriétés statistiques (densité de probabilité des hauteurs, autocorrélation des hauteurs de la surface, ...) de la surface. Cette approche sera utilisée pour calculer, en champ lointain, les puissances *cohérente* et *incohérente* avec l'aide de l'approximation de l'optique physique.
- La valeur moyenne du champ rayonné par la surface est calculée *numériquement* en générant un profil des hauteurs de la surface. De plus, afin de réduire la taille du problème à traiter, qui est similaire à réduire le nombre d'échantillons du profil, plusieurs profils *indépendants* de nombre d'échantillons (typiquement de 600 à 1500) plus petit sont générés. Ainsi la moyenne statistique du champ est obtenue en calculant la moyenne du champ sur chacun de ces profils et en moyennant le champ moyen sur chacun des profils. Cette méthode largement répandue, est connue sous le nom de la *méthode de Monte-Carlo*. Elle sera appliquée sur la méthode des moments.

4.4 Diffraction par une surface monodimensionnelle

En partant des équations intégrales établies dans le chapitre 2, dans ce paragraphe, nous allons présenter deux méthodes couramment utilisées dans la littérature :

- L'approximation de l'optique physique (présentée dans le chapitre 3) suppose que localement la surface peut être représentée par son plan tangent. En d'autres termes, elle suppose que le rayon de courbure, ρ_c , en tout point de la surface doit être supérieur à la longueur d'onde incidente λ . En fait, nous montrerons avec l'aide de la méthode de la phase stationnaire que cette approche s'applique pour des surfaces rugueuses ($\lambda > \sigma_z$) avec $\rho_c > \lambda$.
- La méthode des moments.

Nous supposons des surfaces monodimensionnelles. A noter que ces approches existent pour des surfaces bidimensionnelles, mais les calculs sont beaucoup plus compliqués.

4.4.1 Approximation de l'optique physique

4.4.1.1 Expression du champ diffracté

D'après (3.22), le champ diffracté en zone lointaine par une surface monodimensionnelle, illuminée par une onde plane $\psi_{i0}e^{j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$, est donné sous l'approximation de l'OP par

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_S [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_d)(1 + \mathcal{R}) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_i)(1 - \mathcal{R})] e^{-j(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}} dS \quad (4.7)$$

La normale à la surface $\hat{\mathbf{n}}$ est définie par $\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\gamma\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ et l'élément de surface $dS = dy\sqrt{1+\gamma^2}$ avec $\gamma = dz/dy$. La surface est de longueur $2L$. Ceci conduit à

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = \frac{\psi_{i0}}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \int_{-L}^L [\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \mathcal{R}(\theta) + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_i)] \exp[jg(\mathbf{r})] dy \quad (4.8)$$

avec

$$g(\mathbf{r}) = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d) \cdot \mathbf{r} = K[(\sin \theta_i - \sin \theta_d)y - (\cos \theta_i + \cos \theta_d)z]$$

et $\mathbf{n}_1 = -\gamma\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$. Contrairement à une surface plane, l'angle θ défini par $\cos \theta = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i$ dépend de la pente de la surface γ au point (y, z) . Le champ diffusé par la surface dépend statistiquement de la hauteur z (car $\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$) et de la pente γ (voir figure 4.12).

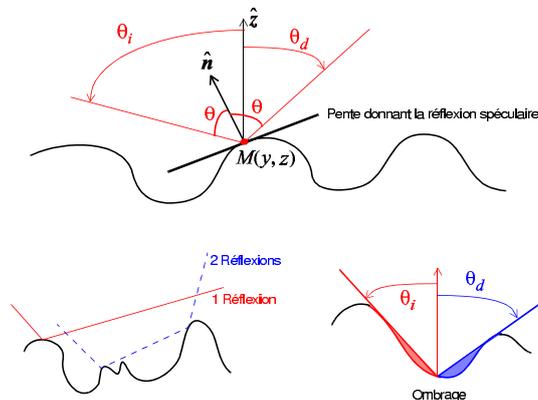


FIG. 4.12 – Figure relative à l'approximation de Kirchhoff. La figure du haut illustre la direction spéculaire donnée par une facette. En bas à gauche, illustration du phénomène de réflexions multiples. En bas à droite, illustration du phénomène d'ombrage.

Toute la difficulté est maintenant de calculer le terme intégral. Plusieurs méthodes sont possibles ; parmi celles-ci une méthode inspirée de la méthode de la phase stationnaire² permet de montrer que la contribution majeure de $\psi_d^\infty(\mathbf{r}')$ vient des points spéculaires de la surface. Le point stationnaire, y_s , est donné par $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ soit $(\sin \theta_i - \sin \theta_d) - (\cos \theta_i + \cos \theta_d)\gamma_s = 0$ avec

²Méthode valable pour $Kz > 1 \Rightarrow K\sigma_z > 1$ donc applicable à des surfaces très rugueuses

$\gamma_s = \frac{dz}{dy}|_{y=y_s}$, soit $\gamma_s = \frac{\sin \theta_i - \sin \theta_d}{\cos \theta_i + \cos \theta_d}$. Or les points où il y a réflexion spéculaire sont exactement les points pour lesquels la pente vaut γ_s ³ (voir figure 4.12). Ceci indique que la presque totalité du champ diffracté provient du voisinage du point spéculaire.

En remplaçant γ par γ_s dans (4.8), nous avons $\mathbf{n}_1 \cdot (\hat{\mathbf{k}}_d - \hat{\mathbf{k}}_i) = -2K \frac{1 + \cos(\theta_i + \theta_d)}{\cos \theta_i + \cos \theta_d}$, $\mathbf{n}_1 \cdot (\hat{\mathbf{k}}_d + \hat{\mathbf{k}}_i) = 0$, $\cos \theta = -\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos(\frac{\theta_i + \theta_d}{2})$, d'où

$$\psi_d^\infty = -\frac{K\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \mathcal{R}\left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2}\right) \frac{1 + \cos(\theta_i + \theta_d)}{\cos \theta_i + \cos \theta_d} \int_{-L}^{+L} e^{jK[y(\sin \theta_i - \sin \theta_d) - z(\cos \theta_d + \cos \theta_i)]} dy \quad (4.9)$$

L'utilisation de la phase stationnaire permet donc de supprimer dans l'intégrande la dépendance sur les pentes.

4.4.1.2 Moments statistique d'ordre 1 : valeur moyenne du champ

La seule variable aléatoire dans (4.9) est la hauteur z de la surface. La moyenne statistique $m_{\psi_d} = \langle e^{-jKz(\cos \theta_i + \cos \theta_d)} \rangle$ doit être alors calculée. Elle est équivalente au calcul de la fonction caractéristique définie par (4.4). Ceci conduit donc à

$$\frac{m_{\psi_d}}{S} = \text{sinc}[KL(\sin \theta_d - \sin \theta_i)] \exp\left[-\frac{K^2 \sigma_z^2 (\cos \theta_i + \cos \theta_d)^2}{2}\right] \quad (4.10)$$

où $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ et $S = 2L$. Le premier terme de l'égalité correspond à la diffraction par une surface plane ; pour $L \gg \lambda$ (surface de longueur infinie) la fonction $\text{sinc}(x) = \delta(x) \Rightarrow \theta_d = \theta_i$ (direction spéculaire). Le second est relié au comportement aléatoire de la surface puisqu'il dépend de l'écart type des hauteurs σ_z .

Dans la direction spéculaire $\theta_d = \theta_i$, le champ diffusé devient

$$\frac{m_{\psi_d}}{S} = \exp(-2K^2 \sigma_z^2 \cos^2 \theta_i) = \exp(-2R_a^2) \quad (4.11)$$

où R_a est le paramètre de Rayleigh. Ainsi, plus la surface est rugueuse, plus la valeur moyenne du champ est faible dans la direction spéculaire.

La figure 4.13 représente la quantité $\left|\frac{m_{\psi_d}}{S}\right|^2 = \exp(-4R_a^2)$ en fonction de l'angle d'incidence θ_i pour $\frac{\sigma_z}{\lambda} = \{0.01, 0.1, 0.2\}$ dans la direction spéculaire. Nous observons que plus la surface est rugueuse (le rapport $\frac{\sigma_z}{\lambda}$ augmente), plus la puissance cohérente diminue.

En conclusion, en reportant (4.10) dans (4.9), $|\langle \psi_d^\infty \rangle|^2$ s'écrit pour une surface rugueuse de longueur infinie comme

$$|\langle \psi_d^\infty \rangle|^2 = \frac{KS^2 |\psi_{i0}|^2}{2\pi r'} |\mathcal{R}(\theta_i) \cos \theta_i|^2 \exp(-4R_a^2) \delta(\theta_d - \theta_i)$$

La fonction de Dirac $\delta(\theta_d - \theta_i)$ traduit le fait que la diffusion a lieu uniquement dans la direction spéculaire.

³Pour s'en persuader il suffit de savoir que les points où il y a réflexion spéculaire sont les points tels que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_d$.

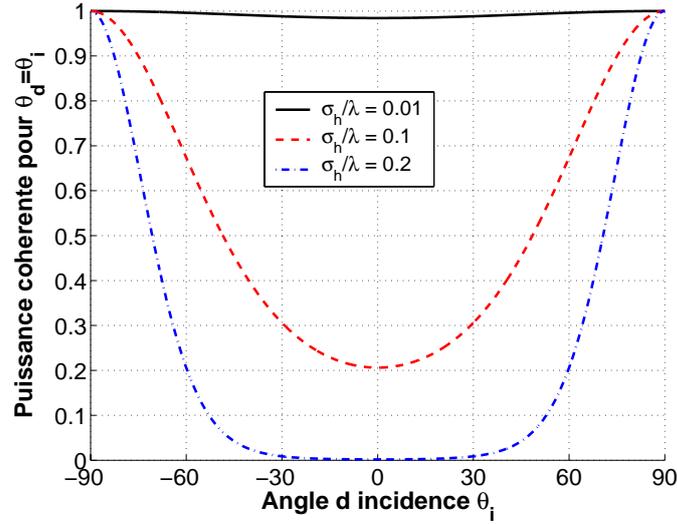


FIG. 4.13 – Puissance diffusée *cohérente* $\left| \frac{m\psi_d}{S} \right|^2 = \exp(-4R_a^2)$ dans la direction spéculaire en fonction de l'angle d'incidence θ_i pour $\frac{\sigma_z}{\lambda} = \{0.01, 0.1, 0.2\}$.

4.4.1.3 Moments statistique d'ordre 2 : variance du module du champ

D'après (4.9), la variance du module du champ est reliée à

$$\begin{aligned} \left\langle |\psi_d(y, z)|^2 \right\rangle &= \langle \psi_d^*(y_1, z_1) \psi_d(y_2, z_2) \rangle \\ &= \left\langle \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} e^{jK[(y_1 - y_2)(\sin \theta_d - \sin \theta_i) + (z_1 - z_2)(\cos \theta_i + \cos \theta_d)]} dy_1 dy_2 \right\rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

Avec le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} y' = y_1 + y_2 \\ y = y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{y + y'}{2} \\ y_2 = \frac{y' - y}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y \in [-2L; 2L] \\ y' \in [-2L; 2L] \end{cases}$$

la matrice jacobienne J s'écrit

$$J = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y'} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y'} & \frac{\partial y_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}$$

L'intégration sur y' conduit à $|J| \times 4L = 2L = S$, et (4.12) devient donc

$$\frac{C_{\psi_d}}{S} = \int_{-2L}^{+2L} \left\langle e^{jK[y(\sin \theta_d - \sin \theta_i) + (z_1 - z_2)(\cos \theta_i + \cos \theta_d)]} \right\rangle dy$$

Soit

$$\frac{C_{\psi_d}}{S} = \int_{-2L}^{+2L} e^{jKy(\sin \theta_d - \sin \theta_i)} \left\langle e^{jK(z_1 - z_2)(\cos \theta_i + \cos \theta_d)} \right\rangle dy$$

Puisque la somme de deux processus gaussiens est également gaussienne, la variable aléatoire $z = z_1 - z_2$ est également gaussienne. Sa valeur moyenne est nulle, puisque $\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle = 0$, et sa variance s'écrit $\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle = \langle z_1^2 \rangle + \langle z_2^2 \rangle - 2 \langle z_1 z_2 \rangle = 2[\sigma_z^2 - C_z(y)]$ puisque $\langle z_1^2 \rangle = \langle z_2^2 \rangle = \sigma_z^2$ et $C_z(y) = \langle z_1 z_2 \rangle$. Par conséquent en utilisant la relation (4.4) avec $\sigma_z^2 \rightarrow 2K^2[\sigma_z^2 - C_z(y)](\cos \theta_i + \cos \theta_d)$, nous obtenons

$$\frac{C_{\psi_d}}{S} = \int_{-2L_y}^{+2L_y} e^{jKy(\sin \theta_d - \sin \theta_i)} \exp\{-K^2(\cos \theta_i + \cos \theta_d)^2[\sigma_z^2 - C_z(y)]\} dy$$

L'intégrale est convergente car $\sigma_z^2 - C_z(y) \geq 0$.

Pour $R_a \gg 1$, l'intégrande contribue si $\sigma_z^2 - C_z(y)$ est proche de zéro, soit y proche de zéro car $C_z(0) = \sigma_z^2$. Ainsi nous pouvons effectuer un développement limité de $C_z(y)$ au voisinage de zéro conduisant à $C_z(y) = \sigma_z^2(1 - \frac{y^2}{L_c^2})$ pour une autocorrélation gaussienne des hauteurs de la surface. De plus, les bornes d'intégrations sur y peuvent être étendues à $\pm\infty$. L'équation ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{C_{\psi_d}}{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jKy(\sin \theta_d - \sin \theta_i)} \exp\left[-\frac{K^2 y^2 \sigma_z^2 (\cos \theta_i + \cos \theta_d)^2}{L_c^2}\right] dy$$

Sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ay^2 + jby) dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \quad \text{pour } a > 0$$

L'intégration selon y donne alors

$$\frac{C_{\psi_d}}{S} = \frac{L_c \sqrt{\pi}}{K \sigma_z (\cos \theta_i + \cos \theta_d)} \exp\left[-\frac{(\sin \theta_i - \sin \theta_d)^2 L_c^2}{(\cos \theta_i + \cos \theta_d)^2 4\sigma_z^2}\right]$$

En introduisant l'écart type des pentes de la surface $\sigma_\gamma = \frac{\sqrt{2}\sigma_z}{L_c}$ pour une autocorrélation gaussienne des pentes, et sa densité de probabilité $p_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \exp(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_\gamma^2})$ qui est également gaussienne, nous avons au final

$$\frac{C_{\psi_d}}{S} = \frac{2\pi}{K(\cos \theta_i + \cos \theta_d)} p_\gamma(\gamma_s) \quad \text{avec } \gamma_s = \tan\left(\frac{\theta_i - \theta_d}{2}\right) \quad (4.13)$$

où la pente γ_s a été calculée en appliquant les relations suivantes

$$\begin{cases} \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

En conclusion, en reportant (4.13) dans (4.9), la puissance diffusée *incohérente* $|\langle \psi_d \rangle|^2$ s'écrit pour une surface rugueuse de longueur infinie comme

$$\langle |\psi_d^\infty|^2 \rangle = \frac{|\psi_{i0}|^2 S}{r'} \left| \mathcal{R}\left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2}\right) \right|^2 \frac{[1 + \cos(\theta_i + \theta_d)]^2}{(\cos \theta_i + \cos \theta_d)^3} p_\gamma(\gamma_s) \quad (4.14)$$

Pour une surface très rugueuse, la puissance diffusée *incohérente* par la surface est proportionnelle à la densité de probabilité des pentes évaluée en γ_s . Physiquement, γ_s est la pente qui donne la direction spéculaire locale d'une facette. En fait l'équation (4.14) est toujours vérifiée quelque soit la densité de probabilité des pentes et la fonction d'autocorrélation des hauteurs.

4.4.1.4 Coefficient de diffusion incohérent

Par définition, le coefficient de diffusion incohérent s'écrit

$$\sigma_{\text{inc}} = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{2\pi r' \left(\langle |\psi_d^\infty|^2 \rangle - |\langle \psi_d^\infty \rangle|^2 \right)}{S |\psi_{i0}|^2} \quad (4.15)$$

Sous l'approximation de l'optique géométrique, la puissance cohérente est nulle car $R_a \gg 1$ (surface très rugueuse, voir (4.11)), impliquant que la moyenne du champ est nul, $\langle \psi_d^\infty \rangle = 0$, tandis que la variance du module du champ, $\langle |\psi_d^\infty|^2 \rangle$, est donné par (4.14). Ainsi, nous avons

$$\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_d) = 2\pi \left| \mathcal{R} \left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) \right|^2 \frac{[1 + \cos(\theta_i + \theta_d)]^2}{(\cos \theta_i + \cos \theta_d)^3} p_\gamma(\gamma_s) \quad (4.16)$$

La figure 4.14 représente $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_d)$ en fonction de l'angle d'observation θ_d pour des écarts type de pente $\sigma_\gamma = \{0.1, 0.2, 0.3\}$ et $\theta_i = 0$ degrés. La surface est parfaitement conductrice. Nous observons que plus la surface est irrégulière, plus la puissance est diffusée dans toutes les directions. Contrairement à la figure 4.13, la puissance incohérente est indépendante du ratio $\frac{\sigma_z}{\lambda}$, car son calcul suppose que $\sigma_z \gg \lambda$.

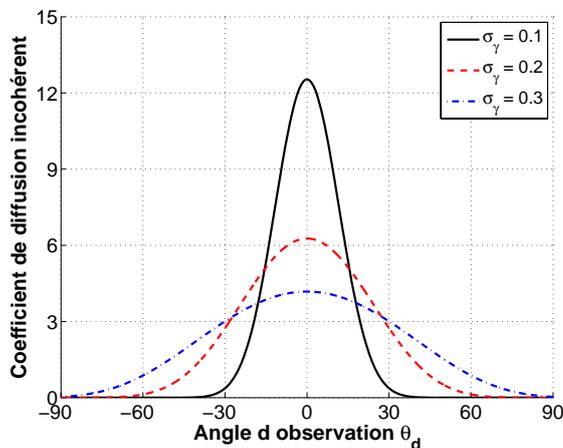


FIG. 4.14 – Coefficient de diffusion incohérent sous l'approximation de l'optique géométrique en fonction de l'angle d'observation θ_d pour une surface parfaitement conductrice, des écarts type de pente $\sigma_\gamma = \{0.1, 0.2, 0.3\}$ et $\theta_i = 0$ degrés.

Cette approximation correspond à l'approximation de l'*optique géométrique*. Elle est dénommée "optique géométrique", car la puissance diffusée est obtenue en effectuant une sommation incohérente (la phase du champ électrique n'est pas prise en compte) de la puissance diffusée par chacune des facettes qui constitue la surface. C'est pour ça d'ailleurs, que C_{ψ_d} ne dépend pas de σ_z et dépend uniquement de la densité de probabilité des pentes, p_γ , calculée en γ_s .

4.4.1.5 Discussion sur l'approximation de l'optique physique

L'approximation de l'optique physique est valide si le rayon de courbure, ρ_c , en tout point de la surface est supérieur à la longueur d'onde λ . ρ_c s'exprime en tout point de la surface par

$$\rho_c = \frac{[1 + \gamma^2(y)]^{3/2}}{|\gamma'(y)|}$$

Pour une droite $\gamma'(y) = 0$ et $\rho_c \rightarrow \infty$. Pour une surface rugueuse, ce critère devient $\langle \rho_c \rangle > \lambda$. Nous pouvons montrer pour une autocorrélation gaussienne des hauteurs que $\langle \rho_c \rangle$ est de l'ordre de

$$\langle \rho_c \rangle = \frac{L_c^2}{2\sqrt{3}\sigma_z}(1 + \sigma_\gamma)^{3/2} \approx 0.3 \frac{L_c^2}{\sigma_z}(1 + \sigma_\gamma)^{3/2} \approx 0.3 \frac{L_c^2}{\sigma_z} \quad \text{pour } \sigma_\gamma < 0.2 \quad (4.17)$$

Par conséquent, l'approximation de Kirchhoff est valide si

$$0.3 \frac{L_c^2}{\lambda\sigma_z} = 0.3 \left(\frac{L_c}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\sigma_z}{\lambda} \right)^{-1} > 1 \quad (4.18)$$

Si de plus, nous voulons appliquer l'approximation de l'optique géométrique, nous devons avoir $\frac{\sigma_z}{\lambda} > 1$. Par conséquent il faut réunir les deux conditions suivantes

$$\frac{\sigma_z}{\lambda} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{L_c}{\lambda} > 1$$

Comme le montre la figure 4.12, l'approximation de l'optique physique néglige les réflexions multiples qui peuvent se produire sur la surface et le phénomène d'ombrage. Nous pouvons montrer que la première hypothèse est vérifiée si l'écart type des pentes $\sigma_\gamma < 0.3$. De plus, le phénomène d'ombrage peut être inclus en multipliant la puissance diffusée par une "fonction d'ombre" qui prend des valeurs comprises entre 0 et 1. Elle dépend des angles d'incidence θ_i , θ_s et de σ_γ . Elle vaut 1 si $\theta_i = \theta_d = 0$ (la surface est alors entièrement illuminée). Elle vaut 0 si $\theta_i = \pi/2$ ou $\theta_d = \pi/2$ (aucun point de la surface est vue par l'émetteur ou le récepteur).

Un critère permettant de tester la qualité d'un modèle est le critère de la conservation de l'énergie. Pour une surface parfaitement conductrice il vaut 1 et impose que

$$\frac{1}{2\pi \cos \theta_i} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_d) d\theta_d = 1 \quad \forall \theta_i$$

La figure 4.15 représente ce critère en fonction de l'angle d'observation θ_d dans le cas de l'approximation de l'optique géométrique. L'écart type des pentes $\sigma_\gamma = 0.1$ et la surface est parfaitement conductrice. A noter que pour une surface parfaitement conductrice, $|\mathcal{R}_\perp(\theta)| = |\mathcal{R}_\parallel(\theta)| = 1 \forall \theta$.

Nous observons que pour $\theta_i < 60$ degrés, le modèle vérifie le critère de la conservation de l'énergie. Au delà de cet angle et au voisinage de $\theta_i = 80$ degrés, les deux modèles avec ombre et sans ombre passent par un minimum. Ceci vient du fait que la contribution des réflexions multiples n'est pas prise en compte. Puis, au voisinage de $\theta_i = 90$ degrés, le modèle avec ombre tend vers 1 alors que le modèle qui néglige le phénomène d'ombrage diverge.

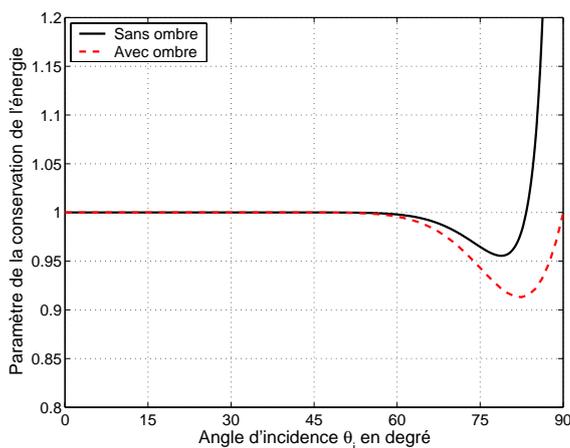


FIG. 4.15 – Critère de la conservation de l'énergie en fonction de l'angle d'incidence θ_i dans le cas de l'approximation de l'optique géométrique. L'écart type des pentes $\sigma_\gamma = 0.1$ et la surface est parfaitement conductrice.

4.4.2 Méthode des Moments

Pour terminer ce chapitre, comme dans le cas du chapitre 3, l'approximation de l'OP est comparée à une approche rigoureuse basée sur les équations intégrales discrétisées par la méthode des moments (MmM). La démarche pour calculer le champ et sa dérivée normale sur la surface à l'aide de la MmM est également expliquée dans le chapitre 3 (section 3.4).

Les équations intégrales sont applicables si le champ aux bords de la surface est nulle. Une OPPM définie par $\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_{i0} \exp(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$ ne satisfait pas cette condition puisque $|\psi_i(\mathbf{r})| = 1 \forall \mathbf{r} \in S$. Afin de satisfaire cette condition, mathématiquement le champ incident est multiplié par le terme $\exp\left(-\frac{(y+z \tan \theta_i)^2}{g^2}\right)$, où g est homogène à une longueur et contrôle l'étendue spatiale du faisceau incident. Typiquement $g \in [4; 6]L$, où L est la longueur de la surface. Physiquement, le terme correctif peut être assimilé au diagramme de rayonnement de l'antenne. De plus, la MmM nécessite la génération d'un profil rugueux $z(y)$, obtenu à l'aide de la méthode exposée dans le paragraphe 2.

Dans la suite, la surface est supposée parfaitement conductrice et obéit à un processus *gaussien*, dont la corrélation des hauteurs est également *gaussienne*. De plus, le pas d'échantillonnage de la surface vaut $\Delta x = \lambda/10$ et $g = L/6$, dont la longueur vaut $L = 120\lambda \Rightarrow N = 1200$.

La figure 4.16 présente une réalisation de z/λ en fonction de y/λ avec $\sigma_z = 0.4\lambda$ et $\sigma_\gamma = 0.25$. Au milieu, figure le module du champ incident sur la surface en fonction de y/λ avec $\theta_i = 15^\circ$ et $g = L/6 = 20\lambda$. On observe bien que le champ incident s'annule sur les bords ($|\psi_i| = \exp\left(-\frac{(y+z \tan \theta_i)^2}{g^2}\right)$). En bas, figure le champ sur la surface en fonction de y/λ en polarisation TM calculé avec la MmM et l'approximation de l'OP. Une bonne adéquation est obtenue entre les deux approches. A noter que le rayon courbure moyen vaut $\langle \rho_c \rangle = 25.5\lambda$, qui explique en partie le bon accord. La figure 4.16 présente les mêmes variations que sur la figure 4.17 mais en polarisation TE.

Connaisant les champs sur la surface, $\{\psi(\mathbf{r}), \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n}\}$ avec $\mathbf{r} \in S$, à partir du principe d'Huygens, le champ rayonné en zone lointaine est calculé à l'aide de l'équation (2.27). Soit

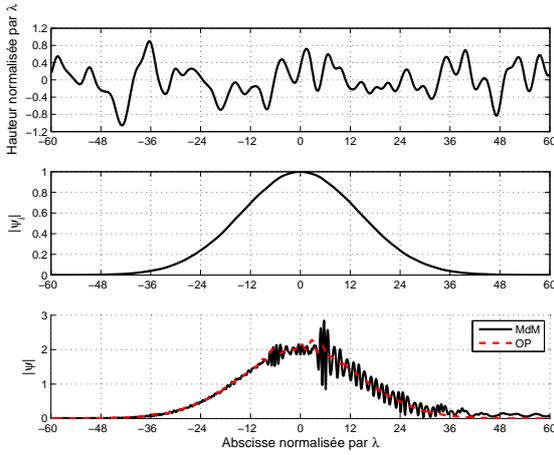


FIG. 4.16 – En haut, surface z/λ en fonction de y/λ avec $\sigma_h = 0.4\lambda$ et $\sigma_\gamma = 0.25$. Au milieu, module du champ incident sur la surface en fonction de y/λ avec $\theta_i = 15^\circ$ et $g = L/6 = 20\lambda$. En bas, champ sur la surface en fonction de y/λ en polarisation TM calculé avec la MdM et l'approximation de l'OP.

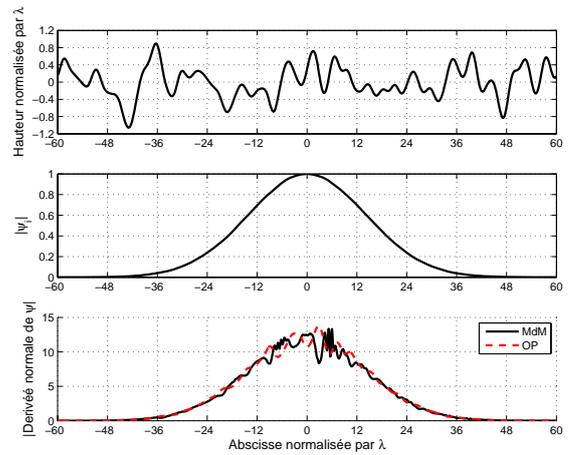


FIG. 4.17 – Mêmes variations que sur la figure 4.16 mais en polarisation TE.

$$\psi_d^\infty(\mathbf{r}') = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{j\pi}{4}} \sum_{n=1}^{n=N} \left[\underbrace{j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}_n \psi(\mathbf{r}_n)}_{\text{TM}} + \underbrace{\frac{\partial \psi(\mathbf{r}_n)}{\partial n_n}}_{\text{TE}} \right] \exp(-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}_n) \sqrt{1 + \gamma_n^2} \Delta x$$

Puis, pour chaque réalisation de z numéro $p \in [1; P]$, la grandeur $\psi_{d,p}^\infty(\mathbf{r}')$ est calculée. La figure 4.18 présente quelques réalisations de z/λ en fonction de y/λ pour $P = \{1, 2, 3, 4\}$. Elles sont *indépendantes* mais possèdent des statistiques identiques (même fonction d'autocorrélation des hauteurs de la surface supposée gaussienne). En fait, la graine du bruit blanc gaussien à l'entrée du filtre est différente pour chaque réalisation.

Il est alors possible de calculer les grandeurs statistiques suivantes à partir de $\{\psi_{d,p}^\infty(\mathbf{r}') = \Psi_p\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \Psi \rangle^2 = \frac{1}{P} \left| \sum_{p=1}^{p=P} \Psi_p \right|^2 & \text{Module au carré de la moyenne de } \Psi \\ \langle |\Psi|^2 \rangle = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{p=P} |\Psi_p|^2 & \text{Variance de } |\Psi| \\ \langle |\Psi - \langle \Psi \rangle|^2 \rangle = \langle |\Psi|^2 \rangle - |\langle \Psi \rangle|^2 & \text{Variance centrée de } |\Psi| \end{array} \right.$$

Le premier moment statistique correspond à la puissance *cohérente* (la phase est prise en compte dans la moyenne) et le troisième moment la puissance *incohérente* (la phase n'est pas incluse à cause du module).

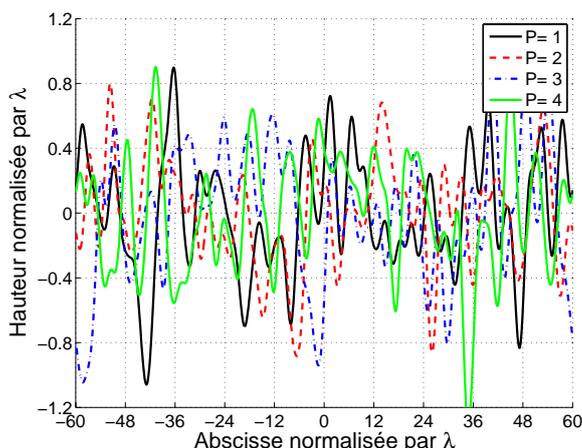


FIG. 4.18 – z/λ en fonction de y/λ pour différentes graines ($P = \{1, 2, 3, 4\}$).

Les figures 4.19 et 4.20 présentent respectivement $r' |\langle \psi_d^\infty(\mathbf{r}') \rangle|^2 = r' |\langle \Psi \rangle|^2$ calculé avec la MdM en fonction de θ_d et du nombre de réalisations P en polarisations TM et TE. On observe que plus le nombre de réalisations augmente plus la courbe devient “lisse”.

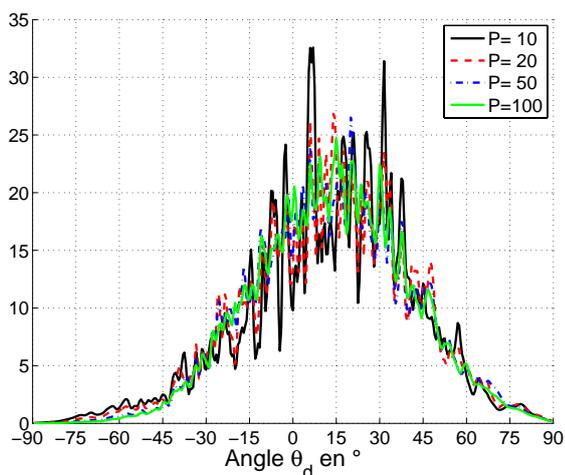


FIG. 4.19 – Composante $r' |\langle \psi_d^\infty(\mathbf{r}') \rangle|^2 = r' |\langle \Psi \rangle|^2$ calculée avec la MdM en fonction de θ_d et du nombre de réalisations en polarisation TM.

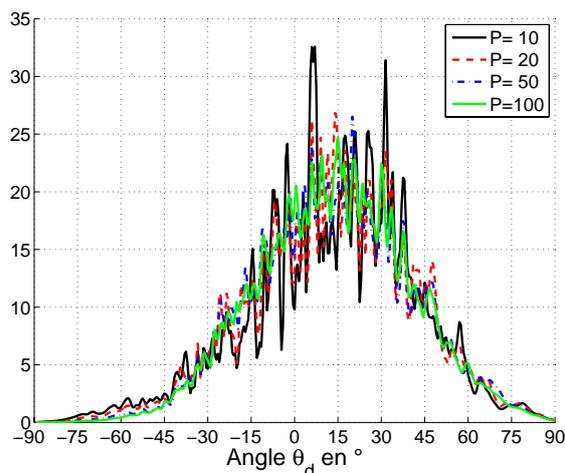


FIG. 4.20 – Mêmes variations que sur la figure 4.19 mais en polarisation TE.

Enfin, en s’inspirant de la relation (4.15), les coefficients de diffusion cohérent, σ_{coh} , et incohérent, σ_{inc} , sont calculés. Il sont représentés respectivement sur les figures 4.21 et 4.22 en fonction de l’angle θ_d pour $N = 100$ en polarisations TM et TE. De plus, la somme $\sigma_{\text{coh}} + \sigma_{\text{inc}}$ est représentée, et pour σ_{inc} , le modèle issu de l’approximation de l’optique géométrique donné par l’équation (4.16) est présenté.

Pour la composante incohérente, un très bon accord est observé entre les trois courbes, qui montre que l’approximation de l’optique géométrique est valide pour une telle configuration. En effet, nous avons $\sigma_z = 0.4\lambda$ et $\theta_i = 15^\circ$, qui implique que le paramètre de Rayleigh $R_a = k\sigma_z \cos \theta_i = 2.51$. La surface peut être donc considérée comme très rugueuse, qui explique que

la composante cohérente est très faible comparativement à la composante incohérente. De plus, d'après (4.17), le rayon de courbure moyen vaut $\rho_c = 2.26\lambda > \lambda$.

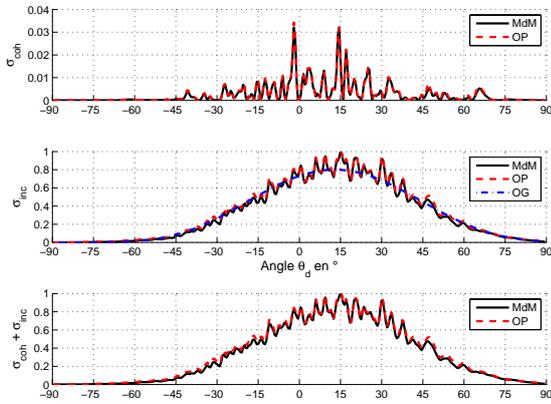


FIG. 4.21 – En haut, σ_{coh} en fonction de θ_d en degrés. Au milieu, σ_{inc} en fonction de θ_d en degrés. En bas, $\sigma_{\text{coh}} + \sigma_{\text{inc}}$ en fonction θ_d en degrés. Le nombre de réalisations $N = 100$.

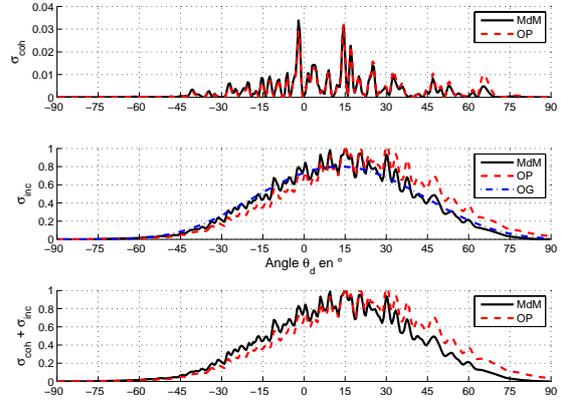


FIG. 4.22 – Mêmes variations que sur la figure 4.21 mais en polarisation TE.

La figure 4.23 présente les cartographies des modules des champs incident et rayonné en dB dans l'espace en fonction de la hauteur et de l'abscisse en polarisation TM. A noter que le principe d'Huygens est appliqué mais en champ proche, c.a.d. sans utiliser l'approximation sur la fonction de Green.

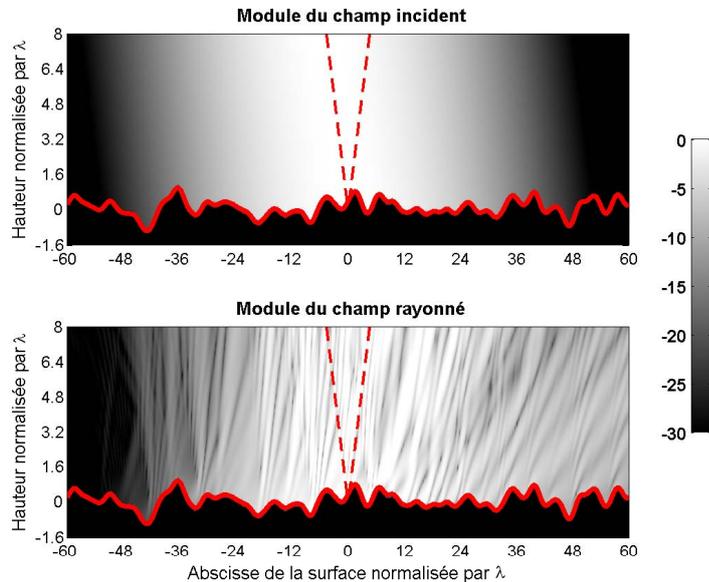


FIG. 4.23 – Modules des champs incident et rayonné en dB dans l'espace en fonction de la hauteur et de l'abscisse en polarisation TM.

A Programme Maple sur la méthode des moments

```
> restart: with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Dans cette annexe, le listing du programme Maple de la correction de l'exercice concernant la méthode des moments (section 3.4.1.2) est présenté.

Solution analytique de l'équation différentielle

```
> Eq:={-diff(f(x),x,x)=1+4*x^2,f(0)=0,f(1)=0};
```

$$Eq := \{f(0) = 0, f(1) = 0, -(\frac{d^2}{dx^2} f(x)) = 1 + 4x^2\}$$

```
> dsolve(Eq,f(x));
```

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x$$

Méthode des moments

```
> w:=(x,m)->x-x^(m+1) ;
```

$$w := (x, m) \rightarrow x - x^{(m+1)}$$

```
> f:=(x,n)->w(x,n) ; g:=x->1+4*x^2;
```

$$f := (x, n) \rightarrow w(x, n)$$

$$g := x \rightarrow 1 + 4x^2$$

```
> x0:=0 ; x1:=1 ;
```

$$x0 := 0$$

$$x1 := 1$$

```
> fw:=-factor(simplify(w(x,m)*diff(f(x,n),x,x))) ;
```

$$fw := n(x^n - x^{(m+n)})(n+1)$$

```
> assume(m>1,n>1);
```

```
> Z_mn:=int(fw,x=x0..x1);
```

$$Z_{mn} := \frac{m^{\sim} n^{\sim}}{m^{\sim} + n^{\sim} + 1}$$

```
> g_m:=factor(int(g(x)*w(x,m),x=x0..x1));
```

$$g_m := \frac{m^{\sim} (8 + 3m^{\sim})}{2(2 + m^{\sim})(4 + m^{\sim})}$$

N=1

```
> N:=1 ; Z:=matrix(N,N) ; G:=matrix(N,1) ; A:=matrix(N,1) ;
      N := 1
      Z := array(1..1, 1..1, [])
      G := array(1..1, 1..1, [])
      A := array(1..1, 1..1, [])
> for n0 from 1 to N do for m0 from 1 to N do
> Z[n0,m0]:=subs(n=n0,m=m0,Z_mn);od;od;
> for m0 from 1 to N do G[m0,1]:=subs(m=m0,g_m);od;
      G1,1 :=  $\frac{11}{30}$ 
> A:=multiply(inverse(Z),G):
> evalm(Z) ; evalm(G) ; evalm(A) ;
      [  $\frac{1}{3}$  ]
      [  $\frac{11}{30}$  ]
      [  $\frac{11}{10}$  ]
> f_a:=sum(f(x,p)*A[p,1],p=1..N);
      f_a :=  $\frac{11}{10}x - \frac{11}{10}x^2$ 
```

N=2

```
> N:=2 ; Z:=matrix(N,N) ; G:=matrix(N,1) ; A:=matrix(N,1) ;
      N := 2
      Z := array(1..2, 1..2, [])
      G := array(1..2, 1..1, [])
      A := array(1..2, 1..1, [])
> for n0 from 1 to N do for m0 from 1 to N do
> Z[n0,m0]:=subs(n=n0,m=m0,Z_mn);od;od;
> for m0 from 1 to N do G[m0,1]:=subs(m=m0,g_m);od;
      G1,1 :=  $\frac{11}{30}$ 
      G2,1 :=  $\frac{7}{12}$ 
> A:=multiply(inverse(Z),G):
> evalm(Z) ; evalm(G) ; evalm(A) ;
      [  $\frac{1}{3}$    $\frac{1}{2}$  ]
      [  $\frac{1}{2}$    $\frac{4}{5}$  ]
      [  $\frac{11}{30}$  ]
      [  $\frac{7}{12}$  ]
      [  $\frac{1}{10}$  ]
      [  $\frac{2}{3}$  ]
> f_a:=sum(f(x,p)*A[p,1],p=1..N);
      f_a :=  $\frac{23}{30}x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x^3$ 
```

N=3

```
> N:=3 ; Z:=matrix(N,N) ; G:=matrix(N,1) ; A:=matrix(N,1) ;
```

```
      N := 3
```

```
      Z := array(1..3, 1..3, [])
```

```
      G := array(1..3, 1..1, [])
```

```
      A := array(1..3, 1..1, [])
```

```
> for n0 from 1 to N do for m0 from 1 to N do
```

```
> Z[n0,m0]:=subs(n=n0,m=m0,Z_mn);od;od;
```

```
> for m0 from 1 to N do G[m0,1]:=subs(m=m0,g_m);od;
```

```
      G1,1 :=  $\frac{11}{30}$ 
```

```
      G2,1 :=  $\frac{7}{12}$ 
```

```
      G3,1 :=  $\frac{51}{70}$ 
```

```
> A:=multiply(inverse(Z),G):
```

```
> evalm(Z) ; evalm(G) ; evalm(A) ;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{51}{70} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> f_a:=sum(f(x,p)*A[p,1],p=1..N);
```

$$f_a := \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

B Examen du M2R SEGE - 17 février 2005 - Durée 1H00 avec document

Les deux problèmes sont **indépendants**. Le premier problème est très proche du cours tandis que le second demande plus de réflexion. Dans chacun des problèmes, les questions sont en général **indépendantes**. Le barème est donné à titre indicatif entre parenthèses et en gras. La notation se fera sur 20.

B.1 Champ EM transmis par une interface plane d'aire infinie (8 pts)

Soit une interface **plane** contenue dans le plan (\hat{y}, \hat{z}) d'aire **infinie** séparant deux milieux LHI, stationnaires et non-magnétiques. Le milieu supérieur est assimilé au **vide** et le milieu inférieur est caractérisé par son indice de réfraction $n = n_r + jn_i$ ($(n_r, n_i) \in \mathbb{R}^+$) **complexe**. L'interface est illuminée par une onde **plane** \mathbf{E}_i polarisée selon \hat{x} et se propageant selon \hat{z} et vers les z négatifs.

1. Faire un schéma du problème.
2. Justifier que l'onde incidente peut s'écrire $\mathbf{E}_i(z, t) = E_{0i}e^{-j(\omega_i t - K_i z)}\hat{x}$ avec $z > 0$ en nommant $\{E_{0i}, \omega_i, K_i\}$ et en donnant leur unité.
 - (a) Exprimer K_i en fonction de la longueur d'onde incidente dans le vide λ_0 .
 - (b) Quelle est la polarisation de l'onde incidente ?
3. Justifier que le champ transmis en tout point de l'espace du milieu inférieur peut s'écrire $\mathbf{E}_t(z, t) = E_{0t}(z) \times e^{-j(\omega_t t - K_t z)}\hat{x}$ avec $K_t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Quelle est la relation entre ω_t et ω_i en justifiant votre réponse ?
 - (b) Quelle est la relation entre K_t et K_i en justifiant votre réponse ?
 - (c) Quelle est la relation entre $E_{0t}(z)$ et $\{E_{0i}, \delta, \mathcal{T}\}$? δ est l'épaisseur de peau et \mathcal{T} est le coefficient de Fresnel en transmission dont la polarisation est à préciser par le candidat. \mathcal{T} devra être remplacé par son expression simplifiée.
 - (d) Calculer la profondeur h maximale en fonction de $\{n, \lambda_0\}$ correspondant à $|E_t(h, t)/E_i(z, t)| \leq 1\%$, où E_t est la norme du vecteur \mathbf{E}_t et E_i est la norme du vecteur \mathbf{E}_i .

B.2 Approximation de l'optique géométrique avec effet d'ombre

Le but du problème est de calculer la fonction d'ombre **moyennée** S , égale au rapport de la surface illuminée sur la surface totale, d'une surface rugueuse de densité de probabilité **gaussienne** et de quantifier son influence

sous incidences très rasantes.

1. Approximation de l'optique géométrique sans ombre (5 pts)

- (a) Rappeler le domaine de validité de l'approximation de l'optique géométrique et en donner une interprétation géométrique.
- (b) A partir du cours, donner l'expression du coefficient de diffusion **incohérent**, $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_d)$, par une surface rugueuse sous l'hypothèse de l'optique géométrique.
- (c) Simplifier son expression dans la **direction spéculaire** ($1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$).
- (d) Calculer sa limite lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$ et conclure.

2. Calcul de la fonction d'ombre (9 pts)

Lorsque θ_i est proche de $\pi/2$ (incidence rasante), le phénomène d'ombrage n'est plus négligeable. On montre alors que le coefficient de diffusion incohérent dans la **direction spéculaire**, $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_i)$, doit être multiplié par la fonction d'ombre **moyennée** $S(\theta_i)$ définie par :

$$S(\theta_i) = \frac{\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle}{1 + 2 \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\mu \leq \gamma \leq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ D(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma - \mu}{\mu} & \text{si } \gamma \geq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $\mu = \cot(\theta_i) \geq 0$ désigne la pente du faisceau incident et γ la pente d'un point arbitraire de la surface. De plus, $\langle f(\gamma) \rangle$ (moyenne statistique ou espérance mathématique de la fonction f) est définie par :

$$\langle f(\gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) \times p(\gamma) d\gamma$$

où $p(\gamma)$ est la densité de probabilité des pentes de la surface. Par la suite, elle sera supposée **gaussienne** :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right)$$

- (a) Qualitativement, que vaut $S(\theta_i)$ lorsque $\theta_i = 0$ et $\theta_i = \pi/2$?
- (b) Représenter graphiquement les fonctions $N(\theta_i, \gamma)$ et $D(\theta_i, \gamma)$ en fonction de γ .
- (c) Montrer que $\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle$ et $\langle D(\theta_i, \gamma) \rangle$ sont données en fonction de $v = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ par :

$$\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle = \text{erf}(v) \quad \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle = \frac{1}{2} \left[\text{erf}(v) - 1 + \frac{e^{-v^2}}{v\sqrt{\pi}} \right] \quad (\text{B.2})$$

où la fonction $\text{erf}(x)$ est définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{erf}(0) = 0 \\ \text{erf}(\infty) = 1 \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma}$ et la relation $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^{x_0} f(x) dx$.

3. Etude de $S(\theta_i)$ au voisinage de $\pi/2$ (7 pts)

- (a) En déduire $S(\theta_i)$ en fonction de v selon les équations (B.1) et (B.2).
- (b) Calculer la limite de v lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$. Montrer alors que $S(\theta_i) \approx 2v^2$ lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. On pourra utiliser $\text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v + \mathcal{O}(v^3)$.
- (c) A l'aide de 1.(d) en déduire l'expression de $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_i)$ **avec ombre** lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. Calculer sa limite lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$ et conclure.
- (d) Application numérique : $\sigma = 0.3$ et $\theta_i = \{87, 89, 90\}$ degrés et la surface est considérée parfaitement conductrice. Calculer $S(\theta_i)$ et $\sigma_{\text{inc}}(\theta_i, \theta_i)$ **avec ombre en dB**.

C Examen du M2R SEGE - 15 février 2006 - Durée 1H00 avec document

Les deux problèmes sont **indépendants**. Dans chacun des problèmes, les questions sont en général **indépendantes**.

C.1 Traitement anti-reflets

But : Déposer une couche mince sur un substrat afin d'annuler pour une longueur d'onde donnée le champ réfléchi par une telle structure.

1. Cas d'une interface plane infinie

Soit une onde **plane** illuminant sous une incidence **normale** $\theta_i = 0$ une interface **plane** contenue dans le plan (\hat{x}, \hat{y}) d'aire **infinie** séparant deux milieux LHI, stationnaires et non-magnétiques. Le milieu supérieur est assimilé au **vide** et le milieu inférieur est caractérisé par son indice de réfraction N **supposé réel**.

On note respectivement ψ_0^r et ψ_0^t les amplitudes¹ des champs réfléchi et transmis.

- Faire un schéma du problème.
- Donner les expressions de ψ_0^r et ψ_0^t en **polarisation TE**. L'amplitude du champ incident est notée ψ_0^i .

2. Cas de deux interfaces planes infinies

Un moyen d'annuler le champ réfléchi est de déposer une couche mince, d'épaisseur e et d'indice de réfraction n **supposé réel**, sur le milieu d'indice N .

- Faire un schéma du nouveau dispositif.
- Expliquer **qualitativement** à l'aide d'un schéma que l'amplitude du champ total réfléchi ψ^r par une telle structure peut s'écrire :

$$\psi^r = \sum_{p=1}^{p=\infty} \psi_p^r, \quad (\text{C.1})$$

où ψ_1^r est l'amplitude du champ réfléchi par l'interface supérieure (première réflexion).

- Montrer que :

$$\frac{\psi_1^r}{\psi^i} = \frac{1-n}{1+n} = A. \quad (\text{C.2})$$

¹A noter que pour une onde plane, $\psi = \psi_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$ où ψ_0 est l'amplitude.

(d) Montrer que :

$$\frac{\psi_2^r}{\psi^i} = \frac{4n}{(1+n)^2} \left(\frac{n-N}{n+N} \right) e^{2jK_0ne} = Be^{2jK_0ne}, \quad (\text{C.3})$$

où K_0 est le nombre d'onde dans le vide. Dans la suite du problème on supposera que pour $p > 2$, $\psi_p^r \approx 0$. Par conséquent $\psi^r = \psi_1^r + \psi_2^r$.

(e) Montrer alors que :

$$\left| \frac{\psi^r}{\psi^i} \right|^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(2K_0ne). \quad (\text{C.4})$$

(f) Trouver alors la relation entre ne et la longueur d'onde λ_0 de l'onde incidente pour que les deux rayons interfèrent de manière **destructive**.

(g) Sous la condition énoncée ci-dessus, montrer alors que :

$$\left| \frac{\psi^r}{\psi^i} \right|^2 = (A - B)^2. \quad (\text{C.5})$$

(h) En déduire la condition sur n pour avoir $\left| \frac{\psi^r}{\psi^i} \right| = 0$. On supposera que le rapport $\frac{4n}{(1+n)^2} \approx 1$.

(i) Dans le cas du verre $N = 1.5$. D'après (h), calculer n , le rapport $\frac{4n}{(1+n)^2}$ et conclure.

C.2 Surface rugueuse de statistique non gaussienne

Dans ce problème, on se propose d'étudier le cas où la densité de probabilité des pentes d'une surface rugueuse est non Gaussienne. Dans ce cas, la densité de probabilité des pentes peut s'écrire :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 - \gamma \frac{a}{2\sigma} + \gamma^3 \frac{a}{6\sigma^3}\right). \quad (\text{C.6})$$

1. Dans quel cas $p(\gamma)$ est gaussien.

2. Calculer $\langle \gamma^3 \rangle$ avec $\langle f(\gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma)p(\gamma)d\gamma$. On pourra utiliser les relations suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-bx^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{3/2}} \quad b > 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp(-bx^2)dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4b^{5/2}} \quad b > 0, \quad (\text{C.8})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 \exp(-bx^2)dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{8b^{7/2}} \quad b > 0, \quad (\text{C.9})$$

et introduire l'opérateur $\langle f(\gamma) \rangle_G = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma)p_G(\gamma)d\gamma$ avec $p_G(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}\right)$.

3. Comparer le résultat à celui obtenu dans le cas d'une densité de probabilité gaussienne. Conclure.

D Exam of the M2R SEGE - Option Propagation, Diffraction & EMC - 2 February 2007 - Duration 2H00 with course

In the equations, the bold font denotes a vector ($\mathbf{k} = \vec{k}$) and \mathbf{k} denotes a unitary vector ($\|\mathbf{k}\| = 1$). The problems are independent.

The responses of the questions must be clear and the main results must be bordered.

D.1 Poynting vector in dielectric media with lossy

The power carried by a electric wave propagating in a *non-magnetic* dielectric medium with *lossy* (means that the refractive index $n \in \mathbb{C}$), for which the electric field is defined as $\mathbf{E} = \psi_0 e^{jn\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{x}}$ (TE polarisation), is defined from the Poynting vector \mathbf{P} as

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*, \quad (\text{D.1})$$

where \mathbf{H} is the magnetic field and the symbol $*$ is the conjugate. The refractive index $n = n_r + jn_i$ with $(n_i, n_r) \in \mathbb{R}^+$. \mathbf{k}_0 is the wave vector in the vaccum ($K_0 = \|\mathbf{k}_0\| \in \mathbb{R}^+$).

1. From a Maxwell equation, calculate \mathbf{H} versus $(\mathbf{E}, \mathbf{k}_0, n, \omega, \mu_0)$.
2. Show that $\mathbf{P} = \frac{n^*}{2Z_0} |E|^2 \hat{\mathbf{k}}_0$ with $E = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/K_0$. Z_0 is the wave impedance in the vaccum. For any vectors $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ we have

$$\mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3) \mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \mathbf{V}_3. \quad (\text{D.2})$$

3. We set $\mathbf{k}_0 = K_0 \hat{\mathbf{z}}$ and $\mathbf{R} = z \hat{\mathbf{z}}$. Express $\mathbf{P}(z)$ versus z .
4. We set $P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{k}}_0$. Plot $P(z)/P(0)$ versus z by introducing the skin depth δ .
5. In $P(z)/P(0)$, what is the physical signification of the exponential term?

D.2 Kirchhoff approximation for a one-dimensional surface

Purpose : under the Kirchhoff approximation in far zone, the diffracted field is calculated by a

- A. one-dimensional *plane* surface,
- B. one-dimensional *rough* surface.

Let us consider an incident plane wave of direction \mathbf{k}_i . \mathbf{k}_d is the direction of observation (see figure D.1). From the Kirchhoff approximation, the diffracted field in the far zone has the following form

$$\psi_d = A \int_{-L}^L [\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \mathcal{R}(\theta) + \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_i)] \exp [jg(\mathbf{r})] dy, \quad (\text{D.3})$$

with

$$g(\mathbf{r}) = K_0 (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d) \cdot \mathbf{r}. \quad (\text{D.4})$$

and A can be considered as a constant.

We have (see figure D.1)

- K_0 the wavenumber in the vacuum,
- $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\gamma \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ the normal to the surface, in which γ ($\gamma(y) = dz/dy$) is the slope of the surface,
- $\mathbf{r} = y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ a point of the surface,
- $\mathcal{R}(\theta)$ the Fresnel reflection coefficient which depends of the choice of the polarisation.
- θ the local incidence angle expressed by $\cos \theta = -\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{k}_i / \sqrt{1 + \gamma^2}$,
- $2L$ the length of the surface.

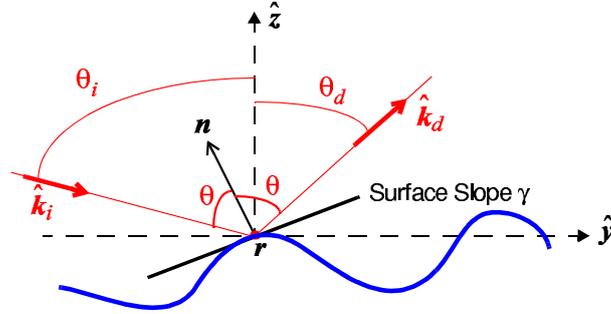


FIG. D.1 – Geometry used for the Kirchhoff approximation.

1. Give the validity domain of the Kirchhoff approximation.
2. Calculate the unitary vectors \mathbf{k}_i and \mathbf{k}_d .
3. Calculate the scalar product $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d)$ versus $(\theta_i, \theta_d, \gamma)$.
4. Calculate the scalar product $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_i)$ versus $(\theta_i, \theta_d, \gamma)$.
5. From equation (D.4), calculate $g(\mathbf{r})$ versus $(\theta_i, \theta_d, x, y, K_0)$.
6. Calculate $\cos \theta$ versus (θ_i, γ) .

A. Case of a plane surface

- A1. What is the value of the slope γ ?
- A2. Simplify equation (D.3) and $\cos \theta$.
- A3. Calculate the integration over y . Give a physical interpretation of the final result.
- A4. For a *perfectly conducting* surface, give the value of \mathcal{R} for the TE and TM polarisations. Simplify then the scattered field ψ_d for these two polarisations.

B. Case of a rough surface

In what follows, we assume that the surface is **perfectly conducting** and we consider the **TM polarisation**. Moreover, the probability density functions of the heights and of the slopes are assumed to be Gaussian with zero mean values. They are expressed as

$$p_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad \text{PDF of the heights,} \quad (\text{D.5})$$

$$p_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_\gamma^2}\right) \quad \text{PDF of the slopes.} \quad (\text{D.6})$$

If the function f depends only on z , then the mean value of f is defined as

$$\langle f(z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \times p_z(z) dz. \quad (\text{D.7})$$

If now the function f depends on $\{z, \gamma\}$, then the mean value of f is defined as

$$\langle f(z, \gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, \gamma) \times p_z(z) p_\gamma(\gamma) dz d\gamma. \quad (\text{D.8})$$

- B1. In equations (D.5) and (D.6), give the signification of σ_z and σ_γ
- B2. Simplify equation (D.3).
- B3. Calculate the mean value of ψ_d , $\langle \psi_d \rangle$.
- B4. Give a physical interpretation of the different products in $\langle \psi_d \rangle$.

E Exam of the M2R SEGE - Option Propagation, Diffraction & EMC - 13 June 2007 - Duration 2H00 with course

In the equations, the bold font denotes a vector ($\mathbf{k} = \vec{k}$) and \mathbf{k} denotes a unitary vector ($|\mathbf{k}| = 1$). The problems are independent.

The responses to the questions must be clear and the main results must be bordered.

E.1 Reflection coefficient from two infinite interfaces separating homogeneous media

We consider an incident plane wave which illuminates two infinite *plane* interfaces Σ_A and Σ_B separating homogeneous media $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ of refractive indexes n_1 (assumed to be the air), n_2 and n_3 . The polarisation of the incident plane wave is *TE* with an incidence angle $\theta_i = 0$ ($\mathbf{E} = \psi^i \hat{\mathbf{x}}$). The Fresnel coefficients in reflection and transmission from the medium $i = \{1, 2, 3\}$ to the medium $j \neq i = \{1, 2, 3\}$ are denoted as r_{ij} and t_{ij} , respectively (figure E.1).

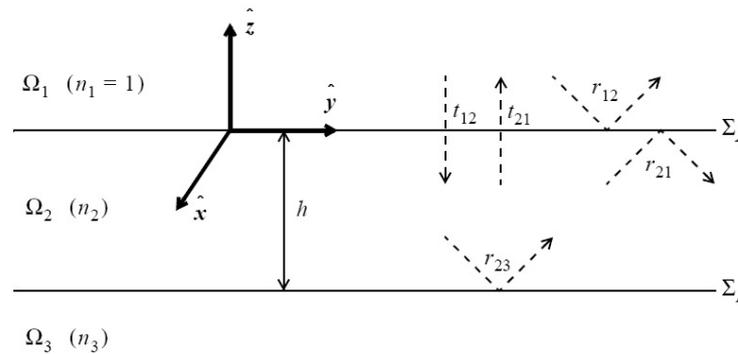


FIG. E.1 – Description of the geometry.

1.A. From a figure, explain qualitatively that the magnitude of the reflected field ψ^r can be written as follows :

$$\psi^r = \sum_{p=0}^{p=\infty} \psi_p^r. \quad (\text{E.1})$$

1.B. Give the expressions of r_{12} , r_{21} , t_{12} and t_{21} and show that $t_{12}t_{21} = 1 - r_{12}^2$.

- 1.C.** Give the expression of the field ψ_0^r reflected by *only* the upper interface Σ_A .
- 1.D.** Give the expression of the field ψ_1^r for $p = 1$. It results from the transmission through the upper interface Σ_A , the reflection from the lower interface Σ_B , and then the transmission through Σ_A back into the incident medium Ω_1 .
- 1.E.** Show that the reflected field at the order $p = 2$ is

$$\psi_2^r = \left(r_{21} r_{23} e^{j\phi} \right) \psi_1^r, \quad (\text{E.2})$$

where $\phi = 2K_0 n_2 h$, in which K_0 is the wavenumber in the air (vaccum) and h the thickness of the intermediate medium Ω_2 .

- 1.F.** Show that the reflected field at the order $p \geq 1$, is then

$$\psi_p^r = \left(r_{21} r_{23} e^{j\phi} \right)^{p-1} \psi_1^r. \quad (\text{E.3})$$

- 1.G.** From equation (E.1), and the relations $t_{12} t_{21} = 1 - r_{12}^2$ and $r_{21} = -r_{12}$, show that the total reflected field is expressed as

$$\psi^r = \psi^i \frac{r_{12} + r_{23} e^{j\phi}}{1 + r_{12} r_{23} e^{j\phi}}. \quad (\text{E.4})$$

We recall for $|x| < 1$ that $\sum_{p=1}^{p=\infty} x^{p-1} = \frac{1}{1-x}$.

- 1.H.** We assume now that the medium Ω_3 is *perfectly conducting*. Give the value of r_{23} and simplify equation (E.4).
- 1.I.** Moreover, we assume that the modulus of the refractive index n_2 is of the order of n_1 ($|n_2| \approx |n_1|$). Give the consequence on $|r_{12}|$ and show that

$$\psi^r \approx \left[r_{12} \left(1 - e^{j2\phi} \right) - e^{j\phi} \right] \psi^i. \quad (\text{E.5})$$

We recall for $x \rightarrow 0$ that $1/(1+x) = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^2)$. In the following, equation (E.5) will be used.

- 1.J.** Now, the upper surface is assumed to be *rough*. A simple way to take into account this effect in the calculation of the reflected field ψ^r is to replace $\phi = 2K_0 n_2 h$ by $\phi = 2K_0 n_2 (h + z)$, in which z is the height of the upper surface Σ_A . We assume that z is a *Gaussian* random variable with zero mean value of probability density function defined as

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right).$$

Calculate the mean value of ψ^r denoted as $\langle \psi^r \rangle$. One could use the following relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \exp(j\alpha z) dz = \exp\left(-\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right). \quad (\text{E.6})$$

E.2 Diffraction from an infinite perfectly conducting cylinder for TE polarisation

We consider an infinite *perfectly conducting* cylinder with respect to the direction $\hat{\mathbf{x}}$ of radius a . The cross section of the cylinder lies in the $(\hat{\mathbf{u}}_y, \hat{\mathbf{u}}_z)$ plane (figure E.2).

We can show from the propagation equation in polar coordinates (r, θ) that the diffracted field is given for $r \geq a$ by

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(Kr) + B_n H_n^{(2)}(Kr) \right] e^{jn\theta}, \quad (\text{E.7})$$

where $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ are the Hankel functions of first and second kind, respectively.

- 2.A.** Give the reason why equation (E.7) becomes

$$\psi_d(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n^{(1)}(Kr) e^{jn\theta}. \quad (\text{E.8})$$

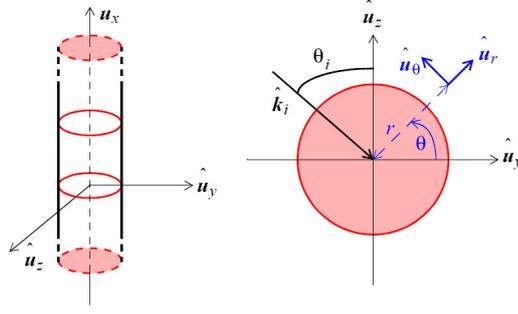


FIG. E.2 – Description of the cylinder.

2.B. We consider an incident plane wave and the *TE polarisation*. The electric field is then

$$\mathbf{E} = \psi \hat{\mathbf{u}}_x = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jK(y \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} = \hat{\mathbf{u}}_x \psi_{i0} e^{jKr \sin(\theta_i - \theta)}, \quad (\text{E.9})$$

with $\tan \theta = z/y$ and $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. In addition, we can show that

$$e^{jKr \sin(\theta_i - \theta)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{jn(\theta_i - \theta)} J_n(Kr). \quad (\text{E.10})$$

Show that

$$\psi_d(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n H_n^{(1)}(Kr) e^{jn(\theta_i - \theta)} & \text{pour } r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases}. \quad (\text{E.11})$$

with $A_n = -\psi_{i0} \frac{J_n(Ka)}{H_n^{(1)}(Ka)}$.

2.C. Show from the Maxwell equations and for the TE polarisation that

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_y - \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_z \right) = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \quad (\text{E.12})$$

In polar coordinates (r, θ, x) , $\mathbf{rot} \mathbf{V}$ is defined as $(\mathbf{V} = V_r \hat{\mathbf{u}}_r + V_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + V_x \hat{\mathbf{u}}_x)$

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{u}}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right) \hat{\mathbf{u}}_x. \quad (\text{E.13})$$

2.D. From equations (E.11) and (E.12), calculate the components $(H_{d,\theta}, H_{d,r})$ of \mathbf{H}_d . We recall with $f_n(z) = H_n^{(1)}(z)$ that

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z)}{2}. \quad (\text{E.14})$$

F Examen du M2R SEGE - 14 février 2008 - Durée 1H15 avec document

Le but du problème est de calculer la fonction d'illumination S , égale au rapport de la surface illuminée sur la surface totale, d'une surface **rugueuse** de densité de probabilité **gaussienne** et de quantifier son influence sous incidences très rasantes.

Les trois parties sont **indépendantes**.

F.1 Approximation de l'optique physique

- 2.A.** Rappeler le domaine de validité de l'approximation de l'optique physique et en donner une interprétation géométrique.
- 2.B.** Nous avons montré dans le cours que le champ diffracté en zone lointaine par une surface 1D **rugueuse** sous l'hypothèse de l'optique physique est donné par

$$\begin{aligned}\psi_d^\infty &= -\frac{K\psi_{i0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi K r'}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \mathcal{R}\left(\frac{\theta_i + \theta_d}{2}\right) \frac{1 + \cos(\theta_i + \theta_d)}{\cos \theta_i + \cos \theta_d} \\ &\times \int_{-L}^{+L} e^{jK[y(\sin \theta_i - \sin \theta_d) - z(\cos \theta_d + \cos \theta_i)]} dy,\end{aligned}\tag{F.1}$$

où

- K est le nombre d'onde dans le milieu de propagation,
- ψ_{i0} l'amplitude de l'onde incidente supposée plane,
- r' la distance entre le receptrer et l'origine de la surface,
- θ_i l'angle d'incidence,
- θ_s l'angle d'observation,
- \mathcal{R} le coefficient de réflexion de Fresnel,
- z la hauteur de la surface d'abscisse y ,
- $2L$ la longueur de la surface.

- 2.C.** Faire un schéma en mentionnant clairement r' , θ_i , θ_s et L .
- 2.D.** On se place dans la **direction spéculaire**. Simplifier alors l'équation (F.1). On rappelle que $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$.
- 2.E.** Calculer l'intégration sur y en faisant apparaître l'aire de la surface S .
- 2.F.** Calculer la moyenne statistique $m = |\langle \psi_d^\infty \rangle|^2$ en faisant apparaître le paramètre de Rayleigh $R_a = K\sigma_z \cos \theta_i$. A quoi correspond physiquement cette moyenne ?
- 2.G.** En déduire la quantité suivante :

$$\sigma_m = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{2\pi r' |\langle \psi_d^\infty \rangle|^2}{S |\psi_{i0}|^2}\tag{F.2}$$

2.H. Donner un nom à cete quantité et son unité.

2.I. Simplifier son expression pour $\theta_i = \pi/2$. Ce résultat est-il physique ?

F.2 Calcul de la fonction d'illumination

Lorsque θ_i est proche de $\pi/2$ (incidence rasante), le phénomène d'ombrage n'est plus négligeable. On montre alors que la quantité précédente σ_m doit être multipliée par la fonction d'**illumination** $S(\theta_i)$ définie par :

$$S(\theta_i) = \frac{\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle}{1 + 2 \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\mu \leq \gamma \leq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ D(\theta_i, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma - \mu}{\mu} & \text{si } \gamma \geq \mu = \cot \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad (\text{F.3})$$

où $\mu = \cot(\theta_i) \geq 0$ désigne la pente du faisceau incident et γ la pente d'un point arbitraire de la surface. De plus, $\langle f(\gamma) \rangle$ (moyenne statistique ou espérance mathématique de la fonction f) est définie par :

$$\langle f(\gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma) \times p(\gamma) d\gamma,$$

où $p(\gamma)$ est la densité de probabilité des **pentés** de la surface. Par la suite, elle sera supposée **gaussienne** :

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_p^2}\right).$$

2.A. Qualitativement (sans calculs), que vaut $S(\theta_i)$ lorsque $\theta_i = 0$ et $\theta_i = \pi/2$?

2.B. Représenter graphiquement les fonctions $N(\theta_i, \gamma)$ et $D(\theta_i, \gamma)$ en fonction de γ en faisant apparaître clairement μ .

2.C. Montrer que les fonctions $\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle$ et $\langle D(\theta_i, \gamma) \rangle$ sont données en fonction de $v = \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma_p}$ par :

$$\langle N(\theta_i, \gamma) \rangle = \text{erf}(v) \quad \langle D(\theta_i, \gamma) \rangle = \frac{1}{2} \left[\text{erf}(v) - 1 + \frac{e^{-v^2}}{v\sqrt{\pi}} \right], \quad (\text{F.4})$$

où la fonction $\text{erf}(x)$ est définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{erf}(0) = 0 \\ \text{erf}(\infty) = 1 \end{cases}.$$

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\sigma_p}$ et la relation $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^{x_0} f(x) dx$.

F.3 Etude de $S(\theta_i)$ au voisinage de $\pi/2$

2.A. En déduire $S(\theta_i)$ en fonction de v selon les équations (F.3) et (F.4).

2.B. Calculer la limite de v lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$. Montrer alors que $S(\theta_i) \approx 2v^2$ lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. On pourra utiliser $\text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v + \mathcal{O}(v^3)$.

2.C. A l'aide de 1.1.9 en déduire l'expression de σ_m **avec ombre** lorsque θ_i est proche de $\pi/2$. Calculer sa limite lorsque $\theta_i \rightarrow \pi/2$ et conclure.

2.D. Application numérique : $KS = 1$, $\{\sigma_p = 0.3, K\sigma_z = 2\pi\}$ et $\theta_i = \{87, 89, 90\}$ degrés et la surface est considérée parfaitement conductrice. Calculer $S(\theta_i)$ et σ_m **avec ombre en dB**.

Bibliographie

- [1] J. A. Stratton traduit par J. Hebenstreit *Théorie de l'électromagnétisme* (Dunod, Paris, 1961).
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1972).
- [3] G. Arfken *Mathematical methods for Physicists, Third Edition* (Academic Press, New York, 1985).
- [4] J. J. Bowman, T. B. A. Senior and P. L. E. Uslenghi *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes* (Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1987).
- [5] J. W. Dettman *Mathematical Methods in Physics and Engineering* (Dover Publications, New York, 1988).
- [6] M. Born and E. Wolf *Principle of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light, Sixth Edition* (Pergamon Press, New York, 1989).
- [7] J. A. Olgilvy *Theory of wave scattering from random rough surfaces* (Institute of Physics, Bristol, 1991)
- [8] J.-P. Pérez *Optique : Fondements et applications, 7ème édition* (Dunod, Paris, 2004)
- [9] D. G. Dudley *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory* (IEEE Press, New York, 1994)
- [10] M. Nieto-Vesperinas *Scattering and Diffraction in Physical Optics* (John Wiley and Son, New York, 1994)
- [11] Chen-To Tai *Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory, Second Edition* (IEEE Press, New York, 1994)
- [12] P. F. Combes *Micro-ondes 1. Lignes, guides et cavités* (Dunod, Paris, 1996)
- [13] L. Tsang, J. A. Kong and K.-H. Ding *Scattering of Electromagnetic Waves : Theories and Applications* (John Wiley and Sons, New York, 2001)
- [14] L. Tsang, J. A. Kong, K.-H. Ding and Chin On Ao *Scattering of Electromagnetic Waves : Numerical Simulations* (John Wiley and Sons, New York, 2001)
- [15] L. Tsang and J. A. Kong *Scattering of Electromagnetic Waves : Advances Topics* (John Wiley and Sons, New York, 2001)
- [16] W. Tabbara *Section efficace radar* (Polycopié pour le D.E.A. d'Electronique, Option S.E.I. -Filière Telecom Radar-, 1999/2000)
- [17] M. Lambert *Obstacles et cibles* (Notes de cours pour le D.E.A. de Méthodes Physiques en Télédétection, 2001)
- [18] F. Daout, "Etude de la dépolarisation des ondes centimétriques par une surface rugueuse- Application au domaine maritime-", Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1996.

- [19] C. Bourlier, “Rayonnement infrarouge d’une surface stochastique-Application au domaine océanique-”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1999.
- [20] N. Déchamps, “Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [21] N. Pinel, “Etude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles - Application à une mer recouverte de pétrole”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2006.